

К.В.Тараканов·Л.А.Овчаров·А.Н.Тырышкин

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ



К. В. Тараканов,
Л. А. Овчаров, А. Н. Тырышкин

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ



Москва «Советское радио» 1974

Тараканов К. В., Овчаров Л. А., Тырышкин А. Н. Аналитические методы исследования систем. Изд-во «Советское радио», 1974. 240 с

Книга представляет собой систематическое изложение методов математического описания динамических процессов функционирования систем, которые иллюстрируются большим числом примеров из различных областей инженерной практики. В ней излагаются конкретные рекомендации по составлению математических моделей динамических процессов. Математический аппарат, применяемый в книге, в основном не выходит за рамки обычного курса вуза.

Книга является первым достаточно полным изложением метода математического описания динамических процессов, известного в литературе как метода динамики средних, и его дальнейшего развития. Она предназначена для широкого круга читателей, занимающихся исследованием динамики процессов в больших системах.

Рис. 102, библ. назв. 56.

Редакция кибернетической литературы

Предисловие

За последние годы выявилось новое научное направление, называемое «теорией систем», в котором объектом исследования выступают объединения людей и техники, взаимодействующих с внешней средой. Как и любое новое научное направление, теория систем появилась на стыке ряда наук, таких, как кибернетика, исследование операций и других. Предметом теории систем является круг проблем, связанных с анализом целенаправленной деятельности коллективов людей и функционирования техники, управляемой людьми, а также взаимодействия людей и техники с внешней средой.

В настоящее время еще не сложилась полностью терминология теории систем и неполностью определены основные методы исследования систем. Поэтому во введении, написанном К. В. Таракановым, излагается точка зрения авторов на основные понятия и определения теории систем.

Здесь основное внимание уделено управлению в системах, которое рассматривается как информационный процесс, включающий получение информации о состоянии системы и окружающей среды, переработку информации (выработка решения и планирование) и передачу командной информации исполнителям.

Научно-техническая революция породила новые проблемы в сфере управления и привела к созданию автоматизированных систем управления (АСУ). Технической базой АСУ являются ЭВМ. Алгоритмы решения задач управления в АСУ, решаемые с помощью ЭВМ, представляют собой математическое обеспечение АСУ и являются, по существу, математическими моделями процессов, протекающих в системах.

В настоящее время для построения математических моделей процессов используется большое число различных математических методов.

Среди этих методов большое распространение получили аналитические методы, построенные на основе представления процесса функционирования системы как марковского процесса с непрерывным временем и дискретными состояниями. Основное содержание этой книги и посвящается исследованию и построению таких марковских процессов.

В гл. 2, 3, 4, 5, написанных Л. А. Овчаровым на основе лекций, прочитанных им для студентов Московского физико-технического института, а также в других высших технических учебных заведениях и научно-исследовательских институтах, и в гл. 6, написанной А. Н. Тырышкиным, излагаются методы приложения теории марковских случайных процессов к исследованию систем.

Аналитические методы исследования систем, предлагаемые авторами настоящей книги, разрабатывались ими в течение последних десяти лет и нашли достаточно широкое применение в различных областях.

В гл. 5 излагается более общее построение известных уравнений метода динамики средних, дающего возможность определять средние значения нескольких взаимодействующих случайных процессов в системе. Кроме того, здесь же дается метод вывода уравнений для матема-

тических ожиданий, дисперсий и корреляционных функций таких процессов. Этот метод, названный методом динамики моментов, позволяет в большинстве практических случаев определять законы распределения для изучаемых процессов функционирования систем, так как эти процессы являются близкими к нормальным.

В гл. 7, написанной А. Н. Тырышкиным, рассматриваются приложения теории марковских случайных процессов для моделирования процессов функционирования систем — системы управления, системы основных средств и системы средств обеспечения.

К аналитическим методам исследования систем относятся также методы теории массового обслуживания, в основе которых лежит представление процесса функционирования системы как марковского или полумарковского. По теории массового обслуживания и ее приложениям к исследованию систем написано достаточно много литературы, поэтому авторы сочли возможным не приводить их в книге.

Инициатива в написании этой книги, определении ее общего замысла, назначения и содержания отдельных глав принадлежит К. В. Тараканову, который осуществлял и ее научное редактирование. Большинство глав снабжено иллюстративными примерами, показывающими возможность практического применения предлагаемых методов.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность членам-корреспондентам АН СССР Н. П. Бусленко, В. С. Пугачеву, проф. Е. С. Вентцель и проф. И. А. Ушакову, которые рассмотрели рукопись и сделали ряд ценных замечаний и предложений, давших возможность улучшить книгу.

Книга может быть полезна инженерам и научным сотрудникам, занятым разработкой и анализом систем, а также студентам и преподавателям высших учебных заведений факультетов кибернетики и автоматизированных систем управления.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Основные понятия и определения теории систем

В последние годы получило развитие научное направление, связанное с исследованием проблем целенаправленного функционирования систем с большим числом различных элементов, включая коллективы людей.

Примерами целенаправленного функционирования систем с большим числом элементов могут служить: функционирование завода, отрасли промышленности или экономики страны в целом; выполнение боевых задач группировкой войск с участием различных видов сил и средств; разработка и создание нового комплекса технических средств, связанного с осуществлением программы космических исследований. Подобные примеры можно продолжить. В литературе еще не окончательно установилась специальная терминология (язык), связанная с подобными исследованиями. Часто совокупность большого числа взаимосвязанных элементов называют «большой системой», «сложной системой», «сверхсистемой» и т. п. В книге используется термин «система».

Научное направление, связанное с проблемой исследования систем, принято называть «теорией систем».

Каковы же общие характерные особенности функционирования и структуры системы, изучаемые с помощью теории систем?

Первой характерной особенностью системы является наличие *целей функционирования системы*, которые определяют ее основное назначение и характер ее функционирования. Цели функционирования системы обычно достигаются одновременным и последовательным выполнением ряда задач. Таких задач может быть несколько, и решение их составляет содержание процесса функционирования системы и ее подсистем. В результате выполнения задач достигаются промежуточные или конечные цели функционирования системы.

Второй особенностью системы является наличие *управления*. По своей форме всякое управление в системе с точки зрения кибернетики представляет собой особый вид деятельности, заключающийся в определении способа действия системы, а также в воздействии на систему, необходимом для достижения намеченной цели. Иными словами, процесс управления должен являться процессом упорядочения системы, т. е. приведения ее в соответствие целям и задачам системы. Оптимальность управления предполагает достижение определенных целей функционирования системы при наименьших усилиях и затратах материальных средств.

По своему содержанию всякое управление — это процесс, который включает получение необходимой информации о системе и окружающей ее среде (информация состояния), выработку решения (переработка и преобразование информации состояния), и постановку задач системе (передача командной информации) и контроль исполнения.

Таким образом, под управлением в самом общем значении этого слова следует понимать процесс целенаправленного воздействия на систему: процесс этот включает получение исходной информации, принятие в соответствии с ней решения и постановку системе конкретных задач.

Управление в системе может осуществляться непосредственно людьми или людьми с использованием технических средств или только

техническими средствами, работающими по программам, разработанным людьми.

Исходя из содержания управления, любая система должна состоять из совокупности взаимосвязанных, совместно функционирующих элементов.

Элементом системы будем называть совокупность различных технических средств и людей, которые при данном исследовании рассматриваются как одно неделимое целое. Элемент может взаимодействовать с другими элементами или с другими системами.

Элементы системы могут быть управляющими и исполнительными. Управляющий элемент должен иметь отношение управления хотя бы к одному элементу системы. Управляющий элемент может быть одновременно и управляемым, если другой управляющий элемент системы имеет, в свою очередь, к нему отношение управления. Исполнительным элементом будем называть элемент, который не может иметь отношения управления ни к одному из элементов системы и в то же время является управляемым со стороны одного из управляющих элементов системы.

Третья особенность системы как совокупности взаимосвязанных элементов состоит в том, что она имеет определенную *иерархическую структуру* и распадается на ряд *подсистем*, при этом основным признаком выделения подсистемы является ее целевое назначение. У подсистемы должны быть цели функционирования, которые вытекают из общих целей функционирования системы. При этом цели функционирования подсистем являются частью цели функционирования системы.

Например, перед каждой отраслью народного хозяйства СССР стоят определенные цели функционирования этой отрасли. Однако ни одна из отраслей не решает и не может решать целиком экономическую задачу, поставленную партией на XXIV съезде КПСС: «Наиболее полное удовлетворение материальных и культурных потребностей людей».

Другой пример. Перед каждым из видов Вооруженных Сил стоят вполне определенные цели, выполнение которых обеспечивает достижение основной цели, поставленной перед Вооруженными Силами в целом: «Отражение нападения врага, откуда бы оно ни исходило»¹. Однако эта основная цель Вооруженных Сил не обеспечивается ни одним отдельным видом Вооруженных Сил.

Сами подсистемы могут, в свою очередь, рассматриваться как системы, состоящие из подсистем. Система, ее подсистемы и элементы могут быть представлены в виде иерархической структуры (графа), изображенной на рис. 1.1. В дальнейшем подобный граф будем называть структурным графом системы. Вершины графа символически изображают управляющие и исполнительные элементы системы, а ребра — те виды отношений, которые существуют между этими элементами. Число вершин структурного графа системы всегда конечно, так как системы состоят из конечного числа элементов.

Построение структурного графа системы является одним из основных этапов исследования системы. Основа для построения структурного графа системы — определение тех *отношений*, которые существуют между управляющими и исполнительными элементами системы.

В системе (а также на ее структурном графе) установим три вида отношений (изображаются тремя видами стрелок): отношение *подчи-*

¹⁾ Брежнев Л. И. Отчетный доклад ЦК КПСС XXIV съезду Коммунистической партии Советского Союза. М., Госполитиздат, 1971.

чения (сплошная стрелка), отношение *подчиненности* (пунктирная стрелка) и отношение *взаимодействия* (стрелка со звездочками). Отношение подчинения характеризуется тем, что управляющий элемент может воздействовать путем различного вида управлений на нижестоящий элемент (управляющий или исполнительный) и целенаправленно изменять его состояние.

Отношение подчиненности характеризуется тем, что данный элемент «поддается» управлению со стороны того элемента, куда направлена пунктирная стрелка. Отношение взаимодействия характеризуется тем,

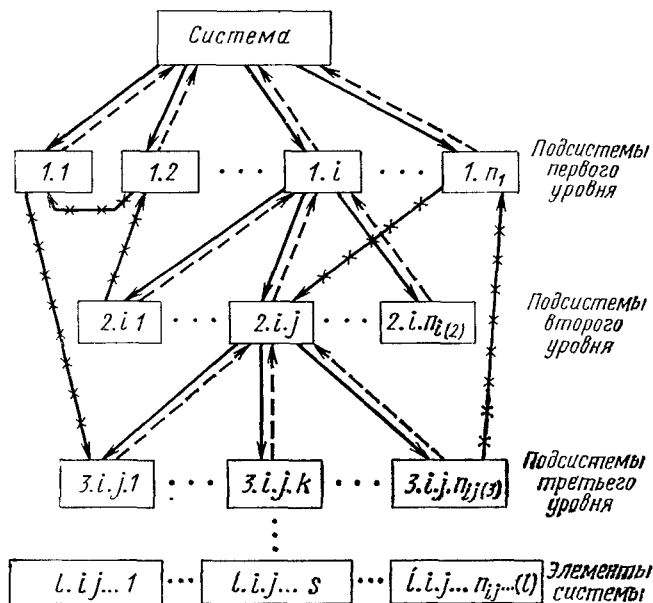


Рис. 1.1.

что между двумя элементами (по направлению стрелки со звездочками) осуществляется определенный обмен материалами или информацией или тем и другим одновременно.

Отношения подчинения и подчиненности характеризуются, как правило, только информационными связями. От управляющего элемента к управляемому элементу направляется командная информация, определяющая, в какое состояние должен прийти управляемый элемент. От управляемого элемента к управляющему элементу (по направлению стрелки с пунктирами) передается *информация состояния*, которая описывает состояние управляемого элемента.

Характерная особенность систем состоит в том, что если между двумя вершинами графа системы установлены отношения подчинения, то между теми же вершинами структурного графа системы устанавливаются отношения подчиненности. При этом соответствующие ребра графа имеют противоположную направленность. Поэтому на структурном графе системы можно изображать только ребра подчинения (сплошные стрелки на рис. 1.1), имея в виду, что каждому ребру подчинения соответствует ребро подчиненности противоположного направления.

По направлению стрелки со звездочками осуществляется взаимодействие, которое может заключаться либо в передаче информации,

либо в передаче различного вида материальных средств (электроэнергии, питания, готовой продукции и т. п.), либо в том и другом одновременно. Информацию, передаваемую в порядке взаимодействия между различными вершинами структурного графа системы, будем называть информацией об обстановке. Управляющий элемент, находящийся на вершине иерархии, будем называть высшим звеном системы. Элементы, управляемые непосредственно высшим звеном, назовем элементами первого уровня и обозначим цифрами $1.1; \dots; 1.i; \dots; 1.n_1$, где n_1 — общее число элементов первого уровня. Элементы, управляемые непосредственно элементами первого уровня, будем называть элементами второго уровня и обозначать для $1.i$ подсистемы первого уровня ($i = \overline{1, n_1}$) цифрами $2.i.1; \dots; 2.i.j; \dots; 2.i.n_{i(2)}$, где $n_{i(2)}$ — общее число элементов второго уровня, входящих в подсистему $1.i$ первого уровня, и т. д.

Таким образом, система представляет собой совокупность всех вершин структурного графа; i -я подсистема первого уровня представляет собой совокупность всех тех вершин структурного графа системы, у которых на втором месте стоит индекс i : $1.i; 2.i.1; \dots; 2.i.j; \dots; 2.i.n_{i(2)}; \dots; l.i.j \dots 1; \dots; l.i.j \dots n_{l.i.j} \dots$ и т. д. При этом элементы системы, входящие в i -ю подсистему первого уровня, могут находиться на разных уровнях.

Таким образом, назовем подсистемой $l.i.j \dots s$ совокупность тех вершин структурного графа системы, которые включаются в подсистему $l.i.j \dots s$, где l — номер уровня подсистемы ($l = \overline{1, m}$), а m — число уровней системы. Для всех вершин, входящих в $l.i.j \dots s$ -ю подсистему (кроме вершины $l.i.j \dots s$), характерно то условие, что все они связаны с вершиной $l.i.j \dots s$ отношением подчинения (возможно, и через промежуточные вершины).

Для большинства рассматриваемых систем общее число вершин графа представляет внушительную цифру. Например, если рассматривается экономика страны, то она состоит из нескольких сотен отраслей (подсистемы первого уровня), которые, в свою очередь, состоят из большого числа управлений, трестов и заводов. Даже если исполнительным элементом этой системы считать основную производственную единицу (завод, электростанцию, совхоз, порт, железнодорожный узел и т. п.), то общее число элементов системы будет представлять весьма внушительную цифру. Между различными исполнительными элементами системы существуют потоки материальных средств, которые обуславливаются существованием процесса функционирования исполнительных элементов системы. Коротко этот процесс будем называть *процессом функционирования средств системы*.

Последней характерной чертой системы является непрерывное *изменение состояния* элементов и подсистем. Число состояний может быть как счетное (конечное или бесконечное), так и несчетное. Изменение состояний состоит, прежде всего, в изменении законов распределения времени и направлений перехода подсистем и элементов из одного состояния в другое без изменения числа элементов в подсистемах, т. е. без изменения структурного графа системы. Такие изменения можно условно считать *количественными изменениями системы*. Другие изменения связаны с появлением новых элементов и подсистем в системе и исчезновением части имеющихся элементов и подсистем. Такие изменения обычно ведут к *качественным изменениям системы*. Например, постепенные изменения, связанные с совершенствованием систем управле-

ния летательных аппаратов, реактивных двигателей и созданием ядерного оружия, привели к качественному изменению состава Вооруженных Сил — появлению ракетных войск стратегического назначения, которые можно рассматривать как подсистему, входящую в систему Вооруженных Сил.

Таким образом, основными признаками и характерными особенностями системы является наличие:

- 1) целей функционирования системы, которые определяют ее целевое назначение;
- 2) управления в системе, представляющего собой процесс целенаправленного воздействия на систему;
- 3) *иерархической структуры* системы, состоящей из нескольких уровней подсистем и элементов;
- 4) процесса функционирования средств системы, который заключается в обмене различными материальными средствами между подсистемами и элементами системы.

Все эти признаки нужно рассматривать в их диалектической связи. Поэтому попытки расчленения этих признаков и рассмотрения каждого из них отдельно, без связи с другими признаками, приводят к тому, что проблема рассматривается подробно с какой-либо одной позиции. В этом случае отсутствует системный анализ проблемы, а решение не охватывает всей проблемы в целом.

Из этого следует, что теория систем включает, по крайней мере, следующих три основных научных направления:

- 1) кибернетику как науку об управлении, включающую анализ информационных процессов в системах с управлением;
- 2) исследование операций как науку, дающую количественное обоснование степени соответствия управления целевому назначению системы;
- 3) экономические исследования (техничко-экономические, военно-экономические исследования), дающие возможность анализировать процесс функционирования основных средств системы.

Предметом теории систем является круг проблем, связанных с анализом целенаправленной деятельности коллективов людей, функционирования техники, которой управляют люди, и взаимодействия этого коллектива людей и техники с силами природы.

— При рассмотрении вопросов межгосударственных (международных) отношений как в мирное, так и в военное время приходится иметь дело с системами, между которыми нет отношений подчинения и подчиненности, а существуют лишь отношения взаимодействия, выражающиеся в форме различного вида соревнований. Такие системы состоят из ряда подсистем (государств), в которых между подсистемами различного уровня устанавливаются различные отношения взаимодействия. В мирное время эти отношения состоят в обмене информацией между государствами, протекающими по различным каналам (официальная государственная информация; научно-техническая информация; информация, публикуемая в печати, передаваемая по радио и телевидению), а также в экономическом обмене (внешняя торговля), который является результатом функционирования экономических систем государств. В военное время эти отношения состоят в обмене ударами средств поражения и в информационном обмене, который в основном осуществляется средствами разведки. Специфичным для подобных систем является то обстоятельство, что у них имеются различные цели функционирования,

которые в определенных направлениях могут совпадать (для коалиций государств). Существенным является то обстоятельство, что цели функционирования одной системы могут быть сформулированы так, чтобы в определенной степени противостоять целям функционирования другой системы. В этом случае возникают конфликтные ситуации. Поэтому такие системы будем называть «конфликтующими» системами.

Необходимо также сообщить о среде, в которой существует любая система. Под средой будем понимать те природные условия, в которых приходится рассматривать функционирование системы и всех ее подсистем и элементов. Методологически удобно среду рассматривать как отдельную систему, осуществляющую только взаимодействие (информационное и материальное) с подсистемами и элементами данной системы. Такая постановка задачи анализа приводит нас к системам, близким по своей структуре «конфликтующим» системам, в которых «игра» ведется против природы (среды). При этом сама среда не имеет определенных целей функционирования, а задается вероятностным законом распределения характера взаимодействия с рассматриваемой системой.

1.2. Цели и задачи. Характеристики и показатели эффективности функционирования систем

Любая действующая или создаваемая система предназначена для определенных *целей* функционирования этой системы. Под целью функционирования системы будем понимать конкретную область состояний системы, в которую система должна перейти в процессе функционирования. Цели функционирования системы, в свою очередь, обеспечиваются выполнением *задач*, вытекающих из целей функционирования системы.

Например, перед автомобильной промышленностью поставлена цель: выпускать грузовые и легковые автомашины. Эта цель достигается в том случае, если все предприятия этой отрасли промышленности выполняют определенные производственные задачи, связанные с выпуском специальных видов изделий.

Другой пример. Перед нашими Вооруженными Силами поставлена цель: отразить нападение врага, откуда бы оно ни исходило. Эта общая цель достигается решением ряда стратегических задач, стоящих перед различными видами Вооруженных Сил и родами войск.

Таким образом, цели и задачи системы могут быть представлены в виде определенной иерархической структуры, при этом из целей функционирования системы вытекают ее задачи и цели, которые должны быть достигнуты подсистемами первого уровня в процессе их функционирования. В свою очередь, из целей функционирования подсистем первого уровня вытекают их задачи и цели, которые должны быть достигнуты подсистемами второго уровня в процессе их функционирования.

Такая иерархическая структура целей и задач системы и всех ее подсистем может быть представлена в виде *графа целей и задач системы*, вершины которого представляют собой цели системы и подсистем, а ребра — задачи, поставленные перед соответствующими подсистемами.

Например, высшей целью общественного производства при социализме является «наиболее полное удовлетворение материальных и культурных потребностей людей¹⁾. Из этой общей цели общественного про-

¹⁾ Брежнев Л. И. Отчетный доклад ЦК КПСС XXIV съезду Коммунистической партии Советского Союза М., Госполитиздат, 1971

изводства при социализме вытекают задачи, поставленные партией перед тяжелой промышленностью, сельским хозяйством, промышленностью, производящей товары народного потребления, торговлей и предприятиями бытового обслуживания населения, научными и проектными организациями и системой управления экономикой страны.

Важной особенностью задач, вытекающих из целей функционирования системы, является то обстоятельство, что среди этих задач непременно имеются задачи управления системой, которые определяют цели подсистемы управления.

Ранее указывалось, что управление системой производится таким образом, чтобы цели, стоящие перед системой, были достигнуты. Количественную меру, определяющую степень соответствия результатов функционирования всех средств системы целям, стоящим перед системой, будем называть *показателем эффективности функционирования системы*.

При определении показателя эффективности любой системы обычно исходят из того, что он должен объективно характеризовать систему, иметь прямую связь с целевым назначением системы, быть чувствительным к изменению основных параметров системы и, наконец, должен быть достаточно простым, чтобы был понятен его физический смысл, чтобы было удобно его вычислять, изображать в виде таблиц, графиков и анализировать.

Чтобы показатель эффективности достаточно полно характеризовал качество работы системы, он должен учитывать все основные особенности и свойства системы, а также условия ее функционирования и взаимодействия с внешней средой. Таким образом, показатель эффективности должен зависеть от структуры системы, значений ее параметров, характера воздействия внешней среды, внешних и внутренних случайных факторов. Показатель эффективности определяется процессом функционирования системы.

В связи с тем что системы работают в условиях действия случайных факторов, значения показателей оказываются иногда случайными величинами. Это создает определенные неудобства. Поэтому в качестве показателей эффективности пользуются средними значениями величин или вероятностями некоторых случайных событий. В большинстве случаев нет единого показателя эффективности функционирования системы, так как у системы, как правило, имеется несколько целей функционирования. Иначе говоря, показатель эффективности функционирования системы является, как правило, векторной величиной. В этом состоит одна из основных трудностей оценки эффективности функционирования систем.

Другая трудность состоит в том, что нужно все результаты функционирования элементов системы выразить в количественной форме. Количественное выражение результатов функционирования элементов системы будем называть *характеристиками функционирования средств системы*. Таким образом, показатели эффективности функционирования системы получаются в результате определенных преобразований характеристик функционирования элементов системы.

Такие показатели эффективности будем называть частными показателями эффективности функционирования средств i -й подсистемы. Эти частные показатели эффективности свидетельствуют лишь о том, насколько хорошо функционируют средства i -й подсистемы, исходя из целей, стоящих перед рассматриваемой подсистемой, и не дают представ-

ления о том вкладе, который данная подсистема вносит в достижение целей, стоящих перед системой в целом. Поэтому при оценке эффективности функционирования, например, $1, i$ -й подсистемы первого уровня нужно в качестве основных показателей эффективности рассматривать приращение показателей эффективности функционирования системы, получаемое за счет функционирования $1, i$ -й подсистемы первого уровня:

$$W_i^p(1, i) - W_i^0(1, i), \quad (1.2.1)$$

где $W_i^p(1, i)$ — l -й показатель эффективности системы; $W_i^0(1, i)$ — l -й показатель эффективности функционирования средств системы при условии, что $1, i$ -я подсистема совершенно не участвует в достижении l -й цели системы, но все ресурсы системы между остальными подсистемами распределены оптимальным образом.

Таким образом, выражение (1.2.1) дает возможность: 1) проанализировать вклад каждой подсистемы первого уровня в достижение произвольной l -й цели функционирования системы в целом; 2) выяснить, каким образом данная $1, i$ -я подсистема участвует в достижении различных целей системы.

Однако основным показателем эффективности $1, i$ -й подсистемы в виде выражения (1.2.1) неудобен тем, что его размерность, как правило, не соответствует характеру функционирования средств этой подсистемы. Например, допустим, что в качестве системы рассматривается экономика страны, l -я цель состоит в производстве сельскохозяйственной продукции, а $1, i$ -я подсистема представляет министерство связи. Тогда эффективность средств связи придется измерять в тоннах зерна, молока, мяса и т. п.

Поэтому в качестве основных показателей эффективности функционирования средств $1, i$ -й подсистемы первого уровня ($i = \overline{1, n_1}$) обычно рассматривают относительное приращение показателей функционирования всех средств системы, получаемое за счет функционирования $1, i$ -й подсистемы первого уровня:

$$V_i^{(1, i)} = \frac{W_i^p(1, i) - W_i^0(1, i)}{W_i^u(1, i) - W_i^0(1, i)} \quad (l = \overline{1, k}; \quad i = \overline{1, n_1}), \quad (1.2.2)$$

где $W_i^u(1, i)$ — l -й показатель эффективности функционирования средств системы при условии, что средства $1, i$ -й подсистемы «идеально» участвуют в обеспечении l -й цели системы, а все ресурсы системы распределены так же, как и при отыскании величины $W_k^p(1, i)$.

Обычно «идеальное» участие средств $1, i$ -й подсистемы в обеспечении l -й цели системы определяется довольно просто. В случае связи при тех же ресурсах, которые отпускаются министерству связи в соответствии с оптимальным планом функционирования всей экономики страны, всегда обеспечивают мгновенную связь без всяких искажений в любое время, когда таковая потребуется.

Показатель эффективности (1.2.1) в настоящее время довольно широко распространен при оценке эффективности различных средств обеспечения (связь, системы управления и др.). Он является безразмерным, а пределы его изменения определяются из выражения

$$0 \leq W_i^{(1, i)} \leq 1 \quad (l = \overline{1, k}; \quad i = \overline{1, n_1}). \quad (1.2.3)$$

Таким образом, для любой подсистемы первого уровня имеются как частные показатели эффективности, характеризующие степень достижения целей, стоящих перед данной подсистемой, так и основные показатели эффективности, характеризующие вклад рассматриваемой подсистемы первого уровня в достижение целей, стоящих перед системой в целом.

Рассмотрим подсистему произвольного уровня. Для нее будут существовать *частные* показатели эффективности функционирования средств этой подсистемы, характеризующие степень достижения целей, стоящих перед данной подсистемой, а также *основные* показатели эффективности функционирования средств рассматриваемой подсистемы, характеризующие вклад в достижение целей, стоящих перед подсистемой *на уровень выше*. Таким образом, для оценки эффективности системы в целом нужно рассматривать *иерархию* частных и основных показателей эффективности системы и всех ее подсистем, включая и элементы.

1.3. Управление системами

В предыдущем параграфе было указано, что одним из характерных признаков системы является наличие управления, охватывающего все подсистемы и элементы системы. В чем же сущность управления?

Сущность управления системой в данный момент времени состоит в таком целенаправленном изменении состояний всех ее подсистем и элементов, которое обеспечивает достижение определенных целей функционирования системы путем перевода подсистем и их элементов в состояние, соответствующее достижению цели функционирования системы.

Рассмотрим основные составные части управления в их последовательном развитии. Для того чтобы управлять системой, нужно, прежде всего, знать ее текущие состояния и состояние той среды, в которой происходит функционирование основных средств системы, следовательно, нужно *собрать информацию* о состояниях всех элементов системы и информации об обстановке, в которой происходит их функционирование. После сбора этой информации происходит *передача информации* с помощью различных средств связи и управляющим органам системы. В управляющих органах осуществляются *накопление и обработка информации* для ее более компактного представления и на основе этой информации производится *оценка обстановки*. После этого производится *анализ информации* с целью выработки различных альтернативных *вариантов решений* для управления системой. Подготовка альтернативных вариантов решений является тем прогнозом, который дает возможность проанализировать все последствия того или иного решения. Сущность прогнозирования состоит в том, что определяются основные *тенденции* развития системы на прогнозируемый период без определения тех конкретных средств, которые будут применены в осуществлении прогноза.

Из прогнозируемых вариантов решения выбирается одно, которое потом принимается для управления системой. *Принятие решения* является одной из основных составных частей управления и в системах *в большинстве случаев осуществляется людьми*. При этом может быть и такой случай, когда люди непосредственно не участвуют в принятии данного решения, но оно в этом случае принимается на основании алгоритма (правила), ранее утвержденного людьми. Это чаще всего бывает тогда, когда контур управления является малоинерционным, а к выработке альтернативных вариантов решений привлекается ЭВМ,

работающая по алгоритмам и программам, утвержденным людьми, ответственными за принятие решения.

После принятия решения составляется *план* его выполнения. Планирование является центральным звеном любого управления. В настоящее время для составления плана в больших системах широко применяются ЭВМ для разработки оптимальных планов, наилучшим образом реализующих ресурсы, имеющиеся в распоряжении планирующих органов.

Утвержденный план является той *командной информацией*, которая обеспечивает целенаправленное функционирование всех подсистем и элементов системы. Командная информация в виде задач передается по каналам связи в подсистемы, предназначенные для *выполнения* этих задач. Следовательно, процесс переработки информации состояния и информации об обстановке в командную информацию заключается в подготовке прогнозов поведения системы в зависимости от различных вариантов решений, в выборе из этих вариантов одного решения, в составлении плана функционирования системы, на основе которого проводится управление.

После того как решение в виде плана функционирования системы доведено до подсистем, проводится систематический *контроль* выполнения плана. В случае необходимости проводится корректировка принятого решения и *плана*.

Таким образом, управление системой состоит в решении следующих основных задач: 1) сбор, накопление и обработка информации состояния и информации об обстановке; 2) определение или корректировка цели действия системы; 3) оценка обстановки; 4) подготовка альтернативных вариантов решений и их оценка (прогноз поведения системы при различных вариантах решений); 5) принятие решения или его корректировка; 6) составление плана функционирования системы или его корректировка; 7) постановка задач (передача командной информации) исполнителям и контроль исполнения.

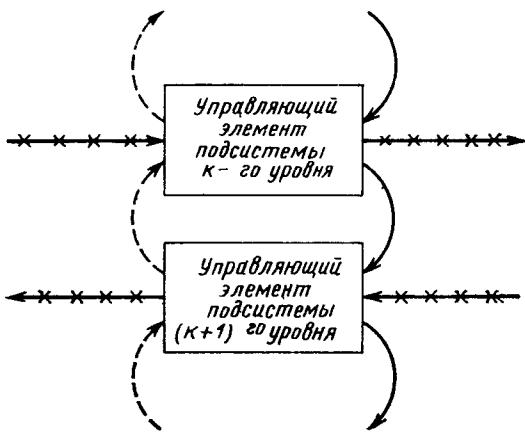


Рис 1.2.

Необходимо иметь в виду, что все эти задачи управления решаются непрерывно, при этом систематически приходится возвращаться к ранее решенным задачам и зачастую пересматривать их решение.

Рассмотрим более подробно *структуру управления системой* на примере элементарного контура управления, который можно получить из структурного графа системы (рис. 1.2).

Элемент подсистемы k -го уровня является управляющим для соответствующего (подчиненного) управляющего элемента подсистемы $(k+1)$ -го уровня. В подсистеме $(k+1)$ -го уровня проводятся: сбор информации состояния и информации об обстановке и передача этой информации управляющему элементу подсистемы k -го уровня. При этом возможны и такие условия, когда информация об обстановке передается

не только управляющему элементу k -го уровня, но и в подсистеме, находящиеся на более высоком уровне или на более низком уровне в данной ветви структурного графа системы, а также в подсистеме других ветвей структурного графа системы.

Управляющий элемент k -го уровня информацию состояния и информацию об обстановке накапливает, обрабатывает и оценивает с учетом командной информации, поступающей от управляющего элемента $(k-1)$ -го уровня. После этого информация анализируется и разрабатывается прогноз поведения подсистемы в зависимости от различных решений. Выбирается то решение, которое наилучшим образом соответствует целям функционирования подсистемы k -го уровня, и составляется план реализации этого решения. Этот план доводится до подсистемы $(k+1)$ -го уровня в виде командной информации. В ходе выполнения плана подсистема $(k+1)$ -го уровня сообщает управляющему элементу k -го уровня информацию состояния, на основе которой можно судить о соответствии текущих показателей функционирования подсистемы плановым. На основании этой информации и информации об обстановке управляющий элемент k -го уровня проводит корректировку плана, которая в виде командной информации доводится до подсистемы $(k+1)$ -го уровня.

Рассматривая всю систему в целом, можно считать, что она состоит из множества элементарных контуров управления, при этом если m — общее число вершин структурного графа системы, то число элементарных контуров управления будет равно $m-1$. В каждом элементарном контуре осуществляется управление с обратной связью, которая обеспечивается передачей информации состояния и информации об обстановке, а также контролем выполнения плана.

Таким образом, система с точки зрения ее управления представляет собой многоконтурную иерархическую систему управления с обратной связью. На каждом уровне иерархии составляется свой план, который является более детализированной частью плана подсистемы более высокого уровня.

Управление системой осуществляется подсистемой управления. В этой подсистеме должны существовать три подсистемы более низкого уровня: подсистема выработки вариантов решений (прогнозирования), подсистема планирования и подсистема непосредственного управления. При этом планирование осуществляется на основе принятого решения, а непосредственное управление состоит в том, чтобы система и все ее основные средства функционировали в соответствии с выработанным планом. Таким образом, только под воздействием непосредственного управления система и все ее элементы изменяют свои состояния. План является как бы алгоритмом (правилом), по которому осуществляется непосредственное управление, а прогноз является наметкой этого плана на достаточно длительный период.

Подсистема выработки вариантов решения включает: определение цели действий системы (для управляющих органов высшего уровня) или уяснение поставленной задачи (для управляющих органов подсистем), оценку состояния системы и оценку обстановки, определение возможных вариантов решений, их оценку (прогнозирование поведения системы) и собственно принятие решения.

Определение цели действий системы или уяснение поставленной задачи представляет собой определение конечного состояния системы, в которое она должна перейти в процессе функционирования, анализа задачи и срока ее выполнения, определение роли и места подсистемы

в выполнении целей и задач системы, анализ целей и задач смежных подсистем.

На этапе оценки обстановки изучаются объективные условия, в которых происходит функционирование системы, определяется состояние системы и ее элементов, производится оценка степени выполнения поставленных задач (контроль выполнения плана), выявляются факторы, способствующие выполнению задач или затрудняющие его. Оценка обстановки — это познание объективных условий, в которых функционирует система.

На основе цели действий и оценки обстановки определяются возможные варианты решений; на основе расчетов оценивается реальность намеченных вариантов решений и вариант действий, который является наилучшим.

Решение обычно оформляется в виде документа, который является директивным для разработки плана.

Существенное отличие плана от прогноза состоит в том, что в плане учитываются реальные физические возможности функционирования всех основных средств системы, а прогноз составляется на основе существующих тенденций развития системы с учетом их возможных изменений в будущем. Таким образом, прогноз чаще всего имеет вероятностный характер, а план является довольно жестким предписанием для осуществления непосредственного управления.

В свою очередь, результаты осуществления непосредственного управления влияют на составление и изменение планов, а само планирование приводит к изменению прогнозов.

Из этого утверждения вовсе не следует, что результат выполнения плана не является случайным. Случайность результата выполнения плана обусловлена многими факторами: наличием неуправляемой среды, оказывающей случайное воздействие на систему; случайностью воздействия людей при функционировании системы; случайным изменением всех параметров системы и т. п. Основная задача непосредственного управления состоит в том, чтобы устранять случайные отклонения результатов функционирования основных средств системы от плановых показателей. Это осуществляется на основании сравнения текущего состояния элементов и подсистем системы с плановыми показателями на данный момент времени (измерение «рассогласования» в обратной связи) и выработки соответствующей командной информации о поведении системы в будущем. Корректировка плана проводится тогда, когда управляющего воздействия недостаточно для такого изменения состояний системы, после чего она могла бы вернуться к плановым показателям.

Из этих этапов управления (выработки решения, планирования, непосредственного управления) основная роль принадлежит планированию. На это указывал Л. И. Брежнев в Отчетном докладе XXIV съезду КПСС: «Центральное звено, сердцевина руководства народным хозяйством в условиях социализма — это планирование»¹. Планирование является тем стержнем, на который опирается функционирование всех подсистем и элементов системы.

Сущность планирования состоит в таком распределении имеющихся в распоряжении ограниченных ресурсов, при котором показатели эффективности функционирования системы достигали бы определенного

¹ Брежнев Л. И. Отчетный доклад ЦК КПСС XXIV съезду Коммунистической партии Советского Союза. М., Госполитиздат, 1971.

уровня или, другими словами, цели функционирования средств системы были достигнуты. Таким образом, первая проблема, которую необходимо в этом случае решать, состоит в назначении *плановых показателей эффективности* функционирования средств системы.

В настоящее время нет хорошего математического аппарата для расчетов плановых показателей эффективности функционирования средств системы; их обычно назначает руководство систем, исходя из анализа изменений этих показателей и учитывая тенденции развития системы в будущем.

Допустим, что такие плановые показатели эффективности функционирования средств системы в первом приближении назначены. Возникает проблема отыскания тех минимальных ресурсов, которые обеспечивают эти плановые показатели эффективности. Эта операция проводится с помощью методов математического моделирования функционирования средств системы.

Как правило, назначенные в первом приближении плановые показатели эффективности функционирования средств системы не достигаются при наличии тех ограниченных ресурсов, которые имеются в распоряжении системы. В этом случае необходимо либо увеличить ресурсы системы, либо уменьшить плановые показатели эффективности функционирования средств системы. Последняя операция в наименьшей степени поддается формально-математическим методам исследования и обычно осуществляется руководством системы на основе мнений и заключений экспертов, как, впрочем, и назначение первого приближения плановых показателей эффективности функционирования средств системы.

Таким образом, неоднократный пересмотр целей функционирования средств системы происходит до тех пор, пока *эти цели будут соответствовать возможностям (ресурсам) системы*. При этом каждому варианту плановых показателей эффективности функционирования средств системы соответствуют свой минимальный объем ресурсов системы и свой план функционирования средств системы.

Назовем *допустимым планом функционирования средств системы* такой план, который для своего проведения требует расхода ресурсов, не превышающих тех, которыми располагает система. Основная задача планирования состоит в разработке достаточно большого числа альтернатив допустимых планов функционирования средств системы с тем, чтобы из этого множества планов можно было выбрать один, который и должен в дальнейшем проводиться в жизнь. Сетка допустимых планов функционирования средств системы составляется с применением математического аппарата для моделирования процесса функционирования средств системы и электронно-вычислительной техники для проведения расчетов по разработанным математическим моделям.

Рассмотрим использование показателей эффективности системы и ее подсистем при планировании. Допустим, что имеется k целей функционирования системы. Следовательно, должно быть k плановых показателей эффективности функционирования средств системы $W^*_1, \dots, W^*_k$, соответствующих оптимальному плану функционирования средств системы. Знак $*$ указывает на то обстоятельство, что эти показатели получены при оптимальном использовании всех ресурсов системы. Без нарушения общности можно считать, что при оптимальном использовании всех ресурсов системы величины $W^*_i (i = \overline{1, k})$ достигают своего максимального значения, а все возможные значения W^*_i являются неотрицательными.

Так как функционирование любой системы происходит в условиях воздействия случайных факторов, то в качестве плановых показателей эффективности $W^*_i (i=1, k)$ рассматриваются различные вероятностные преобразования: законы распределения или моменты этих законов для характеристик функционирования средств системы.

Обозначим через векторную величину $r = \{\overline{r_{1,1}}; \dots; r_{1,i}; \dots; r_{1,n_1}\}$ ресурсы системы, составляющая которой $r_{1,i} (i=\overline{1, n_1})$ представляет, в свою очередь, векторную величину — ресурсы i -й подсистемы первого уровня. Аналогично введем векторную величину $u = \{u_{1,1}; \dots; u_{1,i}; \dots; u_{1,n_1}\}$ — управление системой, где $u_{1,i}$ — векторная величина, представляющая собой управление всеми ресурсами i -й подсистемы первого уровня ($i = \overline{1, n_1}$). Тогда плановые показатели эффективности функционирования системы должны отвечать следующим условиям:

$$W^*_i = W^*_i(r, u^*) = \max W_i(r, u) \quad (i = \overline{1, k}), \quad (1.3.1)$$

где $W_i(r, u)$ — i -й показатель эффективности функционирования средств системы при неоптимальном управлении системой u и фиксированных ресурсах r ; u^* — вектор оптимального управления системой, при котором используются все ресурсы системы r .

Заметим, что управление u , при котором не используются все ресурсы системы, мы не можем рассматривать как оптимальное даже при соблюдении условия (1.3.1).

Назовем вектор управления системой *возможным*, если при этом используются все ресурсы системы, и будем в дальнейшем считать, что вектор u в выражении (1.3.1) является именно таким.

Основная задача управления u состоит в том, чтобы распределить все ресурсы системы r между всеми подсистемами на весь планируемый период. Таким образом, хотя это формально и не записано, управление u предполагается как многошаговый процесс, развивающийся во времени.

Ранжируем наши цели в порядке их «важности» и будем полагать для простоты, что эта ранжировка соответствует введенной нумерации, т. е. первая цель системы является наиболее важной, затем следует вторая цель и так далее до k -й цели включительно. Найдем величину

$$W_1^{(1)} = \max_u W_1(r, u). \quad (1.3.2)$$

При этом мы получим одно (или множество) управление $u^{(1)}$, которое будет возможным, так как при отыскании максимума в выражении (1.3.2) функция $W_1(r, u)$ была определена только для возможных векторов управления системы. Зная это возможное управление $u^{(1)}$, мы получим полуоптимальное значение всех остальных показателей эффективности системы

$$W_i^{(1)} = W_i(r, u^{(1)}) \quad (i = 2, k). \quad (1.3.3)$$

Возможен маловероятный случай, когда все полученные таким путем показатели эффективности $W_i^{(1)}$ будут соответствовать плановым и на этом отыскание оптимального управления может быть закончено. На практике это встречается весьма редко. В этом случае рекомендуется [9] применять метод последовательных уступок. Сущность его состоит в том, что мы соглашаемся уменьшить наш основной (первый) показатель эффективности функционирования системы на величину $\Delta W_1^{(1)}$ и за

этот счет получаем дополнительные ресурсы, которые могут быть израсходованы для увеличения других показателей эффективности. То дополнительное управление, которое мы получаем, уменьшая $\Delta W_1^{(1)}$, обозначим $\Delta u^{(1)}$. Это управление используется, прежде всего, для увеличения величины $W_2^{(1, 2)}$:

$$W_2^{(1, 2)}(r, u^{(1, 2)}) = \max_{\Delta u^{(1)}} W_2(r, u), \quad (1.3.4)$$

где $u^{(1, 2)}$ — то управление, которое максимизирует величину $W_2(r, u)$ при условии, что область изменения управления не выходит за пределы величины $\Delta u^{(1)}$.

При этом мы получаем второе приближение всех показателей эффективности функционирования системы

$$W_i^{(1, 2)}(r, u^{(1, 2)}) \quad (i = \overline{1, k}). \quad (1.3.5)$$

Если второе приближение показателей эффективности системы нас не удовлетворяет, то нужно сделать второе уменьшение $\Delta u^{(2)}$ как для первого, так и для второго показателей эффективности, расширяющих область применения управления и так далее, до тех пор, пока мы не получим тех значений $W^*_i (i = \overline{1, k})$, которые нас удовлетворят.

Преимущество этого метода перед всеми другими состоит, прежде всего, в том, что он дает ясное представление о том, за счет каких «жертв» в одном показателе эффективности мы получаем приращение (и на сколько) во всех других показателях эффективности функционирования системы.

В настоящее время разработано достаточно много методов отыскания максимума выражения (1.3.2) при различных ограничениях, накладываемых на управление u . К этим методам следует, прежде всего, отнести методы программирования (линейного, нелинейного, динамического), которые достаточно широко описаны в литературе. Основной недостаток всех этих методов состоит в том, что они становятся малоэффективными при больших размерностях вектора управления u и вектора ресурсов r .

Если процесс функционирования средств системы может быть описан с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то для отыскания оптимального управления может быть использован метод Понтрягина, но большая размерность вектора управления u и вектора ресурсов r и в этом случае не избавляет исследователя системы от достаточно сложных вычислений большого объема.

При оценке эффективности любой подсистемы первого уровня можно использовать те рассуждения, которые были приведены выше для оценки эффективности системы. В этом случае для $1, i$ -й подсистемы первого уровня ($i = \overline{1, n_1}$) нам нужно отыскивать оптимальное управление $u_{1, i}$ при заданных ограниченных ресурсах $r_{1, i}$, исходя из этих целей, которые стоят не перед всей системой, а только перед рассматриваемой подсистемой первого уровня $1, i$ [см. (1.1)]:

$$W_j^{*(1, i)} = W_j^{*(1, i)}(r_{1, i}; \quad u_{1, i}^* = \max_{u_{1, i}} W_j^{*(1, i)}(r_{1, i}; \quad u_{1, i}), \quad (j = \overline{1, k}), \quad (1.3.6)$$

где $k_{1, i}$ — число целей, стоящих перед подсистемой первого уровня.

Все приведенные семь основных задач управления являются объектом автоматизации, т. е. такого процесса, когда *часть* функций челове-

ка выполняется различными техническими устройствами, среди которых основную роль играют ЭВМ, являющиеся технической базой автоматизации управления системами.

Необходимо особо отметить тот факт, что в автоматизированных системах управления (АСУ) человек не исключается из цикла переработки информации. На человека возлагаются наиболее ответственные операции управления: анализ информации, составление прогнозов, принятие решения, составление плана и его корректировка.

В АСУ, в первую очередь, автоматизируются процессы сбора, хранения, обновления и обработки информации. Системы, автоматизирующие эти четыре составные части управления, обычно называются автоматизированными системами информационного обеспечения (СИО).

Таким образом, СИО является составной частью АСУ, и обычно создание СИО рассматривается как первый этап автоматизации управления системой.

Наиболее ответственной и трудоемкой частью управления являются прогнозирование поведения системы в зависимости от различных решений, принятие решения и составление плана функционирования системы. Степень автоматизации управления системой определяется, в первую очередь, тем, насколько широко привлекаются средства автоматизации (вычислительная техника и математические методы) при разработке прогнозов и планов функционирования системы. Прогнозы и планы функционирования системы разрабатываются с помощью специальных моделей функционирования системы, о которых говорится дальше.

Еще одной характерной чертой управления системой является то обстоятельство, что в нем постоянно осуществляются *самонастройка и самообучение*. Основную роль в самонастройке и самообучении системы играют люди, занятые как в приведении в действие всех средств системы, так особенно в управлении системой. Именно люди, занятые в управлении системой, определяют цели и задачи всех подсистем, степень достижения этих целей и, что самое главное, ставят совершенно новые цели и изменяют облик всей системы.

1.4. Информационно-расчетное обеспечение процесса управления в системе

Управление системой, как указывалось выше, осуществляется посредством обмена информацией между всеми элементами и подсистемами, входящими в систему: происходит передача командной информации «сверху вниз», передача информации состояния «снизу вверх» и передача информации об обстановке, которая направляется как «сверху вниз», так и «снизу вверх», а также по «горизонтальным» направлениям между различными подсистемами и элементами системы. Таким образом, система может нормально функционировать и обеспечивать выполнение целей и задач, стоящих перед системой, только при условии наличия *процесса обмена информацией* между всеми подсистемами и элементами системы.

Хотя понятие «информация» неоднократно уже употреблялось ранее, мы дадим ее определение здесь и будем применять такое толкование в дальнейшем изложении теории систем. Информацией будем называть объективные данные о состояниях элементов и подсистем, входящих в систему, а также о состояниях среды на момент времени t . Останемся на этом определении подробнее.

В основе любой информации, циркулирующей в системе, должна лежать система понятий, обозначений и знаков для всех состояний элементов и подсистем, входящих в систему, а также для всех состояний среды, которая бы обеспечила по возможности точное отражение этих состояний в сознании людей и в запоминающих устройствах, участвующих в функционировании системы.

В зависимости от сложности элементов и подсистем и сложности той среды, в которой происходит функционирование системы, эта система понятий может быть достаточно простой для того, чтобы ограничиться лишь полным перечнем их состояний, а может быть настолько сложной, что простой перечень состояний не дает возможности правильно описывать состояния системы и среды. Система понятий, обозначений и знаков, с помощью которой можно выражать на естественном языке объективные данные о состояниях всех элементов системы и среды и передавать эти данные по линиям связи, называется информационным языком.

Таким образом, информационный язык, с помощью которого воспринимается и передается информация в системе, может быть как самым простым (нумерация состояний), так и самым сложным (естественный язык, на котором общаются люди). Информационный язык системы должен быть самым простым из всех возможных языков, допускающим восприятие и передачу всей необходимой информации, циркулирующей в системе.

На первый взгляд может показаться, что проще всего в качестве информационного языка брать естественный язык и с его помощью проводить различные преобразования информации. Такое решение может быть уместно лишь в том случае, когда преобразование информации производится только людьми. Если в преобразовании информации участвуют различные технические устройства, то возникают сложные лингвистические и математические проблемы «обучения» этих технических устройств пониманию естественного языка людей. Помимо этого, естественный язык обычно содержит большую избыточную информацию, которой нет смысла загружать линии связи в запоминающие устройства системы. Поэтому в системах обычно имеется специальный язык, обеспечивающий все информационные потребности системы наиболее простыми средствами.

Таким образом, *первая особенность процесса обмена информацией* в системе состоит в том, что он осуществляется с помощью информационного языка этой системы.

Могут быть системы, в которых различные подсистемы имеют свои информационные языки. Это возможно в случае, когда информационные «горизонтальные» связи между подсистемами малы и нет необходимости создания «единого информационного языка», охватывающего потребности всех подсистем, входящих в систему. В этом случае создаются информационные языки для отдельных подсистем, при этом заботятся только о том, чтобы та информация, которая выходит за пределы данной подсистемы, имела общую языковую основу, удовлетворяющую все другие подсистемы.

В приведенном определении информации указано, что информация — это объективные данные о состояниях системы и среды. При этом необходимо иметь в виду, что эти объективные данные собираются либо людьми, либо техническими средствами, работающими под управлением людей, либо техническими средствами, работающими по алгоритмам,

утвержденным людьми. Поэтому та информация, которая циркулирует в системе, всегда имеет субъективные искажения, вносимые людьми на различных этапах обработки этой информации. Информационный язык системы может либо увеличивать роль субъективного фактора в процессе обмена информацией в системе, либо уменьшать его. Субъективные искажения информации можно ограничить информационным языком только при непреднамеренных искажениях информации. Преднамеренные искажения информации можно уменьшить в основном организационными мерами, определяющими правила протекания процесса обмена информацией в системе. Субъективные искажения являются *второй особенностью процесса обмена информацией* в системе.

Информация, сформулированная с помощью информационного языка системы, должна быть «записана» на различных вещественных носителях информации. Такими носителями могут быть бумага, фото- и кинодокументы, различные магнитные носители информации, перфокарты и перфоленты и т. п. Человек с его навыками и памятью, участвующий в функционировании основных средств системы или в процессе обмена информацией, является одним из основных носителей информации.

Вещественные носители заполнены конкретной информацией о состояниях подсистем, элементов и окружающей среды по определенным правилам. Эти правила могут быть едиными для всей системы, если «горизонтальные» информационные связи между различными подсистемами достаточно интенсивные. Если же «горизонтальные» информационные связи между подсистемами не очень велики, то для различных подсистем могут быть свои разные правила заполнения вещественных носителей информации. Обычно это происходит в тех случаях, когда различные подсистемы имеют свои информационные языки.

Правила заполнения вещественных носителей информации (документов) должны быть сформулированы для всех элементов и подсистем, а также для описания всех состояний среды. Эти правила должны содержать точные указания: об исполнителях документа, в качестве которых могут выступать люди или автоматические устройства, работающие по алгоритмам, утвержденным людьми; о формах и сроках исполнения документов; о формах и методах представления информации, требуемой для составления документа; о правилах кодирования или доступа к информации при ее занесении на вещественный носитель.

Процесс обмена информацией в системе предусматривает определение сроков и правил передачи информации (документов), т. е. определяет документооборот в системе.

Информация передается с помощью различных технических средств по каналам связи. В качестве таких каналов обычно используются проводная связь, а также такие средства, как радио, телевидение, голография, лазер и др. При обмене информацией непосредственно между людьми каналом связи является воздух.

Таким образом, *третья особенность процесса обмена информацией* состоит в том, что вся информация в системе записывается на определенные вещественные носители (документы) и устанавливаются правила документооборота в системе.

Процесс обмена информацией в системе обеспечивается путем решения ряда информационных задач, вытекающих из задач управления системой. Решение этих информационных задач предусматривает сбор информации и составление первичного документа, передачу информации, ее накопление и обработку, выдачу информации потребителю.

Первичный документ должен составляться только один раз — по месту получения исходной информации. Если предусматривается автоматизация процесса обмена информацией в системе или автоматизация управления системой, то необходимо предусмотреть изготовление первичного документа на машинном носителе, чтобы обеспечить *одноразовый* ввод первичного документа в систему. Это один из основных принципов построения автоматизированных систем управления.

Первичный документ должен обеспечивать простоту передачи информации по каналам связи. Здесь требуется определенное согласование вида первичного документа с возможностями аппаратуры связи.

Для накопления, хранения и выдачи информации создаются информационные массивы, обычно в подсистемах первого уровня. Эти информационные массивы непрерывно обновляются новой информацией, старая информация сразу не уничтожается, а некоторое время хранится в массиве. Через определенное время хранения, определяемое правилами документооборота в системе, старая информация изымается из массива и уничтожается (стирается). Некоторые виды документов хранятся постоянно и из массивов не изымаются.

В настоящее время количество информации (документов) непрерывно растет и поиск нужного документа в информационном массиве представляет зачастую сложную техническую и организационную проблему. Выход из этого положения возможен только при создании автоматизированных информационных массивов, которые технически могут быть реализованы в настоящее время с помощью современных ЭВМ. Обычно автоматизированные системы накопления информационных массивов, поиска и выдачи информации называют автоматизированными банками данных (АБД).

АБД предназначены для накопления, хранения, обновления, поиска, обработки и выдачи по запросам сведений различного характера. Наряду с техническими средствами в состав АБД входят комплекс специальных программ, обеспечивающих их функционирование, и информация — массивы сообщений, содержащих сведения, учитываемые в системе, и различные служебные массивы (словари, таблицы и т. п.).

АБД разрабатывают на основе использования общего информационного поля для решения различных задач. Практика работы над АБД показывает необходимость создания комплекса программ системного применения, а не разработки частных информационных задач. Это обусловлено однотипностью процедур, выполняемых при решении достаточно широкого класса информационных задач, удобством централизованной подготовки и централизованного хранения информации в общем информационном поле. В связи с этим понятие «информационная задача» относится к внешнему проявлению информационной системы и не связывается непосредственно с ее структурой.

Основным структурным элементом массива сведений, хранящихся в памяти системы, является сообщение. В нем указываются наименование объекта и его признаки (характеристики). В общем случае сведения могут представляться в форме элементарных сообщений и в виде более сложных структур.

Наличие информационных массивов является *четвертой особенностью процесса обмена информацией*. Эти информационные массивы представляют собой определенные «резервуары» информации. Эффективное функционирование всех основных средств системы невозможно без заполнения этих «резервуаров» информацией. Информационные

массивы являются основой процесса обмена информацией в системе. Рациональное построение информационных массивов во многом предопределяет эффективность работы всей системы управления.

Решение основных информационных задач системы (сбор и передача информации, накопление информации в информационных массивах, обработка и выдача информации) можно представить в виде графа информационных задач. На рис. 1.3 изображен граф пяти информационных задач некоторой подсистемы. Вершины графа символизируют конкретные информационные задачи, а ребра — информацию (документы), которая создается в результате решения той или иной задачи.

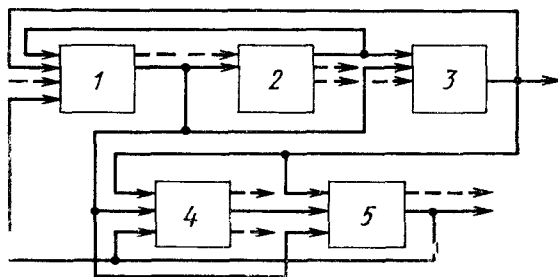


Рис. 1.3.

Сплошными линиями отмечены те ребра, которые символизируют циркулирующую в данной подсистеме (командная информация и информация состояния), пунктирными линиями — ребра, символизирующие информацию об обстановке, передаваемую в порядке взаимодействия между подсистемами.

Рассматривая граф, можно прийти к выводу, что выходная информация (документы), получающаяся в результате решения первой информационной задачи, передается в порядке взаимодействия в другие подсистемы и является входной информацией, необходимой для решения второй, третьей и четвертой информационных задач данной подсистемы.

В свою очередь, для решения первой информационной задачи требуются входная информация, получаемая в результате решения второй, третьей, пятой информационных задач данной подсистемы, и информация, поступающая в порядке взаимодействия из других подсистем.

Будем называть граф информационных задач подсистемы полным, если для решения любой информационной задачи есть вся необходимая входная информация, которая представляется в установленные сроки. Полнота графа информационных задач является необходимым условием решения всех информационных задач системы; в этом состоит *пятая особенность процесса* обмена информацией в системе.

Назовем данную подсистему практически информационно замкнутой, если граф информационных задач подсистемы имеет малое число ребер, по которым поступает информация из других подсистем.

Обычно подсистемы первого уровня являются практически информационно замкнутыми. Для практически информационно замкнутых подсистем создаются самостоятельные информационные языки и информационные массивы. При этом необходимо предусмотреть общность информационных языков и массивов только по той информации, которая поступает в эти подсистемы из других подсистем.

Анализ реальных автоматизированных систем приводит к заключению о том, что в состав АСУ должны входить следующие основные функциональные части (назовем их системами) общего математического обеспечения (ОМО).

1. Система информационного обеспечения (СИО) является транслятором-интерпретатором, осуществляющим перевод сообщений (запросов) с входного информационного языка на машинный информационный язык (и обратно) и выполнение предписаний относительно характера обработки информации.

В процессе выполнения оттранслированных предписаний (интерпретации) СИО осуществляет следующие основные функции:

1) накопление и обновление массива сообщений; 2) поиск в массиве сообщений; 3) формирование ответа на запрос; 4) преобразование данных, полученных в результате поиска, к виду, удобному для оформления документов (перевод с машинного информационного на выходной информационный язык). В некоторых случаях на этом же этапе осуществляются первая наиболее простая логическая обработка и обобщение информации (второй этап логического обобщения информации выделяется в специальную систему).

Перевод запроса с выходного языка на машинный информационный — это первый и наиболее сложный этап его обработки. При этом распознаются отдельные элементы запроса (слова и словосочетания) и анализируется его логическая структура. На следующем этапе устанавливаются смысловые связи между понятиями, используемыми в сообщениях, а также производится выборка сообщений, удовлетворяющих условиям запроса.

2. Система программного управления, сопряженная с СИО, предназначена для организации взаимодействия между основными элементами ОМО. Система осуществляет динамическое обслуживание информационных полей и рабочих мест операторов, организует взаимодействие с другими системами.

3. Система функционального контроля представляет собой совокупность программных средств, предназначенных для проверки правильности совместного функционирования всех технических средств АСУ, выявления неисправностей с выдачей необходимых данных для настройки АСУ на работу в режимах, соответствующих сложившейся аварийной ситуации.

4. Система автоматического редактирования данных буквенно-цифровой информации предназначена для подготовки к выдаче информации на печатающие устройства типа АЦПУ, рулонные телетайпы, а также на устройства наглядного отображения коллективного и индивидуального пользования (буквенно-цифровое табло, дисплей). Данные, необходимые для обеспечения подготовки информации к выдаче на эти устройства, записываются во входном сообщении на специальном алгоритмическом языке автоматического документирования. Перевод на машинный язык и подготовка информации к выдаче осуществляются с помощью специального транслятора-интерпретатора.

Система должна обеспечивать выдачу информации в текстовой и табличной регламентной и нерегламентной формах. Таким образом, система должна обеспечивать выдачу практически произвольных форм документов.

5. Система анализа сообщений определяет «список работ», необходимый для отработки этих сообщений. Кроме того, система анализа сообщений обеспечивает диалог с потребителем по уточнению поступивших сообщений, организации корректировки ошибок в сообщениях и т. п.

6. Система управления решением задач представляет собой совокупность программных средств, предназначенных для непосредственного руководства ходом решения на данной вычислительной системе комплексов задач. В ее функции входит: планирование вычислительных работ по реализации данной задачи, своевременное включение в работу отдельных функциональных программ, перераспределение вычислительных работ в случае выхода из строя части выделенных ресурсов вычислительной системы, непрерывное слежение за ходом вычислительного процесса и его протоколирование и т. д.

7. Система специального назначения, предназначенная для обеспечения разграничения доступа потребителей к информации, регистрации информации и запросов, автоматического установления ограничительных грифов и других подобных функций.

Система ОМО должна обеспечивать подготовку исходных данных для решения расчетных задач и исследовательских моделей. Расчетные задачи и исследовательские модели не включаются в состав ОМО, но при их разработке должна учитываться в специальных блоках сопряжения необходимость их информационного сопряжения с ОМО. Блоки сопряжения организационно включаются в состав соответствующих комплексов расчетных задач или моделирующих программ. Они предназначены для формирования запросов от расчетных задач и моделей на машинном информационном языке, а также для преобразования выданной информации с машинного информационного языка на соответствующий язык расчетных задач и моделей.

Состав расчетных задач и моделей определяется в каждом конкретном случае на основании целевого назначения системы или подсистемы. Однако в общем случае можно указать, что основными расчетными задачами и моделями являются следующие: 1) оценки обстановки; 2) выработки решений; 3) планирования.

Основным содержанием расчетных задач и моделей является анализ эффективности функционирования систем при различных вариантах решений и планов.

Анализ эффективности системы можно провести двумя методами: 1) собрать статистические сведения о характеристиках работы этой системы и с помощью полученных характеристик вычислить показатели эффективности системы и всех ее подсистем; 2) составить математическую модель функционирования всех средств системы и с помощью этой модели найти характеристики работы системы и определить ее эффективность. Первый метод кратко назовем методом статистического анализа действующей системы, а второй — методом статистического моделирования системы. Достоинство первого метода состоит в том, что он дает достаточно точный и самое главное объективный результат, практически независимый от научной эрудиции лиц, занятых оценкой эффективности системы. К недостаткам статистического анализа действующей системы следует отнести невозможность его использования для прогнозирования поведения системы в будущем и даже в настоящем, так как статистический материал имеется всегда лишь о прошлом; кроме того, как правило, невозможно исследовать поведение системы в различных экстремальных условиях. Например, в мирное время нельзя определить эффективность тех или иных форм вооруженной борьбы, так как война не ведется. Кроме того, этот метод совершенно непригоден для проектируемых систем, а ведь именно на стадии проектирования требуется так определить правила функционирования всех средств системы и так

выбрать сами средства системы, чтобы они давали максимум показателей эффективности.

Метод статистического моделирования дает возможность исследовать систему практически в любых условиях ее работы. Он предусматривает как натурное моделирование с участием реальных средств системы (производственный эксперимент, военные маневры и т. п.), так и математическое моделирование, которое состоит в разработке математической модели функционирования всех средств системы и проведении расчетов по разработанной модели.

Обычно математические модели систем являются достаточно сложными, и поэтому расчеты по таким моделям возможны только на современных ЭВМ. Иногда бывает необходимо совмещать натурное и математическое моделирование — когда часть системы моделируется с помощью физических элементов системы, а часть — с помощью математической модели. Например, при проведении военных маневров возможен случай, когда действия противника моделируются с помощью математической модели.

К недостаткам статистического моделирования следует отнести, прежде всего, приближенный характер моделирования. Это относится как к натурному, так и к математическому моделированию. У математического моделирования есть еще один серьезный недостаток, заключающийся в том, что для проведения расчетов по разработанным моделям требуются характеристики функционирования средств системы. Получение таких характеристик является серьезной проблемой в техническом и в организационном отношении.

К математическим моделям системы предъявляются требования, которые достаточно широко освещаются в литературе по исследованию операций. Из этих требований мы выделим лишь требование учета случайных факторов и существенную зависимость всех характеристик системы от времени. В настоящее время хорошо развит аппарат метода статистических испытаний (метод Монте-Карло), который в полной мере учитывает оба эти требования. Однако при моделировании реальных систем методом Монте-Карло мы сталкиваемся с тем, что его практически трудно реализовать в условиях, когда система состоит из тысяч и десятков тысяч элементов. Большая размерность модели не дает возможности реализовать ее на современных ЭВМ. Поэтому метод Монте-Карло обычно используется для моделирования функционирования только отдельных подсистем и их элементов.

В последнее время получили развитие методы математического моделирования систем, основанные на представлении процесса функционирования всех средств системы как марковского процесса. Известно, что любой случайный процесс может быть представлен как марковский. Представление процесса функционирования всех средств системы в виде марковского процесса с конечным числом состояний и непрерывным временем дает возможность привлекать для исследования эффективности систем хорошо разработанный аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому дальнейшее изложение материала посвящено разработке аналитических методов исследования систем, основанных на представлении процесса функционирования всех средств системы как марковского многомерного процесса с непрерывным временем и дискретными состояниями.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ И ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

2.1. Классификация состояний. Ориентированный граф состояний. Классификация групп состояний

В книге рассматриваются системы (процессы) $X(t)$, которые в любой момент времени t могут находиться в одном из своих состояний $x_0, x_1, \dots, x_n$. Такие системы (процессы) называются дискретными случайными системами (процессами). Число состояний процесса (системы) может быть как конечным, так и бесконечным (счетным). В основном будут исследоваться системы с конечным числом состояний, что вполне достаточно при рассмотрении прикладных задач.

Событие, состоящее в том, что система в момент времени t находится в состоянии x_i , обозначим

$$X(t) = x_i \quad (i = \overline{0, n}), \quad (2.1.1)$$

а вероятность этого события

$$p_i(t) = P(X(t) = x_i) \quad (i = \overline{0, n}). \quad (2.1.2)$$

Очевидно, что для любого момента времени t должно выполняться следующее нормировочное условие:

$$\sum_{i=0}^n p_i(t) = 1. \quad (2.1.3)$$

Одна из основных задач исследования обычно состоит в отыскании вероятностей $p_i(t)$ для различных систем и процессов.

Обозначим через X множество всех состояний: $X = \overline{\{x_0, x_n\}}$. В процессе функционирования система (процесс) может переходить из одного состояния в другое. Например, если в начальный момент $t=0$ система (процесс) находилась в состоянии $x_0 [X(0) = x_0]$, то в какой-то момент времени t_0 она может перейти в состояние $x_1 (X(t_0) = x_1)$. Будем считать, что переход системы (процесса) из одного состояния в другое осуществляется мгновенно (скачком), т. е. время перехода из состояния в состояние равно нулю.

Таким образом, рассматриваемую систему (процесс) можно интерпретировать как некоторую точку, которая в какие-то моменты времени (в общем случае случайные) «перескакивает» из одного состояния в другое, определяя динамический характер самой системы. Другими словами, точка осуществляет случайные блуждания по своим возможным состояниям. Множество всех состояний системы (процесса) $X = \overline{\{x_0, x_n\}}$ можно рассматривать как множество вершин некоторого графа, а процесс перехода из состояния в состояние — как процесс блуждания точки по вершинам этого графа.

При написании этого параграфа и других глав работы были использованы элементы теории графов [1, 4, 25, 34, 36].

Вершину графа x_i (состояние x_i) будем изображать в виде прямоугольника с вписанным внутри него обозначением состояния (рис. 2.1).

Вершина графа x_i может быть либо соединена, либо не соединена с вершиной x_j ($i = \overline{0, n}$; $j = \overline{0, n}$; $i \neq j$). Это эквивалентно тому, что система (процесс), попав в состояние x_i либо может непосредственно перейти из этого состояния в состояние x_j (минуя все другие состояния), либо такого непосредственного перехода осуществить не может (хотя в этом случае вообще возможен переход из состояния x_i в состояние x_j через другие состояния). Линии, соединяющие вершины (состояния), называем ребрами.



Рис. 2.1.



Рис. 2.2.

Таким образом, каждой паре вершин x_i и x_j ($i \neq j$) можно поставить в соответствие некоторое число (ребро) $R(x_i, x_j)$, которое может принимать два значения: $R(x_i, x_j) = 1$, если вершина x_i соединена ребром с вершиной x_j (т. е. если возможен непосредственный переход из состояния x_i в состояние x_j); $R(x_i, x_j) = 0$, если вершина x_i не соединена ребром с вершиной x_j (т. е. если невозможен непосредственный переход из состояния x_i в состояние x_j).

Схематически возможность *непосредственного* перехода из состояния x_i в состояние x_j изображается следующим образом (рис. 2.2): между вершиной x_i и вершиной x_j проводится *ориентированное* ребро, которое представляет собой стрелку, *выходящую* из вершины (состояния) x_i и *входящую* в вершину (состояние) x_j .

Если непосредственный переход из состояния x_i в состояние x_j невозможен, то на схеме никакого ребра не будет (состояния x_i и x_j не соединяются стрелкой).

Для ориентированного ребра $R(x_i, x_j)$ (стрелки) вершина x_i называется *начальной вершиной*, вершина x_j — *конечной вершиной*. Так как рассматривается процесс перехода из состояния в состояние, то $R(x_i, x_j) = 0$ для любых $i = \overline{0, n}$ (петли в графах состояний не рассматриваются).

Если $R(x_i, x_j) = 1$, то будем говорить, что вершина x_i является *соседней* по отношению к вершине x_j . Если $R(x_i, x_j) = R(x_j, x_i) = 1$, то вершины x_i и x_j являются *соседними*.

Таким образом, любая дискретная система (процесс) $X(t)$ характеризуется, прежде всего, *ориентированным графом состояний* $G(X)$, который представляет собой схему возможных переходов из состояния в состояние, на которой нанесены вершины (состояния), соединенные ориентированными ребрами. Такому ориентированному графу состояний соответствует квадратная матрица размерности $(n+1) \times (n+1)$, состоящая из нулей и единиц, элементами которой $a_{i,j}$ являются ребра $R(x_i, x_j)$:

$$\|a_{i,j}\| = \|R(x_i, x_j)\|. \quad (2.1.4)$$

По главной диагонали этой матрицы стоят нули, так как $R(x_i, x_j) = 0$ ($i = \overline{0, n}$).

Дадим следующую классификацию состояний.

Состояние x_i называется *изолированным*, если выполняется условие

$$\sum_{j=0}^n R(x_i, x_j) = \sum_{j=0}^n R(x_j, x_i) = 0,$$

т. е. если система не может перейти в состояние x_i или выйти из него.

Состояние x_i называется *концевым* (поглощающим), если выполняются совместно два условия:

$$\sum_{j=0}^n R(x_i, x_j) = 0, \quad (2.1.5)$$

$$\sum_{j=0}^n R(x_j, x_i) > 0,$$

т. е. если из состояния x_i система уже ни в какое другое состояние перейти не может, но хотя бы из одного состояния x_j ($i \neq j$) может перейти в состояние x_i . Поглощающее состояние изображено на рис. 2.3.

Состояние x_i называется *начальным* (источником), если выполняется совместно два условия:

$$\sum_{j=0}^n R(x_j, x_i) = 0, \quad (2.1.6)$$

$$\sum_{j=0}^n R(x_i, x_j) > 0.$$

Эти условия эквивалентны тому, что система может выйти из состояния x_i (если она в нем находилась) и перейти в какое-либо другое состояние, но попасть в состояние x_i из какого-либо другого состояния она (система) не может (рис. 2.4).

Состояние x_i называется *транзитивным*, если выполняются совместно два неравенства:

$$\sum_{j=0}^n R(x_i, x_j) > 0, \quad (2.1.7)$$

$$\sum_{j=0}^n R(x_j, x_i) > 0.$$

Система, попав в транзитивное состояние, рано или поздно его покинет.

Транзитивное состояние изображено на рис. 2.5.

Маршрутом при блуждании точки по вершинам (состояниям), образующим множество X , называется такая последовательность ребер, когда два соседних ребра имеют общую (промежуточную) вершину. Например, $M[R(x_1, x_2); R(x_2, x_3); R(x_3, x_5)]$ — это маршрут, выходящий из вершины x_1 , проходящий через вершины x_2 и x_3 и заканчивающийся в вершине x_5 .

Коротко маршрут (если такой существует), связывающий вершины $x_n, x_{k+1}, \dots, x_i$, будем обозначать $M(x_k, \dots, x_i)$. Вершину x_k будем называть *началом маршрута*, вершину x_i — *концом маршрута*, все остальные вершины маршрута — *промежуточными*.

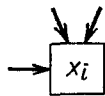


Рис. 2.3.

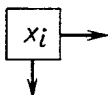


Рис. 2.4.

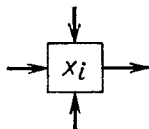


Рис. 2.5.

Положим $M(x_k, \dots, x_l) = 1$, если маршрут, проходящий через вершины $x_k, \dots, x_l$, существует, и $M(x_k, \dots, x_l) = 0$, если такого маршрута не существует. Очевидно, что в этом случае $M(x_k, \dots, x_l) = \prod_{i=k}^l R(x_i, x_{i+1})$,

так как для существования маршрута между вершинами $x_k, \dots, x_l$ нужно существование ребер между этими вершинами.

Если $x_k = x_l$, то маршрут называется циклическим.

Маршрут между вершинами $x_k, \dots, x_l$ называется путем, а циклический маршрут — *контуром* $[\Pi(x_k, \dots, x_l)]$, если каждое ребро, из которого состоит маршрут, встречается в нем один раз. Если путь между вершинами x_k и x_l существует, то будем считать $\Pi(x_k, \dots, x_l) = 1$, в противном случае $\Pi(x_k, \dots, x_l) = 0$.

Можно доказать, что если маршрут $M(x_k, \dots, x_l) = 1$, то и путь $\Pi(x_k, \dots, x_l) = 1$. Из нескольких путей, связывающих вершины x_k и x_l , будем считать минимальным тот путь, который состоит из минимального числа ребер. Такой путь может быть не единственным.

Состояние (вершина) x_i называется *связанным* с состоянием (вершиной) x_j , если маршрут $M(x_i, \dots, x_j) = 1$. Таким образом, состояние x_i является соседним по отношению к состоянию x_j , если состояние x_i связано с состоянием x_j путем, состоящим из одного ребра:

$$M(x_i, x_j) = \Pi(x_i, x_j) = R(x_i, x_j) = 1.$$

Состояния (вершины) x_i и x_j называются *взаимно связанными*, если маршруты $M(x_i, \dots, x_j) = M(x_j, \dots, x_i) = 1$.

Состояния (вершины) x_i и x_j называются связанными, если выполняется только одно из двух условий: а) $M(x_i, \dots, x_j) = 1$ и $M(x_j, \dots, x_i) = 0$; б) $M(x_i, \dots, x_j) = 0$ и $M(x_j, \dots, x_i) = 1$.

Перейдем к классификации групп состояний (подмножеств состояний). Рассмотрим некоторые подмножества состояний $Y \subset X$, при этом мы не будем рассматривать случай, когда подмножество Y является пустым.

Подмножество состояний Y называется *замкнутым (концевым)*, если не существует маршрута, соединяющего любое состояние этого множества x_i с каким-либо состоянием множества $\bar{Y}$, являющегося дополнением множества Y :

$$M(x_i, \dots, x_j) = 0 \quad (x_i \in Y; x_j \in \bar{Y} = X - Y).$$

Другими словами, подмножество состояний Y является замкнутым, если система, попав в одно (или находясь в одном) из состояний $x_i \in Y$, выйти из этого подмножества состояний не может. Концевое (поглощающее) состояние представляет собой замкнутое подмножество, состоящее из одного состояния.

Подмножество состояний Y называется *связным*, если любые два состояния $x_i \in Y$ и $x_j \in Y$ являются связанными.

Подмножество состояний Y называется *эргодическим*, если оно является замкнутым и связным одновременно.

Подмножество состояний Y называется *незамкнутым*, если для любого состояния $x_i \in Y$ — существующий маршрут, выводящий процесс за пределы подмножества Y , т. е. найдется такое $x_j \in \bar{Y}$, что $M(x_i, \dots, x_j) = 1$ ($x_i \in Y$).

Подмножество состояний Y называется *начальным*, если для любого $x_j \in \bar{Y}$ не существует маршрута, соединяющего это состояние с каким-либо состоянием $x_i \in Y$:

$$M(x_j, \dots, x_i) = 0 \quad (x_i \in Y, x_j \in \bar{Y})$$

и, с другой стороны, подмножество Y является *незамкнутым*. Если в какой-либо момент времени t известно, что система не находится в начальном подмножестве состояний, то она никогда туда не вернется.

Подмножество состояний Y называется *транзитивным*, если оно является незамкнутым и для любого состояния $x_i \in Y$ найдется хотя бы одно такое состояние $x_j \in \bar{Y}$, что $M(x_j, \dots, x_i) = 1$.

При исследовании различных систем потребуется анализировать процессы блуждания системы по состояниям подмножества $Y \subset X$ и в связи с этим составлять ориентированные графы для этих подмножеств состояний Y . Введем несколько обозначений.

Ориентированным подграфом $G(Y)$ состояний подмножества Y называется такая часть ориентированного графа $G(X)$, множество вершин которого равно Y , а ребро $R(x_i, x_j)$ этого подграфа $G(Y)$ равно ребру графа $G(X)$, если $x_i \in Y$ и $x_j \in Y$. Другими словами, ребро $R(x_i, x_j)$ подграфа $G(Y)$ остается таким же, как и ребро графа $G(X)$, если начальная и конечная вершины этого ребра принадлежат множеству Y .

Преобразованным ориентированным подграфом $G(Y)$ состояний подмножества Y называется такая часть ориентированного графа $G(X)$, множество вершин которого равно Y , а хотя бы одно ребро $R(x_i, x_j)$ этого подграфа $G(Y)$ не равно ребру графа $G(X)$, если $x_i \in Y$ и $x_j \in Y$, т. е. часть ребер «преобразуются» (либо исключаются, либо вводятся новые).

2.2. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным состоянием. Пуассоновские потоки событий

В предыдущем параграфе введено соответствие между множеством состояний некоторого дискретного случайного процесса $X(t)$, возможностью перехода из одного состояния в другое и ориентированным графом для этих состояний. В этом параграфе показана связь между марковскими процессами с непрерывным временем и дискретным числом состояний и пуассоновскими потоками событий.

Обозначим $p_{ij}(t_0, \tau)$ условную вероятность того, что в момент времени $t = t_0 + \tau$ система будет в состоянии x_j , если в момент t_0 она была в состоянии x_i .

Дискретный случайный процесс называется *марковским*, если вероятность $p_{ij}(t_0, \tau)$ зависит только от указанных в обозначении вероятности параметров: в каком состоянии x_i была система в момент t_0 и в какое состояние x_j система должна попасть в момент $t_0 + \tau$.

Другими словами, все вероятностные характеристики марковского случайного процесса в будущем ($t > t_0$) зависят лишь от того, в каком состоянии x_i система находится в настоящий момент времени t_0 и не зависит от того, каким образом этот процесс протекал в прошлом до момента t_0 .

Различают два типа марковских случайных процессов: с дискретным временем и с непрерывным временем [20, 21, 23].

Марковским случайным процессом с дискретным временем называется процесс, у которого переходы из одного состояния в другое возможны в строго определенные, заранее известные, неслучайные моменты

времени $t_1, t_2, \dots, t_k$. Такие процессы весьма редко встречаются при рассмотрении различных прикладных задач, связанных с анализом эффективности систем или боевых действий. Поэтому мы не будем их анализировать.

Марковским случайным процессом с непрерывным временем называется процесс, у которого переход из одного состояния x_i в другое (соседнее) состояние x_j возможен в любой момент времени t .

Марковские случайные процессы с непрерывным временем тесно связаны с пуассоновскими потоками. Можно доказать следующее утверждение: если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются пуассоновскими, то случайный процесс, протекающий в системе, будет марковским с непрерывным временем. Справедливо и обратное утверждение: если процесс, протекающий в системе, является марковским с непрерывным временем, то все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются пуассоновскими (последнее утверждение справедливо, если ограничиться рассмотрением только ординарных потоков событий).

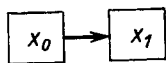


Рис. 2.6.

Докажем прямое утверждение. Для этого, очевидно, достаточно рассмотреть систему, состоящую из двух состояний: x_0 и x_1 — которая может переходить только из состояния x_0 в состояние x_1 под воздействием пуассоновского потока событий с интенсивностью $\lambda(t)$. Ориентированный граф состояний такой системы показан на рис. 2.6.

Обозначим $p(t|\tau)$ — условную вероятность того, что система в момент времени t находится в состоянии x_0 , вычисляемую при условии, что в момент $\tau < t$ ($\tau \geq 0$) она находилась в этом же состоянии. Если процесс, протекающий в такой системе, марковский, то по определению имеет место следующее равенство:

$$p(t+s|0) = p(s|0)p(t+s|s) = p(t|0)p(t+s|t), \quad (2.2.1)$$

справедливое для любых $s > 0$ и $t > 0$. Покажем, что это равенство имеет место, если поток, переводящий систему из состояния x_0 в состояние x_1 , является пуассоновским.

По известному правилу [32, 11] для рассматриваемого случая можно составить следующее дифференциальное уравнение для вероятности $p(t|0)$:

$$dp(t|0)/dt = -\lambda(t)p(t|0). \quad (2.2.2)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$p(t|0) = \exp - \int_0^t \lambda(t) dt. \quad (2.2.3)$$

Введем следующие обозначения:

$$\int_0^t \lambda(t) dt = \Lambda_0(t), \quad \int_t^{t+s} \lambda(t) dt = \Lambda_t(s+t). \quad (2.2.4)$$

С учетом принятых обозначений имеем:

$$p(t|0) = e^{-\Lambda_0(t)},$$

$$p(t+s|0) = e^{-\Lambda_0(t+s)} = e^{-\Lambda_0(t)} e^{-\Lambda_t(t+s)} = e^{-\Lambda_0(s)} e^{-\Lambda_t(t+s)}. \quad (2.2.5)$$

Решая уравнение (2.2.2) при соответствующих начальных условиях, можно убедиться в том, что

$$p(t+s|s) = e^{-\Lambda_s(s+t)}. \quad (2.2.6)$$

Формулы (2.2.3)—(2.2.6) доказывают справедливость утверждения о том, что рассматриваемый процесс является марковским с непрерывным временем, т. е.

$$p(t+s|0) = p(s|0)p(t+s|s) = p(t|0)p(t+st).$$

Заметим, что основанием для такого утверждения явилось дифференциальное уравнение (2.2.2).

Для доказательства обратного утверждения прологарифмируем обе части равенства (2.2.1), при этом будем предполагать, что имеет место нетривиальный случай, когда вероятность пребывания в состоянии X отлична от нуля:

$$\begin{aligned} \ln p(s+t|0) &= \ln p(s|0) + \ln p(t+s|s) = \\ &= \ln p(t|0) + \ln p(t+s|t). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Введем еще одно обозначение

$$\ln p(t|\tau) = f(t, \tau) \quad (0 \leq \tau \leq t). \quad (2.2.8)$$

Разобьем интервал $s+t$ на n малых равных интервалов, каждый из которых имеет длину Δt . На основании равенства (2.2.7) и обозначения (2.2.8) можно записать следующее выражение для функции $f(t, 0)$:

$$f(t, 0) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln p(k\Delta t + \Delta t | k\Delta t) \quad (n\Delta t = t). \quad (2.2.9)$$

Рассмотрим предел правой части при $\Delta t \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). По определению это есть интеграл от некоторой функции, которую обозначим « $-\lambda(t)$ »:

$$f(t, 0) = - \int_0^t \lambda(t) dt. \quad (2.2.10)$$

Точно так же можно показать, что

$$f(t, \tau) = - \int_{\tau}^t \lambda(t) dt. \quad (2.2.11)$$

С учетом полученных выражений (2.2.10) и (2.2.11) и обозначения (2.2.8) выражение (2.2.1) примет такой вид:

$$p(s+t|0) = \exp - \int_0^{t+s} \lambda(t) dt = \exp - \int_0^s \lambda(t) dt \exp - \int_s^{t+s} \lambda(t) dt. \quad (2.2.12)$$

Продифференцируем обе части выражения (2.2.12):

$$dp(s+t|0)/dt = -\lambda(t+s) \exp - \int_0^{t+s} \lambda(t) dt = -\lambda(t+s) p(s+t|0). \quad (2.2.13)$$

Таким образом, мы показали, что функциональное уравнение (2.2.1) эквивалентно дифференциальному уравнению (2.2.13), которое с точностью до обозначения совпадает с дифференциальным уравнением (2.2.2), справедливым в том случае, если поток, переводящий систему

из состояния x_0 в состояние x_1 , является пуассоновским. Тем самым мы доказали и обратное утверждение.

В частном случае, когда интенсивность пуассоновского потока, переводящего систему из состояния x_0 в состояние x_1 , постоянная [$\lambda(t) = \lambda$], имеем [см. (2.2.3)]

$$p(t|0) = e^{-\lambda t}. \quad (2.2.14)$$

Следовательно, если на состояние воздействует простейший поток событий интенсивностью λ , то время пребывания системы в состоянии x_0 распределено по показательному закону с параметром λ . Естественно, что справедливо и обратное утверждение: если время пребывания рассматриваемой системы в состоянии x_0 распределено по показательному закону с параметром λ , то процесс марковский, а поток событий, под воздействием которого процесс переходит из этого состояния, простейший с интенсивностью λ . Доказательство этого частного случая имеется в [22].

В этом случае среднее время (математическое ожидание времени) пребывания системы в состоянии x_0 будет равно:

$$m_{x_0} = 1/\lambda. \quad (2.2.15)$$

Для сведения произвольного процесса к марковскому с непрерывным временем достаточно принять в нем все потоки событий пуассоновскими. Пуассоновский поток определяется исчерпывающим образом своей интенсивностью. Следовательно, для сведения произвольного процесса к марковскому с непрерывным временем нужно определить интенсивности всех потоков событий, переводящие систему из состояния в состояние, и считать, что на систему воздействуют пуассоновские потоки событий с известными интенсивностями. Иногда удобнее оперировать со средним временем пребывания системы в том или ином состоянии. Это среднее время может изменяться со временем $m_x(t)$. В этом случае мгновенная интенсивность потока событий, переводящего систему из состояния x , будет определяться по формуле

$$\lambda_x(t) \approx 1/m_x(t). \quad (2.2.16)$$

Здесь уместно обратить внимание на то, что пуассоновские и близкие к ним по структуре потоки событий встречаются чаще всего на практике. Это объясняется тем, что, как правило, имеют место и суммирование, и разрежение потоков, а пуассоновские потоки событий являются предельными как в случае суммирования нескольких потоков, так и в случае случайного разрежения этих потоков [14, 32]. Поэтому описание различных (исследуемых) систем и операций с помощью марковских случайных процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями является достаточно точным, по крайней мере, соответствует точности исходной информации. В дальнейшем марковский случайный процесс с непрерывным временем и дискретным числом состояний будем называть «марковским процессом».

2.3. Размеченный граф состояний системы.

Система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний

В предыдущем параграфе было показано, что марковский случайный процесс возможен тогда, когда все потоки событий, переводящие процесс из состояния в состояние, являются пуассоновскими. Пуассо-

новый поток событий, переводящий систему из состояния x_i в состояние x_j , характеризуется одной функцией: интенсивностью потока событий $\lambda_{i,j}(t)$, которая может быть *любой* неотрицательной функцией времени. Таким образом, исчерпывающей характеристикой марковского случайного процесса, имеющего $n+1$ состояние ($x_0, x_1, \dots, x_n$), является квадратная матрица интенсивностей $\|\lambda(t)\|$ порядка $(n+1, n+1)$, элементами которой являются интенсивности пуассоновских потоков $\lambda_{i,j}(t)$, при этом $\lambda_{i,i}(t) \equiv 0$ ($i = \overline{0, n}$):

$$\|\lambda\| = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{0,1} & \dots & \lambda_{0,i} & \dots & \lambda_{0,j} & \dots & \lambda_{0,n} \\ \lambda_{1,0} & 0 & \dots & \lambda_{1,i} & \dots & \lambda_{1,j} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{i,0} & \lambda_{i,1} & & 0 & & \lambda_{i,j} & & \lambda_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{j,0} & \lambda_{j,1} & & \lambda_{j,i} & & 0 & & \lambda_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{n,0} & \lambda_{n,1} & \dots & \lambda_{n,i} & & \lambda_{n,j} & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.1)$$

Этой матрице интенсивностей $\|\lambda\|$ соответствует ориентированный граф состояний $G(X)$, в котором размер ребра, связывающего состояние x_i с состоянием x_j , равен интенсивности потока событий $\lambda_{i,j}(t)$. Если интенсивность $\lambda_{i,j}(t) \equiv 0$, то на графе $G(X)$ ребра, соединяющего состояние x_i с состоянием x_j , не будет. Граф $G(X)$, на котором, помимо направлений перехода, указаны и интенсивности потоков событий, будем называть *размеченным* графом состояний.

Каждому размеченному графу состояний соответствует система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний. Правило составления этих уравнений по размеченному графу состояний впервые было сформулировано в [9] и изложено в [11, 32]. В этом параграфе изложен алгоритм решения этих дифференциальных уравнений, который удобен при разработке программы решения уравнений на ЭВМ.

На основании правила решения дифференциальных уравнений для вероятностей состояний можно записать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$dp_i(t)/dt = - \sum_{j=0}^n \lambda_{i,j} p_i(t) + \sum_{j=0}^n \lambda_{j,i} p_j(t). \quad (2.3.2)$$

Зависимость интенсивностей потоков событий от времени для сокращения записи опущена.

Решение системы дифференциальных уравнений (2.3.2) — это решение известной задачи Коши, которое в данных условиях существует [5, 35, 48].

Для формализации правила составления и решения системы дифференциальных уравнений (2.3.2) введем в рассмотрение:

1) *матрицу-столбец* $\|p(t)\|$ *вероятностей состояний* порядка $(n+1, 1)$, элементы которой представляют искомые вероятности состояний мар-

КОВСКОГО ПРОЦЕССА:

$$\|p(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix} \right\| \quad (t \geq 0); \quad (2.3.3)$$

2) *матрицу-строку* $\|\lambda_{x,i}\|$ порядка $(1, n+1)$, элементы которой равны элементам i -го столбца матрицы интенсивности $\|\lambda\|$:

$$\|\lambda_{i,x}\| = \|\lambda_{i,0}; \lambda_{i,1}; \dots; \lambda_{i,j}; \dots; \lambda_{i,n}\|; \quad (2.3.4)$$

3) *матрицу-строку* $\|\lambda_{ix}\|$ порядка $(1, n+1)$, элементы которой равны элементам i -й строки матрицы интенсивностей $\|\lambda\|$:

$$\|\lambda_{i,x}\| = \|\lambda_{i,0}; \lambda_{i,1}; \dots; \lambda_{i,j}; \dots; \lambda_{i,n}\|; \quad (2.3.5)$$

4) *матрицу-строку* $\|i\|$ порядка $(1, n+1)$, в которой все элементы равны нулю, кроме одного, равного единице и стоящего на $(i+1)$ -м месте:

$$\|i\| = \left\| \underbrace{0, 0, \dots, 0}_i, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-i} \right\| \quad (i = \overline{0, n}); \quad (2.3.6)$$

5) *единичную матрицу-столбец* $\|E\|$ порядка $(n+1, 1)$:

$$\|E\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\|. \quad (2.3.7)$$

Обозначим произведение матрицы $\|A\|$ справа на матрицу $\|B\|$:

$$\|A\| \times \|B\|, \quad (2.3.8)$$

а произведение матрицы $\|A\|$ на скаляр α : $\alpha\|A\|$. Тогда систему уравнений (2.3.2) можно записать следующим образом:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -[\|i\| \times \|p(t)\|] [\|\lambda_{ix}\| \times \|E\|] + \|\lambda_{xi}\| \times \|p(t)\| \quad (i = \overline{0, n}). \quad (2.3.9)$$

Система уравнений (2.3.9) интегрируется при начальных условиях, заданных матрицей-столбцом начальных условий

$$\|p(0)\|, \quad (2.3.10)$$

элементы которой удовлетворяют двум условиям:

$$\|i\| \times \|p(0)\| = p_i(0) \geq 0, \quad (2.3.11)$$

$$\|p(0)\| \times \|E\| = 1. \quad (2.3.12)$$

Условие (2.3.12) называется нормировочным.

Для любого конечного числа состояний $n+1$ решение системы уравнений (2.3.9) для любого момента времени t при начальных условиях (2.3.10) удовлетворяет двум условиям:

$$\|i\| \times \|p(t)\| = p_i(t) \geq 0, \quad (2.3.13)$$

$$\|p(t)\| \times \|E\| = 1. \quad (2.3.14)$$

Таким образом, для составления и решения системы дифференциальных уравнений (2.3.2) нужно иметь квадратную матрицу интенсивностей $\|\lambda\|$ (2.3.1) и матрицу-столбец начальных условий $\|p(0)\|$ (2.3.10).

Обозначим $T_{i,x}$ такое преобразование, которое ставит в соответствие каждой квадратной матрице $\|\lambda\|$ матрицу-строку, элементы которой равны элементам i -й строки матрицы $\|\lambda\|$:

$$T_{i,x}\|\lambda\| = \|\lambda_{i,x}\|, \quad (2.3.15)$$

а $T_{x,i}$ — такое преобразование, которое ставит в соответствие каждой квадратной матрице $\|\lambda\|$ матрицу-строку, элементы которой равны элементам i -го столбца матрицы $\|\lambda\|$:

$$T_{x,i}\|\lambda\| = \|\lambda_{x,i}\|. \quad (2.3.16)$$

Тогда алгоритм составления и решения дифференциальных уравнений марковского процесса может быть следующий:

1) составляется квадратная *матрица интенсивностей* $\|\lambda\|$ (2.3.1), т. е. либо дается набор $(n+1) \times n$ функций, либо указывается алгоритм получения этих функций. Матрица $\|\lambda\|$ вводится в память ЭВМ;

2) составляется и вводится в память ЭВМ матрица-столбец начальных условий $\|p(0)\|$;

3) составляются алгоритм и программа преобразования $T_{i,x}$;

4) составляются алгоритм и программа преобразования $T_{x,i}$;

5) составляется программа ввода в ЭВМ матрицы-строки $\|i\|$;

6) составляется программа ввода в ЭВМ матрицы-столбца $\|E\|$;

7) составляется программа умножения матрицы-строки порядка $(1, n+1)$ справа на матрицу-столбец порядка $(n+1, 1)$;

8) производится умножение матриц:

$$\|i\| \times \|p(t)\| = p_i(t); \quad (2.3.17)$$

9) определяется матрица $\|\lambda_{i,x}\|$:

$$\|\lambda_{i,x}\| = T_{i,x}\|\lambda\|; \quad (2.3.18)$$

10) производится умножение матриц:

$$\|\lambda_{i,x}\| \times \|E\| = \sum_{i=0}^n \lambda_i, j = \lambda_i; \quad (2.3.19)$$

11) производится умножение скаляров и результат умножается на (-1) :

$$-p_i(t)\lambda_i; \quad (2.3.20)$$

12) определяется матрица $\|\lambda_{x,i}\|$:

$$\|\lambda_{x,i}\| = T_{x,i}\|\lambda\|; \quad (2.3.21)$$

13) производится умножение матриц:

$$\|\lambda_{x,i}\| \times \|p(t)\|; \quad (2.3.22)$$

14) составляются алгоритм и программа решения системы дифференциальных уравнений:

$$dp_i(t)/dt = -p_i(t)\lambda_i + \|\lambda_{x,i}\| \times \|p(t)\| \quad (i=0, n). \quad (2.3.23)$$

Основной проблемой при составлении программы решения системы дифференциальных уравнений (2.3.23) на ЭВМ является алгоритм выбора шага интегрирования. Шаг интегрирования зависит от величины коэффициентов, стоящих при переменных, которые отыскиваются, т. е. зависят от интенсивностей потоков событий $\lambda_{i,j}(t)$. Опыт решения подобных задач показывает, что переменный шаг интегрирования $h(t+1)$ можно найти из следующих условий:

$$h(t+1) = 1/3\dot{p}_i^{(m)}(t) \quad (t=0, 1, 2, \dots), \quad (2.3.24)$$

где

$$\dot{p}_i^{(m)}(t) = dp_i^{(m)}(t)/dt = \max_{0 \leq i \leq n} [dp_i(t)/dt]. \quad (2.3.25)$$

Выбор шага интегрирования по формулам (2.3.24) и (2.3.25) обеспечивает приемлемую точность и относительно небольшое время решения задачи на ЭВМ.

2.4. Эргодическое свойство марковского случайного процесса. Стационарный режим

Существуют марковские случайные процессы, обладающие эргодическим свойством, которое состоит в том, что по истечении достаточно продолжительного промежутка времени (теоретически при $\tau \rightarrow \infty$) вероятности состояний системы практически не зависят от того, в каком состоянии система находилась в начальный момент при $t=0$, и не зависят от самого промежутка времени τ [16, 27, 29]. Другими словами, в системах, обладающих эргодическим свойством, должно осуществляться статистически однородное блуждание по состояниям.

Рассмотрим, какими свойствами должен обладать размеченный граф состояний системы, чтобы процесс, протекающий в такой системе, обладал эргодическим свойством.

Для того чтобы процесс, протекающий в системе, был однородным, нужно, чтобы все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, были простейшими, т. е. чтобы элементы матрицы интенсивностей не изменялись во времени. В дальнейшем матрицу интенсивностей, у которой все ее элементы постоянны, будем называть *простейшей матрицей*. Марковский случайный процесс, отвечающий такой матрице, назовем *простейшим марковским процессом*. Размеченный граф состояний системы, у которого все ребра являются постоянными, будем также называть *простейшим размеченным графом состояний*.

Очевидно, что однородности процесса еще недостаточно для того, чтобы процесс обладал эргодическим свойством. Нужно, чтобы процесс еще обладал свойством транзитивности, т. е. достаточно хорошей «перемешиваемостью». При рассмотрении конечного числа состояний в системе свойство транзитивности будет выполняться, если между каждой парой состояний системы

x_i и x_j ($i=\overline{0, n}$; $j=\overline{0, n}$) существует маршрут $M(x_i, \dots, x_j) = 1$
($i=\overline{0, n}$; $j=\overline{0, n}$).

Последнее утверждение равносильно тому, что любое подмножество состояний Y (в том числе и любое отдельное состояние) рассматриваемой системы X обладало транзитивным свойством.

В случае бесконечного числа состояний этого еще недостаточно, так как процесс может уходить из какого-то состояния «в бесконечность» и оттуда возвращаться в это состояние с вероятностью, меньшей, чем единица. В этом случае математическое ожидание времени пребывания в какой-то другой группе состояний (см. гл. 3) будет равно бесконечности и процесс не будет обладать эргодическим свойством [50—52].

В большинстве примеров этой работы мы будем ограничиваться только системами с конечным числом состояний. Для таких систем эргодическое свойство будет выполняться, если: 1) система имеет простейший размеченный граф состояний; 2) между любыми двумя состояниями системы существует маршрут.

В дальнейшем размеченный граф состояний, обладающий этим свойством, назовем *эргодическим* и систему, описываемую с помощью такого графа, будем тоже называть *эргодической*.

При исследовании эргодических систем широко применяется операторный метод решения дифференциальных уравнений (2.3.2) для отыскания вероятностей состояний $p_i(t)$ [47, 19]. Обозначим $\pi_i(s)$ изображение по Карсону — Хэвисайду вероятности $p_i(t)$:

$$\pi_i(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} p_i(t) dt. \quad (2.4.1)$$

Тогда система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний (2.3.2) соответствует системе алгебраических уравнений для изображения $\pi_i(s)$:

$$s\pi_i(s) = - \sum_{j=0}^n \lambda_{ij}\pi_j(s) + \sum_{j=0}^n \lambda_{ji}\pi_j(s) + p_i(0)s \quad (i = \overline{0, n}). \quad (2.4.2)$$

Решив эту систему относительно неизвестных $\pi_i(s)$, можно по формуле обращения

$$p_i(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{s-iz}^{s+iz} e^{st} \frac{\pi_i(s)}{s} ds, \quad (2.4.3)$$

найти искомые вероятности.

При исследовании стационарного режима вероятности p_i , определяемые из выражения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i, \quad (2.4.4)$$

проще отыскивать из системы линейных однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^n \lambda_{ij} p_j = \sum_{j=0}^n \lambda_{ji} p_j,$$

откуда

$$p_i = \sum_{j=0}^n \lambda_{ji} p_j \left/ \sum_{j=0}^n \lambda_{ji} \right. \quad (2.4.5)$$

Заметим, что для эргодической системы с конечным числом состояний $n+1$ решение уравнений (2.4.5) всегда существует и является единственным.

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ В ГРУППЕ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО МАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

3.1. Определение закона распределения времени пребывания в группе состояний в общем случае

Рассмотрим дискретный марковский случайный процесс с непрерывным временем, состояния которого составляют множество $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. В общем случае не исключается и возможность того, что число состояний $n = \infty$. Из множества состояний X выделяется некоторое подмножество состояний $Y = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_i, x_n\}$ ($Y \subset X$), которое не является замкнутым и, в свою очередь, не содержит в себе замкнутых подмножеств (рис. 3.1).

Другими словами, если известно, что в какой-то момент $t=0$ процесс находился в одном из состояний $x_i \in Y$, то при $t \rightarrow \infty$ процесс хотя бы один раз перейдет из подмножества состояний Y в подмножество состояний $Z = (X - Y)$ ($Z \subset X$), которое не является пустым: $\lim_{t \rightarrow \infty} p_y(t) = 0$, где

$p_y(t)$ — вероятность непрерывного пребывания системы в момент времени t в состояниях подмножества Y [$p_y(0) = 1$]. Следовательно, в составе подмножества состояний Y нет отдельных состояний или группы состояний без выхода. Состояния $(x_0, x_1, \dots, x_{i-1})$ составляют подмножества $Z = X - Y$, а состояния $(x_i, \dots, x_n)$ составляют множество $Y = X - Z$ (рис. 3.2).

Известно, что в момент $t=0$ дискретный марковский случайный процесс находился в подмножестве состояний Y

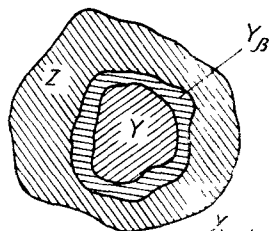


Рис. 3.1.

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i(0) = 1. \quad (3.1.1)$$

Знак $\sim$ над обозначениями вероятностей поставлен для того, чтобы отличить эти вероятности от обозначения вероятностей пребывания процесса в любом состоянии x , принадлежащем множеству Y .

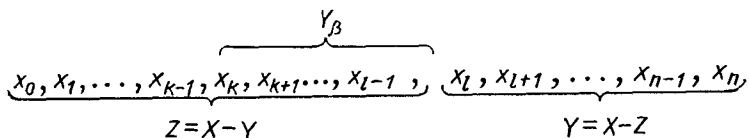


Рис. 3.2.

Обозначим T случайную величину — время блуждания процесса по состояниям подмножества Y до первого выхода из этого подмножества. Ввиду того что само подмножество состояний Y не является замкнутым и не содержит в себе замкнутых подмножеств, процесс при $t \rightarrow \infty$ покинет подмножество состояний Y . В нашем случае случайное время T отсчитывается от момента $t=0$.

Из множества состояний $Z = X - Y$ выделим подмножество состояний $Y_\beta \{x_k, \dots, x_{l-1}\} (Y_\beta \subset Z)$. Не исключается и случай, когда $Y_\beta = Z$ (в этом случае $k=0$). К состояниям подмножества $Y_\beta \subset Z$ отнесем лишь те, в которые возможен *непосредственный* переход из состояний подмножества Y в состояния подмножества $Z = X - Y$, т. е. для любого состояния $x_j \in Y_\beta$ найдется хотя бы одно такое состояние $x_i \in Y$, что $R(x_i; x_j) = 1$.

Подмножество состояний Y_β является „входными воротами“ подмножества состояний Z , через которые процесс блуждания переходит из подмножества состояний Y в подмножество состояний Z . Другими словами, к состояниям $(x_k, \dots, x_{l-1})$, которые составляют подмножество Y_β , отнесем лишь те состояния подмножества $Z = X - Y$, для которых выполняется условие

$$\lambda_{j,i}(t) \neq 0 \quad (i = l, l+1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, l-1; t \geq 0) \quad (3.1.2)$$

(см. рис. 3.2.)

Назовем подмножество $Y_\beta \sim \beta$ -окрестностью подмножества Y . Тогда время T блуждания процесса по состояниям подмножества Y до первого выхода из него равно времени, которое отсчитывается от начала блуждания ($t=0$) до первого попадания процесса в β -окрестность подмножества Y , т. е. в одно из состояний подмножества Y_β .

Очевидно, что закон распределения случайной величины T не изменится, если все состояния множества Y_β сделать поглощающими (концевыми). Следовательно, при нахождении закона распределения случайной величины T можно ограничиться рассмотрением процесса блуждания системы по преобразованным состояниям множества $Y + Y_\beta$. Преобразование состоит в том, что подмножество Y_β образуется только из поглощающих состояний.

Для того чтобы состояния подмножества $Y_\beta = \{x_k, \dots, x_{l-1}\}$ были поглощающими, достаточно положить

$$\tilde{\lambda}_{j,i}(t) \equiv 0 \quad (3.1.3)$$

для всех $j = k, \dots, l-1$. В этом случае выход из подмножества состояний Y_β будет невозможен.

Таким образом, для определения закона распределения случайной величины T достаточно рассмотреть процесс блуждания по преобразованным состояниям подмножества $Y_\beta + Y$, при этом все состояния подмножества Y_β состоят только из поглощающих состояний (рис. 3.3). Это утверждение равносильно тому, что рассматривается преобразованный подграф состояний подмножества $Y + Y_\beta$. При этом все ребра, выходящие из вершин графа, составляющих подмножество состояний Y_β , исключаются (преобразуются). Преобразование сводится к тому, что вершины $(x_k, \dots, x_{l-1})$ не имеют выходящих ребер.

Функция распределения случайной величины T по определению равна:

$$F(t) = p(T < t). \quad (3.1.4)$$

В нашем случае эта вероятность равна вероятности того, что к моменту времени $t (t > 0)$ процесс уже покинет состояния, образующие множество Y и, следовательно, попадает в состояния, образующие подмножество Y_β , так как в преобразованном подмножестве состояний $Y + Y_\beta$ он (процесс) никуда (кроме подмножества состояний Y_β), в конце концов, попасть не может. Ввиду того что подмножество состояний Y_β состоит только из поглощающих состояний, процесс, попав однажды в одно из состояний Y_β , так там и останется.

Следовательно, функция распределения времени T равна вероятности того, что к моменту времени t процесс блуждания окажется в одном из состояний, принадлежащих подмножеству Y_β для преобразованного подмножества состояний $Y + Y_\beta$.

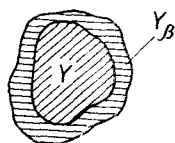


Рис. 3.3.

$$F(t) = p(T < t) = \sum_{x \in Y_\beta} \tilde{p}_x(t) = \sum_{j=k}^{l-1} \tilde{p}_j(t), \quad (3.1.5)$$

где индекс суммирования распространяется на все состояния подмножества $Y_\beta \sim \beta$ -окрестность подмножества Y .

Найдем плотность распределения случайной величины T

$$\dot{f}(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \sum_{j=k}^{l-1} \dot{\tilde{p}}_j(t). \quad (3.1.6)$$

С другой стороны, на основании общего правила составления системы дифференциальных уравнений для вероятностей состояний с учетом (3.1.3) имеем

$$\dot{\tilde{p}}_j(t) = \sum_{i=l}^n \lambda_{i,j}(t) \tilde{p}_i(t) \quad (j = k, k+1, \dots, l-1). \quad (3.1.7)$$

Таким образом, плотность распределения случайной величины T можно найти из выражения

$$\dot{f}(t) = \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^n \lambda_{i,j}(t) \tilde{p}_i(t). \quad (3.1.8)$$

Для отыскания вероятностей $\tilde{p}_i(t)$ достаточно проинтегрировать систему уравнений для вероятностей пребывания процесса в состоянии подмножества Y с учетом того, что переход из подмножества состояний Y возможен только в подмножество состояний Y_β и что последнее подмножество состоит из одних поглощающих состояний

$$\dot{\tilde{p}}_i(t) = - \sum_{h=l}^n \lambda_{i,h}(t) \tilde{p}_i(t) - \sum_{h=k}^{l-1} \lambda_{i,h}(t) \tilde{p}_i(t) + \sum_{h=l}^n \lambda_{h,i}(t) \tilde{p}_h(t), \quad (3.1.9)$$

где $i = l, l+1, \dots, n$.

Начальными условиями для этой системы дифференциальных уравнений являются условия (3.1.1).

Итак, для определения закона распределения времени блуждания процесса в незамкнутом подмножестве состояний Y до первого выхода за пределы этого подмножества, достаточно проинтегрировать систему

дифференциальных уравнений для вероятностей состояний (3.1.9) при начальных условиях (3.1.1).

Заметим, что таким образом можно решать задачу для любого дискретного марковского случайного процесса с непрерывным временем, для которого подмножество состояний Y не является замкнутым и не содержит замкнутых подмножеств.

В случае бесконечного (счетного) числа состояний подмножества Y полученное решение справедливо лишь в том случае, если процесс блуждания по состояниям подмножества Y при $t \rightarrow \infty$ с вероятностью, равной единице, покинет это подмножество. Математически это условие можно сформулировать следующим образом [см. (3.1.5) и (3.1.8)]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=k}^{l-1} p_j(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^{\infty} \int_0^t \lambda_{ij}(t) \tilde{p}_i(t) dt = 1. \quad (3.1.10)$$

Иногда можно рассматривать и более жесткое условие, состоящее в том, что математическое ожидание времени T пребывания в подмножестве состояний Y должно быть конечным. В этом случае должно выполняться следующее неравенство:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \left[1 - \sum_{j=k}^{l-1} \tilde{p}_j(\tau) \right] d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \left[1 - \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^{\infty} \int_0^{\tau} \lambda_{ij}(\xi) p_i(\xi) d\xi \right] d\tau < \infty. \quad (3.1.11)$$

При этом также возможен случай, когда подмножество состояний Y_p является бесконечным.

Даже когда незамкнутое подмножество состояний Y является конечным и для любого t выполняется неравенство (3.1.2), неравенства (3.1.10) и (3.1.11) могут не выполняться. Поэтому полученный закон распределения (3.1.5) нужно проверять, чтобы выяснить, выполняется ли условие (3.1.10) или (3.1.11).

Пример 3.1.1. Показать, что если из каждого состояния подмножества Y возможен непосредственный переход в одно из состояний подмножества Z под воздействием потока событий, интенсивность которого постоянна и равна μ , то закон распределения времени пребывания в состояниях подмножества Y является показательным с параметром μ независимо от того, под воздействием каких потоков событий процесс переходит из состояния в состояние внутри подмножества Y .

Решение. Из условий примера следует, что $\lambda_{i,j} = \mu$ при $i=l, \dots, n$ и $j=k, \dots, l-1$. Следовательно [см. (3.1.8)],

$$\dot{f}(t) = \sum_{i=l}^n \sum_{j=k}^{l-1} \lambda_{i,j} \tilde{p}_i(t) = \mu \sum_{i=l}^n \tilde{p}_i(t) = \mu p_Y(t),$$

где $p_Y(t) = \sum_{i=l}^n \tilde{p}_i(t) = P(X(t) \subset Y)$.

есть вероятность того, что к моменту времени t система будет в состояниях, принадлежащих подмножеству Y . Для нахождения производной этой вероятности сложим левые и правые части уравнений (3.1.9):

$$\dot{p}_Y(t) = \sum_{i=l}^n \dot{\tilde{p}}_i(t) = \sum_{i=l}^n \left\{ - \sum_{h=l}^n \lambda_{i,h} \tilde{p}_i(t) - \tilde{p}_i(t) \mu + \sum_{h=l}^n \lambda_{h,i} \tilde{p}_h(t) \right\}.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$\dot{p}_Y(t) = -\mu p_Y(t) + \left[\sum_{i=l}^n \sum_{h=l}^n \lambda_{hi} \tilde{p}_h(t) - \sum_{i=l}^n \sum_{h=l}^n \lambda_{ih} \tilde{p}_i(t) \right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, очевидно, равно нулю. Таким образом, окончательно получаем $\dot{p}_y(t) = -\mu p_y(t)$. Начальным условием для интегрирования этого уравнения является условие (3.1.1)

$$\sum_{l=1}^n \tilde{p}_l(0) = p_y(0) = 1.$$

Решение полученного дифференциального уравнения при этом начальном условии имеет вид $p_y(t) = e^{-\mu t}$. Подставляя это решение в выражение для плотности распределения, получаем $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ ($t > 0$), что и требовалось доказать.

Пример 3.1.2. Известно, что из каждого состояния подмножества Y можно непосредственно попасть в состояния (не обязательно одно) подмножества Z . При этом суммарная интенсивность потоков событий, переводящих процесс из каждого состояния подмножества Y в состояния подмножества Z , не зависит от времени и равна μ . Показать, что и в этом случае закон распределения времени пребывания в состояниях подмножества Y является показательным с параметром μ .

Решение. Из условий задачи следует, что для любого $i = 1, \dots, n$ выполняется равенство

$$\sum_{j=k}^{l-1} \lambda_{i,j}(t) = \mu \quad (i = 1, \dots, n).$$

В остальном ход решения такой же, как и в предыдущем примере.

Таким образом, условие $\sum_{j=k}^l \lambda_{i,j}(t) = \mu$ ($i = 1, \dots, n$) является достаточным для

того, чтобы закон распределения времени пребывания в состояниях подмножества Y был показательным с параметром μ .

Замечание. Если подмножество Y представляет собой одно состояние и сумма интенсивностей потоков, переводящих процесс из этого состояния, постоянная и равна μ , то закон распределения времени пребывания в этом состоянии является показательным с параметром μ .

Пример 3.1.3. Рассматривается случай, когда подмножество Y состоит из одного поглощающего состояния x_l , из которого возможен переход в состояния множества $Y_\beta = \{x_k, \dots, x_{l-1}\}$,

$$\lambda_{l,j}(t) > 0 \quad (j = k, \dots, l-1).$$

Требуется найти вероятность $\tilde{p}_j$ того, что процесс, начавший блуждание из состояния x_l ($\tilde{p}_l(0) = 1$), перейдет в состояние x_j ($j = k, \dots, l-1$).

Решение. Рассмотрим преобразованное подмножество состояний $Y + Y_\beta$. Преобразование будет состоять в том, что в этом подмножестве состояний оставляются неизменными лишь те связи, которые идут от состояния x_l к состояниям множества Y_β ;

$$\lambda_{j,i}(t) \equiv 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

т. е. все подмножество состояний Y_β будет состоять только из поглощающих состояний.

Составим систему дифференциальных уравнений для такого процесса:

$$\dot{\tilde{p}}_1(t) = -\lambda_1(t) \tilde{p}_1(t),$$

$$\dot{\tilde{p}}_j(t) = \lambda_{l,j}(t) \tilde{p}_l(t) \quad (j = k, \dots, l-1),$$

где $\lambda_l(t) = \sum_{j=k}^{l-1} \lambda_{l,j}(t)$.

Решая эту систему дифференциальных уравнений при начальных условиях

$$\tilde{p}_l(0) = 1, \quad \tilde{p}_j(0) = 0 \quad (j = k, \dots, l-1),$$

найдем вероятности $\tilde{p}_l(t)$ и $\tilde{p}_j(t)$

$$\tilde{p}_l(t) = \exp \left[- \int_0^t \lambda_l(\tau) d\tau \right], \quad \tilde{p}_j(t) = \int_0^t \lambda_{l,j}(\tau) e \left[- \int_0^\tau \lambda_l(\xi) d\xi \right] d\tau.$$

Предел этих вероятностей при $t \rightarrow \infty$ и дает решение поставленной задачи

$$\tilde{p}_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{p}_j(t) \quad (j = k, \dots, l-1).$$

Рассмотрим частный случай, когда все интенсивности потоков постоянны. В этом случае имеем (см. замечание к примеру 3.1.2)

$$\tilde{p}_l(t) = e^{-\lambda_l t}, \text{ где } \lambda_l = \sum_{j=k}^{l-1} \lambda_{l,j}.$$

Тогда

$$\tilde{p}_j(t) = \lambda_{l,j} (\lambda - e^{-\lambda_l t}) / \lambda_l, \text{ откуда } \tilde{p}_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{p}_j(t) = \lambda_{l,j} / \lambda_l,$$

т. е. вероятность перехода из состояния x_l в состояние x_j определяется как отношение интенсивности потока, переводящего процесс из состояния x_l в состояние x_j к суммарной интенсивности потоков, выводящих процесс из состояния x_l .

Пример 3.1.4. Условия такие же, как и в примере 3.1.3. Рассматриваются два случая:

- а) $\lambda_{l,j}(t) = b_j(t)$;
 б) $\lambda_{l,j}(t) = b_j e^{-b_j t} \quad (b_j > 0).$

Решение
 Случай а.

$$\tilde{p}_l(t) = e^{-bt^2/2}; \quad \tilde{p}_j(t) = \frac{b_j}{b} [1 - e^{-bt^2/2}];$$

$$\tilde{p}_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{p}_j(t) = \frac{b_j}{b} \quad (j = k, \dots, l-1);$$

$$\tilde{p}_l = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{p}_l(t) = 0.$$

где $b = \sum_{j=k}^{l-1} b_j$.

Случай б.

$$\tilde{p}_l(t) = e^{-\alpha} e^{\sum_{j=k}^{l-1} e^{-b_j t}};$$

$$\tilde{p}_j(t) = e^{-\alpha} \int_0^t e^{-b_j \tau + \sum_{h=k}^{l-1} e^{-b_h \tau}} d\tau;$$

$$\tilde{p}_l = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{p}_l(t) = e^{-\alpha},$$

где α равно числу состояний в подмножестве Y_β : $\alpha = \sum_{j=k}^{l-1} x_j$.

Таким образом, в рассматриваемом случае, несмотря на то, что для любого $j = k, k+1, \dots, l-1$, и любого $t > 0$ $\lambda_{l,j}(t) > 0$ система с конечной вероятностью никогда не выйдет из состояния x_l .

Если подмножество Y_β состоит только из одного состояния x_k , то

$$\tilde{p}_l(t) = e^{-1} e^{-b_k t} = e^{-1+b_k t},$$

$$\tilde{p}_k(t) = 1 - e^{-1+b_k t}.$$

Пример 3.1.5. Рассмотрим более общий случай по сравнению с предыдущим примером, когда подмножество Y состоит из состояний $x_k, \dots, x_n$ и не является замкну-

тым. Требуется найти вероятность $\tilde{p}_j$ того, что процесс, начавший блуждание из состояний множества

$$Y \left(\sum_{i=l}^n \tilde{p}_j(0) = 1 \right), \text{ попадает в состояние } x_j \in Y_\beta \quad (j = k, \dots, l-1).$$

Решение. Рассмотрим опять преобразованное подмножество состояний $Y + Y_\beta$. Преобразование будет состоять в том, что в подмножестве состояний оставляют неизменными лишь те связи, которые идут от состояний подмножества $Y = \{x_l, \dots, x_n\}$ к состояниям подмножества $Y_\beta = \{x_k, \dots, x_{l-1}\}$, и связи между состояниями множества Y ; остальные связи обрываются:

$$\lambda_{j,i}(t) = 0 \quad (j = k, \dots, l-1; i = 0, \dots, n),$$

т. е. все подмножество состояний Y_β состоит только из поглощающих состояний.

Составим систему дифференциальных уравнений для такого процесса:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i(t) &= - \sum_{h=l}^n \lambda_{i,h}(t) \tilde{p}_i(t) - \sum_{j=k}^{l-1} \lambda_{i,j}(t) \tilde{p}_i(t) + \sum_{h=l}^n \lambda_{h,i}(t) \tilde{p}_h(t) \quad (i = l, \dots, n), \\ \tilde{p}_j(t) &= \sum_{i=l}^n \lambda_{i,j}(t) \tilde{p}_i(t) \quad (j = k, \dots, l-1). \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений при начальных условиях

$\sum_{i=l}^n \tilde{p}_i(0) = 1$, найдем вероятности $\tilde{p}_j(t)$. Предел этих вероятностей при $t \rightarrow \infty$ и будет равен искомым вероятностям:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{p}_j(t) = \tilde{p}_j \quad (j = k, \dots, l-1).$$

3.2. Определение закона распределения времени пребывания в группе состояний для эргодического простейшего процесса

Сузим класс рассматриваемых марковских случайных процессов и ограничимся в этом параграфе рассмотрением только эргодических простейших процессов. Следовательно, при конечном числе состояний множество состояний X состоит только из множества транзитивных состояний и все потоки, переводящие процесс из состояния в состояние, являются простейшими $[\lambda_{i,j}(t) = \lambda_{i,j}]$. При $n = \infty$ необходимо соблюдение специальных условий, при которых процесс будет эргодическим [14]. Будем считать, что эти условия выполняются.

Выделим из множества состояний X любое подмножество Y так, чтобы $X - Y \neq 0$, т. е. чтобы Y не составляло все множество X . Тогда при блуждании процесса по состояниям множества X процесс будет то попадать в состояния, принадлежащие подмножеству Y , то выходить из него и попадать в подмножество состояний $Z = X - Y$. Затем процесс может вернуться обратно в подмножество состояний Y и т. д.

Рассмотрим стационарный режим блуждения, который существует, так как процесс эргодический. Обозначим по-прежнему через T время пребывания процесса в подмножестве состояний Y в стационарном режиме. Это время T отсчитывается от момента перехода процесса из подмножества состояний Z в подмножество состояний Y до момента возвращения в подмножество состояний Z . Другими словами, случайная величина T равна времени однократного пребывания процесса во мно-

жестве состояний Y в ходе случайного блуждания по всем состояниям X после того, как установился стационарный процесс блуждания.

На рис. 3.4 схематически изображена «траектория» блуждания процесса по состояниям множества X . Обозначим случайные моменты перехода из подмножества состояний Z в подмножество состояний Y величинами θ_i ($i=1, 2, \dots$), а случайные моменты очередного возвращения из подмножества состояний Y в подмножество состояний Z — величинами θ'_i ($i=1, 2, \dots$).

Тогда время первого пребывания системы в подмножестве состояний Y будет равно $T_1 = \theta'_1 - \theta_1$, время второго пребывания в подмножестве состояний Y будет равно: $T_2 = \theta'_2 - \theta_2$ и т. д. $T_i = \theta'_i - \theta_i$.

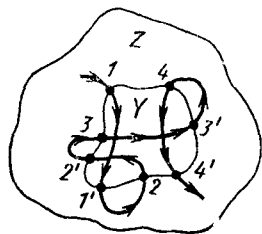


Рис. 3.4.

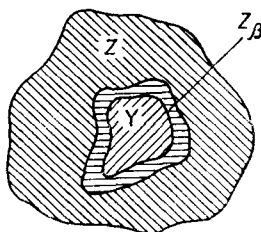


Рис. 3.5.

Если рассматривается стационарный режим блуждания процесса по состояниям X , то совокупность случайных величин $T_1, T_2, \dots$ представляет собой систему независимых, одинаково распределенных случайных величин, закон распределения каждой из которых и требуется найти.

Очевидно, что процесс блуждания по состояниям множества Y может начаться только из состояний, принадлежащих подмножеству состояний $Z_\beta \subset Y$, являющихся β -окрестностью множества Z . Другими словами, начало отсчета времени T приходится на момент первого попадания процесса из состояний, образующих подмножество Z в состояния, образующие подмножество Y , т. е. на момент пересечения «входных ворот» подмножества состояний Y (рис. 3.5).

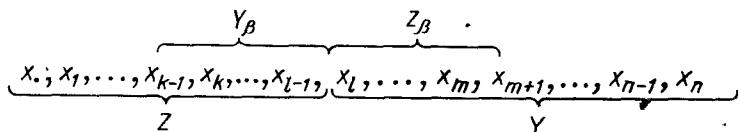


Рис. 3.6.

Обозначим состояния, принадлежащие подмножеству $Z_\beta \sim (x_i, \dots, x_m)$. Схема разбиения всех состояний множества X показана на рис. 3.6. На этой схеме состояния $(x_k, \dots, x_{l-1})$ принадлежат подмножеству состояний Z_β , являющемуся β -окрестностью подмножества состояний Y , определение которого было дано в предыдущем параграфе.

Следовательно, начальные условия для интегрирования системы дифференциальных уравнений типа (3.1.9) для определения закона распределения случайной величины T будут иметь вид

$$\sum_{x \in Z_\beta} \tilde{p}_x(0) = \sum_{i=1}^m \tilde{p}_i(0) = 1. \quad (3.2.1)$$

Эти условия отличаются от условий (3.1.1) тем, что в формуле (3.2.1) перебираются индексы состояний, принадлежащих подмножеству

в Z_β , в то время как в (3.1.1) в общем случае могут перебираться индексы всех состояний подмножества Y .

Следующим этапом при отыскании закона распределения времени T является определение начальных условий (3.2.1).

Для отыскания начальных условий (3.2.1) нас будут интересовать только те блуждания, которые начинаются из состояний, принадлежащих подмножеству Z_β . Преобразуем состояния подмножества Z_β так, чтобы каждое из состояний $(x_l, \dots, x_m)$ оказалось поглощающим. Для этого достаточно положить

$$\tilde{\lambda}_{ij} \equiv 0, \quad (3.2.2)$$

где $i = l, \dots, m$.

Подобное преобразование было проведено в предыдущем параграфе для подмножества состояний Y_β . Теперь проинтегрируем систему дифференциальных уравнений блуждания процесса по преобразованному подмножеству состояний $Z + Z_\beta$, где подмножество Z_β состоит только из поглощающих состояний:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_j(t) &= - \sum_{h=0}^{l-1} \lambda_{jh} \tilde{p}_j(t) + \sum_{h=l}^m \lambda_{jh} \tilde{p}_j(t) + \sum_{h=0}^{l-1} \lambda_{hj} \tilde{p}_h(t) \quad (j = \overline{0, l-1}), \\ \dot{\tilde{p}}_i(t) &= \sum_{j=0}^{l-1} \lambda_{ji} \tilde{p}_j(t) \quad (i = \overline{l, m}). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Эта система дифференциальных уравнений является вспомогательной, необходимой для отыскания начальных условий (3.2.1).

Для стационарного режима можно считать, что с вероятностью p_i процесс блуждания начинается из состояния x_i ($i = 0, 1, \dots, n$), где

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t). \quad (3.2.4)$$

Следовательно, на основании формулы Байеса начальными условиями для вспомогательной системы дифференциальных уравнений (3.2.3) будут

$$\tilde{p}_j = p_j \left/ \sum_{h=0}^{l-1} p_h \right. \quad (j = 0, 1, \dots, l-1), \quad (3.2.5)$$

где величины p_j определяются из условия блуждания процесса по всем состояниям множества X при наличии стационарного режима (см. (3.2.4)).

В результате интегрирования вспомогательной системы дифференциальных уравнений (3.2.3) при начальных условиях (3.2.5) можно получить выражения для вероятностей

$$\tilde{p}_i(t) \quad (i = l, \dots, m). \quad (3.2.6)$$

Так как для преобразованных состояний, входящих в подмножество $Z + Z_\beta$, подмножество Z_β состоит только из поглощающих состояний $(\tilde{x}_l, \dots, \tilde{x}_m)$ и процесс блуждания по всем состояниям множества X является эргодическим, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=l}^m \tilde{p}_i(t) = \sum_{i=l}^m \tilde{p}_i = 1. \quad (3.2.7)$$

$$\tilde{p}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{p}_i(t) \quad (i = l, \dots, m) \quad (3.2.8)$$

и будут являться начальными условиями (3.2.1) для интегрирования системы дифференциальных уравнений типа (3.1.9), с помощью которой можно найти закон распределения случайной величины T .

Таким образом, мы пришли к первоначальной задаче, сформулированной в § 3.1: для определения закона распределения времени пребывания процесса в произвольном подмножестве состояний Y достаточно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (3.1.9) при начальных условиях (3.2.1). Эти начальные условия определяются с помощью интегрирования вспомогательной системы дифференциальных уравнений (3.2.3) при начальных условиях (3.2.5).

Покажем, что для отыскания начальных условий (3.2.1) можно обойтись и без интегрирования системы уравнений (3.2.3). Обоснуем этот факт с помощью операторного метода.

Обозначим $\tilde{\pi}_j(s)$ изображение функции $\tilde{p}_j(t)$. Тогда систему дифференциальных уравнений (3.2.3), интегрируемую при начальных условиях (3.2.5), можно с помощью изображений искомых переменных $\tilde{p}_j(t)$ записать в следующем виде:

$$s \tilde{\pi}_j(s) = - \tilde{\pi}_j(s) \sum_{h=0}^m \lambda_{j,h} + \sum_{h=0}^{l-1} \lambda_{h,j} \tilde{\pi}_h(s) + s \tilde{p}_j(0) \quad (j = 0, 1, \dots, l-1). \quad (3.2.9)$$

Обозначим

$$\sum_{h=0}^m \lambda_{j,h} = \lambda_j. \quad (3.2.10)$$

С учетом введенного обозначения выражение (3.2.9) можно преобразовать к такому виду:

$$\tilde{\pi}_j(s) = \left[\sum_{h=0}^{l-1} \lambda_{h,j} \tilde{\pi}_h(s) + s \tilde{p}_j(0) \right] / (s + \lambda_j) \quad (j = 0, 1, \dots, l-1). \quad (3.2.11)$$

Используя уравнения (3.2.3) для отыскания вероятностей $\tilde{p}_j(t)$, получаем

$$s \tilde{\pi}_i(s) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda_{i,j} \tilde{\pi}_j(s), \quad (3.2.12)$$

откуда [см. (3.2.11)]

$$\tilde{\pi}_i(s) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda_{i,j} \frac{\tilde{\pi}_j(s)}{s} \quad (i = l, \dots, m). \quad (3.2.13)$$

Известно, что если существуют пределы $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i$, то они равны пределам $\lim_{s \rightarrow 0} \pi_i(s) = \pi_i$, где $\pi_i(s)$ является изображением функции $p_i(t)$.

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p}_i &= \tilde{\pi}_i = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda_{i,j} \tilde{\pi}_j \quad (i = l, \dots, m) \\ \sum_{i=l}^m \tilde{p}_i &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (3.2.14)$$

где

$$\tilde{\pi}_j = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\pi}_j(s)/s \quad (j = 0, 1, \dots, l-1). \quad (3.2.15)$$

Заметим, что найденные значения $\tilde{p}_i$ равны искомым начальным условиям $\tilde{p}_i(0)$.

Существование предела (3.2.15) можно доказать следующим образом. По определению изображение интеграла $\int_0^t \tilde{p}_j(\tau) d\tau$ равно $\tilde{\pi}_j(s)/s$ ($j = 0, 1, \dots, l-1$). Так как для преобразованного подмножества состояний $Z + Z_\beta$ состояния, принадлежащие подмножеству Z_β , являются поглощающими, то рано или поздно процесс окажется в одном из состояний множества Z_β . Кроме того, непреобразованный процесс блуждания по всем состояниям множества X является эргодическим. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \tilde{p}_j(t) dt = \int_0^\infty \tilde{p}_j(t) dt < \infty. \quad (3.2.16)$$

Интеграл от неотрицательной функции не может быть отрицательным. Таким образом,

$$0 \leq \int_0^\infty p_j(t) dt < \infty. \quad (3.2.17)$$

На основании определения преобразования для операторного метода имеем

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tilde{\pi}_j(s)}{s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \tilde{p}_j(t) dt, \quad (3.2.18)$$

что и доказывает существование предела (3.2.15).

Заметим, что для отыскания вероятностей $\tilde{p}_j$ вовсе не требуется решать систему уравнений (3.2.11) относительно функций $\tilde{\pi}_j(s)$ и затем находить предел

$$\lim_{s \rightarrow 0} [\tilde{\pi}_j(s)/s] = \tilde{\pi}_j.$$

Действительно, поделим обе части равенства (3.2.11) на величину s :

$$\frac{\tilde{\pi}_j(s)}{s} = \frac{\sum_{h=0}^{l-1} \lambda_{h,j} \frac{\tilde{\pi}_h(s)}{s} + \tilde{p}_j(0)}{s + \lambda_j} \quad (j = 0, 1, \dots, l-1). \quad (3.2.19)$$

Теперь найдем пределы левых и правых частей этих уравнений, которые, как было показано выше, существуют. С учетом обозначения (3.2.15) получим

$$\bar{\pi}_j = \frac{\sum_{h=0}^{l-1} \lambda_{hj} \bar{\pi}_h + \tilde{p}_j(0)}{\lambda_j} \quad (j=0, 1, \dots, l-1). \quad (3.2.20)$$

Таким образом, для отыскания начальных условий $\bar{p}_i(0)$ ($i=l, \dots, m$), необходимых для решения системы дифференциальных уравнений типа (3.1.9), нужно решить систему линейных неоднородных уравнений (3.2.20) относительно величин $\bar{\pi}_j$ и по формулам (3.2.14) определить эти искомые вероятности.

Пример 3.2.1. Пусть имеется размеченный граф состояний множества X (рис. 3.7)

Будем считать, что подмножество состояний $Y = \{x_4, x_3\}$; подмножество состояний $Z = \{x_0, x_1, x_2\}$; подмножество состояний $Y_\beta = \{x_0, x_1\}$. Следовательно, подмножество состояний $Z_\beta = Y$. Подобный размеченный граф состояний имеет четырехканальная си-

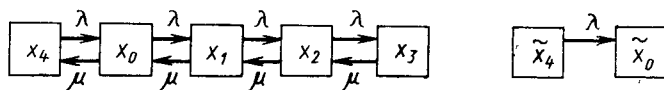


Рис. 3.7.

стема массового обслуживания с отказами и полной взаимопомощью между каналами [32]. Найдем выражение для закона распределения времени пребывания во множестве состояний Y .

Решение. Для стационарного режима блуждания процесса по всем состояниям множества $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ имеем [32]:

$$p_4 = (1-\kappa)/(1-\kappa^5); \quad p_2 = (\kappa^3 - \kappa^4)/(1-\kappa^5); \quad p_0 = (\kappa - \kappa^2)/(1-\kappa^5);$$

$$p_3 = (\kappa^4 - \kappa^5)/(1-\kappa^5); \quad p_1 = (\kappa^2 - \kappa^3)/(1-\kappa^5),$$

где $\kappa = \lambda/\mu$.

По формулам (3.2.5) находим начальные условия для вспомогательной системы уравнений:

$$\tilde{p}_0 = \frac{\kappa}{\kappa + \kappa^2 + \kappa^3};$$

$$\tilde{p}_1 = \frac{\kappa^2}{\kappa + \kappa^2 + \kappa^3};$$

$$\tilde{p}_2 = \frac{\kappa^3}{\kappa + \kappa^2 + \kappa^3}.$$

Размеченный граф состояний преобразованного подмножества $Z + Z_\beta$ показан на рис. 3.8 (чтобы отличить состояния преобразованного множества, над их обозначениями поставлен знак «~»).

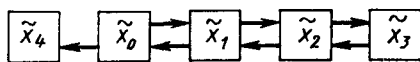


Рис. 3.8.

Система линейных неоднородных уравнений для отыскания величин $\bar{\pi}_j$ ($j=0, 1, 2$) имеет вид [см. (3.2.20)]:

$$\bar{\pi}_0 = \frac{\lambda_{10} \bar{\pi}_1 + \tilde{p}_0}{\lambda + \mu} = \frac{\mu \bar{\pi}_1 + \tilde{p}_0}{\lambda + \mu},$$

$$\bar{\pi}_1 = \frac{\lambda_{01}\bar{\pi}_0 + \lambda_{21}\bar{\pi}_2 + \tilde{p}_1}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda\bar{\pi}_0 + \mu\bar{\pi}_2 + \tilde{p}_1}{\lambda + \mu},$$

$$\bar{\pi}_2 = \frac{\lambda_{12}\bar{\pi}_1 + \tilde{p}_2}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda\bar{\pi}_1 + \mu\tilde{p}_2}{\lambda + \mu}.$$

Найдем решение этой системы уравнений:

$$\bar{\pi}_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[\frac{\lambda\tilde{p}_0 + (\lambda + \mu)\tilde{p}_1 + \mu\tilde{p}_2}{\lambda^2 + \mu^2} \right] + \frac{\tilde{p}_0}{\lambda + \mu};$$

$$\bar{\pi}_1 = \frac{\lambda\tilde{p}_0 + (\lambda + \mu)\tilde{p}_1 + \mu\tilde{p}_2}{\lambda^2 + \mu^2};$$

$$\bar{\pi}_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left[\frac{\lambda\tilde{p}_0 + (\lambda + \mu)\tilde{p}_1 + \mu\tilde{p}_2}{\lambda^2 + \mu^2} \right] + \frac{\tilde{p}_2}{\lambda + \mu}.$$

Теперь по формулам (3.2.14) найдем начальные условия для интегрирования основной системы уравнений, при помощи которой можно отыскать закон распределения времени пребывания в подмножестве $Y = \{x_3, x_4\}$:

$$\tilde{p}_3(0) = \sum_{j=0}^2 \lambda_{j3}\bar{\pi}_j = \lambda_{2,3}\bar{\pi}_2 = \lambda\bar{\pi}_2;$$

$$\tilde{p}_4(0) = \sum_{j=0}^2 \lambda_{j4}\bar{\pi}_j = \lambda_{0,4}\bar{\pi}_0 = \mu\bar{\pi}_0.$$

Можно убедиться в том, что $\tilde{p}_3(0) + \tilde{p}_4(0) = 1$ для любых положительных значений μ и любых $\tilde{p}_0; \tilde{p}_1; \tilde{p}_2$, таких, что $\sum_{i=0}^2 \tilde{p}_i = 1; \tilde{p}_i \geq 0 (i = 0, 1, 2)$.

Составление системы дифференциальных уравнений для определения закона распределения времени T блуждания по состояниям множества Y проведем с помощью

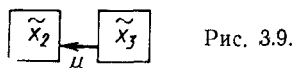


Рис. 3.9.

преобразованного графа состояний подмножества $Y + Y_3$, показанного на рис. 3.9 [см. (3.1.9)]:

$$\dot{\tilde{p}}_3(t) = -\mu\tilde{p}_3(t), \quad \dot{\tilde{p}}_4(t) = -\lambda\tilde{p}_4(t).$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений при начальных условиях $\tilde{p}_3(0)$ и $\tilde{p}_4(0)$ имеет вид:

$$\tilde{p}_3(t) = \tilde{p}_3(0) e^{-\mu t} = \lambda\bar{\pi}_2 e^{-\mu t};$$

$$\tilde{p}_4(t) = \tilde{p}_4(0) e^{-\lambda t} = \mu\bar{\pi}_0 e^{-\lambda t}.$$

Плотность распределения случайной величины T найдем из выражения (3.1.9)

$$f(t) = \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^n \lambda_{ij}\tilde{p}_i(t) = \sum_{i=l}^n \tilde{p}_i(t) \sum_{j=k}^{l-1} \lambda_{ij} = \tilde{p}_3(0) \lambda e^{-\lambda t} + \tilde{p}_4(0) \mu e^{-\mu t} \quad (t \geq 0).$$

Можно также убедиться в том, что $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$. Действительно, $\int_0^{\infty} f(t) dt = \tilde{p}_3(0) + \tilde{p}_4(0) = 1$. Математическое ожидание случайной величины T равно:

$$M[T] = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \frac{\tilde{p}_3(0)}{\mu} + \frac{\tilde{p}_4(0)}{\lambda}.$$

Найдем второй начальный момент

$$M[T^2] = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt = \frac{2\tilde{p}_3(0)}{\mu^2} + \frac{2\tilde{p}_4(0)}{\lambda^2}.$$

Тогда дисперсию случайной величины T можно найти из выражения $D[T] = M[T^2] - (M[T])^2$.

Пример 3.2.2. Решить поставленную в примере 3.1.4 задачу в случае, когда все интенсивности потоков постоянны.

Решение. Составим систему уравнений для изображений вероятностей при тех начальных условиях, которые записаны в примере 3.1.4:

$$s\tilde{\pi}_i(s) = -\lambda_i\tilde{\pi}_i(s) + \sum_{h=1}^h \lambda_{hi}\tilde{\pi}_h(s) + \tilde{p}_i(0) \quad (i = \overline{l, n}),$$

$$s\pi_j(s) = \lambda_j \sum_{i=1}^n \tilde{\pi}_i(s) \quad (j = \overline{k, l-1}),$$

где $\tilde{\pi}_i(s)$ — изображение вероятности $\tilde{p}_i(t)$;

$$\lambda_i = \sum_{j=k}^{l-1} \lambda_{ij} + \sum_{h=1}^n \lambda_{ih}; \quad \lambda_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}.$$

Эту систему уравнений можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_j(s) &= \lambda_j \sum_{i=1}^n \bar{\pi}_i(s), \\ \bar{\pi}_i(s) &= \frac{\sum_{h=1}^h \lambda_{hi}\bar{\pi}_h(s) + \tilde{p}_i(0)}{s + \lambda_i}, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

где $\bar{\pi}_i(s) = \tilde{\pi}_i(s)/s$.

Известно, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} \bar{\pi}_j(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{p}_j(t) = \tilde{p}_j,$$

если эти пределы существуют.

В этом параграфе было показано что пределы $\lim_{s \rightarrow 0} \bar{\pi}_i(s)$, определяемые уравнением (3.2.2) этого примера, существуют и определяются из системы линейных неоднородных уравнений

$$\bar{\pi}_i = \sum_{h=1}^n \frac{\lambda_{hi}\bar{\pi}_h}{\lambda_i} + \frac{\tilde{p}_i(0)}{\lambda_i}.$$

С помощью формул Крамера [30, 49], отыскав величины $\bar{\pi}_i$, можно найти искомые вероятности $\tilde{p}_j = \lambda_j \sum_{i=1}^n \bar{\pi}_i$.

3.3. Определение математического ожидания и дисперсии времени пребывания в группе состояний для эргодического простейшего процесса

В этом параграфе даны способы вычисления математического ожидания и дисперсии времени T пребывания в группе состояний для эргодического простейшего процесса. Особенностью всех рассматриваемых

здесь способов является то, что они не требуют интегрирования дифференциальных уравнений.

Для вычисления числовых характеристик случайной величины T будем применять операторный метод.

Можно доказать, что между изображением $\varphi_t(s)$ плотность распределения $f(t)$ случайной величины T и ее числовыми характеристиками существуют следующие зависимости:

$$\frac{\varphi_t(s)}{s} = M[e^{-sT}]; \quad (3.3.1)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\varphi_t(s)}{s} \right) \right] = -M[T]; \quad (3.3.2)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{\varphi_t(s)}{s} \right) \right] = M[T^k] (-1)^k. \quad (3.3.3)$$

Изображение плотности распределения $\varphi_t(s)$ можно найти, воспользовавшись уравнениями (3.1.8) и (3.1.9):

$$\varphi_t(s) = \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^n \lambda_{ij} \pi_i(s), \quad (3.3.4)$$

$$s\tilde{\pi}_i(s) = -\lambda_i \pi_i(s) + \sum_{h=l}^n \lambda_{hi} \tilde{\pi}_h(s) + s\tilde{p}_i(0) \quad (i = \overline{l, n}), \quad (3.3.5)$$

где $\tilde{\pi}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} \tilde{p}_i(t) dt$ — изображение вероятности $p_i(t)$, а величина λ_i определяется из выражения

$$\lambda_i = \sum_{h=k}^n \lambda_{hi} \quad (i = l, \dots, n). \quad (3.3.6)$$

С учетом принятых обозначений получим выражение для производной $-\frac{d}{ds} \left(\frac{\varphi_t(s)}{s} \right)$:

$$-\frac{d}{ds} \left(\frac{\varphi_t(s)}{s} \right) = -\frac{s\dot{\varphi}(s) - \varphi(s)}{s^2} = \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^n \lambda_{ij} \left(-\frac{s\dot{\pi}_i(s) - \pi_i(s)}{s^2} \right), \quad (3.3.7)$$

где $\dot{\pi}_i(s)$ — производная изображения $\pi_i(s)$: $\dot{\pi}_i(s) = (d/ds)\pi_i(s)$.

Выражение (3.3.5) можно преобразовать к такому виду:

$$\tilde{\pi}_i(s) = \frac{\sum_{h=l}^n \lambda_{hi} \tilde{\pi}_h(s) + s\tilde{p}_i(0)}{s + \lambda_i} \quad (i = l, \dots, n). \quad (3.3.8)$$

Обозначим

$$\tilde{\pi}_i(s)/s = \bar{\pi}_i(s). \quad (3.3.9)$$

Тогда

$$\bar{\pi}_i(s) = \frac{\sum_{h=l}^n \lambda_{hi} \bar{\pi}_h(s) + \tilde{p}_i(0)}{s + \lambda_i} \quad (i = l, \dots, n). \quad (3.3.10)$$

Все пределы

$$\lim_{s \rightarrow 0} \bar{\pi}_i(s) = \pi_i = \frac{\sum_{h=l}^n \lambda_{hi} \bar{\pi}_h + \tilde{p}_i(0)}{\lambda_i} \quad (i = l, \dots, n) \quad (3.3.11)$$

существуют. Доказательство этого положения дано в предыдущем параграфе. Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{hi}^* &= \lambda_{hi} / \lambda_i \\ p_i^{(0)} &= \tilde{p}_i(0) / \lambda_i \end{aligned} \right\}. \quad (3.3.12)$$

С учетом принятых обозначений получим следующую систему линейных неоднородных уравнений:

$$\bar{\pi}_i = \sum_{h=l}^n \lambda_{hi}^* \bar{\pi}_h + p_i^{(0)} \quad (i = \overline{l, n}). \quad (3.3.13)$$

Эта система является неоднородной, так как хотя бы одна из величин $p_i^{(0)}$ отлична от нуля. Известно [30], что система линейных неоднородных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда данная система является системой Крамера и определитель системы $D \neq 0$. В предыдущем параграфе было доказано существование всех решений уравнения (3.3.13), т. е. доказано существование пределов (3.3.11). Следовательно, определитель системы уравнений (3.3.13) $D \neq 0$, так как эта система является системой Крамера (число неизвестных равно числу уравнений), и единственное решение этой системы уравнений существует. Это решение определяется по формулам Крамера $\bar{\pi}_i = D_i / D$, где определитель D_i может быть получен из определителя системы D заменой i -го столбца столбцом, состоящим из свободных членов. Условие неравенства нулю определителя D системы линейных неоднородных уравнений (3.3.13) потребуется в дальнейшем.

Для отыскания математического ожидания времени T найдем производную $(-d/ds)(\varphi_i(s)/s)$.

Проделив ряд преобразований, получим следующее выражение [см. (3.3.7) — (3.3.10)]:

$$-\frac{d}{ds} \left(\frac{\varphi_i(s)}{s} = \frac{s\varphi_i(s) - \varphi(s)}{s} \right) = \\ = \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^n \lambda_{ij} \left\{ \frac{\sum_{h=l}^n \lambda_{hj} - \left(\frac{\tilde{s}\tilde{\pi}_j(s) - \tilde{\pi}_j(s)}{s^2} \right)}{s + \lambda_i} + \frac{\sum_{h=l}^n \lambda_{hi} \bar{\pi}_h(s) + \tilde{p}_i(0)}{(s + \lambda_i)^2} \right\}. \quad (3.3.14)$$

Введем обозначения

$$\phi_i^{(1)}(s) = \frac{\tilde{s}\tilde{\pi}_i(s) - \tilde{\pi}_i(s)}{s^2} \quad (i = l, \dots, n). \quad (3.3.15)$$

С учетом этих обозначений и на основании равенств (3.3.11) и (3.3.14) можно записать следующую систему уравнений:

$$\phi_i^{(1)}(s) = \frac{\sum_{h=l}^n \lambda_{hi} \phi_h^{(1)}(s) + \bar{\pi}_i(s)}{s + \lambda_i} \quad (i = l, \dots, n).$$

Найдем пределы левых и правых частей уравнений (3.3.15) при $s \rightarrow 0$ [см. обозначения (3.3.12)] и покажем, что эти пределы существуют:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \psi_i^{(1)}(s) = \psi_i^{(1)} = \sum_{h=l}^n \lambda_{hi}^* \psi_h^{(1)} + p_i^{(1)} \quad (i=l, \dots, n), \quad (3.3.16)$$

где

$$p_i^{(1)} = \bar{\pi}_i / \lambda_i. \quad (3.3.17)$$

Заметим, что определитель системы уравнений (3.3.16) отличен от нуля, так как он равен определителю системы уравнений (3.3.13).

Следовательно, пределы $\lim_{s \rightarrow 0} \psi_i^{(1)}(s) = \psi_i^{(1)}$ существуют. Эти пределы являются решением системы (3.3.16) и определяются по формулам Крамера, вытекающим из этой системы линейных неоднородных уравнений. Теперь у нас есть все необходимое для определения математического ожидания случайной величины T :

$$\begin{aligned} M[T] &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{\dot{\varphi}_t(s) - \varphi(s)}{s^2} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^n \lambda_{ij} \left(-\frac{\dot{s}\tilde{\pi}_i(s) - \pi_i(s)}{s^2} \right) = \\ &= \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^n \lambda_{ij} \lim_{s \rightarrow 0} \psi_i^{(1)}(s) = \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^n \psi_i^{(1)} \lambda_{ij}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для математического ожидания случайной величины T

$$M[T] = \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^n \psi_i^{(1)} \lambda_{ij}. \quad (3.3.18)$$

Для нахождения второго начального момента случайной величины T продифференцируем дважды выражение $\varphi_t(s)/s$:

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{\varphi_t(s)}{s} \right) = \frac{\ddot{\varphi}_t(s) s^2 - 2\dot{\varphi}_t(s) s + 2\varphi_t(s)}{s^3}. \quad (3.3.19)$$

Предел выражения (3.3.19) при $s \rightarrow 0$ будет равен второму начальному моменту случайной величины T , если он существует.

Проделав ряд довольно громоздких преобразований, можно получить следующее равенство [см. (3.3.7) — (3.3.10)]:

$$\begin{aligned} &\frac{\ddot{\varphi}_t(s) s^2 - 2\dot{\varphi}_t(s) s + 2\varphi_t(s)}{s^3} = \\ &= \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^n \lambda_{ij} \left\{ \sum_{h=l}^n \frac{\lambda_{hi}}{s + \lambda_i} \left[\frac{\ddot{\pi}_h(s) s^2 - 2\dot{\pi}_h(s) s + 2\pi_h(s)}{s^3} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{h=l}^n \frac{2\lambda_{hi}}{(s + \lambda_i)^2} \left[\frac{\tilde{\pi}_h(s) - s\dot{\pi}_h(s)}{s^2} \right] + \frac{2}{(s + \lambda_i)^2} \bar{\pi}_i(s) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Введем обозначение

$$\phi_i^{(2)}(s) = \frac{\ddot{\pi}_i(s) s^2 - 2\dot{\pi}_i(s) s + 2\pi_i(s)}{s^3} \quad (i=l, \dots, n). \quad (3.3.21)$$

С учетом этих обозначений и обозначения (3.3.15) можно записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \psi_i^{(2)}(s) = & \sum_{h=l}^n \frac{\lambda_{hi}}{s + \lambda_i} \psi_h^{(2)}(s) + \frac{2}{(s + \lambda_i)^2} \bar{\pi}_i(s) - \\ & - \frac{2}{(s + \lambda_i)^2} \sum_{h=l}^n \lambda_{hi} \psi_h^{(1)} \quad (i = \overline{l, \dots, n}). \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Найдем пределы правых и левых частей уравнений (3.3.22) при $s \rightarrow 0$ и покажем, что эти пределы существуют [см. (3.3.12) и (3.3.17)]:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \psi_i^{(2)}(s) = \psi_i^{(2)} = \sum_{h=l}^n \lambda_{hi}^* \psi_h^{(2)} + \frac{2}{\lambda_i} \left[p_i^{(1)} - \sum_{h=l}^n \lambda_{hi}^* \psi_h^{(1)} \right] \quad (i = \overline{l, n}). \quad (3.3.23)$$

Уравнения (3.3.23) представляют собой систему линейных неоднородных уравнений, определитель которой $D \neq 0$, так как он равен определителю системы уравнений (3.3.13). Преобразуем правые части уравнений (3.3.23) (см. 3.3.16)

$$p_i^{(2)} = \frac{2}{\lambda_i} \left[p_i^{(1)} - \sum_{h=l}^n \lambda_{hi}^* \psi_h^{(1)} \right] = \frac{4p_i^{(1)}}{\lambda_i} - \frac{2\psi_i^{(1)}}{\lambda_i} \quad (i = \overline{l, \dots, n}). \quad (3.3.24)$$

С учетом вновь введенного обозначения окончательно получим

$$\psi_i^{(2)} = \sum_{h=l}^n \lambda_{hi}^* \psi_h^{(2)} + p_i^{(2)} \quad (i = \overline{l, \dots, n}). \quad (3.3.25)$$

Решив эту систему уравнений относительно неизвестных $\psi_i^{(2)}$ можно найти второй начальный момент случайной величины T по формуле

$$M[T^2] = \sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^n \lambda_{ij} \psi_i^{(2)}. \quad (3.3.26)$$

Дисперсию случайной величины T определяем по формуле [см. (3.3.26) и (3.3.18)]

$$D[T] = M[T^2] - (M[T])^2. \quad (3.3.27)$$

Можно показать, что k -й начальный момент случайной величины T можно определить по формуле

$$\alpha_k[T] = M[T^k] = \left(\sum_{j=k}^{l-1} \sum_{i=l}^n \lambda_{ij} \psi_i^{(k)} \right), \quad (3.3.28)$$

где величины $\psi_i^{(k)}$ определяются из системы линейных неоднородных уравнений

$$\psi_i^{(k)} = \sum_{h=l}^n \lambda_{hi}^* \psi_h^{(k)} + p_i^{(k)} \quad (i = \overline{l, n}), \quad (3.3.29)$$

определитель которой отличен от нуля. Величины $p_i^{(k)}$ определяются по рекуррентным формулам, они здесь не приводятся из-за большой сложности.

3.4. Другой способ определения математического ожидания времени пребывания в группе состояний для эргодического простейшего процесса

Рассматриваемый в этом параграфе способ определения математического ожидания не столь универсален, как способ, рассмотренный в предыдущем параграфе, но является более простым для ряда частных задач, которые будут исследоваться в дальнейшем.

Выделим из состояний подмножества Z те состояния $(x_f, \dots, x_h)$, из которых возможен непосредственный переход в состояния подмножества Y , где требуется найти математическое ожидание времени пребывания. Обозначим это подмножество состояний $Y_\gamma = (x_f, \dots, x_h)$ и назовем его γ -окрестностью подмножества Y .

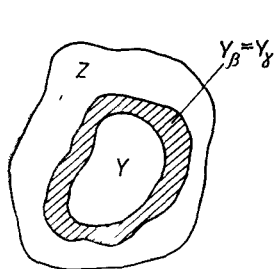


Рис. 3.10.

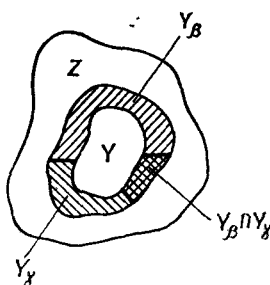


Рис. 3.11.

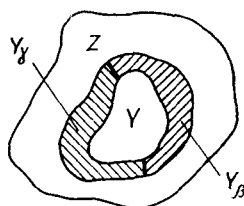


Рис. 3.12.

Очевидно, что $Y_\gamma \subset Z$. Состояния подмножества Y_γ можно назвать «выходными» воротами подмножества Z .

Между вновь введенной γ -окрестностью подмножества Y и рассмотренной ранее β -окрестностью подмножества Y (см. § 3.1) возможны три различных соотношения.

1. Состояния множества Y_γ и множества Y_β полностью совпадают, т. е. $Y_\beta \cap Y_\gamma = Y_\beta = Y_\gamma$.

В этом случае «входные» и «выходные» ворота подмножества Z состоят из одних и тех же состояний (совпадают). Другими словами, процесс может перейти из состояния подмножества Y в состояние подмножества Z через состояние подмножества Y_β и через эти же состояния ($Y_\beta = Y_\gamma$) вернуться обратно в подмножество состояний Y . Схематически это показано на рис. 3.10.

2. Подмножества Y_γ и Y_β частично пересекаются, но полностью не совпадают: $Y_\gamma \cap Y_\beta \neq 0$. Здесь могут быть случаи, когда $Y_\gamma \subset Y_\beta$ или $Y_\beta \subset Y_\gamma$. Могут быть и случаи, когда $Y_\gamma \not\subset Y_\beta$ и $Y_\beta \not\subset Y_\gamma$, но $Y_\gamma \cap Y_\beta \neq 0$. Последний случай и изображен на рис. 3.11. В этом случае «выходные» и «входные» ворота подмножества Z полностью не совпадают: процесс, войдя в подмножество Z через одни состояния, может покинуть это подмножество через другие состояния.

3. Подмножества Y_γ и Y_β совсем не пересекаются: $Y_\gamma \cap Y_\beta = 0$. В этом случае «входные» и «выходные» ворота подмножества Z совсем не совпадают: процесс переходит из подмножества Y в подмножество Z че-

рез одни состояния (через состояния подмножества Y_β), а возвращается в подмножество Y через другие состояния (через состояния подмножества Y_γ) (рис. 3.12).

В большинстве задач теории массового обслуживания, теории восстановления, теории гибели и размножения подмножества Y_γ и Y_β совпадают, поэтому этот случай и будет рассмотрен в данном параграфе.

Очевидно, закон распределения времени T_y пребывания процесса в состояниях подмножества Y не зависит от того, каким образом процесс ведет себя вне состояний подмножества Y , лишь бы в стационарном режиме начальные условия блуждания по состояниям подмножества Y совпадали с теми, которые имеют место при рассмотрении процесса блуждания по всем состояниям полного подмножества X .

Рассмотрим простейший случай, когда подмножества $Y_\beta = Y_\gamma$ состоят всего из одного состояния x_k . Другими словами, переход из состояний подмножества Z в состояние подмножества Y туда и обратно возможен только через единственное состояние x_k . В этом случае β -окрестность подмножества $Z \sim Z_\beta \subset Y$ состоит из тех состояний, для которых

$$\lambda_{ki} > 0 \quad (i = l, \dots, n). \quad (3.4.1)$$

В этом простейшем случае для определения математического ожидания случайной величины $T_y(M[T_y] = m_y)$ можно уменьшить число состояний полного множества X , ограничившись рассмотрением подмножества состояний $Y + Y_\beta$, оставив связи между состояниями подмножества Y такими же, какие они были при рассмотрении всего множества X , а связи состояния x_k оборвать, оставив только те, которые соединяют это состояние с состояниями подмножества Y (как направленные от состояний подмножества Y к состоянию x_k , так и обратно — от состояния x_k к состояниям подмножества Y):

$$\lambda_{kj} \equiv 0 \quad (j = 0, 1, \dots, l-1). \quad (3.4.2)$$

Другими словами, нужно рассматривать размеченный подграф $G(Y + Y_\beta)$ подмножества $Y + Y_\beta$.

Для полученного подмножества состояний $Y + Y_\beta$ составляется система дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{p}_i(t)}{dt} &= - \sum_{h=l}^n \lambda_{ih} \tilde{p}_i(t) - \lambda_{ik} \tilde{p}_i(t) + \\ &+ \sum_{h=l}^n \lambda_{hi} \tilde{p}_h(t) + \lambda_{ki} \tilde{p}_k(t) \quad (i = \overline{l, n}) \\ \frac{d\tilde{p}_k(t)}{dt} &= - \sum_{h=l}^n \lambda_{kh} \tilde{p}_k(t) + \sum_{h=l}^n \lambda_{hk} \tilde{p}_h(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.4.3)$$

Очевидно, что для процесса блуждания по состояниям подмножества $Y + Y_\beta$ существует стационарный режим. Полагая левые части

уравнений (3.4.3) равными нулю и решая систему алгебраических уравнений, найдем предельные вероятности

$$\tilde{p}_k, \tilde{p}_i \quad (i=l, \dots, n). \quad (3.4.4)$$

На основании эргодических свойств (см. [27, 32, 50]) имеем

$$\tilde{p}_k = \bar{t}_k / (\bar{t}_k + m_{t_y}), \quad (3.4.5)$$

где

$$\bar{t}_k = M[T_k] \quad (3.4.6)$$

есть математическое ожидание времени пребывания процесса в состоянии x_k . В соответствии с замечанием к примеру 3.1.2 случайная величина T_k распределена по показательному закону с параметром

$$\mu_k = \sum_{i=l}^n \lambda_{ki}. \quad (3.4.7)$$

Следовательно,

$$\bar{t}_k = \frac{1}{\mu_k} = \frac{1}{\sum_{i=l}^n \lambda_{ki}}. \quad (3.4.8)$$

Окончательная формула для определения математического ожидания времени пребывания в состояниях множества Y имеет следующий вид:

$$m_{t_y} = \frac{1}{\sum_{i=l}^n \lambda_{ki}} \frac{1 - \tilde{p}_k}{\tilde{p}_k}. \quad (3.4.9)$$

Зная математическое ожидание m_{t_y} , можно также найти математическое ожидание m_{t_z} времени пребывания в состояниях множества $Z = X - Y$. Для этого нужно найти сначала вероятности состояний для установившегося режима блуждания по полному множеству состояний X : $p_0, p_1, \dots, p_n$. Вероятность того, что процесс будет в установившемся режиме в состояниях подмножества $Z = X - Y$, равна:

$$p_z = \sum_{j=0}^{l-1} p_j. \quad (3.4.10)$$

На основании эргодического свойства можно теперь определить математическое ожидание времени пребывания в состояниях подмножеств Z

$$m_{t_z} = m_{t_y} \frac{p_z}{1 - p_z}. \quad (3.4.11)$$

Формула (3.4.11) справедлива для любого эргодического процесса блуждания и любого вида подмножеств Y и Z . Обратим внимание на то, что при нахождении величины m_{t_y} вовсе не потребуется решать систему дифференциальных уравнений. Решение отыскивается с помощью решения алгебраических уравнений. При этом систему алгебраических уравнений потребовалось решать только для урезанного множества состояний $Y + Y_\beta$ и нет необходимости отыскивать начальные

условия. Все это намного облегчает нахождение математического ожидания m_{t_y} .

Рассмотрим теперь более общий случай, когда подмножества Y_β и Y_γ совпадают и состоят не из единственного состояния, а из состояний $(x_k, \dots, x_{l-1})$. При этом на подмножество Y налагается следующее ограничение: если процесс блуждания перешел из состояния подмножества Y в состояние подмножества Z через состояние x_j ($j=k, \dots, l-1$), то вернуться в состояния подмножества Y он может только через это же состояние x_j . Это равносильно тому, что состояния подмножества Z , рассматриваемого без связей с состояниями подмножества Y , распадаются на столько не связанных между собой эргодических замкнутых подмножеств, сколько состояний имеется в подмножестве $Y_\beta = Y_\gamma$. Рассмотренный в начале этого параграфа случай является частным для рассматриваемого здесь, когда все подмножество Y_β состоит всего из одного состояния x_k .

Путь решения задачи и в этом случае ($Y_\beta = Y_\gamma = \{x_k, \dots, x_{l-1}\}$) примерно такой же. Рассматривается подмножество состояний $Y + Y_\beta$ (а не полное множество состояний X), при этом для состояний подмножества Y_β оставляются лишь те связи, которые соединяют эти состояния с состояниями множества Y :

$$\lambda_{jh} = 0 \quad (h=0, \dots, l-1; j=k, \dots, l-1). \quad (3.4.12)$$

Другими словами, опять рассматривается размеченный подграф $G(Y + Y_\beta)$ подмножества состояний $Y + Y_\beta$.

Для эргодического подмножества состояний $Y + Y_\beta$ находим вероятности состояний в установившемся режиме. С этой целью решаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= - \sum_{h=l}^n \lambda_{ih} \tilde{p}_i - \sum_{i=k}^{l-1} \lambda_{ij} \tilde{p}_i + \sum_{h=l}^n \lambda_{hi} \tilde{p}_h + \sum_{j=k}^{l-1} \lambda_{ji} \tilde{p}_j \quad (i=l, \dots, n) \\ 0 &= - \sum_{i=l}^h \lambda_{ji} \tilde{p}_j + \sum_{i=l}^n \lambda_{ij} \tilde{p}_i \quad (j=k, \dots, l-1). \end{aligned} \right\} \quad (3.4.13)$$

Решив эту систему алгебраических уравнений, находим вероятности состояний

$$\tilde{p}_j (j=k, \dots, l-1); \quad \tilde{p}_i (i=l, \dots, n). \quad (3.4.14)$$

Очевидно, что среднее время пребывания в состояниях подмножества Y_β будет равно:

$$m_{t_{y_\beta}} = \sum_{j=k}^{l-1} \bar{t}_j \tilde{p}_j, \quad (3.4.15)$$

где

$$\bar{t}_j = 1 \left/ \sum_{i=l}^n \lambda_{ji} = 1/\lambda_j. \right. \quad (3.4.16)$$

Введем обозначение

$$p_{y\beta} = \sum_{j=k}^{l-1} \tilde{p}_j, \quad (3.4.17)$$

тогда $p_{y\beta} = m_{t_{y\beta}} / (m_{t_{y\beta}} + m_{t_y})$, откуда

$$m_{t_y} = m_{t_{y\beta}} \frac{1 - p_{y\beta}}{p_{y\beta}}. \quad (3.4.18)$$

Найдя математическое ожидание m_{t_y} , можно найти и математическое ожидание m_{t_z} точно так же, как это было сделано выше [см. (3.4.10) и (3.4.11)].

3.5. Определение закона распределения и числовых характеристик времени пребывания в транзитивном подмножестве состояний с одним входом и одним выходом

В этом параграфе будет определен закон распределения времени T пребывания в транзитивном подмножестве состояний Y , имеющем одно входное состояние и одно выходное. Несмотря на то, что этот случай является частным, он имеет большое прикладное значение.

Введем в рассмотрение два подмножества: Z_β и Z_γ , — оба принадлежат рассматриваемому подмножеству $Y = \{x_l, x_{l+1}, \dots, x_n\}$, закон распределения времени пребывания в котором и требуется найти. Определение этих подмножеств аналогично тому, которое давалось в этой главе для подмножеств Y_β и Y_γ . Подмножество Z_β является «входными воротами» подмножества Y . Именно через состояния подмножества $Z_\beta \subset Y$ процесс переходит из состояний, принадлежащих подмножеству $Z = X - Y$, в состояния, принадлежащие подмножеству Y . Подмножество Z_γ является «выходными воротами» подмножества Y . Через состояния подмножества $Z_\gamma \subset Y$ процесс переходит из состояний подмножества Y в состояния подмножества Z . Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что каждое из подмножеств Z_β и Z_γ состоит из единственного состояния и для определенности будем считать, что

$$Z_\beta = \{x_l\}, \quad (3.5.1)$$

$$Z_\gamma = \{x_n\}. \quad (3.5.2)$$

В большинстве прикладных задач нас интересует закон распределения времени T пребывания в транзитивном подмножестве состояний Y при условии, что время T отсчитывается от момента начала блужданий по состояниям подмножества Y до выхода из этого подмножества, т. е. от момента попадания процесса в состояние x_l до момента перехода процесса из состояния x_n в одно из состояний подмножества $Y_\beta \subset Z$.

Подмножество состояний $Y_\beta \subset Z$ является «входными воротами» подмножества Z ($Y_\beta = \{x_k, x_{k+1}, \dots, x_{l-1}\}$).

Следовательно, закон распределения времени T в этом случае определяется с помощью преобразованного размеченного подграфа состоя-

ний $G(Y + Y_\beta)$. Преобразование состоит лишь в том, что обрываются связи между состояниями подмножества Y_β и состоянием x_l :

$$\lambda_{jl}(t) \equiv 0 \quad (j=k, k+1, \dots, l-1). \quad (3.5.3)$$

Система дифференциальных уравнений для определения закона распределения времени T имеет такой вид [см. (3.1.9)]¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_i &= \sum_{h=l}^n \lambda_{ih} \tilde{p}_i(t) + \sum_{h=l}^n \lambda_{hi} \tilde{p}_h(t), \quad (i=l, l+1, \dots, n-1) \\ \dot{\tilde{p}}_n &= - \sum_{h=k}^n \lambda_{nh} \tilde{p}_n(t) + \sum_{h=l}^n \lambda_{hn} \tilde{p}_h(t) \end{aligned} \right\}. \quad (3.5.4)$$

Начальным условием для интегрирования этой системы дифференциальных уравнений является условие

$$\tilde{p}_l(0) = 1; \quad \tilde{p}_i(0) = 0 \quad (i = \overline{l+1, n}). \quad (3.5.5)$$

Может иметь место случай, когда подмножества Z_β и Z_γ совпадают:

$$Z_\beta = Z_\gamma = \{x_n\}. \quad (3.5.6)$$

В этом случае уравнения (3.5.4) остаются справедливыми, а начальные условия примут такой вид:

$$\tilde{p}_n(0) = 1; \quad \tilde{p}_i(0) = 0 \quad (i = \overline{l, n-1}). \quad (3.5.7)$$

Решив систему дифференциальных уравнений (3.5.4) и найдя вероятность $\tilde{p}_n(t)$, можно определить плотность распределения случайной величины T [см. (3.1.8)]

$$f(t) = \sum_{j=k}^{l-1} \lambda_{nj} \tilde{p}_n(t). \quad (3.5.8)$$

Рассмотрим частный случай, когда процесс блуждания по состояниям подмножества Y является простейшим. Тогда все интенсивности потоков в формулах (3.5.4) и (3.5.8) являются постоянными величинами.

Обозначим, как и прежде, $\varphi_t(s)$ — изображение плотности распределения $f(t)$ и $\tilde{\pi}_i(s)$ — изображение вероятности $\tilde{p}_i(t)$. Тогда при начальных условиях (3.5.5) изображение плотности распределения $\varphi_t(s)$ будет иметь такой вид:

$$\varphi_t(s) \equiv \lambda_n^* \frac{\sum_{h=l}^n \lambda_{hn} \tilde{\pi}_h(s)}{s + \lambda_n}, \quad (3.5.9)$$

где

$$\tilde{\pi}_l(s) = \frac{s + \sum_{h=l}^n \lambda_{hl} \tilde{\pi}_h(s)}{s + \lambda_l}, \quad (3.5.10)$$

$$\tilde{\pi}_i(s) = \frac{\sum_{h=l}^n \lambda_{hi} \tilde{\pi}_h(s)}{s + \lambda_i} \quad (i = \overline{l+1, n}), \quad (3.5.11)$$

¹⁾ Для сокращения записи аргумент t , указывающий на зависимость интенсивностей потоков событий от времени, опущен.

$$\lambda_n^* = \sum_{j=k}^{l-1} \lambda_{nj}, \quad (3.5.12)$$

$$\lambda_i = \sum_{h=l}^n \lambda_{ih}, \quad (3.5.13)$$

$$\lambda_n = \sum_{h=k}^n \lambda_{nh}. \quad (3.5.14)$$

Система уравнений (3.5.10) и (3.5.11) в совокупности с обозначениями (3.5.12)—(3.5.14) является замкнутой системой алгебраических уравнений относительно неизвестных $\tilde{\pi}_i(s)$ ($i = \overline{l, n}$).

Найдя изображение $\tilde{\pi}_n(s)$, можно по формулам обращения отыскать вероятность $\tilde{p}_n(t)$ и по формуле (3.5.8)—плотность распределения времени пребывания в транзитивном подмножестве состояний Y .

3.6. Закон распределения времени T пребывания в транзитивном состоянии

Без ограничения общности рассуждений можно считать, что закон распределения времени T пребывания в транзитивном состоянии x_0 определяется с помощью размеченного графа состояний, изображенного на рис. 3.13.

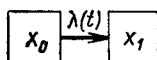


Рис. 3.13.

Исходя из того, что состояние x_0 является транзитивным, можно записать следующее выражение:

$$\lambda(t) \neq 0 \quad (t \geq 0). \quad (3.6.1)$$

Дифференциальное уравнение для вероятности $p_0(t)$ имеет такой вид (см. рис. 3.13):

$$\dot{p}_0(t) = -\lambda(t) p_0(t). \quad (3.6.2)$$

Решение этого уравнения при $p_0(0) = 1$ будет

$$p_0(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} = e^{-\Lambda(t)}, \quad (3.6.3)$$

где

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t) dt. \quad (3.6.4)$$

Для того чтобы состояние x_0 было транзитивным, достаточно выполнение следующего условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = 0, \quad (3.6.5)$$

откуда [см. (3.6.3), (3.6.4)]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \lambda(\tau) d\tau = \infty$$

или

$$\int_0^{\infty} \lambda(t) dt = \Lambda(\infty) = \infty. \quad (3.6.6)$$

Теперь можно дать более точное определение транзитивного состояния. Состояние будем называть транзитивным в широком смысле, если при неограниченном увеличении времени t предел вероятности $p_0(t)$ остается в этом состоянии: стремится к нулю при условии, что $p_0(0) = 1$.

Достаточным условием того, что состояние будет транзитивным в широком смысле, является условие (3.6.6). Будем считать, что условие (3.6.6) выполняется.

В соответствии с решением, полученным в § 3.1,

$$\left. \begin{aligned} F(t) &= p(T < t) = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)} \quad (t \geq 0) \\ f(t) &= \lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \quad (t \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (3.6.7)$$

Для неотрицательной случайной величины с конечным математическим ожиданием имеем

$$\begin{aligned} M[T] &= \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda(t) e^{-\Lambda(t)} dt = \\ &= \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt = \int_0^{\infty} e^{-\Lambda(t)} dt < \infty. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Очевидно, что при решении прикладных задач имеет смысл говорить о транзитивном состоянии как о таком, среднее время пребывания в котором ограничено. Следовательно, транзитивным в узком (прикладном) смысле будем называть состояние, у которого интенсивность потока событий $\lambda(t)$, выводящего процесс из этого состояния, обладает следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad & \int_0^{\infty} \lambda(t) dt = \infty \\ 2. \quad & \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau} dt < \infty \end{aligned} \right\} \quad (3.6.9)$$

Эти свойства соответствуют тому, что при неограниченном увеличении времени t предел вероятности $p_0(t)$ стремится к нулю [при условии, что $p_0(0) = 1$], а математическое ожидание времени пребывания в этом состоянии ограничено.

Перейдем к анализу различных конкретных видов интенсивности потоков событий, обладающих свойствами (3.6.9).

Достаточную свободу выбора характеристики закона распределения времени T пребывания в транзитивном состоянии дает интенсивность вида

$$\lambda(t) = 1(t - t_1)[a + b(t - t_1)] (a \geq 0, b \geq 0, t \geq 0, t_1 \geq 0), \quad (3.6.10)$$

график которой представлен на рис. 3.14. Легко убедиться в том, что условия (3.6.9) выполняются, если только $a \neq 0$ и $b \neq 0$ одновременно.

Найдем вид плотности распределения $f_0(t)$ для случая, когда $t_1 = 0$. Обозначим случайную величину T при $t_1 = 0$ величиной T_0 . Можно убедиться в том, что при $t_1 > 0$ плотность $f(t)$ сдвинется «вправо» на оси Ot на величину t_1 , не изменив своей конфигурации.

В соответствии с (3.6.7) и (3.6.10) имеем

$$\left. \begin{aligned} f_0(t) &= (a + bt) e^{-(at + bt^2/2)} \\ F_0(t) &= 1 - e^{-(at + bt^2/2)} (t \geq 0) \end{aligned} \right\}. \quad (3.6.11)$$

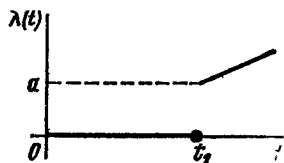


Рис. 3.14.

При $b = 0$ и $a \neq 0$ получаем показательный закон, а при $a = 0$ и $b \neq 0$ — закон Релея.

Для отыскания начальных моментов случайной величины T_0 отыщем характеристическую функцию этой случайной величины

$$g_0(x) = \int_0^{\infty} e^{ixt} f_0(t) dt. \quad (3.6.12)$$

По условию имеем

$$g_0(0) = \int_0^{\infty} f_0(t) dt = 1. \quad (3.6.13)$$

Найдем этот интеграл, для чего вычислим интеграл вида $\int_0^{\infty} e^{-(at + bt^2/2)} dt$.

Этот интеграл с помощью ряда известных преобразований [11] можно представить в следующем виде:

$$\int_0^{\infty} e^{-(at + bt^2/2)} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{a^2/2b} \left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2b}}\right) \right] = \psi(a, b), \quad (3.6.14)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (3.6.15)$$

— функция Лапласа (интеграл вероятности). Сравнивая (3.6.11) — (3.6.14), можно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} b \int_0^{\infty} t e^{-(at + bt^2/2)} dt &= 1 - a\psi(a, b), \\ g_0(x) &= 1 + ix\psi(a - ix, b). \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

Имеем в виду, что

$$\alpha_{nt_0} = M[T_0^n] = g_0^{(n)}(0)/i^n, \quad (3.6.17)$$

где $g_0^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g_0^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{d^n}{dx^n} g_0(x) \right]$, если этот предел существует.

Проведя соответствующие преобразования, получаем:

$$M[T_0] = \psi(a, b); \quad (3.6.18)$$

$$M[T_0^2] = \frac{2}{b} [1 - a\psi(a, b)]; \quad (3.6.19)$$

$$M[T_0^3] = \frac{3}{b} \left[\psi(a, b) \left(1 + \frac{a^2}{b} \right) - \frac{a}{b} \right]. \quad (3.6.20)$$

При желании можно получить моменты более высокого порядка.

Из выражения (3.6.19) следует, что $1 - a\psi(a, b) > 0$, откуда $0 < \psi(a, b) < 1/a$. Таким образом, для любого положительного a функция $\psi(a, b)$ ограничена и математическое ожидание $M[T_0]$ тоже ограничено.

Можно указать на следующие свойства функций $\psi(a, b)$:

$$\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \neq 0}} \psi(a, b) = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \neq 0}} \psi(a, b) = 0;$$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \neq 0}} \psi(a, b) = \sqrt{\pi/2b};$$

$$\lim_{\substack{b \rightarrow 0 \\ a \neq 0}} \psi(a, b) = 1/a.$$

Отсюда следует, что при:

1. $a=0$; $b>0$ (закон Релея):

$$M[T_0] = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}; \quad M[T_0^2] = \frac{2}{b}; \quad M[T_0^3] = \frac{3}{b} \sqrt{\frac{\pi}{2b}};$$

2. $b=0$; $a>0$ (показательный закон):

$$M[T_0] = \frac{1}{a}; \quad M[T_0^2] = \frac{2}{a^2}; \quad M[T_0^3] = \frac{6}{a^3}.$$

При $t_1 > 0$ можно считать, что случайная величина T определяется через случайную величину T_0 таким образом: $T = T_0 + t_1$.

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= f_0(t - t_1) 1(t - t_1) \\ M[T] &= M[T_0] + t_1 \\ M[T^2] &= M[T_0^2] + 2t_1 M[T_0] + t_1^2 \\ M[T^3] &= M[T_0^3] + 3t_1 M[T_0^2] + 3t_1^2 M[T_0] + t_1^3 \end{aligned} \right\} \quad (3.6.21)$$

Могут быть случаи, когда в качестве аддитивной составляющей интенсивности потока событий $\lambda(t)$ [см. (3.6.10)] имеется дельта-функция с весом c в точке t_2 :

$$\lambda(t) = 1(t - t_1) (a + b(t - t_1)) + c\delta(t - t_2)^1, \quad (3.6.22)$$

где все величины a, b, c, t_1, t_2 могут быть любыми неотрицательными числами.

Наличие дельта-функции в составе интенсивности потока событий [см. (3.6.22)] означает, что в момент t_2 может (с определенной, отличной от нуля, вероятностью) произойти переход из состояния x_0 в состояние x_1 . Другими словами, время пребывания в состоянии x_0 — смешанная случайная величина.

¹⁾ В данном случае $\delta(t - t_2)$ определяется так: $\int_0^t \varphi_2(t) \delta(t - t_2) dt = 0$;

$\int_0^{t_2+0} \varphi_2(t) \delta(t - t_2) dt = \varphi_2(t_2)$, если $\varphi_2(t_2)$ непрерывна в t_2 .

Это утверждение до некоторой степени противоречит понятию марковского случайного процесса с непрерывным временем. Однако для любой дельта-образной функции¹⁾ процесс будет марковским с непрерывным временем, так как интенсивность потока — неотрицательная функция времени. Поэтому выражение (3.6.22) нужно рассматривать в качестве определенной математической абстракции, описывающей некоторое физическое явление. Здесь уместно напомнить о так называемом стационарном «белом шуме», корреляционная функция которого выражается через дельта-функцию. Несмотря на то, что стационарный белый шум является определенной математической абстракцией, тем не менее многие реальные процессы весьма близки к белому шуму. Рассмотрим различные случаи в порядке нарастания сложности преобразований. Самым простым является случай, когда $b = t_1 = 0$. В этом случае функция распределения

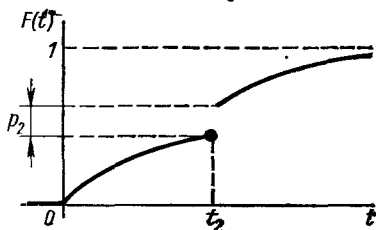


Рис. 3.15.

$$F(t) = 1 - e^{-(at - c \cdot 1(t - t_2))} \quad (t > 0) \quad (3.6.23)$$

имеет вид, показанный на рис. 3.15.

Величина скачка p_2 функции распределения $F(t)$ в точке t_2 определяется из выражения

$$p_2 = P(T = t_2) = e^{-at_2}(1 - e^{-c}). \quad (3.6.24)$$

Математическое ожидание случайной величины T , имеющей функцию распределения (3.6.23), определяется следующим образом:

$$M[T] = \int_0^{\infty} t dF(t) = p_2 t_2 + \int_0^{t_2} t a e^{-at} dt + \int_{t_2}^{\infty} t a e^{-c} e^{-at} dt = \frac{1}{a} (1 - p_2). \quad (3.6.25)$$

Найдем второй начальный момент

$$M[T^2] = \int_0^{\infty} t^2 dF(t) = p_2 t_2^2 + \int_0^{t_2} t^2 a e^{-at} dt + \int_{t_2}^{\infty} t^2 a e^{-c} e^{-at} dt = \frac{2}{a^2} [1 - p_2 (1 + at_2)]. \quad (3.6.26)$$

По формулам (3.6.25) и (3.6.26) можно найти дисперсию случайной величины T

$$D[T] = M[T^2] - (M[T])^2 = \frac{1}{a^2} [1 - p_2 (2at_2 + p_2)]. \quad (3.6.27)$$

В данном случае наличие дельта-функции означает, что в момент t_2 возможен переход из состояния x_0 в состояние x_1 с вероятностью p_2 . Можно пойти дальше и считать, что величина t_2 является случайной (T_2) и имеет закон распределения $f_2(t_2)$ ($T_2 \geq 0$). В этом случае функ-

¹⁾ Дельта-образными функциями (см. [41, 15]) называются функции $\delta_n(t - t_2)$, последовательность которых сходится к дельта-функции $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t - t_2) = \delta(t - t_2)$.

ция распределения случайной величины T по интегральной формуле полной вероятности будет определяться из выражения

$$F(t) = 1 - \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-c \cdot 1(t-t_2)} f_2(t_2) dt_2. \quad (3.6.28)$$

Можно убедиться в том, что

$$\left. \begin{aligned} e^{-c \cdot 1(t-t_2)} &= 1 - 1(t-t_2)(1-e^{-c}) \\ \int_0^{\infty} 1(t-t_2) f_2(t_2) dt_2 &= \int_0^t f_2(t_2) dt_2 = F_2(t_2) \end{aligned} \right\}, \quad (3.6.29)$$

где $F_2(t_2)$ — функция распределения случайной величины T_2 .

С учетом равенства (3.6.29) получим

$$F(t) = 1 - e^{-at} \int_0^{\infty} e^{-c \cdot 1(t-t_2)} f_2(t_2) dt_2 = 1 - e^{-at} [1 - (1-e^{-c}) F_2(t)]. \quad (3.6.30)$$

Например, если случайная величина T_2 распределена по показательному закону с параметром h , то функция распределения (3.6.30) будет иметь такой вид:

$$F(t) = 1 - e^{-at} [1 - (1-e^{-c})(1-e^{-ht})], \quad (3.6.31)$$

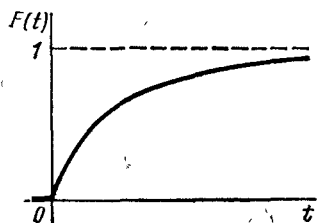


Рис. 3.16.

график которой показан на рис. 3.16. Этот закон будет близок к показательному.

Числовые характеристики случайной величины T при условии, что случайная величина T_2 имеет функцию распределения $F_2(t_2)$, найдем из выражений:

$$\left. \begin{aligned} M[T] &= \frac{1}{a} - \frac{1-e^{-c}}{a} \int_0^{\infty} e^{-at_2} dF_2(t_2) \\ M[T^2] &= \frac{2}{a^2} - \frac{2(1-e^{-c})}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-at_2} (1+at_2) dF_2(t_2) \end{aligned} \right\}. \quad (3.6.32)$$

Если $F_2(t) = 1 - e^{-ht}$, то

$$M[T] = \frac{1}{a} - \frac{1-e^{-c}}{a} \int_0^{\infty} e^{-(a+h)t_2} h dt_2 = \frac{1}{a} \left[1 - \frac{(1-e^{-c})h}{a+h} \right],$$

$$\begin{aligned} M[T^2] &= \frac{2}{a^2} - \frac{2(1-e^{-c})}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-at_2} (1+at_2) h e^{-ht_2} dt_2 = \\ &= \frac{2}{a^2} \left[1 - \frac{(1-e^{-c})(2a+h)h}{(a+h)^2} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда интенсивность потока, переводящего систему из состояния x_0 , определяется таким образом:

$$\lambda(t) = a1(t-t_1) + c\delta(t-t_2). \quad (3.6.33)$$

Здесь возможны два варианта. Первый, когда величина $t_1 \leq t_2$. Этот вариант эквивалентен рассмотренному выше. Действительно, в этом слу-

чае функция распределения будет иметь такой вид:

$$F(t) = 1 - \exp[a(t-t_1)1(t-t_1) + c1(t-t_2)]. \quad (3.6.34)$$

График этой функции показан на рис. 3.17.

Введем следующие обозначения:

$$t-t_1=\tau; \quad t-t_2=\tau_2. \quad (3.6.35)$$

Тогда

$$F(\tau) = 1 - \exp(-a\tau + c1(\tau-\tau_2)) \quad (\tau > 0). \quad (3.6.36)$$

Это выражение с точностью до обозначений совпадает с выражением (3.6.23).

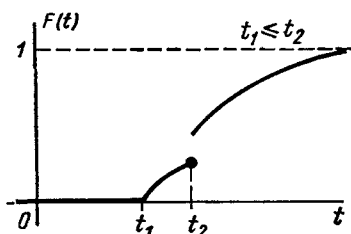


Рис. 3.17.

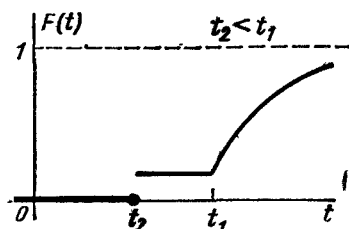


Рис. 3.18.

Если обозначить T_0 случайную величину, распределенную по закону (3.6.23), то случайная величина T_1 , имеющая закон распределения (3.6.34), выражается через случайную величину T_0 следующим образом:

$$T_1 = T_0 + t_1. \quad (3.6.37)$$

При этом случайная величина T_0 распределена по закону (3.6.23) с параметрами a и $\tau_2 = t_1 - t_2$.

Рассмотрим теперь случай, когда $t_1 > t_2$. В этом случае функция распределения (3.6.34) будет иметь вид, показанный на рис. 3.18.

Вероятность того, что случайная величина T примет значение t_2 , будет равна:

$$p_2 = 1 - e^{-c}. \quad (3.6.38)$$

Математическое ожидание случайной величины T найдем из выражения

$$M[T] = \int_0^{\infty} t dF(t) = t_2 p_2 + \int_{t_1}^{\infty} t e^{-c} a e^{-a(t-t_1)} dt = t_2 p_2 + e^{-c} \left[\frac{1}{a} + t_1 \right]. \quad (3.6.39)$$

Второй начальный момент случайной величины T будет равен:

$$M[T^2] = \int_0^{\infty} t^2 dF(t) = t_2^2 p_2 + \int_{t_1}^{\infty} t^2 e^{-c} a e^{-a(t-t_1)} dt = t_2^2 p_2 + e^{-c} \left[\frac{2}{a^2} + \frac{2t_1}{a} + t_1^2 \right]. \quad (3.6.40)$$

С помощью приемов, рассмотренных в этом параграфе, можно исследовать закон распределения времени пребывания в транзитивном состоянии и в случае, когда интенсивность потока событий, выводящего процесс из этого состояния, определяется с помощью выражения

$$\lambda(t) = 1(t-t_1)(a+b(t-t_1)) + c1(t-t_2). \quad (3.6.41)$$

В этом случае

$$F(t) = 1 - \exp - \left\{ \left[a + \frac{b(t-t_1)}{2} \right] \times \right. \\ \left. \times (t-t_1) 1(t-t_1) + c 1(t-t_2) \right\} \quad (3.6.42)$$

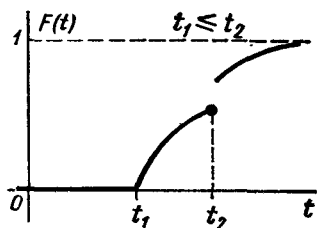


Рис. 3.19.

При $t_1 \leq t_2$ график этой функции изображен на рис. 3.19.

Можно рассматривать и еще более общий случай, когда интенсивность потока событий определяется так:

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^n a_k (t - \tilde{t}_k)^k 1(t - \tilde{t}_k) + \sum_{i=1}^m c_i 1(t - t_i), \quad (3.6.43)$$

где a_k, t_k, c_i, t_i — неотрицательные величины. В этом случае функция распределения будет иметь такой вид:

$$F(t) = 1 - \exp(-1) \left\{ \sum_{k=0}^n a_k \frac{(t - \tilde{t}_k)^{k+1}}{k+1} 1(t - \tilde{t}_k) + \sum_{i=1}^m c_i 1(t - t_i) \right\} \quad (3.6.44)$$

Функция распределения (3.6.44) имеет скачки в точках t_j ($j = \overline{1, \dots, m}$). Вероятность p_j того, что случайная величина T , имеющая функцию

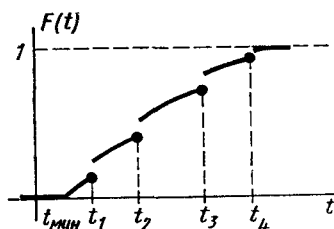


Рис. 3.20.

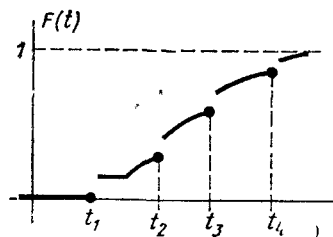


Рис. 3.21.

распределения (3.6.44), примет значение t_j , определяется из выражения

$$p_j = P(T = t_j) = \exp(-1) \left\{ \sum_{k=0}^n a_k \frac{(t_j - \tilde{t}_k)^{k+1}}{k+1} 1(t_j - \tilde{t}_k) + \sum_{i=1}^{j-1} c_i \right\} (1 - e^{-c_j}), \quad (3.6.45)$$

которое справедливо при условии, что $t_{i+1} > t_i$ ($i = \overline{1, m}$). Принципиальный вид функции распределения $F(t)$ показан на рис. 3.20 для случая, когда величина t_1 больше хотя бы одной из величин $\tilde{t}_k$ ($k = \overline{0, n}$).

На этом рисунке величина t_{min} определяется из выражения

$$t_{min} = \min \{t_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n\}. \quad (3.6.46)$$

Если величина $t_1 < t_{min}$, а $t_2 > t_{min}$, то вид функции распределения $F(t)$ несколько изменится (рис. 3.21)

Математическое ожидание случайной величины T , функция распределения которой определяется из (3.6.44), можно найти по формуле

$$M[T] = \sum_{l=1}^m \tau_l p_l + \sum_{j=0}^m \int_{t_j}^{t_{j+1}} t f_j(t) dt, \quad (3.6.47)$$

где $t_0=0$, $t_{m+1}=\infty$, а $f_j(t)$ — производная функция распределения на участке ее непрерывности в полуоткрытом интервале $(t_j; t_{j+1})$:

$$f_j(t) = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k (t - \tilde{t}_k)^k \mathbf{1}(t - t_k) \right\} \times \\ \times \exp(-1) \left\{ \sum_{k=0}^n a_k \frac{(t - \tilde{t}_k)^{k+1}}{k+1} \mathbf{1}(t - t_k) + \sum_{l=0}^j c_l \right\}, \quad t \in (t_j; t_{j+1}), \quad (3.6.48)$$

где $c_0=0$.

Формула для определения h -го начального момента будет иметь вид

$$M[T^h] = \sum_{l=1}^m t_l^h p_l + \sum_{j=0}^m \int_{t_j}^{t_{j+1}} t^h f_j(t) dt. \quad (3.6.49)$$

Рассмотренные в этом параграфе различные виды интенсивности потоков событий, переводящих процесс из транзитивного состояния, дают достаточно широкие возможности для аппроксимации различных законов распределения времени пребывания в этом состоянии.

3.7. Закон распределения s -го момента пересечения марковским случайным процессом заданного уровня

Рассмотрим марковский случайный процесс с непрерывным временем и дискретным числом состояний $X(t)$, реализация которого $x(t)$ представляет собой неслучайную скачкообразную функцию (рис. 3.22).

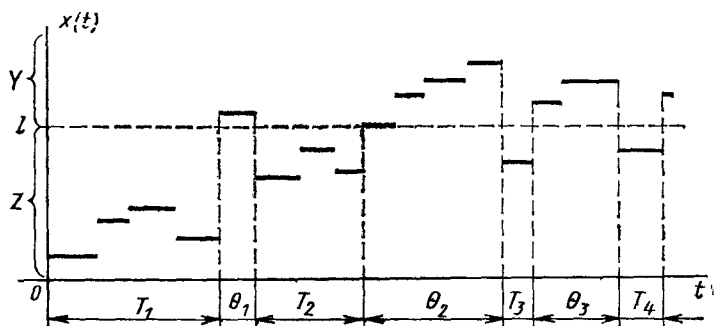


Рис. 3.22.

Не нарушая общности постановки задачи, будем считать, что случайная функция $X(t)$ может принимать дискретные значения $0, 1, 2, \dots, \dots, n$, т. е. случайный процесс $X(t)$ может находиться в одном из состояний $x_0=0; x_1=1; \dots; x_n=n$.

Допустим для определенности, что в момент времени $t=0$ случайный процесс $X(0) < l$, где l — некоторое натуральное число. Обозначим случайной величиной $T_1^{(2)}$ момент первого пересечения (или достижения) случайной функцией $X(t)$ заданного уровня (см. рис. 3.22). Условимся также считать, что случайная функция $X(t)$ в точках разрыва определена «сверху».

Дадим формальное определение случайной величины $T_1^{(2)}$. Обозначим h -й случайный момент перехода случайной функции $X(t)$ из одного состояния в другое τ_h ($h=1, 2, \dots$).

Обозначим через τ'_h те случайные моменты перехода случайной функции $X(t)$ из одного состояния в другое, для которых выполняется неравенство

$$X(\tau'_h) \geq l. \quad (3.7.1)$$

Тогда случайная величина $T_1^{(2)}$ определяется из выражения

$$T_1^{(2)} = \min_{\tau'_h} \{\tau'_h\}, \quad (3.7.2)$$

т. е. равна минимальной величине из рассматриваемой совокупности случайных величин τ'_h .

В дальнейшем случайную величину $T_1^{(2)}$ будем называть моментом первого пересечения случайной функцией $X(t)$ заданного уровня l *снизу вверх*. Аналогично определяется случайная величина $T_1^{(1)}$ — случайный момент первого пересечения случайной функцией $X(t)$ заданного уровня l *сверху вниз*.

Можно дать следующее формальное определение случайной величины $T_1^{(1)}$. Обозначим через τ''_h те случайные моменты перехода случайной функции $X(t)$ из одного состояния в другое, для которых выполняется условие

$$X(\tau''_h) < l. \quad (3.7.3)$$

Тогда случайная величина $T_1^{(1)}$ определяется из условия

$$T_1^{(1)} = \min_{\tau''_h > T_1^{(2)}} \{\tau''_h\}. \quad (3.7.4)$$

Аналогично определяются случайная величина $T_s^{(2)}$ — момент s -го пересечения случайной функцией $X(t)$ заданного уровня l снизу вверх и случайная величина $T_s^{(1)}$ — момент s -го пересечения случайной функцией $X(t)$ заданного уровня l сверху вниз. Условимся также считать случайную величину $T_1^{(2)} = 0$, если $X(0) \geq l$.

Относительно случайного процесса $X(t)$ будем считать известными размеченный граф состояний $G(X)$ и матрицу начальных распределений вероятностей $\|p(0)\|$. В этих условиях требуется найти закон распределения случайного вектора T , составляющие которого равны $T_1^{(2)}, \dots, T_s^{(2)}, T_1^{(1)}, \dots, T_s^{(1)}$.

Разобьем все множества состояний рассматриваемого процесса $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ на два непересекающихся подмножества: $Y = \{x_l, x_{l+1}, \dots, x_n\}$ и $Z = X - Y = \{x_0, \dots, x_{l-1}\}$ (см. рис. 3.22).

Тогда закон распределения случайной величины $T_1^{(Z)}$ определяется как закон распределения времени пребывания в подмножестве состояний Z до первого выхода из этого подмножества. Для того чтобы задача была поставлена правильно, нужно дополнительно предположить, что подмножество Z не является замкнутым, не содержит в себе замкнутых подмножеств, и выполняется равенство

$$\sum_{i=0}^{l-1} p_i(0) = 1. \quad (3.7.5)$$

Таким образом, задачу определения закона распределения случайной величины $T_1^{(Z)}$ мы свели к решенной ранее в [этой главе] задаче определения закона распределения времени пребывания в группе состояний.

Закон распределения случайных величин $T_1^{(Y)}, T_2^{(Z)}, T_2^{(Y)} \dots$ сначала определим для случая, когда процесс $X(t)$ является однородным. В этом случае матрица интенсивностей $\|\lambda\|$ не зависит от времени.

Для определения случайной величины $T_1^{(Y)}$ необходимо, чтобы подмножество состояний Y не являлось замкнутым и не содержало в себе замкнутых подмножеств. В этом случае закон распределения случайной величины $T_1^{(Y)}$ определяется как закон распределения времени блуждания в подмножестве состояний Y до первого выхода из этого подмножества.

Начальные условия для интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений определяются следующим образом.

Выделим в составе подмножества Y подмножество Z_β , определение которого было дано в § 3.2. Функция распределения $F_1^{(Z)}(t)$ времени $T_1^{(Z)}$ определяется с помощью преобразованного графа состояний $G(Z \vdash Z_\beta)$. В результате интегрирования дифференциальных уравнений, соответствующих этому преобразованному графу состояний, определяем вероятности $\tilde{p}_{j_1}^{(Z)}(t)$ того, что процесс к моменту времени t будет в одном из состояний $x_j \in Z_\beta$ (см. рис. 3.6)

$$\sum_{j=1}^m \tilde{p}_{j_1}^{(Z)}(t) = F_1^{(Z)}(t). \quad (3.7.6)$$

Найдем предел этого выражения $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \tilde{p}_{j_1}^{(Z)}(t) = \sum_{j=1}^m \tilde{p}_{j_1}^{(Y)}(0) = 1, \quad (3.7.7)$$

где

$$\tilde{p}_{j_1}^{(Y)}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{p}_{j_1}^{(Z)}(t) \quad (j = \overline{l, m}) \quad (3.7.8)$$

есть вероятность того, что процесс закончит свое блуждание в состоянии $x_j \in Z_\beta$ при условии, что рассматривается процесс блуждания по преобразованному множеству состояний $Z \vdash Z_\beta$ с начальными условиями (3.7.5). Напомним, что преобразование сводится к тому, что множество

состояний Z_p состоит только из поглощающих состояний x_j ($j = \overline{l, m}$). В силу однородности рассматриваемого процесса вероятности $\tilde{p}_{i_1}^{(Z)}(t)$ и их пределы $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{p}_{i_1}^{(Z)}(t)$ можно находить с помощью операторного метода.

Найденные вероятности $p_{j_1}^{(Y)}(0)$ ($j = \overline{l, m}$) являются начальными условиями, необходимыми для интегрирования системы дифференциальных уравнений, соответствующих преобразованному графу состояний $G(Y + Y_p)$, с помощью которого определяется функция распределения $F_1^{(Y)}(t)$ случайной величины $T_1^{(Y)}$:

$$\sum_{i=k}^{l-1} \tilde{p}_{i_1}(t) = F_1^{(Y)}(t). \quad (3.7.9)$$

Состояния подмножества $Y_p = \{x_k, \dots, x_{l-1}\}$ в этом случае также являются поглощающими.

Опять найдем предел выражения (3.7.9) при $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{l-1} \tilde{p}_{i_1}^{(Y)}(t) = \sum_{i=k}^l \tilde{p}_{i_2}^{(Z)}(0) = 1, \quad (3.7.10)$$

где

$$\tilde{p}_{i_2}^{(Z)}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{p}_{i_1}^{(Y)}(t) \quad (3.7.11)$$

есть вероятность того, что процесс закончит свое блуждание в состоянии $x_i \in Y_p$ при условии, что рассматривается процесс блуждания по преобразованному множеству состояний $Y + Y_p$ с начальными условиями (3.7.7), (3.7.8).

Эти вероятности $\tilde{p}_{i_2}^{(Z)}(0)$ являются начальными условиями, необходимыми для интегрирования системы дифференциальных уравнений, соответствующих преобразованному графу состояний $G(Z + Z_p)$, с помощью которого определяется функция распределения $F_2^{(Z)}(t)$ случайной величины $T_2^{(Z)}$:

$$\sum_{j=l}^m \tilde{p}_{j_1}^{(Z)}(t) = F_2^{(Z)}(t). \quad (3.7.12)$$

Найдя предел этого выражения при $t \rightarrow \infty$, мы найдем начальные условия, необходимые для определения закона распределения случайной величины $T_2^{(Y)}$ и т. д.

Таким образом, получена рекуррентная процедура определения закона распределения случайных величин $T_1^{(Z)}$, $T_1^{(Y)}$, $T_2^{(Z)}$, $T_2^{(Y)}$, ..., $T_l^{(Z)}$, $T_l^{(Y)}$...

Так как случайный процесс является марковским, то все эти случайные величины представляют собой совокупность независимых случайных величин и функции распределения любого числа этих случайных величин равна произведению функций распределения рассматриваемых случайных величин.

В случае, если рассматривается стационарный режим (который по условию существует), каждая из случайных величин $T_1^{(Z)}, T_2^{(Z)}, \dots, T_n^{(Z)}$ будет распределена одинаково и иметь закон распределения $F^{(Z)}(t)$. То же самое можно сказать о случайных величинах $T_1^{(Y)}, T_2^{(Y)}, \dots, T_n^{(Y)}, \dots$, каждая из которых будет иметь функцию распределения $F^{(Y)}(t)$.

Для нахождения функций распределения $F^{(Y)}(t)$ и $F^{(Z)}(t)$ нужно первоначально найти предельные вероятности $p_h = P(X(t) = x_h)$ ($h = \overline{0, n}$) при рассмотрении процесса блуждания по всему множеству состояний X в стационарном режиме.

Затем по формуле (3.2.5) определяем начальные условия для интегрирования системы дифференциальных уравнений, соответствующих преобразованному графу состояний $G(Z + Z_p)$, с помощью которого определяется функция распределения $F^{(Z)}(t)$.

Начальные условия, необходимые для интегрирования дифференциальных уравнений, соответствующих преобразованному графу состояний $G(Y + Y_p)$, с помощью которого определяется функция распределения $F^{(Y)}(t)$, находятся по формуле, аналогичной (3.2.5):

$$\tilde{p}_i(0) = p_i \left/ \sum_{h=l}^n p_h \right. \quad (i = \overline{l, n}). \quad (3.7.13)$$

Рассмотрим частный случай стационарного процесса $X(t)$, когда переход из любого состояния x_i ($i = \overline{0, n}$) в состояние x_j ($j = \overline{0, n}$) ($j \neq i$) осуществляется с одинаковой интенсивностью λ :

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{при } i \neq j, \\ 0 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (3.7.14)$$

Следовательно, из любого состояния $x_i \in Z$ система может попасть в состояния подмножества Y под воздействием потока событий, суммарная интенсивность которого равна:

$$\lambda_{Z \rightarrow Y} = (n - l + 1)\lambda. \quad (3.7.15)$$

Аналогичные рассуждения дают возможность сделать вывод о том, что суммарная интенсивность потока событий, переводящего систему из любого состояния $x_j \in Y$ в состояния подмножества Z , будет определяться по формуле

$$\lambda_{Y \rightarrow Z} = l\lambda. \quad (3.7.16)$$

На основании доказательства, приведенного в примере 3.1.1, можно утверждать, что функция распределения $F^{(Z)}(t)$ и $F^{(Y)}(t)$ будут иметь следующий вид:

$$F^{(Z)}(t) = 1 - \exp(-1)(n - l + 1)\lambda t \quad (t \geq 0); \quad (3.7.17)$$

$$F^{(Y)}(t) = 1 - \exp(-1)l\lambda t \quad (t \geq 0). \quad (3.7.18)$$

Другими словами, время $T^{(Z)}$ пребывания системы в подмножестве состояний Z распределено по показательному закону с параметром $(n - l + 1)\lambda$ и время $T^{(Y)}$ пребывания системы в подмножестве состояний Y тоже распределено по показательному закону с параметром $l\lambda$.

При этом наблюдается интересный факт, когда функции распределения $F^{(z)}(t)$ и $F^{(y)}(t)$ не зависят от начальных условий, при которых исследуется поведение случайной функции.

Для того чтобы поток пересечений процессом $X(t)$ заданного уровня l (как снизу вверх, так и сверху вниз) был простейшим, достаточно, чтобы параметры $(n-l+1)\lambda$ и $l\lambda$ были равны:

$$(n-l+1)\lambda = l\lambda, \quad (3.7.19)$$

откуда

$$l = (n+1)/2. \quad (3.7.20)$$

Так как величина l должна быть натуральным числом, то величина $(n+1)$ в формуле (3.7.20) должна быть четным числом, т. е. число состояний процесса должно быть четным числом.

Таким образом, рассмотренные выше условия, наложенные на связи между состояниями однородного марковского случайного процесса $\lambda(t)$ являются достаточными для того, чтобы время пребывания в любом подмножестве состояний было распределено по показательному закону. Можно ожидать, что эти условия, налагаемые на однородный марковский случайный процесс $X(t)$, являются также необходимыми.

В качестве другого примера однородного марковского случайного процесса $X(t)$ рассмотрим циклический процесс, размеченный граф состояния которого показан на рис. 3.23.

Рис. 3.23.

При нахождении процесса $X(t)$ в состоянии x_l или x'_l случайная функция $X(t) = l$. Одна из возможных реализаций такого процесса $x(t)$ при $x(0) = 0$ показана на рис. 3.24. Здесь для простоты реализации случайной функции $x(0)$ изображена в виде непрерывной функции.

Найдем для этого случая закон распределения времени $T_1^{(z)}$, $T_2^{(z)}$ и $T_3^{(z)}$, ..., $T_1^{(y)}$, $T_2^{(y)}$, $T_3^{(y)}$ при условии, что $X(0) = 0$.

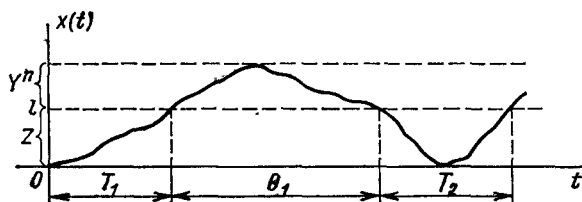


Рис. 3.24.

Очевидно, что закон распределения случайной величины $T_1^{(z)}$ будет представлять собой композицию l показательных законов, т. е. будет представлять собой закон Эрланга $(l-1)$ -го порядка [11]

$$f_1^{(z)}(t_1) = \frac{\lambda (\lambda t_1)^{l-1}}{(l-1)!} e^{-\lambda t_1} \quad (t_1 > 0).$$

Закон распределения времени $T_1^{(Y)}$ будет представлять собой закон Эрланга $[(n-1)2+1]$ -го порядка

$$f_1^{(Y)}(t_1) = \frac{\lambda (\lambda t_1)^{((n-1)2+1)}}{((n-1)2+1)!} e^{-\lambda t_1}.$$

Закон распределения случайной величины $T_i^{(Y)} (i > 1)$ равен закону распределения случайной величины $T_1^{(Y)}$, а закон распределения случайной величины $T_i^{(Z)} (i > 2)$ равен закону распределения случайной величины $T_2^{(Z)}$.

Перейдем к анализу более сложного случая, когда марковский случайный процесс $X(t)$ не является однородным. У такого процесса элементы матрицы интенсивностей $\|\lambda(t)\|$ являются неотрицательными функциями времени.

Будем считать, что в момент $t=0$ процесс находится в состояниях подмножества Z , что соответствует условиям (3.7.5). Функция распределения $F_1^{(Z)}(t)$ времени $T_1^{(Z)}$ определяется таким же образом, как было описано для случая, когда процесс $X(t)$ был однородным [см. (3.7.6)].

Так как рассматриваемый процесс не является однородным, закон распределения времени $T_1^{(Y)}$ зависит от того, с какого момента и из какого состояния начались блуждания по состояниям подмножества Y при отсчете времени $T_1^{(Y)}$.

Введем в рассмотрение гипотезу, состоящую в том, что время $T_1^{(Z)}$ блуждания процесса $X(t)$ в состояниях подмножества Z приняло значение на элементарном интервале $(t_1^{(Z)}, t_1^{(Z)} + dt_1^{(Z)})$. Вероятность этой гипотезы по определению равна $dF_1^{(Z)}(t_1^{(Z)})$. Теперь найдем условную функцию распределения $F_1^{(Y)}(t_1^{(Y)}/T_1^{(Z)} = t_1^{(Z)}) = F_1^{(Y)}(t_1^{(Y)}/t_1^{(Z)})$ времени $T_1^{(Y)}$ блуждания процесса $X(t)$ по состояниям подмножества Y , вычисляемую при условии, что процесс начал блуждать по состояниям этого подмножества в момент времени $t_1^{(Z)}$.

Эту условную функцию распределения $F_1^{(Y)}(t_1^{(Y)}/t_1^{(Z)})$ времени $T_1^{(Y)}$ можно найти путем интегрирования системы дифференциальных уравнений, соответствующих преобразованному графу состояний $Gt_1^{(Z)} (Y + Y_p)$. Индекс $(t_1^{(Z)})$ указывает на то, что начальные условия $\bar{p}_{ji}^{(Y)}(\bar{t}_1^{(Z)})$ ($j = \overline{l, m}$) для полученной системы дифференциальных уравнений определяются в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений, соответствующих преобразованному графу состояний $G(Z + Z_p)$, и определения вероятностей

$$\tilde{p}_{ji}(t_1^{(Z)}) \quad (j = \overline{l, m}) \quad x_j \in Z_p = \{x_l, \dots, x_m\} \quad (3.7.21)$$

на момент $t_1^{(Z)}$.

$$1) f_2^{(Z)}(t_2) = \frac{\lambda (\lambda t_2)^{(2l-1)}}{(2l-1)!} e^{-\lambda t_2}.$$

Зная эти вероятности $\tilde{p}_j^{(z)}(t_1^{(z)})$, можно найти начальные условия $\bar{p}_{j1}^{(y)}(t_1^{(z)})$ по формуле

$$\bar{p}_{j1}^{(y)}(t_1^{(z)}) = \tilde{p}_{j1}^{(z)}(t_1^{(z)}) \left/ \sum_{h=1}^m p_{h1}^{(z)}(t_1^{(z)}) \right. \quad (j = \overline{l, m}). \quad (3.7.22)$$

Интегрирование уравнений, соответствующих преобразованному графу состояний $G_{t_1}^{(z)}(Y + Y_{\beta})$ при начальных условиях (3.7.22), проводится на участке времени $t_1^{(y)} > t_1^{(z)}$. В результате интегрирования этой системы дифференциальных уравнений найдем условную функцию распределения времени первого пребывания в подмножестве Y [см. (3.7.9)]

$$F_1^{(y)}(t_1^{(y)} | t_1^{(z)}) = \sum_{i=k}^{l-1} \tilde{p}_{i1}^{(y)}(t_1^{(y)} | t_1^{(z)}), \quad (3.7.23)$$

где $\tilde{p}_{i1}^{(y)}(t_1^{(y)} | t_1^{(z)})$ есть условная вероятность того, что в момент $t_1^{(y)} > t_1^{(z)}$ система попадет в состояние $x_i \in Y_{\beta} = \{x_k, \dots, x_{l-1}\}$ вычисляется при условии, что процесс начал блуждать по состояниям множества Y в момент $t_1^{(z)} < t_1^{(y)}$.

Найдя условную функцию распределения случайной величины $T_1^{(y)}$, можно по интегральной формуле полной вероятности определить безусловную функцию распределения этой случайной величины

$$F_1^{(y)}(t_1^{(y)}) = \int_0^{\infty} F_1^{(y)}(t_1^{(y)} | t_1^{(z)}) dF_1^{(z)}(t_1^{(z)}). \quad (3.7.24)$$

Таким образом, получается рекуррентная процедура определения функций распределения системы случайных величин $T_1^{(z)}, T_1^{(y)}, T_2^{(z)}, T_2^{(y)} \dots$

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий отыскание законов распределения системы случайных величин $T_1^{(y)}, T_1^{(z)} \dots$ Размеченный граф состояний исследуемой системы показан на рис. 3.25.

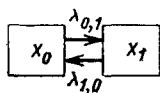


Рис. 3.25.

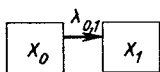


Рис. 3.26.

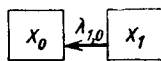


Рис. 3.27.

Интенсивности потоков событий определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{01} &= \lambda t \\ \lambda_{10} &= \beta t \end{aligned} \right\}. \quad (3.7.25)$$

Положим подмножество $Z = x_0$, а подмножество $Y = x_1$. Следовательно, $Z_{\beta} = x_1$, а $Y_{\beta} = x_0$.

Размеченные графы состояний $G(Z + Z_{\beta})$ и $G(Y + Y_{\beta})$ показаны на рис. 3.26 и 3.27 соответственно.

Начальные условия на момент времени $t=0$ имеют вид:

$$p_0(0) = 1; \quad p_1(0) = 0. \quad (3.7.26)$$

В соответствии с размеченным графом состояний $G(Z+Z_\beta)$ имеем следующую систему уравнений на определения $F_1^{(Z)}(t)$:

$$\left. \begin{aligned} dp_0(t) &= -\lambda_{01} p_0(t) \\ p_1(t) &= 1 - p_0(t) = F_1^{(Z)}(t) \end{aligned} \right\}, \quad (3.7.27)$$

которую нужно решать при начальных условиях (3.7.26).

Это решение имеет вид:

$$p_0(t) = \exp(-1) \lambda t^2 / 2 \quad (t > 0), \quad (3.7.28)$$

$$F_1^{(Z)}(t) = 1 - \exp(-1) \lambda t^2 / 2 \quad (t > 0), \quad (3.7.29)$$

откуда

$$f_1^{(Z)}(t) = \lambda t \exp(-1) \lambda t^2 / 2 \quad (t > 0). \quad (3.7.30)$$

Следовательно, случайная величина $T^{(Z)}$ подчинена закону Релея [11].

Введем в рассмотрение гипотезу о том, что случайная величина $T_1^{(Z)}$ приняла значение, лежащее в интервале $(t_1^{(Z)}, t_1^{(Z)} + dt_1^{(Z)})$. В предположении, что эта гипотеза имела место, найдем вероятность $p_0(t_1^{(Y)} | t_1^{(Z)})$, которая определяется с помощью размеченного графа состояний $G(Y+Y_\beta)$, изображенного на рис. 3.27:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1(t_1^{(Y)} | t_1^{(Z)})}{dt} &= -\lambda_{10} p_1(t_1^{(Y)} | t_1^{(Z)}), \quad (t_1^{(Y)} > t_1^{(Z)}) \\ p_0(t_1^{(Y)} | t_1^{(Z)}) &= 1 - p_1(t_1^{(Y)} | t_1^{(Z)}) = F(t_1^{(Y)} | t_1^{(Z)}) \end{aligned} \right\}. \quad (3.7.31)$$

Эту систему уравнений интегрируем при начальном условии (3.7.22), которое в данном случае имеет вид

$$p_1(t_1^{(Y)} = t_1^{(Z)} | t_1^{(Z)}) = 1. \quad (3.7.32)$$

Интегрирование проводится на интервале $t_1^{(Y)} > t_1^{(Z)}$. Решение имеет вид

$$p_1(t_1^{(Y)} | t_1^{(Z)}) = \exp(-1) [(t_1^{(Y)})^2 - (t_1^{(Z)})^2] \beta / 2 \quad (t_1^{(Y)} > t_1^{(Z)}),$$

откуда

$$F_1^{(Y)}(t_1^{(Y)} | t_1^{(Z)}) = 1 - \exp(-1) [(t_1^{(Y)})^2 - (t_1^{(Z)})^2] \beta / 2. \quad (3.7.33)$$

Безусловную функцию распределения найдем из выражения

$$\begin{aligned} F_1^{(Y)}(t_1^{(Y)}) &= \int_0^{t_1^{(Y)}} (1 - e^{-\beta (t_1^{(Y)})^2 / 2} e^{-\beta (t_1^{(Z)})^2 / 2}) \lambda t_1^{(Z)} e^{-\lambda (t_1^{(Z)})^2 / 2} dt = \\ &= 1 - \frac{\beta e^{-\lambda (t_1^{(Y)})^2 / 2} - \lambda e^{-\beta (t_1^{(Y)})^2 / 2}}{\beta - \lambda} \quad (t_1^{(Y)} > 0). \end{aligned} \quad (3.7.34)$$

Плотность распределения случайной величины $t_1^{(Y)}$ будет иметь вид

$$f_1(t_1^{(Y)}) = \frac{\beta \lambda t_1^{(Y)}}{\beta - \lambda} [e^{-\lambda (t_1^{(Y)})^{3/2}} - e^{-\beta (t_1^{(Y)})^{3/2}}] t_1^{(Y)} > 0. \quad (3.7.35)$$

Проведя аналогичные преобразования, можно получить выражение для условной функции распределения

$$F_2^{(Z)}(t_2^{(Z)} | t_1^{(Y)}) = 1 - e^{-\lambda [(t_2^{(Z)})^2 - (t_1^{(Y)})^2]^{1/2}} \quad (t_2^{(Z)} > t_1^{(Y)}). \quad (3.7.36)$$

Выражение для безусловной функции распределения $F_2^{(Z)}(t_2^{(Z)})$ можно найти из выражения

$$F_2^{(Z)}(t_2^{(Z)}) = \int_0^{t_2^{(Z)}} F_2(t_2^{(Z)} | t_1^{(Y)}) f_1^{(Y)}(t_1^{(Y)}) dt_1^{(Y)}. \quad (3.7.37)$$

Таким образом, мы получаем рекуррентные зависимости для определения функций распределения случайных величин $T_2^{(Z)}, T_2^{(Y)}, T_2^{(Z)}, T_3^{(Y)} \dots$:

$$F_i^{(Z)}(t_i^{(Z)} | t_{i-1}^{(Y)}) = 1 - \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} [(t_i^{(Z)})^2 - (t_{i-1}^{(Y)})^2] \right\} \quad (i \geq 2); \quad (3.7.38)$$

$$F_i^{(Y)}(t_i^{(Y)} | t_i^{(Z)}) = 1 - \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} [(t_i^{(Y)})^2 - (t_i^{(Z)})^2] \right\} \quad (i \geq 2); \quad (3.7.39)$$

$$F_i^{(Z)}(t_i^{(Z)}) = \int_0^{t_i^{(Z)}} F_i^{(Z)}(t_i^{(Z)} | t_{i-1}^{(Y)}) dF_{i-1}^{(Y)}(t_{i-1}^{(Y)}) \quad (i \geq 2); \quad (3.7.40)$$

$$F_i^{(Y)}(t_i^{(Y)}) = \int_0^{t_i^{(Y)}} F_i^{(Y)}(t_i^{(Y)} | t_i^{(Z)}) dF_i^{(Z)}(t_i^{(Z)}) \quad (i \geq 2). \quad (3.7.41)$$

4

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ

4.1. Основные понятия и определения

Процессом гибели и размножения будем называть дискретный марковский случайный процесс, множество состояний которого $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ставится в однозначное соответствие с рядом целых неотрицательных чисел $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$, и для любого состояния этого процесса (за исключением граничных состояний x_0 и x_n) соседними состояниями могут быть только те, индексы которых отличаются от индекса рассматриваемого состояния на величину ± 1 . Граф состояний процесса гибели и размножения показан на рис. 4.1. Например, соседними для состояния x_k являются состояния x_{k+1} и x_{k-1} ($k \neq 0$ и $k \neq n$). Для начального состояния x_0 соседним является состояние x_1 , а для конечного состояния x_n соседним является состояние x_{n-1} . На рис. 4.2 изображена одна из возможных реализаций процесса гибели и размножения, на-

чальное состояние которого равно нулю [$X(0) = x_0 = 0$]. В моменты $t_1, t_2, \dots, t_8$ случайная функция $X(t)$ уменьшалась на единицу, в остальные моменты времени, где случайная функция $X(t)$ терпит разрыв, она увеличивалась на единицу.

Таким образом, случайный процесс гибели и размножения представляет собой скачкообразную случайную функцию $X(t)$, скачки кото-

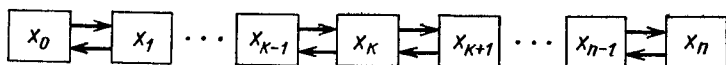


Рис. 4.1.

рой могут принимать значение ± 1 , если случайная функция $X(t)$ отлична от нуля и величины n . Если случайная функция $X(t) = 0$, то скачок может иметь значение $(+1)$, а если случайная функция $X(t) = n$, то скачок может иметь значение (-1) . Могут рассматриваться также процессы гибели и размножения, для которых не накладывается никаких

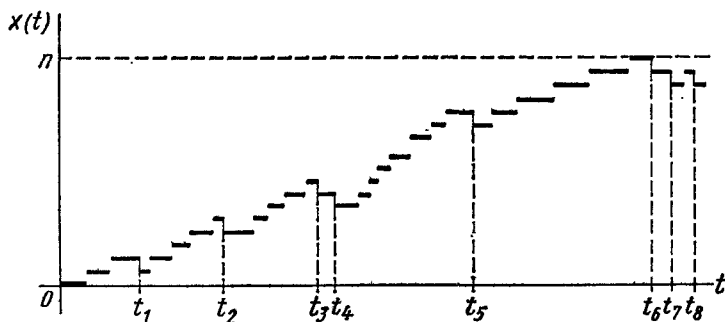


Рис. 4.2.

ограничений на величину $n (n \rightarrow \infty)$. Такие процессы будем называть процессами гибели и размножения без ограничения на число состояний.

Одной из основных задач прикладной теории марковских случайных процессов при изучении процессов гибели и размножения является отыскание характеристик случайной функции $X(t)$:

— математического ожидания случайной функции $X(t)$ $M[X(t)] = m_x(t)$;

— дисперсии случайной функции $X(t)$

$$D[X(t)] = M[\dot{X}(t^2)] = D_x(t),$$

где $\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ — центрированная случайная функция;

— корреляционной функции случайной функции $X(t)$

$$k_x(t, t') = M[\dot{X}(t) \dot{X}(t')];$$

— первого смешанного начального момента случайной функции $X(t)$ $\Gamma_x(t, t') = M[X(t) X(t')]$.

Известно, что между последними тремя характеристиками существуют следующие зависимости:

$$D_x(t) = k_x(t, t);$$

$$\Gamma_x(t, t') = k_x(t, t') - m_x(t) m_x(t');$$

$$\Gamma_x(t, t) = D_x(t) - m_x^2(t) = a_x [X(t)] = a_{xx}(t).$$

Размеченный граф состояний марковского случайного процесса гибели и размножения показан на рис. 4.3. Обозначения на этом размеченном графе состояний приняты следующие: интенсивности потоков событий, **выводящие** процесс из состояния x_k , обозначены индексами этого состояния. Интенсивность потока событий, переводящего процесс из состояния x_k в сторону увеличения индексов состояний (в состояние x_{k+1}) обозначена буквой λ_k , а интенсивность потока событий, переводящего процесс в сторону уменьшения индексов состояний (в состояние

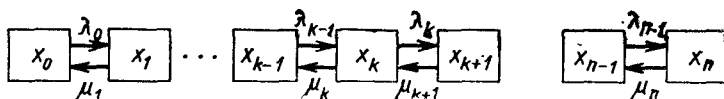


Рис. 4.3.

x_{k-1}), обозначена буквой μ_k . В дальнейшем для сокращения изложения будем условно считать, что потоки событий, интенсивности которых обозначены буквой λ (с различными индексами) переводят процесс «направо», а буквой μ — «налево» (см. рис. 4.3).

Таким образом, потоки событий, интенсивности которых обозначены буквой λ , приводят к «размножению» процесса [увеличению случайной функции $X(t)$], а потоки событий, интенсивности которых обозначены буквой μ , способствуют «гибели» процесса [уменьшению случайной функции $X(t)$]. Напомним, что все эти интенсивности потоков могут быть любыми неотрицательными функциями времени (для сокращения записи аргумент t опущен).

Помимо процессов гибели и размножения, существуют процессы «чистого размножения» и процессы «чистой гибели».

Процесс чистого размножения — это такой процесс, для которого случайная функция $X(t)$ является неубывающей функцией времени. Для этого процесса интенсивности всех потоков, переводящие процессы «налево», равны нулю: $\mu_k \equiv 0 (k = \overline{1, n})$. Нетривиальный процесс чистого размножения имеет место тогда, когда начальное состояние этого процесса отлично от $n (X(0) < x_n = n)$.

Процесс чистой гибели — это такой процесс, для которого случайная функция $X(t)$ является невозрастающей функцией времени. Для этого процесса интенсивности всех потоков, переводящие процесс «направо», равны нулю: $\lambda_k \equiv 0 (k = \overline{0, n-1})$. Нетривиальное начальное состояние для такого процесса должно быть отлично от 0 [$X(0) > x_0 = 0$].

Свое название процессы гибели и размножения получили потому, что с помощью такой модели впервые рассматривались различные биологические процессы размножения и гибели популяций. В настоящее время эти процессы широко применяются для количественного исследования различных военных, инженерных, биологических и экономических задач.

В конце этого параграфа сделаем одно важное замечание: все вероятностные характеристики процессов гибели и размножения зависят только от следующих параметров: 1) количества состояний процесса гибели и размножения $n+1$; 2) интенсивностей потоков «размножения» $\lambda_k (k=0, n-1)$; 3) интенсивностей потоков «гибели» $\mu_k (k=1, n)$.

Отметим, что интенсивности потоков λ_k и μ_k являются по своему определению математическими ожиданиями некоторых случайных функций, т. е. являются в общем случае неотрицательными неслучайными функциями времени t .

4.2. Характеристики случайных процессов гибели и размножения без ограничения на число состояний процесса при $\lambda_k = \lambda$ и $\mu_k = k\mu$

Рассмотрим процесс гибели и размножения, размеченный граф состояний которого показан на рис. 4.4.

Ограничения на число состояний для этого процесса не накладываются. Такой размеченный граф состояний описывает процесс обслуживания техники при неограниченном числе каналов или процесс накопления техники. Действительно, если для системы массового обслуживания при неограниченном числе каналов и без взаимопомощи меж-

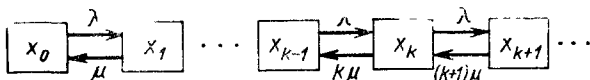


Рис. 4.4.

ду каналами [32] состояние x_k состоит в том, что в момент времени t число обслуживаемых заявок равно k , интенсивность потока обслуживаний равна λ и интенсивность потока обслуживаний равна μ , то размеченный граф состояний, изображенный на рис. 4.4, соответствует такой системе.

В качестве другого примера можно рассматривать процесс накопления техники одного типа. Интенсивность потока событий λ — интенсивность производства вооружения, интенсивность потока событий μ — интенсивность выхода из строя одной единицы техники, а состояние x_k состоит в том, что в момент времени t в строю находится k единиц вооружения. В дальнейшем будем для определенности пользоваться только терминологией процесса накопления техники. Будем также считать, что рассматриваемый случайный процесс не носит характера «взрыва» и соответствующие условия при этом выполняются [32].

Введем в рассмотрение случайную функцию $X(t)$ — число единиц вооружения в строю в момент времени t — и найдем ее характеристики:

$$M[X(t)] = m_x(t); D[X(t)] = D_x(t); k_x(t, t') = M[\dot{X}(t) \dot{X}(t')].$$

В соответствии с размеченным графом состояний (см. рис. 4.4) система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний будет иметь такой вид:

$$\left. \begin{aligned} dp_0(t)/dt &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ dp_k(t)/dt &= -(\lambda + k\mu) p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.2.1)$$

где $p_k(t) = P(X(t) = k) (k=0, 1, 2, \dots)$.

В выражении (4.2.1) интенсивности потоков событий λ и μ могут быть любыми неотрицательными функциями времени, но для сокращения записи зависимости интенсивностей потоков λ и μ от времени опущены.

Найдем математическое ожидание случайной функции $X(t)$, для чего правые и левые части уравнения для производной $[dp_k(t)/dy]y$ умножим на k и проведем суммирование по всем k :

$$\sum_{k=0}^{\infty} k dp_k(t)/dt = \sum_{k=0}^{\infty} k [-(\lambda + k\mu) p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t)]. \quad (4.2.2)$$

Проведя ряд несложных алгебраических преобразований и считая, что математическое ожидание случайной функции $X(t)$ существует, можно получить следующее выражение

$$dm_x(t)/dt = \lambda - \mu m_x(t), \quad (4.2.3)$$

где

$$m_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(t); \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1. \quad (4.2.4)$$

Решение этого уравнения при начальном условии $m_x(0) = m_{x_0}$ будет иметь такой вид:

$$m_x(t) = e^{-\int_0^t \mu d\tau} \left[\int_0^t \lambda e^{\int_0^{\tau} \mu d\tau} d\tau' + m_{x_0} \right].$$

При постоянных λ и μ получим

$$m_x(t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) + m_{x_0} e^{-\mu t},$$

а при $m_{x_0} = 0$ это выражение примет такой вид:

$$m_x(t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}). \quad (4.2.5)$$

Эту формулу можно найти в [50].

Найдем второй начальный момент случайной функции $X(t)$: $\alpha_{2x}(t) = M\{[X(t)]^2\}$, для чего левые и правые части уравнений (4.2.1) умножим на k^2 и сложим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 dp_k(t)/dt = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 [-(\lambda + k\mu) p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t)]. \quad (4.2.6)$$

Проделав ряд преобразований этого выражения, аналогичных тем, которые были проведены с выражением (4.2.2), получим следующее дифференциальное уравнение для второго начального момента (если такой существует):

$$d\alpha_{2x}(t)/dt = -2\mu\alpha_{2x}(t) + (2\lambda + \mu)m_x(t) + \lambda. \quad (4.2.7)$$

Дисперсию случайной функции $X(t)$ можно выразить через второй и первый начальные моменты:

$$D_x(t) = \alpha_{2x}(t) - (m_x(t))^2. \quad (4.2.8)$$

Продифференцируем левую и правую части равенства (4.2.8) и используем равенства (4.2.3) и (4.2.7). После несложных преобразований получим

$$dD_x(t)/dt = -2\mu D_x(t) + \mu m_x(t) + \lambda. \quad (4.2.9)$$

Заметим еще раз, что уравнения (4.2.3) и (4.2.9) справедливы и в случае, когда интенсивности потоков λ и μ являются любыми неотрицательными функциями времени.

В случае, если интенсивности потоков λ и μ являются постоянными, решение дифференциального уравнения (4.2.9) при начальных условиях $m_x(0) = D_x(0) = 0$ имеет вид

$$D_x(t) = \lambda/\mu (1 - e^{-\mu t}), \quad (4.2.10)$$

т. е. математическое ожидание числа единиц техники, находящихся в строю, равно дисперсии этой же случайной величины в любой момент времени t . Известно, что равенство математического ожидания дисперсии имеет место для случайной величины, подчиненной закону Пуассона. В общем случае из равенства математического ожидания дисперсии нельзя сделать утверждение о том, что случайная величина подчинена закону Пуассона. Такое равенство является лишь необходимым условием того, что случайная величина подчинена закону Пуассона. В рассматриваемом же случае можно убедиться в том, что при фиксированном значении t случайная величина $X(t)$ подчиняется закону Пуассона

$$P[X(t) = k] = p_k(t) = [m_x(t)]^k e^{-m_x(t)} / k!, \quad (4.2.11)$$

где $m_x(t)$ определяется формулой (4.2.5).

Таким образом, при постоянных интенсивностях потоков событий λ и μ нами найден одномерный закон распределения случайной функции $X(t)$ (т. е. закон распределения сечения случайной функции). Заметим, что при достаточно больших значениях $m_x(t)$, когда $m_x(t) > 20$, можно приближенно считать, что случайная функция $X(t)$ является нормальной с найденным математическим ожиданием и дисперсией.

Найдем корреляционную функцию случайной функции $X(t)$. По определению имеем

$$k_x(t, t') = \Gamma_x(t, t') - m_x(t)m_x(t'). \quad (4.2.12)$$

Для сокращения записи положим

$$\left. \begin{aligned} X_i(t) &= X, \\ X_i(t') &= X' \end{aligned} \right\} \quad (4.2.13)$$

и будем для определенности считать, что $t' > t$.

Закон распределения системы случайных величин X и X' обозначим $p_{i,j}(t, t') = P((X(t) = x_i) (X(t') = x_j))$ ($i=0, 1 \dots; j=0, 1 \dots$). Применяя теорему умножения вероятностей, получим

$$p_{i,j}(t, t') = P(X(t) = x_i) P(X(t') = x_j | X(t) = x_i).$$

Введем обозначение для условной вероятности

$$P(X(t') = x_j | X(t) = x_i) = p_{j|i}(t', t).$$

Эти условные вероятности можно получать, решая систему дифференциальных уравнений (4.2.1) и определяя вероятности $p_j(\tau)$ на момент времени $\tau = t' - t$ ($t' > t$) при начальном условии $p_i(0) = 1$.

Тогда

$$\begin{aligned}\Gamma_x(t, t') &= M[XX'] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x_i x_j p_i(t) p_{j|i}(t', t) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i(t) \sum_{j=0}^{\infty} x_j p_{j|i}(t', t).\end{aligned}\quad (4.2.14)$$

Выражение $\sum_{j=0}^{\infty} x_j p_{j|i}(t', t)$ представляет собой математическое ожидание случайной величины $X(t')$, вычисляемое при условии, что в момент времени $t < t'$ процесс находится в состоянии x_i ($X(t) = x_i$).

Обозначим это математическое ожидание

$$m_{x'|x_i}(t', t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j p_{j|i}(t', t). \quad (4.2.15)$$

Для нахождения условного математического ожидания $m_{x'|x_i}(t, t')$ воспользуемся тем, что рассматриваемый нами процесс является марковским, а математическое ожидание определяется в результате решения уравнения (4.2.3) при соответствующем начальном условии. В данном случае в качестве начального нужно использовать условие, состоящее в том, что процесс в момент времени t находится в состоянии x_i :

$$X(t) = X = x_i. \quad (4.2.16)$$

Получив решение уравнения (4.2.3) при начальном условии (4.2.16), можно найти искомое математическое ожидание произведения случайных величин X и X'

$$\Gamma_x(t, t') = M[X \cdot X'] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i m_{x'|x_i}(t', t) p_i(t). \quad (4.2.17)$$

Сумма (4.2.17) в совокупности с формулами (4.2.3) и (4.2.12) дает возможность определить корреляционную функцию $k_x(t, t')$.

Для случая, когда $t' < t$, достаточно поменять обозначения. Ход преобразований остается тот же.

Отметим, что условное математическое ожидание $m_{x'|x_i}(t', t)$ было определено не по громоздкой формуле (4.2.15), а из решения дифференциального уравнения (4.2.3). Это намного облегчает решение задачи.

Найдем корреляционную функцию случайной функции $X(t)$ для случая, когда интенсивности потоков событий λ и μ положительные и постоянные.

В этом случае решение дифференциального уравнения (4.2.3) при начальном условии (4.2.16) имеет такой вид:

$$m_{x'|x_i}(t', t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu(t'-t)}) + x_i e^{-\mu(t'-t)} (t' > t). \quad (4.2.18)$$

Тогда [см. (4.2.14), (4.2.15), (4.2.17)]

$$M[XX'] = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu(t'-t)}) m_x(t) + e^{-\mu(t'-t)} \alpha_{2x}(t). \quad (4.2.19)$$

Для вычисления математических ожиданий $m_x(t)$ и $\alpha_{2x}(t)$ будем считать, что в момент времени $t=0$ $X(0)=0$. В этом случае [см. (4.2.5), (4.2.10)]

$$\left. \begin{aligned} m_x(t) &= \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}), \\ \alpha_{2x}(t) &= \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) + \left[\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \right]^2 \end{aligned} \right\}. \quad (4.2.20)$$

С учетом этого выражения формула для корреляционной функции примет такой вид [см. (4.2.5), (4.2.12) и (4.2.19)]:

$$k_x(t, t') = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) e^{-\mu(t'-t)} \quad (t' > t). \quad (4.2.21)$$

При $t > t'$ выражение для корреляционной функции можно найти из формулы

$$k_x(t, t') = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t'}) e^{-\mu(t-t')}. \quad (4.2.22)$$

Оба выражения для корреляционной функции (4.2.21) и (4.2.22) можно объединить в одно

$$k_x(t, t') = \frac{\lambda}{\mu} [1 - e^{-\mu \min(t, t')}] e^{-\mu |t-t'|}. \quad (4.2.23)$$

При постоянных положительных интенсивностях потоков событий λ и μ существует стационарный режим работы рассматриваемой системы. В этом случае (при $t \rightarrow \infty$) случайная функция $X(t)$ является стационарной с характеристиками [см. (4.2.5), (4.2.10), (4.2.23)]:

$$\begin{aligned} m_x &= D_x = \lambda/\mu, \\ k_x(t, t') &= \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu |t-t'|}. \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

В сечении случайная функция $X(t)$ представляет собой случайную величину, распределенную по закону Пуассона с математическим ожиданием $m_x = \lambda/\mu$.

Двумерный закон распределения сечений $X(t)$ и $X(t')$ ($t' > t$) можно найти из выражения

$$P(X(t) = k) = \frac{m_x^k}{k!} e^{-m_x}. \quad (4.2.25)$$

Вероятность $P(X(t') = n | X(t) = k)$ определяется из системы дифференциальных уравнений (4.2.1), которая должна решаться при условии, что в момент времени $t'=0$ $p_k(0)=1$, $p_j(0)=0$ ($j \neq k$).

Тогда вероятность $P[X(t') = n | X(t) = k]$ равна вероятности $p_n(\tau)$, которая находится как решение системы уравнения (4.2.1) при указанном начальном условии на момент времени $\tau = t' - t = 0$.

При достаточно большом математическом ожидании ($m_x = \lambda/\mu > 20$) закон распределения сечения случайной функции $X(t)$ можно приближенно считать нормальным с характеристиками $m_x = D_x = \lambda/\mu$.

Рассмотрим несколько отличный подход к выводу дифференциальных уравнений для математического ожидания и дисперсии числа единиц вооружения, находящихся в строю, который будет широко использоваться в этой работе.

В момент времени $t > 0$ число единиц вооружения равно $X(t)$. Найдем приращение случайной функции $X(t)$ при изменении аргумента t на величину Δt

$$\Delta X = X(t + \Delta t) - X(t). \quad (4.2.26)$$

Введем в рассмотрение гипотезу, состоящую в том, что в момент времени t процесс $X(t)$ находился в состоянии $x_k = k$. Вероятность этой гипотезы равна $p_k(t)$. Тогда ряд распределений случайной величины ΔX_k — приращения случайной функции $X(t)$ за время Δt , вычисляемый при условии, что в момент t процесс находился в состоянии x_k , имеет вид (см. размеченный граф состояний системы на рис. 4.4)

$$\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & +1 \\ \hline k\mu\Delta t & 1 - k\mu\Delta t - \lambda\Delta t & \lambda\Delta t \end{array}. \quad (4.2.27)$$

Этот ряд является приближенным, в нем отброшены члены, порядки малости которых выше, чем Δt .

В соответствии с этим рядом распределения математическое ожидание случайной величины ΔX_k будет равно:

$$M[\Delta X_k] = \lambda\Delta t - k\mu\Delta t + 0(\Delta t), \quad (4.2.28)$$

где величиной $0(\Delta t)$ принято обозначать все величины, порядок малости которых выше, чем Δt .

Умножив левую и правую части последнего выражения на величину $p_k(t)$ и проведя суммирование по всем $k (k=0, 1, 2 \dots)$, найдем математическое ожидание прекращения случайной функции $X(t)$

$$M[\Delta X] = m_x(t + \Delta t) - m_x(t) = \lambda\Delta t - m_x(t)\mu\Delta t + 0(\Delta t). \quad (4.2.29)$$

Прodeлав обычную процедуру, получим выражение

$$dm_x(t)/dt = \lambda - \mu m_x(t), \quad (4.2.30)$$

которое уже встречалось [см. (4.2.3)]. Заметим, что ряд (4.2.27) справедлив для любых $k=0, 1, 2 \dots$

Таким же способом составим дифференциальное уравнение для второго начального момента случайной величины ΔX_k

$$\alpha_2[\Delta X_k] = \lambda\Delta t + k\mu\Delta t + 0(\Delta t). \quad (4.2.31)$$

Прodeлав преобразования, аналогичные тем, которые были проведены с выражением (4.2.28), получим выражение для второго начального момента приращения случайной функции $X(t)$

$$\alpha_2[\Delta X] = \lambda\Delta t + m_x(t)\mu\Delta t + 0(\Delta t). \quad (4.2.32)$$

Так как для любой случайной величины Y справедливо равенство $D[Y] = \alpha_2[Y] - (M[Y])^2$, то дисперсия приращения случайной функции $X(t)$ будет

$$D[\Delta X] = \lambda\Delta t + m_x(t)\mu\Delta t + 0(\Delta t). \quad (4.2.33)$$

Приращение дисперсии по определению равно:

$$\Delta D_x(t) = D_x(t + \Delta t) - D_x(t). \quad (4.2.34)$$

В соответствии с выражением (4.2.26) имеем

$$D_x(t + \Delta t) = D_x(t) + D[\Delta X] + 2k[X(t), \Delta X].$$

Следовательно [см. (4.2.34)],

$$\Delta D_x(t) = D[\Delta X] + 2k[X(t), \Delta X]. \quad (4.2.35)$$

Для отыскания корреляционного момента между величинами $X(t)$ и ΔX найдем математическое ожидание их произведения [см. (4.2.28)]

$$M[X(t) \Delta X] = \sum_{k=0}^{\infty} M[k \Delta X_k] p_k(t) = \lambda m_x(t) \Delta t - \mu (D_x(t) + m_x^2(t)) \Delta t + 0 (\Delta t). \quad (4.2.36)$$

Имея в виду, что $k[X(t), \Delta X] = M[X(t) \Delta X] - m_x(t) M[\Delta X]$, получим окончательное выражение для приращения дисперсии $\Delta D_x(t)$ [см. (4.2.25), (4.2.33), (4.2.35), (4.2.36)]:

$$\Delta D_x(t) = \lambda \Delta t + m_x(t) \mu \Delta t - 2\mu D_x(t) \Delta t + 0 (\Delta t).$$

Поделив левую и правую части полученного уравнения на величину Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение для дисперсии

$$dD_x(t)/dt = -2\mu D_x(t) + \mu m_x(t) + \lambda,$$

которое встречалось выше [см. (4.2.9)].

Пример 4.2.1. Рассмотрим пример развертывания производства единиц техники, когда интенсивность производства этих единиц задана выражением

$$\lambda(t) = \begin{cases} kt & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ kt_1 & \text{при } t > t_1, \end{cases} \quad (4.2.37)$$

т. е. на участке $(0; t_1)$ происходит развертывание производства единиц техники по линейному закону, а затем, при достижении интенсивности выпуска, равной $kt_1 = \lambda$, эта интенсивность в дальнейшем остается постоянной. Интенсивность выхода из строя одной единицы техники постоянна, равна μ и не зависит от времени.

Найдем математическое ожидание числа единиц техники сначала на участке $(0, t_1)$, считая, что при $t_0 = 0$ $p_0(0) = 1$, т. е. начало процесса отсчитывается от момента развертывания производства техники [$m_x(0) = D_x(0) = 0$]. Для этого найдем решение уравнения (4.2.3)

$$m_x(t) = e^{\int_0^t \mu d\tau} \int_0^t kt' e^{-\int_0^{t'} \mu d\tau} dt' = \frac{k}{\mu^2} (e^{-\mu t} + \mu t - 1) \quad (0 \leq t \leq t_1). \quad (4.2.38)$$

Решение уравнения (4.2.9) на участке $(0, t_1)$ при $D_x(0) = 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} D_x(t) &= e^{-2\mu t} \left[\int_0^t (\mu m_x(t') + kt') e^{2\mu t'} dt' \right] = \\ &= e^{-2\mu t} \left[\int_0^t \left(\frac{k}{\mu} (e^{-\mu t'} + \mu t' - 1) + kt' \right) e^{2\mu t'} dt' \right] = \frac{k}{\mu} [e^{-\mu t} + \mu t - 1] \quad (0 \leq t \leq t_1). \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

Другими словами, мы убеждаемся в том, что при линейной зависимости интенсивности производства от времени вида $\lambda = kt$ и $m_x(0) = D_x(0) = 0$ имеет место равенство $D_x(t) = m_x(t)$. Полезно отметить, что при достаточно большом среднем числе единиц [например, $m_x(t) = 10\,000$] на основании «правила 3б» можно утверждать, что все практически возможные значения количества единиц техники будут находиться в пределах $10\,000 \pm 300$.

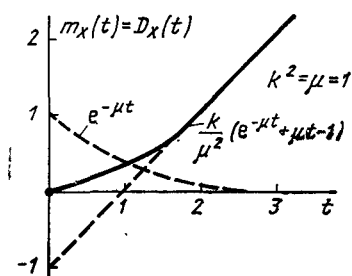


Рис. 4.5.

Колебание числа действующих единиц техники будет относительно небольшим (не превосходящим 3% абсолютного значения). При этом чем большее абсолютное значение математического ожидания числа единиц, тем будет меньшее относительное колебание.

Таким образом, мы доказали важное практическое свойство: если интенсивность производства единиц техники является постоянной или линейной функцией вида kt и соблюдаются начальные условия $D_x(0) = m_x(0) = 0$, то $m_x(t) = D_x(t)$ для любых t .

График функции (4.2.38) показан на рис. 4.5 (для простоты рассмотрен случай, когда $k = \mu^2$ и $1/\mu$ равна единице измерения времени). Анализ этого графика показывает, что для практических целей можно считать, что при $\mu t > 3$ имеет место «линейный» закон накопления единиц техники, при этом $m_x(t) = D_x(t) \approx (k/\mu^2)[\mu t - 1]$.

Для нахождения характеристик $m_x(t)$ и $D_x(t)$ при $t > t_1$ достаточно перейти к времени $\tau = t - t_1$, при этом соответствующие начальные условия будут иметь вид

$$m_{x_{\tau=0}} = D_{x_{\tau=0}} = \frac{k}{\mu^2} [e^{-\mu t'} + \mu t' - 1].$$

Так как на участке $\tau > 0$ ($t > t'$) интенсивность потоков λ и μ постоянные, то можно воспользоваться ранее найденными решениями $m_x(\tau) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu \tau}) + m_{x_{\tau=0}} e^{-\mu \tau}$.

С учетом ранее введенных в этом примере обозначений получим

$$m_x(t) = \frac{kt_1}{\mu} + \left[\frac{k}{\mu^2} (e^{-\mu t_1} - 1) \right] e^{-\mu (t - t_1)} \quad (t > t_1). \quad (4.2.40)$$

Читатель может самостоятельно убедиться в том, что и для $t > t_1$ также выполняется тождество $m_x(t) \equiv D_x(t)$.

Таким образом, для условий этого примера имеет место довольно неожиданный результат — приведенное выше тождество.

График зависимости этих функций для условий $k = \mu^2 = 1$ и $t_1 = 3$ показан на рис. 4.6.

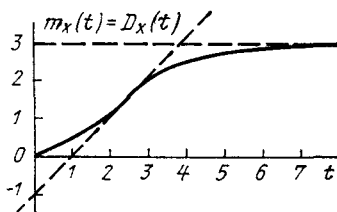


Рис. 4.6.

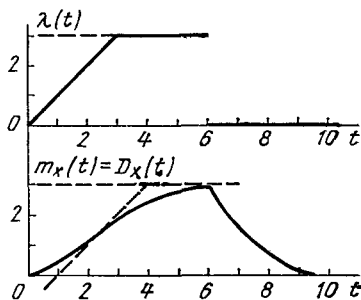


Рис. 4.7.

В случае, если в какой-то момент $t_2 \geq t_1$ производство единиц техники прекращается [$\lambda(t) \equiv 0$ при $t \geq t_2$], то выражение для математического ожидания будет иметь вид

$$m_x(t) = m_x(t_2) e^{-\mu (t - t_2)} \quad (t > t_2), \quad (4.2.41)$$

где $m_x(t_2) = \frac{kt_1}{\mu} + \left[\frac{k}{\mu^2} (e^{-\mu t} - 1) \right] e^{-\mu (t_1 - t_1)}$,

и в этом случае тоже имеет место тождество $m_x(t) \equiv D_x(t)$ ($t > t_2$), в котором читатель может самостоятельно убедиться.

Следовательно, если график интенсивности производства имеет вид, показанный на верхней части рис. 4.7, то принципиальный график зависимости $m_x(t) = D_x(t)$ показан на нижней части этого рисунка.

Пример 4.2.2. Можно предположить, что и при более широких условиях для рассматриваемого в этом параграфе случая справедливо тождество $m_x(t) \equiv D_x(t)$. Действительно, имеет место

Теорема. Если математическое ожидание и дисперсия случайной функции $X(t)$ описываются уравнениями

$$dm_x(t)/dt = \lambda(t) - \mu(t)m_x(t),$$

$$dD_x(t)/dt = \lambda(t) + \mu(t)m_x(t) - 2\mu(t)D_x(t),$$

то необходимыми условиями соблюдения тождества $D_x(t) = m_x(t)$ являются: 1) $\mu(t) = \mu = \text{const}$; 2) $m_x(0) = D_x(0) = 0$.

Докажем предложенную теорему. Не нарушая общности доказательства, можно положить интенсивность μ равной единице измерения интенсивности. В соответствии с условиями теоремы выражения для определения функций $m_x(t)$ и $D_x(t)$ будут иметь вид:

$$m_x(t) = e^{-t} \int_0^t \lambda(\tau) e^{\tau} d\tau; \quad (4.2.42)$$

$$D_x(t) = e^{-2t} \int_0^t (m_x(\tau) + \lambda(\tau)) e^{2\tau} d\tau. \quad (4.2.43)$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^t \lambda(\tau) e^{2\tau} d\tau = \int_0^t e^{\tau} [\lambda(\tau) e^{\tau}] d\tau.$$

Будем этот интеграл брать известным методом:

$$e^{\tau} = u; \quad du = e^{\tau} d\tau;$$

$$\lambda(\tau) e^{\tau} d\tau = dv; \quad v = \int \lambda(\tau) e^{\tau} d\tau.$$

Умножим величину v на множитель $e^{\tau} e^{-\tau} = 1$:

$$v = e^{\tau} e^{-\tau} \int \lambda(\tau) e^{\tau} d\tau.$$

Имея в виду условие $m_x(0) = 0$ и равенство (4.2.42), получим $v = e^{\tau} m_x(\tau)$. Следовательно,

$$\int_0^t e^{\tau} [\lambda(\tau) e^{\tau}] d\tau = \int_0^t uv - \int_0^t vud = e^{2t} m_x(t) - \int_0^t e^{2\tau} m_x(\tau) d\tau.$$

Подставим полученное выражение в равенство (4.2.43):

$$D_x(t) = e^{-2t} \int_0^t m_x(\tau) e^{2\tau} d\tau + e^{2t} \int_0^t \lambda(\tau) e^{2\tau} d\tau = m_x(t), \text{ что и требовалось доказать.}$$

Таким образом, доказана важная для практических целей теорема, заключающаяся в том, что при любой интенсивности пуассоновского потока выпуска изделий и показательном распределении времени «жизни» изделия математическое ожидание числа изделий, находящихся в строю, равно дисперсии этого числа изделий.

Равенство математического ожидания и дисперсии, как известно, является необходимым (но недостаточным) условием подчинения случайной величины закону Пуассона. Здесь уместно высказать предположение о том, что при условиях, сформулированных в теореме этого примера, сечение случайной функции $X(t)$ распределено по закону Пуассона, т. е. имеет место равенство (4.2.11).

Пример 4.2.3. Рассмотрим вопрос о производстве легковых автомашин. Допустим, что к началу планового периода в стране имелось $2 \cdot 10^6$ легковых автомашин и в течение ближайших лет предполагается производить по 10^6 легковых автомашин в год. Средний срок службы автомашины равен 10 лет. Требуется определить максимальное число легковых автомашин, которое может быть в стране при таком производстве, и рассмотреть динамику роста автомашин. Так как в рассматриваемом примере интенсив-

ность $\lambda=10^6$ и $\mu=1/10$ постоянные, то можно воспользоваться формулой, приведенной выше, для определения математического ожидания числа автомашин в стране

$$m_x(t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) + m_{x_0} e^{-\mu t} = 10^7 (1 - e^{-0,1t}) + 2 \cdot 10^6 e^{-0,1t} = 10^7 - 0,8 \cdot 10^7 e^{-0,1t},$$

где t измеряется в годах. При этом практически установившийся режим наступит через время, определенное из выражения $0,1t=3$, откуда $t_y=30$ лет, и к этому времени в стране будет около 10^7 автомашин.

Так как к началу планируемого периода известно, что имеется ровно $2 \cdot 10^6$ автомашин, то $D_x(0)=0$ и выражение для определения дисперсии будет иметь вид

$$D_x(t) = e^{-2\mu} \int_0^t (\mu m_x(t) + \lambda) e^{2\mu t} dt = m_x(t) - m_{x_0} e^{-2\mu t}.$$

Из этого выражения мы видим, что дисперсия всегда будет меньше математического ожидания и лишь в пределе (при $t \rightarrow \infty$) приближается к нему. Через 30 лет дисперсия будет приблизительно равна 10^7 , а среднее квадратическое отклонение $3,16 \cdot 10^3$. На основании «правила 3б» можно утверждать, что к этому времени число автомашин в стране будет колебаться в пределах $10^7 \pm 10^4$.

В случае увеличения среднего срока службы автомашин до 20 лет при той же интенсивности производства один миллион автомашин в год все приведенные выше формулы примут такой вид:

$$m_x(t) = 2 \cdot 10^7 - 1,8e^{-0,05t}; \quad t_y = 60 \text{ лет}; \quad D_x(t) = m_x(t) - m_{x_0} e^{-0,1t},$$

а общее число автомашин ко времени установления процесса будет колебаться в пределах $m_x \pm 3\sigma_x = 2 \cdot 10^7 \pm 1,34 \cdot 10^4$.

Приведенные в этом параграфе примеры достаточно наглядно иллюстрируют плодотворность рассмотрения предложенной модели при анализе вопросов производства самых разнообразных изделий и выяснения количества этих изделий, находящихся в действии (в строю).

4.3. Характеристики случайных процессов гибели и размножения без ограничений на число состояний процесса в общем случае

Рассмотрим теперь общий процесс гибели и размножения без ограничения числа состояний. Размеченный граф состояний такого процесса показан на рис. 4.8. Опять равенство $X(t)=k$ означает, что в момент t процесс находится в состоянии $x_k=k$, т. е. в строю находится k единиц техники.

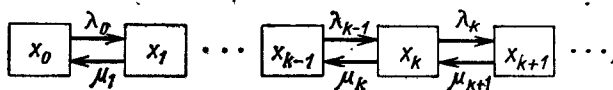


Рис. 4.8.

Ряд распределения случайной величины ΔX_k — приращения случайной функции $X(t)$ за время Δt , вычисляемый при условии, что в момент времени t система находилась в состоянии x_k ($k \geq 0$), будет иметь такой вид:

$$\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & +1 \\ \hline \mu_k \Delta t & 1 - (\mu_k + \lambda_k) \Delta t & \lambda_k \Delta t \end{array} \quad (4.3.1)$$

Математическое ожидание случайной величины ΔX_k будет равно:

$$M[\Delta X_k] = \lambda_k \Delta t - \mu_k \Delta t + 0 (\Delta t). \quad (4.3.2)$$

При $X(t) = x_0 = 0$ ряд распределения случайной величины ΔX_0 будет иметь вид:

$$\frac{0}{1 - \lambda_0 \Delta t} \bigg| \frac{+1}{\lambda_0 \Delta t},$$

откуда

$$M[\Delta X_0] = \lambda_0 \Delta t.$$

Однако если ввести в рассмотрение величину μ_0 и положить ее равной нулю, то ряд распределения (4.3.1) можно считать справедливым для любых $k=0, 1, 2, \dots$

Следовательно,

$$M[\Delta X] = m_x(t + \Delta t) - m_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k - \mu_k) p_k(t) \Delta t,$$

откуда

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k - \mu_k) p_k(t). \quad (4.3.3)$$

Аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе, найдем второй начальный момент приращения случайной функции $X(t)$ [см. (4.2.32)]

$$\alpha_2[\Delta X] = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) \Delta t + 0(\Delta t). \quad (4.3.4)$$

В соответствии с равенством (4.2.33) имеем $D[\Delta X] = \alpha_2[\Delta X]$. Формула (4.2.35) является общей, она справедлива и для рассматриваемого случая. Найдем в общем случае математическое ожидание произведения $X(t) \Delta X$

$$M[X(t) \Delta X] = \sum_{k=0}^{\infty} M[\Delta X_k] k p_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k (\lambda_k - \mu_k) p_k(t) \Delta t + 0(\Delta t).$$

Последняя запись справедлива при конечном математическом ожидании

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k(t) = m_x(t) < \infty \text{ для любого } t.$$

Следовательно [см. 4.2.35), (4.2.36)],

$$\begin{aligned} \Delta D_x(t) = & \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) \Delta t + 2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} k (\lambda_k - \mu_k) p_k(t) \Delta t - \right. \\ & \left. - m_x(t) \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k - \mu_k) p_k(t) \Delta t \right] + 0(\Delta t), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda_k + \mu_k + 2k(\lambda_k - \mu_k) - 2m_x(t)(\lambda_k - \mu_k)] p_k(t). \quad (4.3.5)$$

Из выражений (4.3.3) и (4.3.5) следует, что замкнутая система уравнений для математического ожидания и дисперсии случайной функции $X(t)$ существует, когда интенсивность потока событий λ_k является линейной функцией, а интенсивность потока μ_k пропорциональна k . За-

метим, что зависимость интенсивностей потоков событий λ_k и μ_k от времени допускается любая, лишь бы эти функции были неотрицательными.

Следовательно, возможны три случая:

- 1) $\lambda_k = \lambda$; $\mu_k = k\mu$;
- 2) $\lambda_k = k\lambda$; $\mu_k = k\mu$;
- 3) $\lambda_k = \lambda_1 + k\lambda_2$; $\mu_k = k\mu$.

Во всех этих случаях $\mu_0 = 0$, $\mu = 0$.

Первый случай рассмотрен в предыдущем параграфе. Рассмотрим теперь второй случай ($\lambda = \lambda_k$; $\mu_k = k\mu$.)

В этом случае [см. (4.3.3)]

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} k(\lambda - \mu) p_k(t) = (\lambda - \mu) m_x(t). \quad (4.3.6)$$

Решение этого уравнения при $m_x(0) = m_{x_0}$ имеет вид

$$m_x(t) = m_{x_0} e^{-\int_0^t (\mu - \lambda) d\tau}. \quad (4.3.7)$$

Заметим, что при постоянных λ и μ стационарный режим существует только при $\mu > \lambda$. При этом, если $\mu > \lambda$, для любого m_{x_0} $\lim_{t \rightarrow \infty} m_x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} m_{x_0} e^{-(\mu - \lambda)t} = 0$.

Это объясняется тем, что состояние x_0 является поглощающим ($\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 0$).

При $\lambda > \mu$ и $m_{x_0} > 0$ стационарного режима не существует: процесс «уходит в бесконечность» и математическое ожидание тоже стремится к бесконечности (при $t \rightarrow \infty$).

Найдем для рассматриваемого случая уравнение для дисперсии $D_x(t)$ [см. (4.3.5)]:

$$\begin{aligned} \frac{dD_x(t)}{dt} &= \sum_{k=0}^{\infty} [k(\lambda + \mu) + 2k^2(\lambda - \mu) - 2m_x(t)k(\lambda - \mu)p_k(t) = \\ &= (\lambda + \mu)m_x(t) + (\lambda - \mu)2D_x(t). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Решение этого дифференциального уравнения при начальных условиях $D_x(0) = D_{x_0}$ и $m_x(0) = m_{x_0}$ имеет следующий вид ($\mu > \lambda$):

$$D_x(t) = \frac{(\mu + \lambda)}{(\mu - \lambda)} m_{x_0} [e^{-(\mu - \lambda)t} - e^{-2(\mu - \lambda)t}] + D_{x_0} e^{-(\mu - \lambda)t}.$$

Очевидно, что для стационарного режима $D_x = m_x = 0$.

Рассмотренный в этом параграфе второй случай ($\lambda_k = k\lambda$; $\mu_k = k\mu$) имеет следующий физический смысл: «размножение» единиц производится с интенсивностью, пропорциональной количеству имеющихся единиц, и «гибель» единиц производится с интенсивностью, пропорциональной количеству имеющихся единиц.

Рассмотрим теперь третий случай, когда $\lambda_k = \lambda_1 + k\lambda_2$ и $\mu_k = k\mu$. В этом случае дифференциальное уравнение для математического ожидания случайной функции $X(t)$ имеет такой вид [см. (4.3.3)]:

$$dm_x(t)/dt = \lambda_1 - (\mu - \lambda_2)m_x(t). \quad (4.3.9)$$

Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением (4.2.3); следовательно, его решение при начальном условии $m_x(0) = m_{x_0}$ будет иметь такой вид:

$$m_x(t) = e^{-\int_0^t (\mu - \lambda_2) d\tau} \left[\int_0^t \lambda_1 e^{\int_0^{\tau'} (\mu - \lambda_2) d\tau'} d\tau' + m_{x_0} \right]. \quad (4.3.10)$$

При постоянных интенсивностях потоков λ_1 , λ_2 , μ и $\mu > \lambda_2$ получим

$$m_x(t) = \frac{\lambda_1}{\mu - \lambda_2} (1 - e^{-(\mu - \lambda_2)t}) + m_{x_0} e^{-(\mu - \lambda_2)t}. \quad (4.3.11)$$

Стационарный режим существует только в случае для $\mu > \lambda_2$ любого m_{x_0}

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_x(t) = m_x = \lambda_1 / (\mu - \lambda_2). \quad (4.3.12)$$

Найдем теперь уравнение для дисперсии случайной функции $X(t)$ в рассматриваемом случае [см. (4.3.5)]

$$dD_x(t)/dt = \lambda_1 + (\lambda_2 + \mu)m_x(t) - (\mu - \lambda_2)2D_x(t). \quad (4.3.13)$$

Решение этого дифференциального уравнения при постоянных интенсивностях потоков событий λ_1 , λ_2 , μ ($\mu > \lambda_2$) и при начальных условиях $m_x(0) = D_x(0) = 0$ будет таким:

$$\begin{aligned} D_x(t) &= \frac{\lambda_1 \mu}{(\mu - \lambda_2)^2} [1 - e^{-(\mu - \lambda_2)t}] - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\mu - \lambda_2} e^{-(\mu - \lambda_2)t} [1 - e^{-(\mu - \lambda_2)t}] = \\ &= m_x(t) [(\mu - \lambda_2 e^{-(\mu - \lambda_2)t}) / (\mu - \lambda_2)]. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Из этого выражения следует, что для любого $t > 0$ и $\mu > \lambda_2$ дисперсия $D_x(t) > m_x(t)$. Для стационарного режима, который существует при $\mu > \lambda_2$, получим [см. (4.3.12)]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_x(t) = D_x = m_x \mu / (\mu - \lambda_2) = \lambda_1 \mu / (\mu - \lambda_2)^2. \quad (4.3.15)$$

Представляет определенный интерес и случай, когда интенсивности потоков λ_k и μ_k являются линейными функциями: $\lambda_k = \lambda_1 + k\lambda_2$, $\mu_k = \mu_1 + k\mu_2$. В этом случае уравнение для математического ожидания примет такой вид [см. (4.3.3)]:

$$dm_x(t)/dt = (\lambda_1 - \mu_1) - (\mu_2 - \lambda_2)m_x(t) + \mu_1 p_0(t). \quad (4.3.16)$$

В этом случае для нахождения математического ожидания случайной функции $X(t)$ требуется предварительно отыскать функцию $p_0(t)$. При решении многих прикладных задач, когда случайная функция $X(t)$ достаточно велика, можно с достаточной степенью точности считать, что вероятность $p_0(t) \approx 0$. Это допущение дает довольно высокую точность решения различных задач при условии, что математическое ожидание $m_x(t) > 3$. В ряде работ точное решение получалось методом статистических решений.

Теоретически это допущение можно обосновать следующим образом. В случае, когда параметры $\lambda_2 = \mu_1 = 0$, а параметры λ_1 и μ_2 постоянные, случайная функция $X(t)$ при фиксированном значении t подчиняется закону Пуассона (см. n^0 § 4.2) и, следовательно,

$$p_0(t) = e^{-m_x(t)}. \quad (4.3.17)$$

Можно ввести гипотезу о том, что и в прочих случаях, когда случайная функция $X(t)$ при фиксированном значении t не подчиняется закону Пуассона, равенство (4.3.17) приближенно выполняется, т. е.

$$p_0(t) \approx e^{-m_x(t)}. \quad (4.3.18)$$

Проведенное многочисленное интегрирование различных задач и решение этих же задач методом статистических испытаний показали, что приближение (4.3.18) дает высокую точность в определении математического ожидания $m_x(t)$.

Однако такое приближение приводит к тому, что уравнение (4.3.16) становится нелинейным относительно функции $m_x(t)$, что осложняет его решение.

Высокую точность в определении математического ожидания случайной функции $X(t)$ дает следующая кусочная линейаризация функции $e^{-m_x(t)}$:

$$e^{-m_x(t)} \approx \left(1 - \frac{m_x(t)}{2}\right) \mathbf{1}\left(1 - \frac{m_x(t)}{2}\right), \quad (4.3.19)$$

где $\mathbf{1}(x)$ — известная единичная функция.

Обоснование этого положения можно провести следующим образом. Рассмотрим функцию e^{-t} и функцию $\Psi(t, \xi)$, которая определяется так:

$$\Psi(t, \xi) = \left(1 - \frac{t}{\xi}\right) \mathbf{1}\left(1 - \frac{t}{\xi}\right) (\xi > 1). \quad (4.3.20)$$

На рис. 4.9 показаны графики этих функций.

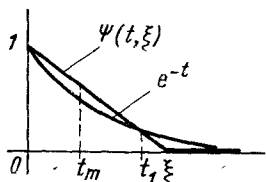


Рис. 4.9.

Найдем такое значение ξ , которое обращало бы в минимум величину

$$\Delta(t, \xi) = |\Psi(t, \xi) - e^{-t}|. \quad (4.3.21)$$

Обозначим величиной t_1 решение уравнения

$$1 - \frac{t_1}{\xi} = e^{-t_1} (t_1 > 0, \xi > 1). \quad (4.3.22)$$

Очевидно, что функция $\Delta(t, \xi)$ на участке $(0, t)$ изменения аргумента t имеет один максимум. На участке, где $t > t_1$, максимум функции $\Delta(t, \xi)$ достигается в точке ξ и равен $e^{-\xi}$ (см. рис. 4.9).

Обозначим t_m такую величину, которая обращает в максимум функцию $\Delta(t, \xi)$ на участке $(0, t_1)$. Эта величина может быть определена из выражений (4.3.20) и (4.3.21), так как на участке $(0, t_1)$ функция $\Delta(t, \xi)$ дифференцируема, унимодельна и ее максимум не лежит на границах этого участка:

$$t_m = \ln \xi. \quad (4.3.23)$$

Таким образом, максимум функции $\Delta(t, \xi)$ на участке $(0, t_1)$ будет равен $1 - (\ln \xi / \xi) - e^{-\ln \xi}$.

Следовательно,

$$\min_{\xi > 1} \Delta(t, \xi) = \min_{\xi > 1} \max \left[1 - \frac{\ln \xi}{\xi} - e^{-\ln \xi}; e^{-\xi} \right]. \quad (4.3.24)$$

Проведенные расчеты показывают, что этот минимум достигается при $\xi_1 = 1,95$.

Все изложенное выше дает основание сделать вывод о том, что при $m_x(t) > 2$ уравнение для математического ожидания можно записать в следующем виде:

$$dm_x(t)/dt = (\lambda_1 - \mu) - (\mu_2 - \lambda_2) m_x(t). \quad (4.3.25)$$

Этот случай [когда $m_x(t) > 2$] имеет большое прикладное значение.

Уравнение для дисперсии, когда интенсивности потока определяют-ся равенствами $\lambda_h = \lambda_1 + k\lambda_2$; $\mu_h = \mu_1 + k\mu_2$, примет такой вид:

$$dD_x(t)/dt = \lambda_1 + \mu_1 - 2(\mu_2 - \lambda_2) D_x(t) + + (\lambda_2 + \mu_2) m_x(t) - \mu_1 (1 + 2m_x(t)) p_0 t. \quad (4.3.26)$$

Опять в случае, если $m_x(t) > 3$, приближенно можно считать, что

$$dD_x(t)/dt = \lambda_1 + \mu_1 + 2(\mu_2 - \lambda_2) D_x(t) + (\lambda_2 + \mu_2) m_x(t). \quad (4.3.27)$$

Это уравнение, решаемое совместно с уравнением (4.3.25), дает возможность отыскивать математическое ожидание и дисперсию случайной функции $X(t)$ с вполне удовлетворительной точностью.

Найдем корреляционную функцию случайной функции $X(t)$ для общего процесса гибели и размножения. При этом будем пользоваться теми обозначениями, которые были введены в предыдущем параграфе [см. (4.2.12) — (4.2.17)].

В рассматриваемом общем случае величина $m_{x' | x_i}(t', t)$ равна решению дифференциального уравнения (4.3.3) на момент времени $\tau = t' - t$ при начальном условии $m_x(0) = x_i$. Вероятности $p_h(t)$ определяются из системы дифференциальных уравнений, соответствующей размеченному графу состояний, изображенному на рис. 4.8. Начальным условием для решения этой системы уравнений является $p_i(0) = 1$.

Таким образом, в общем случае нам не удастся избежать решения системы дифференциальных уравнений для вероятностей состояний при различных начальных условиях для отыскания условного математического ожидания $m_{x' | x_i}(t', t)$. Поэтому в некоторых случаях проще отыскивать условное математическое ожидание по формуле (4.2.15).

После того как найдено условное математическое ожидание $m_{x' | x_i}(t', t)$ по формулам (4.2.12), (4.2.17) и (4.3.3), можно найти корреляционную функцию $k_x(t, t')$.

4.4. Характеристики процессов гибели и размножения с конечным числом состояний

В этом параграфе рассмотрен случай, когда наибольшее возможное значение случайной функции $X(t)$ не может превысить некоторого числа $n > 0$. Граф состояний такого процесса показан на рис. 4.10.

Считая по-прежнему величину μ_0 равной нулю, можно записать ряд распределения приращения ΔX_h случайной функции $X(t)$ за время Δt ,

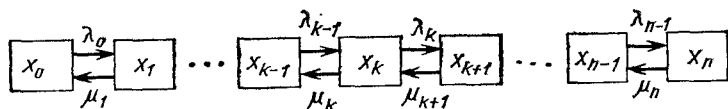


Рис. 4.10.

вычисляемое при условии, что в момент времени t случайная функция $X(t)$ была равна $k < n$:

$$\frac{-1}{\mu_k \Delta t} \left| \frac{0}{1 - \mu_k \Delta t - \lambda_k \Delta t} \right| + 1. \quad (4.4.1)$$

Для случая, когда случайная функция $X(t)$ в момент времени t равна величине n , приращение ΔX_n этой случайной функции за время Δt будет иметь следующий ряд распределения:

$$\frac{-1}{\mu_n \Delta t} \left| \frac{0}{1 - \mu_n \Delta t} \right|. \quad (4.4.2)$$

В соответствии с рядами распределения (4.4.1) и (4.4.2) математическое ожидание приращения случайной функции $X(t)$ можно найти из выражения

$$M[\Delta X] = m_x(t + \Delta t) - m_x(t) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k p_k(t) - \sum_{k=0}^n \mu_k p_k(t) \right) \Delta t + o(\Delta t). \quad (4.4.3)$$

Проделав обычную процедуру предельного перехода, получим

$$dm_x(t)/dt = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k p_k(t) - \sum_{k=0}^n \mu_k p_k(t). \quad (4.4.4)$$

Эта формула соответствует формуле (4.3.3) в случае, когда $n \rightarrow \infty$.

Произведя преобразования, аналогичные тем, которые были проведены в § 4.3, можно получить уравнение для определения дисперсии случайной функции $X(t)$ [см. (4.3.5)]

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^n [\lambda_k + \mu_k + 2k(\lambda_k - \mu_k) - 2m_x(t)(\lambda_k - \mu_k)] p_k(t) (\lambda_n \equiv 0). \quad (4.4.5)$$

При рассмотрении характеристик процессов гибели и размножения с конечным числом состояний n нет необходимости исследовать ограничения, связанные с анализом конечности математического ожидания, так как в этом случае $m_x(t) \leq n$ для любого t .

Исследуем различные зависимости интенсивностей потоков событий λ_k и μ_k от индекса k . Проанализируем выражение для математического ожидания и дисперсий в случае, когда интенсивности потоков событий λ_k и μ_k определяются следующими выражениями: $\lambda_k = \lambda_1 + k\lambda_2$; $\mu_k = k\mu$. В этом случае выражение (4.4.4) примет такой вид:

$$dm_x(t)/dt = \lambda_1 - (\mu - \lambda_2) m_x(t) - (\lambda_1 + n\lambda_2) p_n(t). \quad (4.4.6)$$

Дисперсия случайной функции $X(t)$ в этом случае будет определяться по формуле [см. (4.4.5)]

$$\begin{aligned} \frac{dD_x(t)}{dt} = & \sum_{k=0}^{n-1} [\lambda_1 + k\lambda_2 + 2k(\lambda_1 + k\lambda_2) - 2m_x(t)(\lambda_1 + k\lambda_2)] p_k(t) + \\ & + \sum_{k=0}^n [k\mu - 2k^2\mu + 2m_x(t)k\mu] p_k(t) = \lambda_1 + (\lambda_2 + \mu) m_x(t) - \\ & - 2(\mu - \lambda_2) D_x(t) + p_n(t)(2m_x(t) - 2n - 1)(\lambda_1 + n\lambda_2). \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Можно убедиться в том, что при $n \rightarrow \infty$ выражения (4.4.6) и (4.4.7) будут полностью совпадать с выражениями (4.3.9) и (4.3.13).

В частном случае, когда линейная зависимость от k интенсивностей потоков размножения имеет вид $\lambda_k = n\lambda - k\lambda$ ($k=0, n-1$), получим следующие выражения для математического ожидания и дисперсии случайной функции $X(t)$ [см. (4.4.6) и (4.4.7)]:

$$m_x(t) = n\lambda - (\mu + \lambda) m_x(t), \quad (4.4.8)$$

$$D_x(t) = n\lambda + (\mu - \lambda) m_x(t) - 2(\mu + \lambda) D_x(t). \quad (4.4.9)$$

Этот случай, когда $\lambda_k = n\lambda - k\lambda$ ($k=0, n-1$) и $\mu_k = k\mu$ ($k=1, n$), имеет следующий, часто встречающийся на практике физический смысл. Рассматривается n однородных единиц, каждая из которых может быть только в двух состояниях: y_0 и y_1 . Из состояния y_0 единица переходит в состояние y_1 под воздействием потока событий с интенсивностью $\lambda(t)$, а из состояния y_1 — под воздействием потока событий с интенсивностью $\mu(t)$.

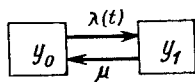


Рис. 4.11.

При этом предполагается, что каждая из n рассматриваемых единиц переходит из состояния в состояние независимо от того, в каких состояниях находятся остальные единицы.

Таким образом, размеченный граф состояний для произвольной k -й единицы ($k=1, n$) имеет вид, показанный на рис. 4.11.

Свяжем с процессом блуждания k -й единицы ($k=1, n$) по своим двум состояниям y_0 и y_1 случайную функцию $Y_k(t)$, которую определим следующим образом. Будем считать, что случайная функция $Y_k(t)$ будет равна 1, если k -я единица находится в момент времени t в состоянии y_1 , и равна 0, если k -я единица находится в момент времени t в состоянии y_0 . Очевидно, что в рассматриваемом случае все случайные функции $Y_k(t)$ ($k=1, n$) взаимно независимы.

Исследуем случайную функцию $X(t)$ — число единиц, находящихся в состоянии y_1 при исследовании процесса блуждания всех n единиц по своим состояниям. Очевидно, что

$$X(t) = \sum_{k=1}^n Y_k(t). \quad (4.4.10)$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} \pi_1(t) = P(Y_k(t) = 1) \\ \pi_0(t) = P(Y_k(t) = 0) = 1 - \pi_1(t) \end{cases}. \quad (4.4.11)$$

Эти вероятности не зависят от индекса k , так как каждая единица (из общего числа n) ведет себя статистически одинаково и независимо от других единиц.

Следовательно,

$$m_x(t) = \sum_{k=1}^n M[Y_k(t)] = n\pi_1(t). \quad (4.4.12)$$

На основании размеченного графа состояний, изображенного на рис. 4.11, можно составить дифференциальное уравнение для опреде-

ления вероятности $\pi_1(t)$ (при этом используется нормировочное условие $\pi_0(t) + \pi_1(t) \equiv 1$)

$$d\pi_1(t)/dt = \lambda(t) - (\mu(t) + \lambda(t))\pi_1(t). \quad (4.4.13)$$

Умножим левую и правую части этого равенства на n и используем равенство (4.4.12)

$$dn\pi_1(t)/dt = dm_x(t)/dt = n\lambda(t) - [\mu(t) + \lambda(t)]m_x(t).$$

Это равенство точно совпадает с равенством (4.4.8) ¹⁾.

Уравнение для дисперсии запишем в следующем виде:

$$D_x(t) = n\pi_1(t) - n\pi_1^2(t) = m_x(t) - (m_x^2(t))/n. \quad (4.4.14)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае нет необходимости решать дифференциальное уравнение (4.4.9) для нахождения дисперсии. Она может быть определена по формуле (4.4.14) после нахождения математического ожидания.

Необходимо особо отметить, что уравнения (4.4.8) — (4.4.14) являются точными, справедливыми для любого целого числа $n > 0$. Рассматриваемый в этом параграфе процесс является весьма эффективным для решения большого круга задач в области исследования систем и будет широко использоваться при решении различных проблем в настоящей работе.

Ввиду большого прикладного значения рассматриваемого случая найдем корреляционную функцию случайной функции $X(t)$, когда

$$2_k = n\lambda - k\lambda \quad (k = \overline{0, n-1}) \text{ и } \mu_k = k\mu \quad (k = \overline{1, n}).$$

Так как каждая из рассматриваемых n единиц может находиться только в двух состояниях: y_0 и y_1 (см. размеченный граф состояний на рис. 4.11), — то в этом случае на основании формулы (4.4.10) и используя независимость случайных функций $Y_k(t)$, можно записать следующее выражение для корреляционной функции случайной функции $X(t)$:

$$k_x(t, t') = M[\dot{X}(t)\dot{X}(t')] = \sum_{k=1}^n M[\dot{Y}_k(t)\dot{Y}_k(t')] = \sum_{k=1}^n k_{y_k}(t, t'), \quad (4.4.15)$$

где

$$\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t); \quad \dot{Y}_k(t) = Y_k(t) - m_{y_k}(t); \quad k_{y_k}(t, t') = M[\dot{Y}_k(t)\dot{Y}_k(t')].$$

По условию все случайные функции $Y_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$) распределены одинаково, поэтому можно получить формулу для корреляционной функции

$$k_x(t, t') = nk_{y_k}(t, t') = nk_y(t, t'). \quad (4.4.16)$$

В дальнейшем потребуется воспользоваться следующим известным равенством:

$$k_y(t, t') = \Gamma_y(t, t') - m_y(t)m_y(t'), \quad (4.4.17)$$

где $\Gamma_y(t, t') = M[Y(t)Y(t')]$.

На рис. 4.12 представлена одна из возможных реализаций случайной функции $Y_k(t)$.

Так как все случайные функции $Y_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$) распределены одинаково, то для сокращения записи индекс k иногда не будем указывать.

¹⁾ — сокращения записи аргумент t в формуле (4.4.8) был опущен.

Ряд распределения сечения случайной функции $Y(t)$ [в соответствии с введенным обозначением (4.4.11)] имеет такой вид:

$$\frac{0}{1 - \pi_1(t)} \bigg| \frac{1}{\pi_1(t)}. \quad (4.4.18)$$

Следовательно, произведение $Y(t)Y(t')$ может принимать только два значения: единицы, если в моменты времени t и t' случайные функции $Y(t)$ и $Y(t')$ равны единице, и нуля — в противном случае. Обозначим вероятность того, что произведение случайных функций $Y(t)Y(t')$ будет равно единице,

$$P[Y(t)Y(t') = 1] = \pi_1(t, t'). \quad (4.4.19)$$

Ряд распределения случайных функций $Y(t)Y(t')$ будет иметь такой вид:

$$\frac{0}{1 - \pi_1(t, t')} \bigg| \frac{1}{\pi_1(t, t')}. \quad (4.4.20)$$

Тогда

$$M[Y(t)Y(t')] = \Gamma_y(t, t') = \pi_1(t, t'). \quad (4.4.21)$$

Вероятность $\pi_1(t, t')$ можно представить в виде произведения двух вероятностей

$$\pi_1(t, t') = \pi_1(t) \pi_{1|1}(t', t), \quad (4.4.22)$$

где $\pi_{1|1}(t', t)$ — условная вероятность того, что в момент времени t' случайная функция $Y(t')$ будет равна единице, вычисленная при условии, что в момент времени t случайная функция $Y(t)$ была равна единице ($t' > t$):

$$\pi_{1|1}(t', t) = P(Y(t') = 1 | Y(t) = 1) \quad (t' > t).$$

(4.4.23)

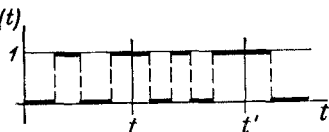


Рис. 4.12.

Для определения всех этих вероятностей проинтегрируем систему дифференциальных уравнений, соответствующую размеченному графу состояний, изображенному на рис. 4.11 при начальном условии

$$\pi_1(0) = \pi_{1_0}. \quad (4.4.24)$$

Это решение имеет такой вид:

$$\pi_1(t) = \exp - \int_0^t (\mu + \lambda) d\tau \left[\int_0^t \lambda \exp \int_0^{\tau} (\mu + \lambda) dx d\tau + \pi_{1_0} \right], \quad (4.4.25)$$

где интенсивность потоков событий λ и μ являются известными функциями времени.

Чтобы найти условную вероятность $\pi_{1|1}(t', t)$, нужно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений, соответствующую размеченному графу состояний, изображенному на рис. 4.11, в интервале времени t и t' ($t' > t$) при условии, что в момент времени t система находилась в состоянии y_1 :

$$\pi_{1|1}(t', t) = \exp - \int_t^{t'} (\mu + \lambda) d\tau \left[\int_t^{t'} \lambda \exp \int_t^{\tau} (\mu + \lambda) dx d\tau + 1 \right] \quad (t' > t). \quad (4.4.26)$$

Теперь по формулам (4.4.16), (4.4.17), (4.4.21), (4.4.25) и (4.4.26) *можно найти корреляционную функцию* случайной функции $X(t)$.

В качестве иллюстрации предложенного метода отыскания характеристики случайной функции $X(t)$ рассмотрим случай, когда процесс блуждания каждой единицы по состояниям $\langle Y = \{y_0, y_1\}$ является простейшим ($\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$). Будем для определенности считать, что $= \pi_1(0) = 1$.

В этом случае выражения (4.4.25) и (4.4.26) примут такой вид:

$$\pi_1(t) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t} \quad (t > 0). \quad (4.4.27)$$

$$\pi_{1|1}(t', t) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)(t' - t)} \quad (t' > t). \quad (4.4.28)$$

Следовательно, корреляционную функцию случайной функции $X(t)$ можно найти из выражения

$$\begin{aligned} k_x(t, t') &= n\pi_1(t) [\pi_{1|1}(t', t) - \pi_1(t')] = \\ &= n \left[\frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t} \right] \frac{\mu}{\mu + \lambda} [e^{-(\mu + \lambda)(t' - t)} - e^{-(\mu + \lambda)t'}]. \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

Дисперсия и математическое ожидание случайной функции $X(t)$ в этом случае определяются из формул:

$$D_X(t) = n \left[\frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t} \right] \frac{\mu}{\mu + \lambda} [1 - e^{-(\mu + \lambda)t}], \quad (4.4.30)$$

$$m_x(t) = n \left[\frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t} \right]. \quad (4.4.31)$$

В рассматриваемом случае случайная функция $X(t)$ обладает эргодическим свойством; найдем ее характеристики для стационарного режима:

$$k_x(\tau) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t' \rightarrow \infty}} k_x(t, t') = \frac{n\lambda\mu}{(\mu + \lambda)^2} e^{-(\mu + \lambda)|\tau|}, \quad (4.4.32)$$

$$D_x = k_x(0) = \frac{n\lambda\mu}{(\mu + \lambda)^2}, \quad (4.4.33)$$

$$m_x = \lim_{t \rightarrow \infty} m_x(t) = \frac{n\lambda}{\mu + \lambda}. \quad (4.4.34)$$

Перейдем к анализу других процессов гибели и размножения. В случае, когда интенсивности потоков представляют собой линейные функции величины k :

$$\lambda_k = \lambda_1 + k\lambda_2; \quad \mu_k = \mu_1 + k\mu_2,$$

получим следующее уравнение для математического ожидания:

$$\begin{aligned} \frac{dm_x(t)}{dt} &= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_1 + k\lambda_2) p_k(t) - \sum_{k=1}^n (\mu_1 + k\mu_2) p_k(t) = \\ &= \lambda_1 - \mu_1 - (\mu_2 - \lambda_2) m_x(t) - p_n(t) (\lambda_1 + n\lambda_2) + \mu_1 p_0(t). \end{aligned} \quad (4.4.35)$$

Уравнение для дисперсии в этом случае примет вид

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n-1} [\lambda_1 + k\lambda_2 + 2k(\lambda_1 + k\lambda_2) - 2m_x(t)(\lambda_1 + k\lambda_2)] p_k(t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n [\mu_1 + k\mu_2 - 2k(\mu_1 + k\mu_2) + 2m_x(t)(\mu_1 + k\mu_2)] p_k(t) = \\
& = \lambda_1 + \mu_1 + (\lambda_2 + \mu_2) m_x(t) - 2(\mu_2 - \lambda_2) D_x(t) - \\
& - p_n(t)(\lambda_1 + n\lambda_2)[1 + 2(n - m_x(t)) - \mu_1(1 + 2m_x(t))] p_0(t). \quad (4.4.36)
\end{aligned}$$

Для того чтобы найти приближенное решение уравнений (4.4.35) и (4.4.36) [не находя вероятностей $p_n(t)$ и $p_0(t)$], нужно ввести определенные гипотезы относительно связи этих вероятностей с математическим ожиданием $m_x(t)$. Будем так же, как в § 4.3, считать, что

$$p_0(t) \approx e^{-m_x(t)}. \quad (4.4.37)$$

В отношении вероятности $p_n(t)$ сделаем аналогичное предположение. Для этого рассмотрим случайную функцию

$$U(t) = n - X(t) \quad (4.4.38)$$

и будем считать, что случайная функция $U(t)$ при фиксированном значении t приближенно подчиняется закону Пуассона с параметром

$$m_v(t) = n - m_x(t). \quad (4.4.39)$$

Следовательно,

$$p_n(t) = e^{-(n - m_x(t))} = e^{-n} e^{m_x(t)}. \quad (4.4.40)$$

Произведенные расчеты показывают, что приближения (4.4.37) и (4.4.40) дают вполне удовлетворительную точность в определении функций $m_x(t)$ и $D_x(t)$ при $n > 10$. При малых значениях величины n расчеты по этим формулам дают ошибки порядка нескольких процентов. Но в этом случае (при $n < 10$) можно функции $m_x(t)$ и $D_x(t)$ найти непосредственно через вероятности состояний, для чего нужно решать систему из n дифференциальных уравнений, которую можно составить, воспользовавшись размеченным графом состояний системы, изображенным на рис. 4.10.

Все изложенное в этом параграфе дает основание сделать вывод о том, что математическое ожидание случайного процесса гибели и размножения в большинстве практических случаев можно получать в результате интегрирования одного обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения вида

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \lambda_1 - \mu_1 - (\mu_2 - \lambda_2) m_x(t) - (\lambda_1 + n\lambda_2) e^{-(n - m_x(t))} + \mu_1 e^{-m_x(t)}. \quad (4.4.41)$$

В случае, когда $2 < m_x(t) < n - 2$, это уравнение можно упростить и сделать линейным:

$$dm_x(t)/dt = \lambda_1 - \mu_1 - (\mu_2 - \lambda_2) m_x(t). \quad (4.4.42)$$

Отметим еще раз, что параметры λ_1 , μ_1 , λ_2 , μ_2 могут быть любыми неотрицательными функциями времени.

Дисперсия случайного процесса гибели и размножения может быть получена в результате совместного интегрирования уравнения (4.4.41) с уравнением

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \lambda_1 + \mu_1 + (\lambda_2 + \mu_2) m_x(t) - 2(\mu_2 - \lambda_2) D_x(t) - (\lambda_1 + n\lambda_2) [1 + 2(n - m_x(t))] e^{-(n-m_x(t))} - \mu_1(1 + 2m_x(t)) e^{-m_x(t)} \quad (4.4.43)$$

или

$$dD_x(t)/dt = \lambda_1 + \mu_1 + (\lambda_2 + \mu_2) m_x(t) - 2(\mu_2 - \lambda_2) D_x(t), \quad (4.4.44)$$

если выполняется условие $2 < m_x(t) < n - 2$

Пример 4.4.1. Рассматривается работа большого информационно-вычислительного центра, в котором имеется $n=100$ лентопротяжных механизмов, работающих круглосуточно. Среднее время безотказной работы каждого механизма равно $1/\mu=10$ (сутки), а среднее время восстановления этого механизма равно $1/\lambda=1$ (сутки). Считая, что лентопротяжные механизмы работают независимо, определим различные характеристики работы такой системы, считая, что в начальный момент $t=0$ все лентопротяжные механизмы были исправны [$m_x(0)=n$; $D_x(0)=0$].

Если считать, что случайная функция $X(t)$ представляет собой число исправных лентопротяжных механизмов, то корреляционная функция $k_x(t, t')$, дисперсия $D_x(t)$ и математическое ожидание $m_x(t)$ определяются в нашем случае выражениями (4.4.29), (4.4.30) и (4.4.31), а в стационарном режиме — выражениями (4.4.32), (4.4.33) и (4.4.34) соответственно.

Рассмотрим только стационарный режим, который практически наступит в условиях рассматриваемого примера через трое суток. Для этого режима имеем:

$$m_x = \frac{n\lambda}{\mu + \lambda} = 91; D_x = \frac{n\lambda\mu}{(\mu + \lambda)^2} = 8,23;$$

$$\sigma_x = 2,87; k_x(\tau) = 8,23e^{-1,1|\tau|}.$$

Допустим, что для решения некоторой задачи требуется исправная работа 50 лентопротяжных механизмов в течение 6 часов. Исходя из условий задачи и условий работы лентопротяжных механизмов, вероятность того, что 50 лентопротяжных механизмов будут исправны, в любой момент времени равна практически единице, так как практически количество исправных лентопротяжных механизмов находится в пределах $m_x \pm 3\sigma_x = 91 \pm 8,6$.

Вероятность выхода из строя одного лентопротяжного механизма за время $t=6$ (часов), очевидно, определяется по формуле

$$p = e^{-\mu t} = e^{-0,1 \cdot 6,25} = 0,975.$$

Следовательно, вероятность того, что эта задача будет решена при бесперебойной работе всех 50 лентопротяжных механизмов, можно определить по формуле

$$P = p^{50} = 0,286.$$

Как мы видим, эта вероятность является весьма низкой для надежного решения указанной задачи.

Пример 4.4.2. Рассмотрим работу вычислительного центра (ВЦ), в котором имеется n лентопротяжных механизмов. Каждый из этих механизмов вступает в работу в среднем λ раз в сутки. Включившись в работу, каждый лентопротяжный механизм находится в работе случайное время θ , распределенное по показательному закону с параметром μ . Если считать, что каждый механизм включается в работу независимо от других, то вероятность того, что в ВЦ занято ровно k механизмов, в стационарном режиме будет определяться по формуле

$$p_k = P(X(t) = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (4.4.45)$$

где

$$p = \alpha/(1 + \alpha); q = 1 - p; \alpha = (\lambda/\mu). \quad (4.4.46)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае величина α обычно мала ($\alpha \ll 1$), так как среднее время работы лентопротяжного механизма гораздо меньше среднего времени, протекающего между двумя включениями одного механизма.

Математическое ожидание и дисперсия числа лентопротяжных механизмов, одновременно находящихся в работе, определяется по формулам:

$$m_x = np; \quad D_x = npq. \quad (4.4.47)$$

Так как величина α в нашем случае мала, то $m_x \approx D_x \approx na$ и можно считать, что при достаточно большой величине m_x случайная величина $X(t)$ (для фиксированного значения t) приближенно подчиняется закону Пуассона с параметром $a = m_x = na$ и расчеты, связанные с вычислением вероятности p_k , можно проводить по формуле $p_k = a^k / k! e^{-a}$.

При больших значениях a ($a > 20$) хорошую точность дает формула

$$p_k = \Phi^* (k + 0,5 - a/\sqrt{a}) - \Phi^* (k - 0,5 - a/\sqrt{a}),$$

где $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ — интеграл вероятности.

При изучении нестационарного режима работы ВЦ ограничимся рассмотрением лишь характеристик случайной функции $X(t)$. В соответствии с результатами, полученными в этом параграфе, уравнение для математического ожидания имеет вид

$$dm_x(t)/dt = n\lambda - (\mu + \lambda)m_x. \quad (4.4.48)$$

Дисперсия случайной функции $X(t)$ может быть выражена через ее математическое ожидание следующим образом:

$$D_x(t) = m_x(t) - m_x^2(t)/n. \quad (4.4.49)$$

Решение последних двух уравнений при постоянных значениях μ и λ и при начальном условии $m_x(0) = 0$ имеет такой вид:

$$\begin{aligned} m_x(t) &= \frac{n\alpha}{1+\alpha} (1 - e^{-\mu(1+\alpha)t}); \quad D_x(t) = \\ &= \frac{n\alpha}{(1+\alpha)^2} (1 - e^{-\mu(1+\alpha)t}) (1 + \alpha e^{-\mu(1+\alpha)t}), \end{aligned}$$

а корреляционная функция определяется по формуле

$$k_x(t, t') = \frac{n\alpha}{(1+\alpha)^2} (1 - e^{-\mu(1+\alpha)t}) (e^{-\mu(1+\alpha)(t-t')} + \alpha e^{-\mu(1+\alpha)t}) \text{ при } t > t'.$$

В стационарном режиме эта корреляционная функция будет такой:

$$k_x(\tau) = \frac{n\alpha}{(1+\alpha)^2} e^{-\mu(1+\alpha)|\tau|}.$$

Величина n в больших ВЦ обычно велика, и можно с достаточной точностью полагать, что случайная функция $X(t)$ распределена нормально с указанными выше характеристиками.

Зная величину m_x и D_x , можно рассчитать основные параметры работы и требования на обслуживание лентопротяжных механизмов ВЦ.

При решении различных задач проектирования ВЦ нас может заинтересовать вероятность того, что случайная функция $X(t)$ превысит некоторый порог k : $P[X(t) > k]$.

В стационарном режиме эта вероятность определяется по формуле

$$P(X(t) > k) = 1 - \sum_{h=0}^k C_n^k p^h q^{n-h}.$$

В нашем случае последнюю сумму можно рассчитывать либо с помощью таблиц распределения закона Пуассона, либо по нормальному закону.

Исследуем стационарный режим случайной функции $X(t)$ и найдем характеристики времени пересечения случайной функции $X(t)$ — некоторого порогового уровня k . На рис. 4.13 для простоты изображена реализация случайной функции $X(t)$ в виде непрерывной кривой. На самом деле эта кривая имеет скачкообразный характер со скачками, равными ± 1 : при включении и при выключении лентопротяжного механизма.

Закон распределения случайной величины θ_{1k} — времени, в течение которого в ВЦ занято лентопротяжных механизмов больше, чем k (см. рис. 4.13), — определяется с помощью преобразованного размеченного графа состояний, изображенного на рис. 4.14. Интегрирование уравнений, соответствующих этому графу состояний, нужно проводить при начальных условиях: $\tilde{p}_{k+1}(0) = 1$; $\tilde{p}_i(0) = 0$ ($i \neq k+1$). Плотность распределения случайной величины θ_{1k} определяется из выражения (см. гл. 3)

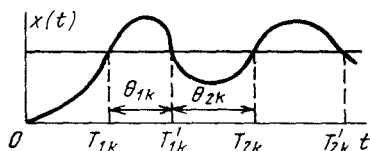


Рис. 4.13.

$\tilde{f}_1(t) = (k+1)\mu\tilde{p}_{k+1}(t)$, где вероятность $p_{k+1}(t)$ определяется с помощью графа, изображенного на рис. 4.14. Отметим, что последнее выражение для плотности распределения остается справедливым и для нестационарного (неоднородного) случая, когда интенсивности потоков событий зависят от времени $[\lambda(t) \text{ и } \mu(t)]$.

Для определения математического ожидания времени θ_{1k} в стационарном режиме можно воспользоваться примером, описанным в гл. 3. Рассмотрим преобразованный размеченный граф состояний (рис. 4.15). При постоянных параметрах λ и μ для системы размеченный граф состояний который изображен на этом рисунке, существует стационарный режим. Решение соответствующей системы алгебраических уравнений для вероятностей $\tilde{p}_k, \dots, \tilde{p}_n$ имеет следующий вид:

$$\tilde{p}_j = \frac{C_n^j p^j q^{n-j}}{C_n^k p^k q^{n-k}} \tilde{p}_k; \quad \tilde{p}_k = \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{1 - \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i p^i q^{n-i}}.$$

Очевидно, что математическое ожидание времени пребывания в состоянии x_k равно: $\bar{t}_k = 1/(\lambda(n-k))$.

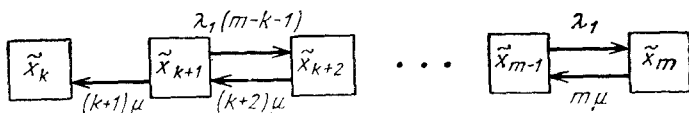


Рис. 4.14.



Рис. 4.15.

Следовательно, на основании эргодического свойства математическое ожидание $\bar{t}_{1k}$ случайной величины θ_{1k} для стационарного режима будет (см. гл. 3)

$$\bar{t}_{1k} = 1/(\lambda(n-k) - 1 - \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i p^i q^{n-i} - C_n^k p^k q^{n-k}).$$

Проведенные расчеты показывают, что закон распределения случайной величины θ_{1k} мало отличается от показательного. Следовательно, можно записать приближенное

равенство $\tilde{f}_{1k} = \frac{1}{\bar{t}_{1k}} e^{-t/\bar{t}_{1k}}.$

Допустим, что к ВЦ имеется 30 лентопротяжных механизмов, при этом каждый из этих механизмов занимается в среднем один раз через каждые 5 ч и работает в среднем 12,5 мин ($\lambda=0,21/ч$; $\mu=4,81/ч$).

Следовательно, в рассматриваемом случае $\alpha=\lambda/\mu=0,0417$; $\rho=0,04$. Среднее время $\bar{t}_{1_5}$, в течение которого в ВЦ работает лентопротяжных механизмов больше $k=5$, равно 2,4 мин. Тогда приближенное выражение для плотности распределения времени θ_{1_5} будет

$$f_{1_5}(t) = 0,417e^{-0,417t} \quad (t > 0),$$

где t отсчитывается в минутах.

Если в тех же условиях находить среднее время $\bar{t}_{1_2}$, в течение которого в ВЦ работает лентопротяжных механизмов больше $k=2$, то это время будет уже равно 5,65 мин.

Для определения среднего времени $\bar{t}_{2_k} = M[\theta_{2_k}]$, в течение которого в ВЦ работает не больше k станций, можно рассматривать преобразованный размеченный граф состояний системы, изображенный на рис. 4.16.



Рис. 4.16.

Решая систему алгебраических уравнений, соответствующую стационарному режиму работы при постоянных интенсивностях λ и μ , получим следующее выражение для вероятностей $\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_{k+1}$:

$$\tilde{p}_j = \frac{C_n^j p^j q^{n-j}}{q^n} \tilde{p}_0, \quad \tilde{p}_0 = \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{k+1} C_n^i p^i q^{n-i}},$$

а среднее время $\bar{t}_{2_k}$, в течение которого в ВЦ работает не больше k лентопротяжных механизмов, найдем из выражения

$$\bar{t}_{2_k} = \frac{1}{\mu(k+1)} \frac{\sum_{i=0}^k C_n^i p^i q^{n-i}}{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}.$$

Так, для рассмотренного выше случая величина $\bar{t}_{2_5} = 38,5$ ч, т. е. практически всегда будет работать одновременно не больше 5 лентопротяжных механизмов, а величина $\bar{t}_{2_2} = 0,71$ ч.

Отметим, что для рассматриваемого случая наибольшей вероятностью обладает вероятность того, что в ВЦ работает только один лентопротяжный механизм ($p_1 = 0,367$). Среднее время, в течение которого не работает ни один лентопротяжный механизм, $\bar{t}_{2_0} = 1/\lambda = 10$ мин.

Применяя тот же самый прием, можно отыскать и плотность распределения времени θ_{2_k} , в течение которого в ВЦ работает не более k лентопротяжных механизмов, для чего составим преобразованный размеченный граф состояний, (рис. 4.17).

Интегрировать уравнения, соответствующие этому размеченному графу состояний, нужно при начальных условиях: $\tilde{p}_k(0) = 1$; $\tilde{p}_i(0) = 0$ ($i \neq k$).

Плотность распределения случайных величин θ_{2_k} определяется из выражения $f_{2_k}(t) = \lambda(n-k)\tilde{p}_k(t)$, где вероятность $\tilde{p}_k(t)$ определяется с помощью размеченного графа (рис. 4.17).

Найдем плотность распределения времени работы в ВЦ не более одного лентопротяжного механизма ($k=1$). В этом частном случае соответствующая система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$d\tilde{p}_0(t)/dt = -\lambda n \tilde{p}_0(t) + \mu \tilde{p}_1; \quad d\tilde{p}_1(t)/dt = -(\lambda(n-1) + \mu) \tilde{p}_1(t) + \lambda n \tilde{p}_0(t).$$

Найдем решение этой системы уравнений при начальных условиях $\tilde{p}_0(0) = 1$; $\tilde{p}_1(0) = 0$ и будем считать, что величины λ и μ не зависят от времени. Составим систему алгебраических уравнений для изображений вероятностей $\pi_0(s) \approx \tilde{p}_0(t)$; $\pi_1(s) \sim \tilde{p}_1(t)$:

$$(s + \lambda n) \pi_0(s) - \mu \pi_1(s) = 0; \quad (s + \lambda(n-1) + \mu) \pi_1(s) - \lambda n \pi_0(s) = 0.$$

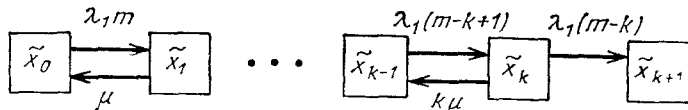


Рис. 4.17.

Решая эту систему уравнений относительно величины $\pi_1(s)$, получим

$$\pi_1(s) = \frac{s(s + \lambda n)}{s^2 + s(2\lambda(n-1) + \mu) + \lambda^2 n(n-1)}.$$

Соответствующая этому изображению вероятность имеет вид

$$\tilde{p}_1(t) = \frac{(a - \lambda n) e^{-at}}{a - b} + \frac{(b - \lambda n) e^{-bt}}{b - a},$$

где

$$a = \frac{\lambda(2n-1) + \mu - \sqrt{2\lambda\mu(2n-1) + \mu^2}}{2},$$

$$b = \frac{\lambda(2n-1) + \mu + \sqrt{2\lambda\mu(2n-1) + \mu^2}}{2}.$$

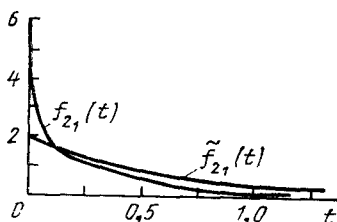


Рис. 4.18.

Следовательно, плотность распределения $f_{21}(t)$ будет иметь вид $f_{21}(t) = \lambda(n-1)\tilde{p}_1(t)$. Для рассматриваемого примера ($n=30$; $\lambda=0,2$ 1/ч; $\mu=4,8$ 1/ч) имеем $f_{21} = 5,8(0,305e^{-2,45t} + 0,695e^{-14,2t})$.

На рис. 4.18 изображен график этой плотности, а также показана плотность распределения $\tilde{f}_{21}(t) = 2e^{-2t}$, которой, как было указано выше, можно аппроксимировать последнее выражение, так как $t_{21} = 0,5$ ч.

4.5. Характеристики процессов чистой гибели и чистого размножения

Характеристики процессов чистой гибели и чистого размножения можно получить как частный случай процессов гибели и размножения при $\mu_k \equiv 0$ и $\lambda_k \neq 0$ для процессов чистого размножения и при $\lambda_k \equiv 0$ и $\mu_k \neq 0$ для процессов чистой гибели. Однако из-за большого прикладного значения этих процессов их рассмотрение выделено в отдельный параграф.

Рассмотрим сначала процессы чистого размножения. Размеченный граф состояний для такого процесса показан на рис. 4.19.

Уравнение для определения математического ожидания процесса

чистого размножения при $\lambda_k = \lambda_1 + k\lambda_2$ имеет вид [см. (4.4.8)]

$$dm_x(t)/dt = \lambda_1 + \lambda_2 m_x(t) - (\lambda_1 + n\lambda_2) p_n(t). \quad (4.5.1)$$

При отсутствии ограничений на число состояний ($n \rightarrow \infty$) это уравнение можно записать следующим образом:

$$dm_x(t)/dt = \lambda_1 + \lambda_2 m_x(t). \quad (4.5.2)$$

Дисперсию процесса чистого размножения найдем из выражения [см. (4.4.9)]

$$\begin{aligned} dD_x/dt &= \lambda_1 + \lambda_2 m_x(t) + 2\lambda_2 D_x(t) - \\ &- (\lambda_1 + n\lambda_2)[1 + 2(n - m_x(t))]p_n(t). \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

В случае отсутствия ограничений на число состояний ($n \rightarrow \infty$) последнее уравнение примет более простой вид

$$dD_x(t)/dt = \lambda_1 + \lambda_2 m_x(t) + 2\lambda_2 D_x(t). \quad (4.5.4)$$

Для процессов чистой гибели можно написать следующее уравнение для математического ожидания и дисперсии [см. (4.4.8), (4.4.9)]:

$$dm_x(t)/dt = -\mu_2 m_x(t) - \mu_1(1 - p_0(t)), \quad (4.5.5)$$

$$\begin{aligned} dD_x(t)/dt &= \mu_1 + \mu_2 m_x(t) - \\ &- 2\mu_2 D_x(t) - \mu_1(1 + 2m_x(t))p_0(t). \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Если для процесса чистого размножения начальное условие $m_x(0)$ может быть любым, то для процесса чистой гибели нетривиальное начальное условие состоит в том, что $m_x(0) > 0$.



Рис. 4.19.

Найдем характеристики процесса чистого размножения для случая, когда параметры λ_1 и λ_2 постоянные и нет ограничений на число состояний ($n \rightarrow \infty$).

В этом случае при $m_x(0) = 0$ и $D_x(0) = 0$ получим:

$$m_x(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} [e^{\lambda_2 t} - 1], \quad (4.5.7)$$

$$D_x(t) = m_x(t) e^{\lambda_2 t}. \quad (4.5.8)$$

В рассматриваемом случае $m_x(t)$ и $D_x(t)$ являются возрастающими. При достаточно больших t , когда $\lambda_2 t > 3$, можно считать, что среднее квадратическое отклонение приближенно равно:

$$\sigma_x(t) \approx e^{\lambda_2 t} \sqrt{\lambda_1 / \lambda_2}. \quad (4.5.9)$$

Также приближенно можно считать, что

$$m_x(t) = e^{\lambda_2 t} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (4.5.10)$$

Следовательно,

$$m_x(t) / \sigma_x(t) \approx \sqrt{\lambda_1 / \lambda_2}. \quad (4.5.11)$$

Таким образом, отношение математического ожидания к среднему квадратическому отклонению при увеличении t стремится к пределу $\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}$. Из этого можно сделать вывод о том, что если $\lambda_1 > 9\lambda_2$, то при достаточно больших значениях t процесс чистого размножения можно считать практически нормальным с характеристиками (4.5.7) и (4.5.8).

Рассмотрим частный случай, когда параметр $\lambda_2 = 0$. Такой процесс в литературе называется процессом Пуассона [51]. В этом случае [при $m_x(0) = D_x(0) = 0$]

$$m_x(t) = D_x(t) = \lambda_1(t), \quad (4.5.12)$$

а вероятности $p_k(t) = P(X(t) = k)$ ($k = 0, 1, \dots$) представляют собой распределение Пуассона

$$p_k^{(t)} = \frac{[m_x(t)]^k}{k!} e^{-m_x(t)}. \quad (4.5.13)$$

При $\lambda_2 = 0$ процесс чистого размножения можно считать приближенно нормальным при выполнении неравенства $\lambda_1 t > 9$.

Другой частный случай имеет место, когда параметр $\lambda_1 = 0$. В этом случае нетривиальное начальное условие должно быть отлично от нуля [$m_x(0) > 0$]. Для этого случая при $D_x(0) = 0$ получим следующие выражения для математического ожидания и дисперсии:

$$m_x(t) = m_x(0) e^{\lambda_2 t}, \quad (4.5.14)$$

$$D_x(t) = m_x(t) [e^{\lambda_2 t} - 1]. \quad (4.5.15)$$

При достаточно больших t , когда $\lambda_2 t > 3$, отношение математического ожидания к среднему квадратическому отклонению приближенно равно:

$$m_x(t)/\sigma_x(t) \approx \sqrt{m_x(0)}.$$

Таким образом, для того чтобы процесс чистого размножения можно было считать приближенно нормальным, должно выполняться условие $m_x(0) > 9$, при $\lambda_2 t > 3$.

Найдем корреляционную функцию для процесса чистого размножения при постоянных параметрах λ_1 и λ_2 и при неограниченном числе состояний.

Общий способ нахождения корреляционной функции процессов гибели и размножения был изложен в § 4.2. Основная задача при определении корреляционной функции состоит в определении условного математического ожидания случайной функции $X(t')$ при условии, что в момент времени t процесс находился в состоянии x_i [см. (4.2.12) — (4.2.15)].

В рассматриваемом случае это условное математическое ожидание можно найти в результате решения уравнения (4.5.2) при начальном условии $m_x(0) = x_i$ на момент времени $\tau = t' - t > 0$ [см. (4.2.15)]

$$m_{x' | x_i}(t', t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} [e^{\lambda_2 \tau} - 1] + x_i e^{\lambda_2 \tau}. \quad (4.5.16)$$

Тогда [см. (3.2.14)]

$$\begin{aligned} \Gamma_x(t, t') = \sum_{i=0}^{\infty} x_i m_{x' | x_i}(t', t) p_i(t) &= \lambda_1/\lambda_2 [e^{\lambda_2 \tau} - 1] m_x(t) + \\ &+ e^{\lambda_2 \tau} [D_x(t) + (m_x(t))^2], \end{aligned} \quad (4.5.17)$$

где функции $m_x(t)$ и $D_x(t)$ определяются выражениями (4.5.7) и (4.5.8) соответственно. При этом предполагается, что $m_x(0) = D_x(0) = 0$.

На основании формул (4.2.12) и (4.5.17) после проведения преобразований найдем выражение для корреляционной функции в случае, когда $t' > t$:

$$k_x(t, t') = m_x(t) e^{\lambda_2 t'}.$$

В случае, когда $t' < t$, получим $k_x(t, t') = m_x(t') e^{\lambda_2 t}$.

Последние два выражения можно объединить в одно, которое и даст окончательную формулу для корреляционной функции:

$$k_x(t, t') = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_2(t+t')} \{1 - e^{-\lambda_2 t} \mathbf{1}(t' - t) - e^{-\lambda_2 t'} \mathbf{1}(t - t')\}, \quad (4.5.18)$$

где $\mathbf{1}(x)$ — известная единичная функция.

Для процесса Пуассона, когда $\lambda_2 = 0$, корреляционную функцию можно получить из выражения (4.5.18), находя предел вида

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} k_x(t, t') = \lambda_1 [t \mathbf{1}(t' - t) + t' \mathbf{1}(t - t')]. \quad (4.5.19)$$

Формулу (4.5.19) можно найти в [11], где она получена из другой вероятностной схемы.

Для того чтобы найти корреляционную функцию процесса чистого размножения при $\lambda_1 = 0$, нужно рассматривать начальное условие вида $m_x(0) > 0$. В отношении дисперсии можно делать различные предположения. Мы рассмотрим простейший случай, когда $D_x(0) = 0$. При $\tau = t' - t > 0$ получим [см. (4.5.2) и (4.5.14)]

$$m_{x' | x_1}(t', t) = x_t e^{\lambda_2 \tau}. \quad (4.5.20)$$

Следовательно [см. (4.2.14)],

$$\Gamma_x(t, t') = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 e^{\lambda_2 \tau} p_i(t) = e^{\lambda_2 \tau} [D_x(t) + m_x^2(t)] \quad (\tau > 0), \quad (4.5.21)$$

где функции $m_x(t)$ и $D_x(t)$ определяются из выражений (4.5.14) и (4.5.15) соответственно.

Таким образом, корреляционную функцию $k_x(t, t')$ можно найти из выражения

$$k_x(t, t') = m_x(t) e^{\lambda_2 t'} [1 - e^{-\lambda_2 t}].$$

Следовательно,

$$k_x(t, t') = m_x(0) \{e^{\lambda_2 t'} [e^{\lambda_2 t} - 1] \mathbf{1}(t' - t) + e^{\lambda_2 t} [e^{\lambda_2 t'} - 1] \mathbf{1}(t - t')\}. \quad (4.5.22)$$

Заметим, что для процессов чистого размножения корреляционная функция во всех трех рассмотренных случаях всюду положительна.

Найдем характеристики процессов чистой гибели. При этом ограничимся случаем рассмотрения таких значений t , когда величина $m_1(t)$ достаточно велика, так что можно практически считать вероятность $p_0(t) \approx 0$.

В этом случае решение уравнения (4.5.5) при начальном условии $m_x(0) = n$ будет иметь такой вид:

$$m_1(t) = \left(n + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) e^{-\mu_2 t} - \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (4.5.23)$$

Это уравнение практически справедливо при условии, что $m_x(t) > 2$ (см. § 4.3), т. е. для таких значений t , которые удовлетворяют условию

$$0 < t < \frac{1}{\mu_2} \ln \left(\left(n + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) / \left(2 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \right). \quad (4.5.24)$$

Уравнение для дисперсии в случае, когда $D_x(0)=0$, имеет такой вид [см. (4.5.6) и (4.5.23)]:

$$D_x(t) = \left[n + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] e^{-\mu_2 t} - \left[n + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] e^{-2\mu_2 t}, \quad (4.5.25)$$

которое приближенно тоже справедливо при тех значениях t , при которых справедливо неравенство (4.5.24).

Рассмотрим теперь частные случаи. При $\mu_1=0$ и $\mu_2>0$ получим:

$$m_x(t) = n e^{-\mu_2 t}, \quad (4.5.26)$$

$$D_x(t) = m_x(t) (1 - e^{-\mu_2 t}); \quad (4.5.27)$$

при $\mu_2=0$ и $\mu_1 \neq 0$:

$$m_x(t) = n - \mu_1 t, \quad (4.5.28)$$

$$D_x(t) = \mu_1 t. \quad (4.5.29)$$

Заметим, что уравнения (4.5.26) и (4.5.27) являются точными, справедливыми для любых значений t , в то время как уравнения (4.5.28) и (4.5.29) являются приближенными.

Найдем теперь корреляционную функцию процессов чистой гибели при постоянных положительных значениях параметров μ_1 и μ_2 , для чего отыщем условное математическое ожидание $m_{x' | x_i}(t', t)$. Его можно найти, решая уравнение (4.5.5) на момент времени $\tau = t' - t > 0$, при условии, что в момент $\tau=0$ $m_x(\tau) = x_i$ (см. 4.5.23).

$$m_{x' | x_i}(t', t) = x_i e^{-\mu_2 \tau} - \frac{\mu_1}{\mu_2} [1 - e^{-\mu_2 \tau}] (\tau = t' - t > 0). \quad (4.5.30)$$

Следовательно [см. (4.2.14)],

$$\Gamma_x(t, t') = D_x(t) e^{-\mu_2 \tau} + m_x^2(t) e^{-\mu_2 \tau} - \frac{\mu_1}{\mu_2} [1 - e^{-\mu_2 \tau}] m_x(t), \quad (4.5.31)$$

где функции $m_x(t)$ и $D_x(t)$ определяются из выражений (4.5.23) и (4.5.25) соответственно.

Таким образом,

$$\begin{aligned} k_x(t, t') &= \Gamma_x(t, t') - m_x(t) m_x(t') = \\ &= \left[n + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] e^{-\mu_2 t} e^{-\mu_2 (t' - t)} - \left[n + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] e^{-2\mu_2 t} e^{-\mu_2 (t' - t)} + \\ &+ \left(\left[n + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] e^{-\mu_2 t} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 e^{-\mu_2 (t' - t)} - \frac{\mu_1}{\mu_2} [1 - e^{-\mu_2 (t' - t)}] \times \\ &\times \left(\left[n + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] e^{-\mu_2 t} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) - \left(\left[n + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] e^{-\mu_2 t'} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \times \\ &\times \left(\left[n + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] e^{-\mu_2 t} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) (t' > t). \end{aligned} \quad (4.5.32)$$

Для того чтобы получить выражение для корреляционной функции при $t > t'$, нужно в равенство (4.5.32) вместо аргумента t поставить аргумент t' и наоборот. Выражение (4.5.32) является приближенным; оно практически справедливо для таких значений t' , которые удовлетворяют неравенству (4.5.24).

В частном случае, при $\mu_1=0$, получим

$$m_{x'|x_i}(t', t) = x_i e^{-\mu_2 \tau} (\tau = t' - t > 0). \quad (4.5.33)$$

Следовательно [см. (4.5.26) и (4.5.27)],

$$\Gamma_x(t, t') = e^{-\mu_2(t'-t)} m_x(t) [1 - e^{-\mu_2 t} + m_x(t)] \quad (t' > t). \quad (4.5.34)$$

Теперь можно найти корреляционную функцию случайной функции $X(t)$ [см. (4.5.34) и (4.5.26)]

$$k_x(t, t') = D_x(t) e^{-\mu_2(t'-t)} (t' > t).$$

В общем случае, для любых t и t' , это выражение примет такой вид:

$$k_x(t, t') = e^{-\mu_2|t'-t|} [D_x(t) 1(t' - t) + D_x(t') 1(t - t')]. \quad (4.5.35)$$

Отметим, что равенство (4.5.35) справедливо для любых значений t , так же как и формулы (4.5.26) и (4.5.27).

Рассмотрим, наконец, случай, когда $\mu_1 \neq 0$, а $\mu_2 = 0$. В этом случае

$$m_{x'|x_i}(t', t) = x_i - \mu_1(t' - t) \quad (t' > t), \text{ откуда } \Gamma_x(t, t') = \sum_{i=0}^{\infty} x_i (x_i - \mu_1(t' - t) - t)) P_i(t) = \mu_1 t + n^2 - n\mu_1 t - n\mu_1 t' + \mu_1^2 t t' \quad (t' > t).$$

Теперь можно найти корреляционную функцию по формуле:

$$k_x(t, t') = \Gamma_x(t, t') - m_x(t) m_x(t').$$

В общем случае, для любых t и t' , получим окончательное выражение корреляционной функции

$$k_x(t, t') = \mu_1 [t 1(t' - t) + t' 1(t - t')]. \quad (4.5.36)$$

Это уравнение является приближенным, справедливым для небольших значений t, t' .

5

СТОХАСТИЧЕСКИ ЗАВИСИМЫЕ ПРОЦЕССЫ ТИПА ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ

5.1. Основные понятия и определения

Рассмотрим векторную случайную функцию $X(t)$, состоящую из m действительных составляющих $X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)$. Каждая из этих составляющих представляет собой случайный процесс гибели и размножения или процесс типа гибели и размножения, определение которого дано ниже. Таким образом, для каждого фиксированного момента времени t будет рассматриваться случайный вектор в m -мерном пространстве $X(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)\}$.

Для формирования последующих рассуждений и выводов полезно ввести в рассмотрение *граф случайной функции* $X(t) \sim (G(X(t)), \text{вер-}$

шины которого представляют собой составляющие этой случайной функции. Для того чтобы отличать граф случайной функции $G(X(t))$ от графа состояний $G(X)$, отдельную вершину графа $G(X(t))$ изобразим в виде круга со вписанным в него обозначением составляющей случайной функции $X_i(t)$ (рис. 5.1).

Следовательно, граф случайной функции $X(t)$, имеющей m составляющих, состоит из m вершин. Ребра этого графа и будут определять те связи, которые существуют между отдельными составляющими этой векторной случайной функции $X(t)$.



Приступим к изучению законов распределения векторной случайной функции $X(t)$ и ее составляющих $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_m(t)$.

Рис. 5.1.

Рассмотрим закон распределения одной составляющей случайного процесса гибели и размножения $X_i(t)$. Так как каждая случайная функция $X_i(t)$ ($i=1, m$) представляет собой марковский случайный процесс с непрерывным временем и дискретным числом состояний, то исчерпывающей характеристикой этого процесса является его двумерный закон распределения [41], который запишем в таком виде:

$$P_{h,g}^{(i)}(t, t') = P[X_i(t) = x_h, X_i(t') = x_g], \quad (5.1.1)$$

$$(g = \overline{0, n_i})(h = \overline{0, n_i})$$

где $n_i + 1$ — число возможных состояний процесса гибели и размножения $X_i(t)$.

В дальнейшем вероятность (5.1.1) будем кратко называть законом распределения случайного процесса гибели и размножения $X_i(t)$.

В предыдущей главе было показано, что все вероятностные характеристики случайного процесса гибели и размножения $X_i(t)$, в том числе и его закон распределения, определяются тремя группами неслучайных параметров: 1) числом возможных состояний процесса $n_i + 1$; 2) интенсивностями потоков «размножения» $\lambda_k^{(i)}(t)$ ($k=0, n_i$); 3) интенсивностями потоков «гибели» $\mu_k^{(i)}(t)$ ($k=0, n_i$).

Таким образом, исчерпывающей характеристикой процесса гибели и размножения $X_i(t)$ является его двумерный закон распределения, который полностью определяется параметрами этого процесса $\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i$.

Это положение символически можно записать следующим образом:

$$P_{h,g}^{(i)}(t, t') = P_{h,g}^{(i)}(t; t'; \lambda_k^{(i)}; \mu_k^{(i)}; n_i) \quad (h = \overline{0, n_i}; g = \overline{0, n_i}). \quad (5.1.2)$$

Перейдем к изучению закона распределения двух случайных процессов гибели и размножения $X_i(t)$ и $X_j(t)$. Эти два случайных процесса называются независимыми, если их совместный закон распределения может быть представлен в виде произведения законов распределения каждого из этих случайных процессов

$$P_{hg,pq}^{(i,j)}(t; t'; \tau; \tau'; \lambda_k^{(i)}; \mu_k^{(i)}; n_i; \lambda_l^{(j)}; \mu_l^{(j)}; n_j) =$$

$$= P_{h,g}^{(i)}(t; t'; \lambda_k^{(i)}; \mu_k^{(i)}; n_i) P_{p,q}^{(j)}(\tau; \tau'; \lambda_l^{(j)}; \mu_l^{(j)}; n_j) \quad (g, h = \overline{0, n_i};$$

$$p, q = \overline{0, n_j}). \quad (5.1.3)$$

¹⁾ Аргумент t у интенсивностей потоков событий $\lambda_k^{(i)}$ и $\mu_k^{(i)}$ для сокращения записи опущен.

Так как каждый из сомножителей, входящих в правую часть равенства, зависит только от своих параметров $(\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$ и $(\lambda_l^{(i)}, \mu_l^{(i)}, n_j)$, то можно дать и другое определение независимости для случайных процессов гибели и размножения.

Два случайных процесса гибели и размножения $X_i(t)$ и $X_j(t)$ называются независимыми, если параметры процесса $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$ не зависят от того, какой вид и значение имеют параметры процесса $X_j(t) \sim (\lambda_l^{(i)}, \mu_l^{(i)}, n_j)$ и, в свою очередь, параметры процесса $X_j(t)$ не зависят от того, какой вид и значение имеют параметры процесса $X_i(t)$.

Символически независимость двух случайных процессов гибели и размножения $X_i(t)$ и $X_j(t)$ изображим в виде графа с двумя изолированными вершинами (рис. 5.2).



Рис. 5.2.

Определение зависимости двух случайных процессов гибели и размножения можно получить как отрицание определения независимости. Если независимость двух случайных процессов гибели и размножения имела место в единственном случае, то зависимость между двумя случайными процессами гибели и размножения $X_i(t)$ и $X_j(t)$ возможна в трех различных случаях.

1. Если параметры случайного процесса гибели и размножения $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$ зависят от вида и значения параметров случайного процесса гибели и размножения $X_j(t) \sim (\lambda_l^{(i)}, \mu_l^{(i)}, n_j)$, а параметры процесса $X_j(t) \sim (\lambda_l^{(i)}, \mu_l^{(i)}, n_j)$ не зависят от вида и значения параметров процесса $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$.

2. Если параметры случайного процесса гибели и размножения $X_j(t) \sim (\lambda_l^{(i)}, \mu_l^{(i)}, n_j)$ зависят от вида и значения параметров случайного процесса гибели и размножения $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$, а параметры процесса $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$ не зависят от вида назначения параметров процесса $X_j(t) \sim (\lambda_l^{(i)}, \mu_l^{(i)}, n_j)$.

3. Если параметры случайного процесса гибели и размножения $X_j(t) \sim (\lambda_l^{(i)}, \mu_l^{(i)}, n_j)$ зависят от вида и значения параметров случайного процесса гибели и размножения $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$ и параметры процесса $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$, в свою очередь, зависят от вида и значения параметров процесса $X_j(t) \sim (\lambda_l^{(i)}, \mu_l^{(i)}, n_j)$. Первый случай зависимости двух случайных процессов гибели и размножения символически изобразим в виде графа (рис. 5.3).

Второй случай зависимости двух случайных процессов гибели и размножения символически изображен на рис. 5.4, а третий — на рис. 5.5.

Рассмотрим все эти случаи более подробно. Первые два случая с точки зрения определения тождественны (меняются лишь местами сами случайные процессы). Поэтому ограничимся рассмотрением лишь первого случая. В нем развитие процесса гибели и размножения $X_i(t)$ полностью обусловлено его параметрами $(\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$.

Развитие же случайного процесса гибели и размножения $X_i(t)$ происходит под влиянием процесса $X_j(t)$. Процесс $X_j(t)$ как бы управляет

процессом $X_i(t)$, а процесс $X_i(t)$ в какой-то степени *управляется* процессом $X_j(t)$. Чтобы как-то различать эти процессы, для первого случая будем называть процесс $X_j(t)$ *управляющим случайным процессом гибели и размножения* по отношению к процессу $X_i(t)$, а процесс $X_i(t)$ — *управляемым случайным процессом гибели и размножения* со стороны процесса $X_j(t)$ (см. рис. 5.3).

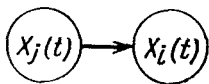


Рис. 5.3.

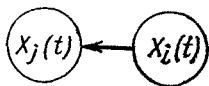


Рис. 5.4.

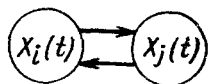


Рис. 5.5.

Во втором случае, символически изображенном на рис. 5.4, наоборот, процесс $X_i(t)$ является управляющим случайным процессом гибели и размножения, а процесс $X_j(t)$ — управляемым случайным процессом гибели и размножения.

В третьем случае, символически изображенном на рис. 5.5, оба случайных процесса гибели и размножения $X_i(t)$ и $X_j(t)$ являются взаимно управляющими (и управляемыми) процессами.

Таким образом, между случайными процессами гибели и размножения $X_i(t)$ и $X_j(t)$ существуют четыре вида отношений, символически изображенных на рис. 5.2—5.5.

Введем понятие ребра для графа случайной функции $X(t)$. Ребро

$$R[X_i(t); X_j(t)] = 1, \quad (5.1.4)$$

если процесс $X_i(t)$ является управляющим по отношению к процессу $X_j(t)$ (см. рис. 5.4 и 5.5).

Ребро

$$R[X_i(t); X_j(t)] = 0, \quad (5.1.5)$$

если процесс $X_i(t)$ не является управляющим по отношению к процессу $X_j(t)$ (см. рис. 5.2 и 5.3).

Таким образом, если исследуются только два процесса $X_i(t)$ и $X_j(t)$, то они будут независимыми тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$R[X_i(t); X_j(t)] = R[X_j(t); X_i(t)] = 0. \quad (5.1.6)$$

В противном случае, когда

$$\left. \begin{array}{l} R[X_i(t); X_j(t)] = 1; \quad R[X_j(t); X_i(t)] = 0 \\ \text{или} \\ R[X_i(t); X_j(t)] = 0; \quad R[X_j(t); X_i(t)] = 1 \\ \text{или} \\ R[X_i(t); X_j(t)] = 1; \quad R[X_j(t); X_i(t)] = 1 \end{array} \right\}, \quad (5.1.7)$$

случайные процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$ будут зависимы.

Введем дополнительные определения.

Если вершина $X_i(t)$ является *изолированной*, то случайный процесс $X_i(t)$ будем называть *независимым* (см. рис. 5.2).

Если вершина $X_i(t)$ является *начальной* хотя бы для одного ребра и не является *конечной* ни для одного ребра, то процесс будем называть *управляющим* (см. рис. 5.4).

Если вершина $X_i(t)$ является конечной хотя бы для одного ребра и не является начальной ни для одного ребра, то процесс будем называть управляемым (см. рис. 5.3).

Если вершина $X_i(t)$ является конечной хотя бы для одного ребра и одновременно является начальной хотя бы для одного ребра, то процесс $X_i(t)$ будем называть транзитивным (см. рис. 5.5).

Перейдем к исследованию отношений, которые могут иметь место между тремя случайными процессами гибели и размножения $X_i(t)$,

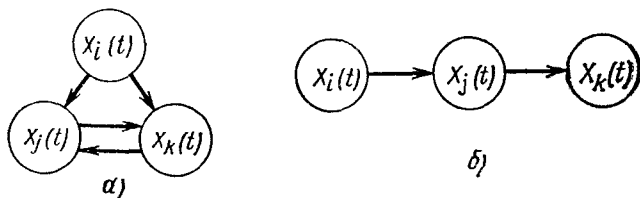


Рис. 5.6

$X_i(t)$ и $X_k(t)$. Все эти отношения могут быть перечислены путем составления различных ориентировочных графов с тремя вершинами. Число таких ориентированных графов определяется по формуле

$$2^n, \quad (5.1.8)$$

где n — максимальное число возможных ребер в графе⁴⁾.

В графе с двумя вершинами максимальное число возможных ребер равно 2. Поэтому число различных графов с двумя вершинами равно $2^2=4$. Эти четыре графа изображены на рис. 5.2—5.5. При числе вершин графа, равном 3, максимальное число возможных ребер n равно 6. Следовательно, в этом случае число различных ориентированных графов с тремя вершинами будет равно: $2^6=64$, что делает затруднительным графическое изображение всех возможных соотношений между тремя случайными процессами. Однако некоторые соотношения мы исследуем.

При рассмотрении трех случайных процессов гибели и размножения $X_i(t)$, $X_j(t)$ и $X_k(t)$ эти процессы будут независимы тогда и только тогда, когда их граф состоит из трех отдельных вершин, не соединенных между собой ребрами. Случайный процесс $X_i(t)$ не будет зависеть от случайного процесса $X_j(t)$ тогда и только тогда, когда хотя бы одна из вершин $X_i(t)$ и $X(t)$ является изолированной.

Введем понятие маршрута на графе $G[X(t)]$ случайной функции $X(t)$. Маршрут на графе $G[X(t)]$ определяется таким же образом, как и на графе состояний. Например, на рис. 5.6 изображен маршрут, соединяющий вершины $X_i(t)$, $X_j(t)$, $X_k(t)$:

$$M[X_i(t); X_j(t); X_k(t)] = R[X_i(t); X_j(t)] \cdot R[X_j(t); X_k(t)]. \quad (5.1.9)$$

При рассмотрении только трех случайных процессов $X_i(t)$, $X_j(t)$ и $X_k(t)$ процесс $X_i(t)$ будет управляющим для всех остальных процессов тогда, когда существуют маршруты от вершины $X_i(t)$ к вершинам $X_j(t)$ и $X_k(t)$, но не существует маршрутов от вершины $X_j(t)$ к вершине $X_i(t)$ и от вершины $X_k(t)$ к вершине $X_i(t)$ (см. например, рис. 5.1.6,а и 5.1.6,б).

⁴⁾ Предполагается, что между двумя вершинами может быть максимально два ребра.

В случае, когда процесс $X_i(t)$ будет управляющим для процессов $X_j(t)$ и $X_k(t)$, все три процесса зависимые.

Рассмотрим векторную случайную функцию $X(t)$, имеющую произвольное число m составляющих $X_1(t), \dots, X_m(t)$.

Совокупность всех составляющих случайной функции $X(t)$ будем называть множеством случайных процессов гибели и размножения, а сами составляющие — элементами этого множества. Рассмотрим произвольное (непустое) подмножество случайных процессов гибели и размножения $Y(t)$, составляющими (элементами) которого являются процессы $X_i(t), \dots, X_k(t)$. Будем называть подмножество $Y(t)$ *замкнутым*, если в число составляющих этого подмножества объединены *все* зависимые между собой случайные процессы гибели и размножения.

Обозначим подмножеством $Z(t)$ дополнение подмножества $Y(t)$ [$X(t) = Y(t) + Z(t)$]. Следовательно, подмножество $Y(t)$ будет замкнутым, если между графом подмножества $Y(t) \sim G(Y(t))$ и графом подмножества $Z(t) \sim G(Z(t))$ нет никаких связей. Другими словами, для любой вершины $X_j(t) \in Y(t)$ нет маршрута, соединяющего эту вершину с любой вершиной $X_l(t) \in Z(t)$, и нет маршрута, соединяющего любую вершину $X_l(t) \in Z(t)$ с любой вершиной $X_j(t) \in Y(t)$:

$$M[X_j(t), \dots, X_l(t)] = M[X_l(t), \dots, X_j(t)] = 0. \quad (5.1.10)$$

Отдельная вершина $X_i(t)$, для которой $R[X_i(t), X_j(t)] = R[X_j(t), X_i(t)] = 0$, тоже является замкнутым подмножеством, если $X_j(t)$ — любой элемент множества $X(t)$ ($j \neq i$).

Таким образом, исследование случайных процессов гибели и размножения можно вести в рамках только замкнутых подмножеств.

Рассмотрим замкнутое подмножество $Y(t)$, число элементов которого не меньше двух.

Между двумя любыми элементами $X_i(t)$ и $X_j(t)$ замкнутого подмножества $Y(t)$ должен существовать хотя бы один из двух маршрутов: маршрут от вершины $X_i(t)$ к вершине $X_j(t)$ или маршрут от вершины $X_j(t)$ к вершине $X_i(t)$:

$$M[X_i(t), \dots, X_j(t)] = 1, \quad M[X_j(t), \dots, X_i(t)] = 0,$$

или

$$M[X_j(t), \dots, X_i(t)] = 1, \quad M[X_i(t), \dots, X_j(t)] = 0, \quad (5.1.11)$$

или

$$M[X_i(t), \dots, X_j(t)] = M[X_j(t), \dots, X_i(t)] = 1.$$

Совокупность элементов случайной функции $X(t)$, удовлетворяющих условиям (5.1.10) и (5.1.11), составляет замкнутое подмножество $Y(t)$.

Любое непустое замкнутое подмножество $Y(t)$ можно разбить на три непересекающихся подмножества:

$Y^{(1)}(t)$ — подмножество, состоящее только из управляющих случайных процессов гибели и размножения;

$Y^{(2)}(t)$ — подмножество, состоящее только из управляемых случайных процессов гибели и размножения;

$Y^{(3)}(t)$ — подмножество, состоящее только из транзитивных случайных процессов гибели и размножения.

Это означает, что вершины $X_i(t)$, принадлежащие подмножеству $Y^{(1)}(t)$, являются начальными, вершины $X_j(t)$, принадлежащие подмножеству $Y^{(2)}(t)$, являются конечными, а вершины $X_k(t)$, принадлежащие подмножеству $Y^{(3)}(t)$, являются транзитивными.

Для любого элемента $X_i(t)$ подмножества $Y^{(1)}(t)$ найдется хотя бы один элемент $X_j(t)$, принадлежащий либо подмножеству $Y^{(2)}(t)$, либо подмножеству $Y^{(3)}(t)$, для которого выполняется условие

$$R[X_i(t), X_j(t)] = 1 [X_j(t) \in Y^{(2)}(t) + Y^{(3)}(t); X_i(t) \in Y^{(1)}(t)]. \quad (5.1.12)$$

Для любого элемента $X_j(t)$ подмножества $Y^{(2)}(t)$ найдется хотя бы один элемент $X_i(t)$, принадлежащий либо подмножеству $Y^{(1)}(t)$, либо подмножеству $Y^{(3)}(t)$, для которых выполняется условие

$$R[X_i(t), X_j(t)] = 1 [X_i(t) \in Y^{(2)}(t); X_j(t) \in Y^{(1)}(t) + Y^{(3)}(t)]. \quad (5.1.13)$$

Условия (5.1.12) и (5.1.13) позволяют однозначно разбить подмножество $Y(t)$ на три непересекающихся подмножества $Y^{(1)}(t)$, $Y^{(2)}(t)$, $Y^{(3)}(t)$ так, что

$$Y(t) = Y^{(1)}(t) + Y^{(2)}(t) + Y^{(3)}(t). \quad (5.1.14)$$

Рассмотрим примеры стохастически зависимых случайных процессов гибели и размножения.

Исследуется динамика изменения случайного процесса гибели и размножения $X_1(t)$ — числа самолетов, находящихся в эксплуатации. «Размножение» числа самолетов происходит за счет их производства, а «гибель» — либо за счет выхода из строя в мирное время (износ, аварии, катастрофы), либо за счет выхода из строя и поражения само-

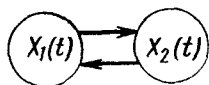


Рис. 5.7.

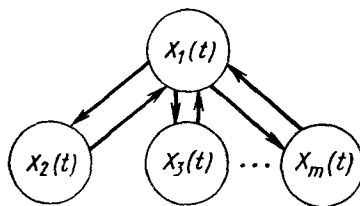


Рис. 5.8.

летов (на земле и в воздухе) в военное время. Для определенности рассмотрим мирное время. Второй случайный процесс гибели и размножения $X_2(t)$ есть число двигателей к самолетам, находящихся на складах. «Размножение» числа двигателей происходит за счет производства, а «гибель» — в результате того, что двигатели берутся со складов для замены двигателей, отслуживших свой срок или пришедших в негодность досрочно.

Рассматриваемые процессы $X_1(t)$ и $X_2(t)$ являются транзитивными (рис. 5.7).

Наличие ребра $R(X_1(t), X_2(t))$ очевидно. Наличие ребра $R(X_2(t), X_1(t))$ связано с тем, что если случайный процесс $X_2(t) = 0$, то интенсивность выхода самолетов из строя увеличится за счет того, что часть самолетов будет простаивать (не находиться в эксплуатации) за счет отсутствия двигателей.

Очевидно, что в рамках данного примера число составляющих векторной случайной функции $X(t)$ можно увеличить за счет перечисления всех тех изделий, агрегатов и материалов, которые требуются при эксплуатации самолетов. Допустим, что общее количество различных изделий, агрегатов и материалов, которое требуется для эксплуатации самолетов данного вида (основного изделия), равно $m-1$. Будем называть эти изделия комплектующими. Если не рассматривать экономические ограничения, связанные с производством этих изделий, то векторная

случайная функция $X(t)$ будет иметь m составляющих, которые объединяются в граф (рис. 5.8).

Все процессы $X_i(t)$ ($i = \overline{1, m}$) являются транзитивными.

Если считать, что отсутствие комплектующих изделий на складах практически невозможно:

$$P(X_i(t) = 0) \approx 0 \quad (i = \overline{2, m}),$$

то граф векторной случайной функции $X(t)$ примет вид, изображенный на рис. 5.9.

В этом случае процесс $X_1(t)$ — число самолетов в строю — является управляющим, а процессы $X_i(t)$ ($i = \overline{2, m}$) — число комплектующих изделий i -го вида на складах — управляемыми.

Другим типичным примером транзитивных случайных процессов гибели и размножения являются число непораженных боевых единиц i -го вида первой стороны $X_i^{(1)}(t)$ ($i = \overline{1, m_1}$) [$X_i^{(1)}(t) \in X(t)$] и число непораженных боевых единиц j -го вида второй стороны $X_j^{(2)}(t)$ ($j = \overline{1, m_2}$) [$X_j^{(2)}(t) \in X(t)$] в момент времени t в ходе боевых действий. Здесь m_1 и

m_2 — число различных видов боевых единиц, находящихся на вооружении первой и второй сторон соответственно.

Примером двух практически независимых случайных процессов гибели и размножения является следующий:

$X_1(t)$ — число радиостанций, за которыми радиоразведка следит (осуществляет перехват) в момент времени t .

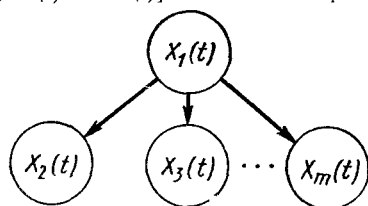


Рис. 5.9.

$X_2(t)$ — число подземных стартовых позиций, находящихся в момент времени t в полной боевой готовности.

Процессы гибели и размножения $X_1(t)$ и $X_2(t)$ практически являются независимыми, если рассматривается мирное время и не учитываются экономические и другие факторы.

Однако в угрожаемый период случайные процессы $X_1(t)$ и $X_2(t)$ могут быть зависимыми. При этом корреляционная функция может быть как положительной, так и отрицательной.

Вообще, в силу связи всех явлений, в природе все процессы взаимосвязаны. Но многие процессы могут рассматриваться практически независимыми.

5.2. Исследование взаимного влияния характеристик двух случайных процессов гибели и размножения

В этом параграфе рассмотрен случай, когда векторная случайная функция $X(t)$ состоит из двух составляющих: $X_1(t)$ и $X_2(t)$. В предыдущем параграфе было показано, что случайные процессы $X_1(t)$ и $X_2(t)$ зависимы в трех случаях, изображенных на ориентированных графах (рис. 5.10, а, б, в).

Случаи зависимости, показанные на рис. 5.10, а и 5.10, б с точки зрения общих методов исследования эквивалентны, поэтому в данном параграфе будут проанализированы только зависимости, изображенные на рис. 5.10, а и 5.10, в.

На рис. 5.10,а изображена такая зависимость между процессами $X_1(t)$ и $X_2(t)$, когда процесс $X_1(t)$ является управляющим, а процесс $X_2(t)$ — управляемым. Управление процессом $X_2(t)$ может идти по линии воздействия на потоки «размножения», на потоки «гибели» и на потоки «размножения» и «гибели» одновременно.

При воздействии процесса $X_1(t)$ на потоки «размножения» процесса $X_2(t)$ интенсивности потоков размножения процесса $X_2(t)$ должны зависеть от вида процесса $X_1(t)$:

$$\lambda_k^{(2)}(t) = \lambda_k^{(2)}(\lambda_k^{(1)}(t), \mu_k^{(1)}(t), n_1(t))$$

$$(k = 0, \overline{n_2 - 1}).$$

(5.2.1)

В этом случае интенсивности потоков «гибели» не зависят от вида и значения параметров процесса $X_1(t)$.

При воздействии процесса $X_1(t)$ на потоки «гибели» процесса $X_2(t)$ интенсивности потоков гибели процесса $X_2(t)$ должны зависеть от вида процесса $X_1(t)$, т. е. являются в общем случае функционалами от функций

$\lambda_k^{(1)}(t)$, $\mu_k^{(1)}(t)$ и параметра n_1 :

$$\mu_k^{(2)}(t) = \mu_k^{(2)}(\lambda_k^{(1)}(t), \mu_k^{(1)}(t), n_1, t) \quad (k = 0, \overline{n_1 - 1}). \quad (5.2.2)$$

В этом случае интенсивность потоков «размножения» не зависит от вида и значения параметров процесса $X_1(t)$.

Наконец, при воздействии процесса $X_1(t)$ на потоки «размножения» и «гибели» процесса $X_2(t)$ интенсивности потоков размножения и гибели процесса $X_2(t)$ должны зависеть от вида и значения параметров процесса $X_1(t)$.

Рассмотрим сначала случай, когда процесс $X_1(t)$ воздействует на интенсивности потоков размножения процесса $X_2(t)$.

1. Случайный процесс $X_1(t)$ представляет собой число однородных производственных единиц, каждая из которых осуществляет выпуск (производство) единиц процесса $X_2(t)$. При этом интенсивность выпуска единиц процесса $X_2(t)$ одинакова для всех единиц процесса $X_1(t)$ и равна $\lambda(t)$ и ограничений на общее число состояний процесса $X_2(t)$ нет ($n_2 \rightarrow \infty$) [18].

В этом случае условная интенсивность выпуска («рождения») единиц процесса $X_2(t)$, вычисляемая при гипотезе о том, что в момент времени t процесс $X_1(t)$ находился в состоянии $x_i^{(1)}$, будет равна

$$\lambda(t) x_i^{(1)}, \quad (5.2.3)$$

а безусловная интенсивность определяется по формуле

$$\lambda_k^{(2)}(t) = \sum_{i=0}^{n_1} \lambda(t) x_i^{(1)} p_i^{(1)}(t) = \lambda(t) m_1(t), \quad (5.2.4)$$

где

$$p_i^{(1)}(t) = P[X_1(t) = x_i^{(1)}]; \quad (5.2.5)$$

$$m_1(t) = M[X_1(t)]. \quad (5.2.6)$$

Заметим, что интенсивность потока $\lambda_n^{(2)}(t)$ определяется только параметром $\lambda(t)$ и математическим ожиданием случайной функции $X_1(t)$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\lambda_n^{(2)}(\lambda_n^{(1)}, \mu_n^{(1)}, h_1, t) = \lambda(t) m_1(t), \quad (5.2.7)$$

где $m_1(t)$ представляет собой известный функционал от параметров процесса гибели и размножения $X_1(t): \lambda_n^{(1)}, \mu_n^{(1)}, n_1$ (см. гл. 4).

Таким образом, в рассматриваемом случае *интенсивность потока «рождения»* единиц, составляющих управляемый процесс $X_2(t)$, зависит только от *математического ожидания* управляющего процесса $X_1(t)$ и интенсивности выпуска единиц управляемого процесса каждой единицей управляющего процесса, которая предполагается *одинаковой* для всех единиц управляющего процесса $X_1(t)$.

Формула (5.2.4) является выражением известного допущения о так называемой «квазирегулярности» взаимодействия процессов гибели и размножения, впервые сформулированного И. Я. Динером. Отметим, что допущение о квазирегулярности является *следствием* допущения о том, что каждая единица управляющего процесса производит единицы управляемого процесса с *одинаковой* интенсивностью. Последнее допущение вовсе не исключает того положения, что каждая единица управляющего процесса должна выпускать строго одинаковое число единиц управляемого процесса. Речь идет о том, что *средний* выпуск единиц управляемого процесса был одинаков для всех единиц управляющего процесса. Другим допущением, которое было использовано, является допущение о том, что рассматриваемые случайные процессы являются марковскими. Это допущение эквивалентно, в частности, тому, что суммарный поток выпуска единиц управляемого процесса, интенсивность которого определяется по формуле (5.2.4), является пуассоновским. Данное допущение является практически вполне оправданным, если величина $m_1(t) > 5$, что почти всегда выполняется. Это утверждение вытекает из теоремы о сходимости суммарного потока к пуассоновскому в довольно широких пределах [32, 14].

2. Случайный процесс $X_1(t)$ представляет собой число однородных производственных единиц, каждая из которых осуществляет выпуск (производство) единиц процесса $X_2(t)$. При этом условии интенсивность выпуска единиц процесса $X_2(t)$ есть некоторая функция (или функционал) числа единиц процесса $X_1(t)$

$$\varphi_1[X_1(t)]. \quad (5.2.8)$$

В этом случае интенсивность выпуска (рождения) единиц процесса $X_2(t)$, вычисляемая при гипотезе о том, что в момент времени t процесс $X_1(t)$ находится в состоянии x_1 , будет равна

$$\varphi_1(x_1^{(t)}), \quad (5.2.9)$$

а математическое ожидание этой интенсивности определяется формулой

$$\lambda_n^{(2)}(t) = M[\varphi_1(X_1(t))]. \quad (5.2.10)$$

Рассмотрим случай, когда функция $\varphi(x_i^{(1)})$ представляет полином l -й степени от величины $x_i^{(1)}$:

$$\varphi(x_i^{(1)}) = \sum_{k=0}^l a_k(t) (x_i^{(1)})^k. \quad (5.2.11)$$

Коэффициенты этого полинома в общем случае могут быть любыми неотрицательными функциями времени.

В этом случае

$$(\lambda)_k^{(2)}(t) = \sum_{j=0}^l a_j(t) x_j[X(t)], \quad (5.2.12)$$

где

$$\alpha_j[X_1(t)] = M[(X_1(t))^j] = \sum_{i=0}^{n_i} (x_i^{(1)})^j p_i^{(1)}(t) \quad (j=0, 1, \dots, l) \quad (5.2.13)$$

— начальный момент n -го порядка случайной функции $\varphi(x_i)$.

Предыдущий случай является частным для рассматриваемого случая, когда $a_0(t) = a_2(t) = \dots = a_l(t) = 0$, а $a_1(t) = \lambda(t)$.

Если математическое ожидание случайного процесса $X_1(t)$ достаточно велико для того, чтобы считать, что его закон распределения близок к нормальному, то начальные моменты (5.2.13) могут быть определены по известным формулам (см., например, [14])

$$\alpha_j[X_1(t)] = \sum_{k=0}^j C_s^k \mu_k[X(t)] (M[X_1(t)])^{j-k},$$

где

$$\mu_k[X_1(t)] = M[(\hat{X}_1(t))^k] = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } k \\ (2k-1)!! \sigma_{\hat{X}}^{2k}(t) & \text{при четном } k \end{cases}$$

$$\sigma_{\hat{X}}(t) = \sqrt{D_{\hat{X}}(t)}.$$

Другой интересный случай состоит в том, что преобразование $\varphi[X_1(t)]$ представляет собой линейный неоднородный оператор

$$\varphi_1(X_1(t)) = L_{01}[X_1(t)] + X(t), \quad (5.2.14)$$

где $X(t)$ — неоднородная часть этого оператора, а L_{01} — линейный однородный оператор.

В этом случае интенсивность выпуска единиц процесса $X_2(t)$ определится по формуле (см. [41])

$$\lambda_k^{(-)}(t) = M[L_{01}(X_1(t)) + X(t)]. \quad (5.2.15)$$

3. Рассмотрим последний случай влияния случайного процесса $X_1(t)$ на интенсивности потоков размножения случайного процесса $X_2(t)$. Сущность этого влияния состоит в том, что интенсивность потоков «размножения» определяется не полностью параметрами процесса $X_2(t)$, а только частично по формуле

$$\lambda_k^{(2)}(t) = M[\varphi_1(\bar{X}_1(t))] + \lambda_1^{(2)}(t) + k\lambda_2^{(2)}(t). \quad (5.2.16)$$

Введение ограничений на число состояний процесса $X_2(t)$ ($n_2 < \infty$) во всех рассмотренных случаях можно учесть так:

$$\lambda_k^{(2)}(t) \equiv 0 \quad (k \geq n_2). \quad (5.2.17)$$

Рассмотрим влияние случайного процесса $X_1(t)$ на интенсивности потоков гибели случайного процесса $X_2(t)$.

При исследовании влияния управляющего процесса $X_1(t)$ на потоки гибели процесса $X_2(t)$ нужно рассматривать два различных случая.

Первый случай заключается в том, что гибель единиц процесса $X_2(t)$ происходит за счет их потребления единицами процесса $X_1(t)$. Кроме того, единицы процесса $X_1(t)$ не могут существовать (гибнут) без этого потребления. В этом случае процессы $X_1(t)$ и $X_2(t)$ связаны между собой: оба являются транзитивными (см. рис. 5.10).

Второй случай заключается в том, что гибель единиц процесса $X_2(t)$ происходит не за счет потребления единиц процесса $X_2(t)$ единицами процесса $X_1(t)$, а за счет функционирования единиц процесса $X_1(t)$, которое не ведет ни к размножению, ни к гибели процесса $X_1(t)$. В этом случае процесс $X_1(t)$ будет управляющим, а процесс $X_2(t)$ — управляемым.

Рассмотрим оба эти случая более подробно.

1. Случайный процесс гибели и размножения $X_1(t)$ представляет собой число однородных единиц, каждая из которых во время своего существования осуществляет «потребление» единиц, составляющих процесс $X_2(t)$. При этом интенсивность потребления единиц, составляющих процесс $X_2(t)$, одинакова для всех «живых» единиц процесса $X_1(t)$, равна $\mu(t)$, если $X_2(t) > 0$, и равна нулю, если $X_2(t) = 0$ («потреблять» нечего).

В этом случае интенсивность «гибели» единиц процесса $X_2(t)$, вычисляемая при гипотезе о том, что в момент времени t процесс $X_1(t)$ находится в состоянии $x_i^{(1)}$, будет приблизительно равна

$$\mu(t) x_i^{(1)} (1 - p_0^{(2)}(t)),$$

$$\text{где } p_0^{(2)}(t) = p[X_2(t) = 0].$$

Математическое ожидание этой интенсивности определится по формуле

$$\mu_k^{(2)}(t) = \mu(t) m_1(t) (1 - P_0^{(2)}(t)). \quad (5.2.18)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\mu_k^{(2)}(\lambda_k^{(1)}(t), \mu_k^{(1)}(t), n_1, t) = \mu(t) m_1(t) (1 - p_0^{(2)}(t)). \quad (5.2.19)$$

Таким образом, интенсивность потока «гибели» единиц управляемого процесса $X_2(t)$ зависит как от математического ожидания управляющего процесса $X_1(t)$ и интенсивности потребления единиц управляемого процесса каждой единицей управляющего процесса, которая предполагается одинаковой для всех единиц управляющего процесса, так и от вероятности того, что все единицы процесса $X_2(t)$ «погибли». В случае, когда $m_2(t) > 3$, можно практически пользоваться приближенной формулой

$$\mu_k^{(2)}(t) \approx \mu(t) m_1(t). \quad (5.2.20)$$

В рассматриваемом случае интенсивности потоков гибели единиц процесса $X_1(t)$ будут зависеть от того, обеспечено ли потребление еди-

ниц процесса $X_1(t)$ единицами процесса $X_2(t)$ или нет. Простейший случай состоит в том, что интенсивности потоков гибели единиц процесса $X_1(t)$ зависят лишь от того, есть единицы процесса $X_2(t)$ или их нет.

Если случайная функция $X_2(t) > 0$, то

$$\mu_k^{(1)}(t) = \mu_k^{(1)}(t)^*, \quad (5.2.21)$$

если случайная функция $X_2(t) = 0$, то

$$\mu_k^{(1)}(t) = \mu_k^{(1)}(t)^0. \quad (5.2.22)$$

Следовательно, математические ожидания интенсивностей потоков гибели единиц процесса $X_1(t)$ будут приближенно равны:

$$\mu_k^{(1)}(t) = \mu_k^{(1)}(t)^* + (\mu_k^{(1)}(t)^0 - \mu_k^{(1)}(t)^*) p_0^{(2)}(t). \quad (5.2.23)$$

В более общем случае условные интенсивности потоков гибели единиц процесса $X_1(t)$ могут определяться как некоторое преобразование процесса $X_2(t) : \psi_2[X_2(t)]$. Тогда интенсивности потоков гибели единиц процесса $X_1(t)$ будут равны:

$$\mu_k^{(1)}(t) = M[\psi_2(X_2(t))]. \quad (5.2.24)$$

И, наконец, возможен случай, когда интенсивности потоков гибели единиц процесса $X_1(t)$ определяются следующим образом:

$$\mu_k^{(1)}(t) = M[\psi_2(X_2(t))] + \mu_k^{(1)}(t) + k\mu_2^{(1)}(t). \quad (5.2.25)$$

2. Случайный процесс гибели и размножения $X_1(t)$ представляет собой число однородных единиц, каждая из которых осуществляет «уничтожение» единиц, составляющих процесс $X_2(t)$. При этом потенциальная интенсивность «уничтожения» единиц, составляющих $X_2(t)$, одинакова для всех единиц процесса $X_1(t)$ и равна $\mu(t)$. Эта потенциальная интенсивность каждой единицы не зависит от того, в каком состоянии находится процесс $X_2(t)$.

В этом случае интенсивности потоков «гибели» единиц процесса $X_2(t)$ определяются по формуле (5.2.18), а интенсивности потоков гибели и размножения единиц процесса $X_1(t)$ не зависят от параметров процесса $X_2(t)$, если функционирование каждой единицы процесса $X_1(t)$, связанное с уничтожением единиц процесса $X_2(t)$, никак не отражается на интенсивностях потоков «гибели» и «размножения» процесса $X_1(t)$.

3. Случайный процесс гибели и размножения $X_1(t)$ представляет собой число однородных единиц. Условная интенсивность потока гибели процесса $X_2(t)$ определяется следующим образом:

$$\gamma_1[X_1(t)] + \mu_1^{(2)}(t) + k\mu_2^{(1)}(t) \quad [X_2(t) > 0].$$

В этом случае интенсивность потока гибели единиц процесса $X_2(t)$ будет определяться по формуле

$$(M[\gamma_1(X_1(t))] + \mu_1^{(2)}(t) + k\mu_2^{(1)}(t))(1 - p_0^{(2)}(t)). \quad (5.2.26)$$

5.3. Разложения случайных процессов гибели и размножения

В предыдущей и в этой главах приведено несколько примеров случайного процесса гибели и размножения $X(t)$, представляющего сумму n однородных единиц, каждая из которых может быть либо «живой», либо «погибшей». Такая схема образования процесса $X(t)$ часто встречается при решении практических задач. Рассмотрим эту схему подробнее.

Будем исследовать процесс гибели и размножения $X(t)$ с конечным числом состояний n , что вполне достаточно при анализе различных прикладных задач. Так как случайный процесс $X(t)$ представляет сумму однородных единиц, то его можно представить в виде его *разложения*

$$X(t) = \sum_{k=1}^n Y_k(t), \quad (5.3.1)$$

где $Y_k(t)$ — случайная функция, принимающая значение 1, если k -я единица (из n рассматриваемых) «жива», и принимающая значение 0, если k -я единица «погибла».

Рассмотрим сначала самый простой случай, когда случайная функция $Y_k(t)$ ($k=1, n$) получается в результате рассмотрения процесса блуждания k -й единицы по двум состояниям: y_1 — единица «жива» и y_0 — единица «погибла». Размеченный граф состояний, описывающий такое блуждание одной единицы, показан на рис. 5.11.

Эта схема уже рассматривалась в § 4.4.

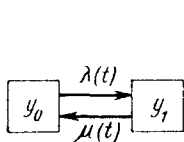


Рис. 5.11.

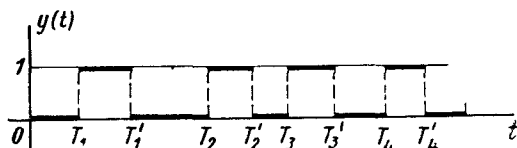


Рис. 5.12.

В дальнейшем случайную функцию $Y(t)$, которая определяется размеченным графом (см. рис. 5.11), будем называть *элементарным случайным процессом гибели и размножения*.

Этот процесс является марковским с непрерывным временем и двумя возможными состояниями: 0 и 1. Реализация этого процесса $y(t)$ в общем случае представляет собой скачкообразную, кусочнонепрерывную функцию с горизонтальными участками непрерывности. Ординаты участков непрерывности случайной функции $Y(t)$ в любой момент времени могут принимать значение 0 или 1 (рис. 5.12).

Введенное выше понятие элементарного случайного процесса гибели и размножения несколько отличается от понятия элементарной случайной функции, введенного впервые В. С. Пугачевым [41]. В отличие от элементарной случайной функции элементарный случайный процесс гибели и размножения имеет неравное нулю математическое ожидание и не может быть представлен в виде произведения центрированной случайной величины на неслучайную функцию времени. Тем не менее между элементарной случайной функцией и элементарным случайным процессом гибели и размножения имеется тесная связь, которая заключается в том, что обе эти функции представляют простейшую ячейку, лежащую в основе сложных случайных функций. Применение элементарных случайных функций намного упрощает решение различных прикладных задач. Это замечание также относится и к введенным в рассмотрение элементарным процессам гибели и размножения. Таким образом, идея В. С. Пугачева о разложении случайной функции на ее элементарные составляющие оказалась весьма плодотворной и при исследовании процессов гибели и размножения.

Элементарный случайный процесс гибели и размножения $Y(t)$ может быть записан в виде

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} 1(t - T_i) 1(T'_i - t), \quad (5.3.2)$$

где $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ — последовательность моментов попадания процесса $Y(t)$ из состояния y_0 в состояние y_1 ; $T'_1, T'_2, \dots, T'_i, \dots$ — последовательность моментов попадания процесса $Y(t)$ из состояния y_1 в состояние y_0 ; $1(x)$ — известная единичная функция.

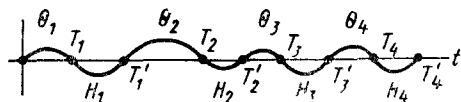


Рис. 5.13.

В соответствии с принятыми обозначениями (см. рис. 5.13) случайная величина T_1 есть момент первого попадания процесса $Y(t)$ в состояние y_1 (он может быть в общем случае и равным 0, если процесс начал блуждания из состояния y_1). Время первого пребывания в состоянии y_0 равно $\theta_1 = T_1$.

Момент первого попадания процесса $Y(t)$ в состояние y_0 равен T'_1 . Разность $T'_1 - T_1 = H_1$ — время первого пребывания в состоянии y_1 и т. д. Время i -го пребывания процесса $Y(t)$ в состоянии y_0 равно:

$$\theta_i = T_i - T'_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots; T'_0=0), \quad (5.3.3)$$

а время i -го пребывания в состоянии y_1 равно:

$$H_i = T'_i - T_i \quad (i=1, 2, \dots). \quad (5.3.4)$$

Случайные величины θ_i и H_i ($i=1, 2, \dots$) представляют собой совокупность независимых случайных величин и образуют поток событий без последствия, описывающий переход системы из состояния y_0 в состояние y_1 и обратно (рис. 5.13).

Случайные величины T_i и T'_i определяются через случайные величины θ_i и H_i по формулам:

$$T_i = T'_i - H_i, \quad (5.3.5)$$

$$T'_i = \sum_{j=1}^i (\theta_j + H_j). \quad (5.3.6)$$

Так как случайная функция $X(t)$ представляет сумму однородных единиц, то случайные функции $Y_k(t)$ ($k=1, n$) [см. (5.3.1)] представляют собой совокупность *одинаково* распределенных элементарных процессов гибели и размножения. Найдем закон распределения элементарного процесса гибели и размножения и его характеристики.

Закон распределения элементарного процесса гибели и размножения $Y(t)$ будем искать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} P_{0,0}(t', t) &= P((Y(t') = y_0)(Y(t) = y_0)) \\ P_{0,1}(t', t) &= P((Y(t') = y_0)(Y(t) = y_1)) \\ P_{1,0}(t', t) &= P((Y(t') = y_1)(Y(t) = y_0)) \\ P_{1,1}(t', t) &= P((Y(t') = y_1)(Y(t) = y_1)) \end{aligned} \right\}. \quad (5.3.7)$$

В выражении (5.3.7) для определенности будем считать, что $t' > t$. Вероятности (5.3.7) можно переписать в таком виде:

$$\begin{aligned} P_{i/j}(t', t) &= P[Y(t') = y_i] P[Y(t') = y_i | Y(t) = y_j] = \\ &= P_j(t') P_{i/j}(t', t). \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

В соответствии с размеченным графом состояний, изображенным на рис. 5.3.1, условные вероятности в формуле (5.3.8) определяются следующим образом:

$$P_{ij}(t', t) = \begin{cases} P_{11}(t', t) = \alpha(t', t) [\beta(t', t) + 1], \\ P_{10}(t', t) = \alpha(t', t) \beta(t', t), \\ P_{01}(t', t) = 1 - P_{11}(t', t), \\ P_{00}(t', t) = 1 - P_{10}(t', t), \end{cases} \quad (5.3.9)$$

где

$$\alpha(t', t) = \exp - \int_t^{t'} (\mu(y) + \lambda(y)) dy; \quad (5.3.10)$$

$$\beta(t', t) = \int_t^{t'} \lambda(x) \exp \int_t^x (\mu(y) + \lambda(y)) dy (dx). \quad (5.3.11)$$

$$t' > t. \quad (5.3.12)$$

Вероятности $P[Y(t) = y_j]$ ($j=0, 1$) определяются по формулам:

$$P_1(t) = P[Y(t) = y_1] = \alpha(t, 0) [\beta(t, 0) + P_1(0)], \quad (5.3.13)$$

$$P_0(t) = 1 - P_1(t), \quad (5.3.14)$$

где

$$P_1(0) = P(Y(0) = y_1), \quad (5.3.15)$$

$$P_0(0) = 1 - P_1(0) = P(Y(0) = y_0) \quad (5.3.16)$$

— начальное распределение вероятностей процесса $Y(t)$ для момента времени $t=0$.

Таким образом, закон распределения случайной функции $Y(t)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_{0,0}(t', t) &= P_0(t) P_{00}(t', t); \\ P_{1,0}(t', t) &= P_0(t) P_{10}(t', t); \\ P_{0,1}(t', t) &= P_1(t) P_{01}(t', t); \\ P_{1,1}(t', t) &= P_1(t) P_{11}(t', t), \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

где вероятности $P_i(t)$, $P_{ij}(t', t)$ ($i, j = \overline{1, 2}$) ($t' > t$) определяются из выражений (5.3.9), (5.3.13) и (5.3.14).

Между вероятностями $P_{i,j}(t', t)$ существуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} P_{0,0}(t', t) + P_{1,0}(t', t) &= P_0(t), \\ P_{1,1}(t', t) + P_{0,1}(t', t) &= P_1(t), \\ \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{i,j}(t', t) &= 1. \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

Найдем характеристики случайной функции $Y(t)$:

$$m_y(t) = P_1(t); \quad (5.3.19)$$

$$D_y(t) = P_1(t)[1 - P_1(t)] = P_1(t)P_0(t); \quad (5.3.20)$$

$$\Gamma_y(t, t') = P_{1,1}(t', t); \quad (5.3.21)$$

$$k_y(t, t') = P_1(t)[P_{1,1}(t', t) - P_1(t')]. \quad (5.3.22)$$

Очевидно, что, зная закон распределения случайной функции $Y(t) \sim P_{i,j}(t', t)$ ($i, j=0, 1$), можно найти ее характеристики: $m_y(t)$, $D_y(t)$, $\Gamma_y(t, t')$, $k_y(t, t')$. Однако по характеристикам случайной функции $Y(t) \sim m_y(t)$, $D_y(t)$, $\Gamma_y(t, t')$, $k_y(t, t')$ нет возможности восстановить закон распределения этой случайной функции.

В некоторых задачах случайная функция $X(t)$ может представлять собой либо случайный процесс чистого размножения, либо случайный процесс чистой гибели. Если случайная функция $X(t)$ является случайным процессом чистого размножения с конечным числом состояний n , его также можно представить в виде разложения (5.3.1). При этом размеченный граф состояний для элементарных процессов $Y_k(t)$ ($k=\overline{1, n}$), из которых складывается процесс $X(t)$, имеет вид, показанный на рис. 5.14.

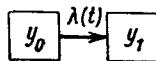


Рис. 5.14.

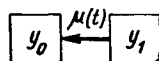


Рис. 5.15.

Случайную функцию $Y(t)$, которая определяется размеченным графом состояний (см. рис. 5.14), будем называть *элементарным случайным процессом чистого размножения*.

Реализация этого процесса представляет собой единичную функцию, скачок которой приходится на момент перехода из состояния y_0 в состояние y_1 . Таким образом,

$$Y(t) = 1(t - T), \quad (5.3.23)$$

где T — момент перехода процесса из состояния y_0 в состояние y_1 .

Закон распределения элементарного процесса чистого размножения вытекает из закона распределения элементарного процесса гибели и размножения, если положить в нем интенсивность $\mu(t) \equiv 0$. Его можно записать в следующем виде:

$$P_{i,j}(t', t) = P_j(t) P_{ij}(t', t) \quad (i, j=0, 1, t' > t), \quad (5.3.24)$$

где

$$P_1(t) = \alpha_1(t, 0) [\beta_1(t, 0) + P_1(0)]; \quad (5.3.25)$$

$$P_0(t) = 1 - P_1(t); \quad (5.3.26)$$

$$P_{11}(t', t) = 1; \quad (5.3.27)$$

$$P_{10}(t', t) = \alpha_1(t', t) \beta_1(t', t); \quad (5.3.28)$$

$$P_{01}(t', t) = 0; \quad (5.3.29)$$

$$P_{00}(t', t) = 1 - \alpha_1(t', t) \beta_1(t', t); \quad (5.3.30)$$

$$\alpha_1(t', t) = e^{-\int_t^{t'} \lambda(y) dy} \quad (5.3.31)$$

$$\beta_1(t', t) = \int_t^{t'} \lambda(x) e^{\int_t^x \lambda(y) dy} dx. \quad (5.3.32)$$

Равенства (5.3.18) для элементарного процесса чистого размножения выполняются. Характеристики элементарного процесса чистого размножения вычисляются по формулам (5.3.19) — (5.3.22).

Когда случайная функция $X(t)$ представляет собой случайный процесс чистой гибели, его тоже можно представить в виде разложения (5.3.1). Размеченный граф состояний для элементарного процесса $Y_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$), из которых складывается случайный процесс $X(t)$, имеет вид, показанный на рис. 5.15.

Случайную функцию $Y(t)$, которая определяется размеченным графом состояний (см. рис. 5.15), будем называть *элементарным случайным процессом чистой гибели*.

Реализация этого процесса представляет собой ступенчатую функцию, определяемую выражением

$$Y(t) = 1 - 1(t - T) = 1(T - t),$$

где T — момент перехода процесса из состояния y_1 в состояние y_0 .

Закон распределения элементарного процесса чистой гибели возникает из закона распределения элементарного процесса гибели и размножения, если положить в нем интенсивность $\lambda(t) \equiv 0$. Его можно записать в следующем виде:

$$P_{i;j}(t', t) = P_j(t) P_{i||j}(t', t) \quad (i, j = 0, 1; t' > t), \quad (5.3.33)$$

где

$$P_1(t) = \alpha_0(t, 0) P_1(0); \quad (5.3.34)$$

$$P_0(t) = 1 - P_1(t); \quad (5.3.35)$$

$$P_{1||1}(t', t) = \alpha_0(t', t); \quad (5.3.36)$$

$$P_{1||0}(t', t) = 0; \quad (5.3.37)$$

$$P_{0||1}(t', t) = 1 - \alpha_0(t', t); \quad (5.3.38)$$

$$P_{0||0}(t', t) = 1; \quad (5.3.39)$$

$$\alpha_0(t', t) = e^{-\int_t^{t'} \mu(y) dy}. \quad (5.3.40)$$

Для элементарного процесса чистой гибели равенства (5.3.18) тоже выполняются, а его характеристики определяются по формулам (5.3.19) — (5.3.22).

Элементарные случайные процессы гибели и размножения $Y_k(t)$, входящие в разложение случайного процесса гибели и размножения $X(t)$ [см. (5.3.1)], могут иметь в общем случае самую различную структуру. Эти случайные функции $Y_k(t)$ могут быть зависимыми и независимыми, коррелированными и некоррелированными, одинаково и неодинаково распределенными.

Самым общим является случай, когда все элементарные случайные процессы гибели и размножения $Y_k(t)$ ($k=1, n$) имеют различные законы распределения и находятся в произвольных зависимостях между собой. Закон распределения каждого элементарного случайного процесса $Y_k(t)$ ($k=1, n$) определяется двумя функциями времени: интенсивностями потоков гибели и размножения $[\mu_k(t)$ и $\lambda_k(t)$]

Найдем характеристики случайной функции $X(t)$ в этом случае:

$$m_x(t) = \sum_{k=1}^n m_k^{(y)}(t), \quad (5.3.41)$$

$$D_x(t) = \sum_{k=1}^n D_k^{(y)}(t) + 2 \sum_{i < j} k_{i,j}^{(y)}(t, t); \quad (5.3.42)$$

$$\Gamma_x(t, t') = \sum_{k=1}^n \Gamma_{k,k}^{(y)}(t, t') + \sum_{i < j} \Gamma_{i,j}(t, t') + \sum_{i < j} \Gamma_{i,j}(t', t); \quad (5.3.43)$$

$$k_x(t, t') = \Gamma_x(t, t') - m_x(t) m_x(t'), \quad (5.3.44)$$

где

$$m_k^{(y)}(t) = M[Y_k(t)] \quad (k = \overline{1, n}); \quad (5.3.45)$$

$$D_k^{(y)}(t) = D[Y_k(t)] \quad (k = \overline{1, n}); \quad (5.3.46)$$

$$\Gamma_{i,j}^{(y)}(t, t') = M[Y_i(t) Y_j(t')] \quad (i, j = \overline{1, n}); \quad (5.3.47)$$

$$k_{i,j}^{(y)}(t, t') = \Gamma_{i,j}^{(y)}(t, t') - m_i^{(y)}(t) m_j^{(y)}(t'). \quad (5.3.48)$$

Разложение (5.3.1) будем называть *однородным*, если все элементарные случайные процессы гибели и размножения $Y_k(t)$ ($k=1, n$) распределены одинаково и совокупность любых двух случайных процессов $Y_i(t)$ и $Y_j(t)$ ($i, j = \overline{1, n}$) также имеет одинаковый закон распределения. В этом случае разложение (5.3.1) процесса гибели и размножения $X(t)$ будем называть *однородным разложением случайного процесса гибели и размножения*.

Если случайная функция $X(t)$ является однородным разложением случайного процесса гибели и размножения, то ее характеристика определяется следующим образом:

$$m_x(t) = n m_y(t); \quad (5.3.49)$$

$$D_x(t) = n D_y(t) + C_n^2 k_{yy}(t, t); \quad (5.3.50)$$

$$\Gamma_x(t, t') = n \Gamma_y(t, t') + C_n^2 \Gamma_{y,y}(t, t'); \quad (5.3.51)$$

$$k_x(t, t') = \Gamma_x(t, t') - m_x(t) m_x(t'); \quad (5.3.52)$$

где

$$m_y(t) = M[Y_k(t)] \quad (k = \overline{1, n}); \quad (5.3.53)$$

$$D_y(t) = D[Y_k(t)] \quad (k = \overline{1, n}); \quad (5.3.54)$$

$$\Gamma_y(t, t') = M[Y_k(t) Y_k(t')] \quad (k = \overline{1, n}); \quad (5.3.55)$$

$$\Gamma_{y,y}(t, t') = M[Y_i(t) Y_j(t')] \quad (i, j = \overline{1, n}; j \neq i); \quad (5.3.56)$$

$$k_{y,y}(t, t') = \Gamma_{y,y}(t, t') - m_y(t) m_y(t'). \quad (5.3.57)$$

Аппарат канонических разложений случайных функций, впервые введенный в практику решения различных вероятностных задач В. С. Пугачевым [41, 42], оказался очень плодотворным при исследовании процессов гибели и размножения. Поэтому, следуя определениям и формулировкам, предложенным В. С. Пугачевым в указанных выше работах, дадим определение каноническому разложению случайного процесса гибели и размножения.

Разложение (5.3.1) будем называть *каноническим разложением случайного процесса гибели и размножения*, если элементарные случайные процессы гибели и размножения $Y_k(t)$ являются *некоррелированными*.

В этом случае характеристики случайной функции $X(t)$ будут иметь следующий вид:

$$m_x(t) = \sum_{k=1}^n m_k^{(y)}(t); \quad (5.3.58)$$

$$D_x(t) = \sum_{k=1}^n D_k^{(y)}(t); \quad (5.3.59)$$

$$\Gamma_x(t, t) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{k, k}^{(y)}(t, t') + \sum_{i < j}^{(y)} m_i(t) m_j^{(y)}(t') + \sum_{i > j} m_i^{(y)}(t') m_j(t), \quad (5.3.60)$$

$$k_x(t, t') = \Gamma_x(t, t') - m_x(t) m_x(t'). \quad (5.3.61)$$

Разложение (5.3.1) будем называть *однородным каноническим разложением случайного процесса гибели и размножения*, если все элементарные случайные процессы гибели и размножения $Y_k(t)$ ($k=1, n$) распределены *одинаково* и являются *некоррелированными* в своей совокупности. В этом случае характеристики случайной функции $X(t)$ будут определяться по формулам:

$$m_x(t) = n m_y(t); \quad (5.3.62)$$

$$D_x(t) = n D_y(t); \quad (5.3.63)$$

$$k_x(t, t') = n k_{y, y}(t, t'); \quad (5.3.64)$$

$$\Gamma_x(t, t') = k_x(t, t') + m_x(t) m_x(t'). \quad (5.3.65)$$

Очевидно, что если случайные функции $Y_k(t)$ представляют собой совокупность независимых, одинаково распределенных элементарных случайных процессов гибели и размножения, то разложение (5.3.1) будет однородным каноническим разложением случайного процесса гибели и размножения.

Введем в рассмотрение векторную случайную функцию $\bar{Y}(t) = \{Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)\}$. Составляющими этой функции являются элементарные случайные процессы гибели и размножения. Если разложение (5.3.1) является однородным, то математическое ожидание векторной случайной функции $Y(t)$ представляет векторную неслучайную функцию с n одинаковыми составляющими, равными $m_y(t)$. Корреляционную функцию векторной случайной функции $\bar{Y}(t)$ можно записать в виде матрицы корреляционных функций и взаимных корреляци-

онных функций всех ее составляющих:

$$\begin{vmatrix} k_{y, y}(t, t') & k_{y, y}(t, t') & \dots & k_{y, y}(t, t') \\ k_{y, y}(t, t') & k_{y, y}(t, t') & \dots & k_{y, y}(t, t') \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{y, y}(t, t') & k_{y, y}(t, t') & \dots & k_{y, y}(t, t') \end{vmatrix}. \quad (5.3.66)$$

По главной диагонали этой матрицы стоят корреляционные функции отдельных составляющих векторной случайной функции $\bar{Y}(t)$, которые все равны между собой. (Эта матрица является симметрической, так как элементы этой матрицы, не стоящие на главной диагонали, представляют собой взаимные корреляционные функции отдельных составляющих векторной случайной функции $\bar{Y}(t)$, которые также равны между собой.)

Рассмотрим нормированную корреляционную функцию векторной случайной функции $Y(t)$, которую тоже можно записать в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} r_{y,y}(t, t') & r_{y,y}(t, t') & \dots & r_{y,y}(t, t') \\ r_{y,y}(t, t') & r_{y,y}(t, t') & \dots & r_{y,y}(t, t') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{y,y}(t, t') & r_{y,y}(t, t') & \dots & r_{y,y}(t, t') \end{pmatrix}. \quad (5.3.67)$$

Элементы этой матрицы определяются по формулам:

$$r_y(t, t') = k_y(t, t') / \sqrt{D_y(t) D_y(t')};$$

$$r_{u, u}(t, t') = k_{u, u}(t, t') / \sqrt{D_u(t) D_u(t')}.$$

При $t=t'$ эти формулы примут такой вид:

$$r_y(t, t) \equiv 1,$$

$$r_{y,y}(t, t) = k_{y,y}(t, t)/D_y(t).$$

Если разложение (5.3.1) является однородным каноническим разложением, то матрицы (5.3.66) и (5.3.67) превращаются в диагональные. При $t=t'$ матрица (5.3.67) превращается в единичную.

С точки зрения практического применения наибольшее значение имеют однородные (как канонические, так и неканонические) разложения случайных процессов гибели и размножения.

Выше было показано, как, зная характеристики элементарных случайных процессов гибели и размножения, можно найти характеристики разложений случайных процессов гибели и размножения.

При проведении практических исследований возникает другая задача в отношении случайной функции $X(t)$, являющейся *однородным* разложением случайного процесса гибели и размножения. Эта задача состоит в следующем.

Известен закон распределения элементарного случайного процесса гибели и размножения $Y_h(t)$, т. е. известны интенсивности потоков $\lambda_h(t) = \lambda(t)$ и $\mu_h(t) = \mu(t)$. Известны характеристики случайной функции $X(t): m_x(t), D_x(t)$ и $k_x(t, t')$. Необходимо найти корреляционные связи, которые существуют между отдельными элементарными случайными

процессами гибели и размножения $Y_i(t)$, $Y_j(t)$ ($i \neq j$), т. е. нужно найти корреляционную функцию

$$k_{y,y}(t, t') = M[\dot{Y}_i(t) \dot{Y}_j(t)] \quad (i \neq j).$$

Покажем, что эта задача имеет решение и при этом единственное. Из уравнения (5.3.50) находим

$$k_{y,y}(t, t') = \frac{D_y(t) - nD_y(t')}{Cn^2} = M[\dot{Y}_i(t) \dot{Y}_j(t)] \quad (i \neq j). \quad (5.3.68)$$

Ввиду того что закон распределения случайной функции $Y_k(t)$ нам известен, по формулам (5.3.19) — (5.3.22) можно определить характеристики этой случайной функции: $m_y(t)$, $D_y(t)$, $\Gamma_y(t, t')$.

Следовательно [см. 5.3.51), (5.3.52)],

$$\begin{aligned} \Gamma_{y,y}(t, t') &= M[Y_i(t) Y_j(t)] = \frac{\Gamma_x(t, t') - n\Gamma_y(t, t')}{C_n^2} = \\ &= \frac{k_x(t, t') + m_x(t) m_x(t') - n\Gamma_y(t, t')}{C_n^2} \quad (i \neq j). \end{aligned} \quad (5.3.69)$$

Корреляционная функция будет определяться из выражения

$$k_{y,y}(t, t') = \Gamma_{y,y}(t, t') - m_y(t) m_y(t'). \quad (5.3.70)$$

Таким образом, если известны характеристики элементарного процесса гибели и размножения $m_y(t)$, $D_y(t)$, $k_y(t, t')$ или $\Gamma_y(t, t')$, характеристики процесса гибели и размножения $m_x(t)$, $D_x(t)$, $k_x(t, t')$ [или $\Gamma_x(t, t')$] и известно, что процесс $X(t)$ представляет собой однородное разложение процесса гибели и размножения, то по формулам (5.3.68) — (5.3.70) можно определить корреляционные связи, существующие между отдельными элементарными процессами гибели и размножения.

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с выяснением марковских свойств случайной функции $X(t)$. Если случайную функцию $X(t)$ описывать состояниями $x_0=0$, $x_1=1, \dots, x_n=n$, то не для любого разложения (5.3.1) эта случайная функция будет представлять марковский случайный процесс. Случайная функция $X(t)$ является марковским случайным процессом с непрерывным временем и указанными выше состояниями, если она является однородным разложением случайного процесса гибели и размножения.

Покажем, что это так. Допустим, что в некоторый момент времени t процесс находился в состоянии $x_i[X(t)=x_i]$. Это означает, что ровно i элементарных процессов гибели и размножения $Y_k(t)$ ($k=1, n$) (из m рассматриваемых) находилось в состоянии y_i и $n-i$ элементарных процессов находилось в состоянии y_0 . При этом нас не интересует, какие именно элементарные процессы в каких состояниях находились. Таким образом, будущее развитие процесса для моментов $t' > t$ не зависит от того, как этот процесс развивался до момента времени t , а зависит лишь от состояния процесса $X(t)$ в момент времени t .

В случае, когда разложение (5.3.1) случайной функции $X(t)$ не является однородным, процесс $X(t)$ с состояниями $x_0=0$, $x_1=1, \dots, x_n=n$ не является марковским. Увеличивая число состояний, этот процесс также можно привести к марковскому.

В дальнейшем мы проанализируем только однородные разложения процессов гибели и размножения.

Найдем закон распределения случайной функции $X(t)$, которая может быть представлена в виде однородного канонического разложения процесса гибели и размножения. Дополнительно предположим, что элементарные случайные процессы $Y_k(t)$ ($k=\overline{1, n}$) являются независимыми.

Зафиксируем момент времени t и найдем одномерный закон распределения случайной функции $X(t)$, который будет биномиальным:

$$P[X(t) = k] = Cn^k [1 - p_1(t)]^{n-k} [p_1(t)]^k = P(Y_k(t) = y_1).$$

Известно, что при определенных условиях (локальная теорема Муавра — Лапласа [41]) биномиальный закон распределения сходится к нормальному. При решении практических задач можно считать, что эти условия выполняются, если

$$m_x(t) - 3\sqrt{D_x(t)} > 0 \quad (5.3.71)$$

или

$$m_x^2(t) < 9D_x(t).$$

Это неравенство можно переписать в виде [см. (5.3.19), (5.3.20), (5.3.62), (5.3.63)]

$$n^2 p_1^2(t) > 9n p_1(t) (1 - p_1(t)) \text{ или } n p_1(t) > 9(1 - p_1(t)),$$

откуда

$$p_1(t) > \left(1 + \frac{n}{9}\right)^{-1}.$$

С другой стороны, должно выполняться условие

$$m_x(t) + 3\sqrt{D_x(t)} < n. \quad (5.3.72)$$

Это условие эквивалентно тому, что $p_1(t) < \left(1 + \frac{9}{n}\right)^{-1}$.

Условия (5.3.71) и (5.3.72) можно объединить в одно:

$$\frac{1}{1 + n/9} < p_1(t) < \frac{1}{1 + 9/n}. \quad (5.3.73)$$

При проведении более грубых расчетов можно считать, что случайная функция $X(t)$ является нормальной, если выполняется условие

$$\frac{1}{(1 + n/4)} < p_1(t) < \frac{1}{(1 + 4/n)}. \quad (5.3.74)$$

Таким приближением пользуются многие иностранные специалисты [26].

Например, при $n=100$ границы для определения нормальности случайной функции $X(t)$ будут иметь вид $0,08 < p_1(t) < 0,92$ для формулы (5.3.73) и $0,04 < p_1(t) < 0,96$ для формулы (5.3.74).

Таким образом, случайную функцию $X(t)$ при достаточно большом n можно практически считать нормальной в широком диапазоне значений $p_1(t)$.

Рассмотрим теперь закон распределения случайной функции $X(t)$, представленной однородным разложением.

Введем в рассмотрение нормированную корреляционную функцию связи элементарных процессов гибели и размножения $Y_i(t)$ и $Y_j(t)$ ($i \neq j$) [см. (5.3.50), (5.3.56), (5.3.57)]

$$r_{y,y} = K_{y,y}(t, t')/D_y(t). \quad (5.3.75)$$

В этом случае условие, при котором обеспечивается практическая нормальность случайного процесса $X(t)$, выглядит следующим образом:

$$\left(1 + \frac{n}{9 + \frac{n-1}{2} r_{y,y}(t, t)}\right)^{-1} < p_1(t) < \left(1 + \frac{9 + \frac{n-1}{2} r_{y,y}(t, t)}{n}\right)^{-1}, \quad (5.3.76)$$

а более грубое приближение можно записать так:

$$\left(1 + \frac{n}{4 + \frac{n-1}{2} r_{y,y}(t, t)}\right)^{-1} < p_1(t) < \left(1 + \frac{4 + \frac{n-1}{2} r_{y,y}(t, t)}{n}\right)^{-1}. \quad (5.3.77)$$

В этом случае при $n=100$ и $r_{y,y}(t, t)=0,5$ получим условия $0,25 < p_1(t) < 0,75$, $0,22 < p_1(t) < 0,78$, которые соответствуют выражениям (5.3.76) и (5.3.77). Этот простой пример показывает, как сильно влияет корреляция элементарных случайных процессов на условия, при которых случайную функцию $X(t)$ можно практически считать нормальной.

Покажем, что элементарные процессы гибели и размножения тесно связаны с так называемым «белым шумом», а именно производная элементарного процесса гибели и размножения содержит белый шум. Широкое применение случайных процессов типа белого шума при решении прикладных задач обусловлено тем, что эти процессы играют роль элементарных в различных физических явлениях. Процессы, протекающие в сложных автоматизированных системах, проанализированы с помощью «белого шума» многими авторами [28, 55 и др]. Основопологающими работами в этой области являются труды В. С. Пугачева [39, 40, 41].

На основании этих трудов нестационарным белым шумом будем называть процесс, у которого корреляционная функция $K_x(t, t')$ имеет выражение

$$K_x(t, t') = \varphi(t) \delta(t-t'), \quad (5.3.78)$$

где $\delta(t-t')$ — известная дельта-функция.

Необходимо иметь в виду, что справедливы следующие равенства, вытекающие из свойств дельта-функций:

$$\varphi(t) \delta(t-t') = \varphi(t') \delta(t-t') = \sqrt{\varphi(t)\varphi(t')} \delta(t-t')^{1/2}.$$

Покажем, что производная элементарного процесса гибели и размножения содержит белый шум.

Рассмотрим сначала элементарный процесс чистого размножения. Для такого процесса [см. (5.3.23)] производная от случайной функции $Y(t)$ определяется по формуле

$$U(t) = dY(t)/dt = \delta(t-T). \quad (5.3.79)$$

¹⁾ Рассматривается арифметическое значение корня.

Так как операция дифференцирования является линейной однородной операцией, то

$$K_u(t, t') = (\partial^2 / \partial t \partial t') K_v(t, t'). \quad (5.3.80)$$

Найдем корреляционную функцию случайной функции $Y(t)$, для чего отыщем первый начальный момент

$$M[Y(t)Y(t')] = M[1(t-T)1(t'-T)]. \quad (5.3.81)$$

Обозначим функцию распределения случайной величины $T \sim F(\tau)$. Случайная величина T — это время пребывания в состоянии y_0 (см. гл. 3 к рис. 5.14). Тогда выражение (5.3.81) можно переписать в таком виде:

$$M[Y(t)Y(t')] = \int_0^\infty 1(t-\tau)1(t'-\tau)dF(\tau) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \int_0^t dF(\tau) = F(t) \quad (t' > t), \\ \int_0^{t'} dF(\tau) = F(t') \quad (t > t'), \end{array} \right\} = F(t)1(t'-t) + F(t')1(t-t'). \quad (5.3.82)$$

Следовательно,

$$K_v(t, t') = F(t)1(t'-t) + F(t')1(t-t') - F(t)F(t'), \quad (5.3.83)$$

где

$$F(t) = M[1(t-T)]. \quad (5.3.84)$$

Найдем первую частную производную выражения (5.3.83)

$$(d/dt')K_v(t, t') = F(t)\delta(t'-t) -$$

$$- F(t')\delta(t'-t) + f(t')(1(t-t') - F(t)), \quad (5.3.85)$$

где $f(t') = (d/dt')F(t')$ — плотности распределения случайной величины T , которая всегда существует, если пользоваться аппаратом обобщенных функций [40, 52].

Выражение

$$[F(t) - F(t')]\delta(t'-t) = 0. \quad (5.3.86)$$

Эта формула вытекает из свойств дельта-функций.

Продифференцируем выражения (5.3.85) с учетом равенства (5.3.86) еще раз по аргументу t :

$$K_u(t, t') = (d^2/dt dt')K_v(t, t') = f(t')[\delta(t-t') - f(t)]. \quad (5.3.87)$$

Таким образом, мы показали, что производная случайного процесса чистого размножения содержит белый шум.

Аналогичные выкладки могут быть проделаны и для случайного процесса чистой гибели.

Отметим следующий небезынтересный факт: если случайная функция равна дельта-функции от случайного и неслучайного аргумента [см. (5.3.79)] $v = \delta(t-T)$, то $K_u(t, t') = f(t')[\delta(t-t') - f(t)]$, а математическое ожидание этой случайной функции определяется из выражения

$$M[v(t)] = \int_0^\infty \delta(t-\tau)dF(\tau) = f(t). \quad (5.3.88)$$

Можно также показать, что производная элементарного случайного процесса гибели и размножения также содержит белый шум. В общем случае выкладки получаются достаточно громоздкими, однако для случая, когда $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$ и $\mu(t) = \mu = \text{const}$, они значительно упрощаются. В этом случае существует стационарный режим. В § 4.4 было показано, что для стационарного режима корреляционная функция элементарного случайного процесса гибели и размножения может быть записана в виде [см. (4.4.32)]

$$K_y(\tau) = [\lambda\mu/(\lambda + \mu)^2] e^{-(\lambda + \mu)|\tau|}.$$

Известно [45, 46], что корреляционная функция производной от стационарной случайной функции равна второй производной от корреляционной функции первообразной случайной функции, взятой с обратным знаком:

$$K_u(\tau) = -(\lambda\mu/(\mu + \lambda)^2) (d^2/d\tau^2) e^{-(\mu + \lambda)|\tau|}.$$

Для нахождения этой второй производной воспользуемся результатами, полученными в [11]:

$$d|\tau|/d\tau = \text{sign } \tau, \quad d^2|\tau|/d\tau = 2\delta(\tau),$$

где

$$\text{sign } \tau = \begin{cases} 1 (\tau > 0), \\ 0 (\tau = 0), \\ -1 (\tau < 0). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K_u(\tau) &= -\lambda\mu/(\lambda + \mu)^2 [-(\lambda + \mu) e^{-(\lambda + \mu)|\tau|} (d|\tau|/d\tau)^2 + \\ &+ e^{-(\lambda + \mu)|\tau|} d^2|\tau|/d\tau^2] (\lambda + \mu) = \lambda\mu/(\lambda + \mu) e^{-(\lambda + \mu)|\tau|} [2\delta(\tau) - \\ &-(\lambda + \mu)(\text{sign } \tau)^2] = \lambda\mu/(\lambda + \mu) e^{-(\lambda + \mu)|\tau|} [2\delta(\tau) - (\lambda + \mu)]. \end{aligned}$$

В данном случае $(\text{sign } \tau)^2$ можно считать тождественно равным единице, так как значение этой функции в точке $\tau=0$ пренебрежимо мало по сравнению со значением функции $2\delta(\tau)$ в той же точке.

Таким образом, производная элементарного случайного процесса гибели и размножения для стационарного случая тоже содержит в своем составе белый шум.

Известно [28, 41], что если случайная функция $v(t)$ получается в результате линейного преобразования случайной функции $Y(t): v(t) = L_t(Y(t))$, то можно найти такое «обратное» линейное преобразование $\bar{L}_t$, которое обладает свойством $\bar{L}_t(L_t(Y(t))) = Y(t)$, откуда $L_t(v(t)) = Y(t)$.

В нашем случае оператор L_t является оператором дифференцирования, следовательно, оператор $\bar{L}_t$ является оператором интегрирования.

Таким образом, элементарные процессы гибели и размножения можно получить путем линейного преобразования белого шума. Это дает возможность применять хорошо разработанные методы корреляционной теории статистической оптимизации [5, 41] при исследовании процессов гибели и размножения.

5.4. Разложение целочисленных случайных процессов

Проведем дальнейшее развитие положений и идей, изложенных в предыдущем параграфе.

При исследовании ряда практических задач мы чаще всего сталкиваемся с таким положением, когда элементарные процессы $Y_k(t)$ ($k=1, n$), из которых складывается случайная функция $X(t)$, не описываются процессом блуждания по двум состояниям y_0 и y_1 , как это было рассмотрено в § 5.3. В общем случае элементарный процесс $Y_k(t)$ ($k=1, n$) определяется марковским процессом блуждания по произвольному множеству состояний $Y=\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$.

Рассмотрим только случай, когда множество Y является одинаковым для любого элементарного процесса $Y_k(t)$.

На этом множестве состояний Y задается размеченный граф $G(Y)$, который полностью определяется матрицей интенсивностей $\|\lambda(t)\|$.

Процесс блуждания по состояниям множества Y определяется матрицей интенсивностей $\|\lambda(t)\|$ и матрицей-строкой начальных условий $\|p(0)\|$, которые также считаются одинаковыми для всех элементарных процессов $Y_k(t)$ ($k=1, n$).

Введем понятие элементарного целочисленного случайного процесса $Y(t)$. Рассмотрим некоторое подмножество состояний $Z \subset Y$, которое не является пустым и не равно всему множеству состояний Y . Будем считать случайный процесс $Y(t)=1$, если в момент времени t система находится в одном из состояний $y_i \in Z$, и процесс $Y(t)=0$, если в момент времени t система находится в одном из состояний $y_i \notin Z$. Случайный процесс $Y(t)$, определенный таким образом, будем называть *элементарным целочисленным случайным процессом*.

Реализация процесса $Y(t)$ представляет собой в общем случае скачкообразную случайную функцию, которая в любой момент времени t может иметь лишь два значения: 0 или 1 (см. рис. 5.12).

Моменты $T_1, T_2, \dots, T_i$ представляют собой последовательность моментов попадания процесса $Y(t)$ в подмножество состояний $Z \subset Y$, а моменты $T'_1, T'_2, \dots, T'_z$ представляют собой последовательность моментов попадания процесса $Y(t)$ в дополнение подмножества $Z \sim \bar{Z} = Y - Z$. Если элементарный процесс гибели и размножения был марковским процессом, то элементарный целочисленный случайный процесс в общем случае не является марковским. Элементарный случайный процесс гибели и размножения является частным случаем элементарного целочисленного случайного процесса, когда множество состояний Y сокращается до двух состояний.

Разложение $X(t)$ будем называть *однородным разложением целочисленного случайного процесса*

$$X(t) = \sum_{k=1}^n Y_k(t), \quad (5.4.1)$$

если его составляющие $Y_k(t)$ ($k=1, n$) представляют собой элементарные целочисленные случайные процессы с одинаковыми законами распределения и совокупность любых двух случайных процессов $Y_i(t)$ и $Y_j(t)$ ($i, j=1, n$) также имеет одинаковый закон распределения.

Разложение $X(t)$ будем называть *однородным каноническим разложением целочисленного случайного процесса*, если его составляющие $Y_k(t)$ ($k=1, n$) представляют собой некоррелированные элементарные

целочисленные случайные процессы с одинаковыми законами распределения.

Изучим закон распределения и характеристики элементарного целочисленного случайного процесса $Y(t)$, который полностью определяется матрицей интенсивностей $\|\lambda(t)\|$ и матрицей-строкой начальных условий $\|p(0)\|$, описывающими процесс блуждания по множеству состояний Y .

Закон распределения сечения случайной функции $Y(t)$ определяется следующим образом:

$$\pi_1(t) = P(Y(t) = 1) = \sum_{y_i \in Z} p_i(t), \quad (5.4.2)$$

где $p_i(t)$ представляет собой вероятность того, что в момент времени t процесс, описывающий блуждание по множеству состояний Y , находится в состоянии y_i , а суммирование распространяется только на те состояния y_i , которые принадлежат подмножеству Z . Вероятности $p_i(t)$ определяются путем интегрирования системы дифференциальных уравнений, определяемых графом $G(Y)$ (матрицей интенсивностей $\|\lambda(t)\|$) и начальными условиями, задаваемыми матрицей-строкой $\|p(0)\|$. Очевидно, что

$$\pi_0(t) = 1 - \pi_1(t). \quad (5.4.3)$$

Двумерный закон распределения случайной функции $Y(t)$ будем искать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{0,0}(t, t') &= P[(Y(t) = 0)(Y(t') = 0)] \\ \pi_{0,1}(t, t') &= P[(Y(t) = 0)(Y(t') = 1)] \\ \pi_{1,0}(t, t') &= P[(Y(t) = 1)(Y(t') = 0)] \\ \pi_{1,1}(t, t') &= P[(Y(t) = 1)(Y(t') = 1)] \end{aligned} \right\}. \quad (5.4.4)$$

Для определенности будем считать, что $t' > t$. Эти вероятности можно записать так:

$$\pi_{i,j}(t, t') = \pi_i(t) \pi_{j|i}(t', t) \quad (i, j = 0, 1), \quad (5.4.5)$$

где

$$\pi_{j|i}(t', t) = P(Y(t') = j | Y(t) = i) \quad (i, j = 0, 1). \quad (5.4.6)$$

Найдем указанные условные вероятности; их можно получить путем интегрирования на участке времени (t, t') дифференциальных уравнений, соответствующих графу $G(Y)$ и матрице интенсивностей $\|\lambda(t)\|$, при соответствующих начальных условиях на момент времени t . Начальные условия могут иметь различный вид. При определении вероятности $\pi_{j|0}(t', t)$ ($j=0, 1$) начальные условия на момент времени t определяются по формам

$$p_h^{(0)}(t) = p_h(t) / \sum_{y_h \in \bar{Z}} p_h(t), \quad (5.4.7)$$

где индекс h принадлежит тем состояниям y_h , которые принадлежат множеству $\bar{Z}$ ($y_h \in \bar{Z}$); $p_h(t)$ — безусловная вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии $p_h(t) \in \bar{Z}$, а индекс (0) указывает, что описываются начальные условия на момент времени t .

Нетрудно убедиться в том, что $\sum_{y_h \in \bar{Z}} p_h^{(0)}(t) = 1$, т. е. в момент време-

ни t система находится в одном из состояний $y_h \in \bar{Z}$.

В результате интегрирования на участке времени (t, t') системы дифференциальных уравнений, соответствующих графу $G(Y)$ (матрице интенсивностей $\|\lambda(t)\|$), при указанных выше начальных условиях (5.4.7) можно определить условные вероятности

$$p_{k|0}(t', t) \quad (k = \overline{0, m}). \quad (5.4.8)$$

Эти вероятности равны условным вероятностям попадания процесса блуждания в момент времени t' в состояние y_k ($k = \overline{0, m}$), вычисляемым при условии, что в момент времени $t < t'$ процесс находился в одном из состояний множества $\bar{Z}$.

Искомые вероятности $\pi_{j|0}(t', t)$ ($j = \overline{0, 1}$) определим по формулам:

$$\pi_{1|0}(t', t) = \sum_{y_k \in Z} p_{e|0}(t', t), \quad (5.4.9)$$

$$\pi_{0|0}(t', t) = 1 - \pi_{1|0}(t', t). \quad (5.4.10)$$

Аналогичным приемом воспользуемся для определения вероятностей $\pi_{j|1}(t', t)$ ($j = \overline{0, 1}$). Начальные условия на момент времени t в этом случае определяются по формуле

$$p_e^{(0)}(t) = p_e(t) \sum_{y_e \in Z} p_e(t). \quad (5.4.11)$$

Затем интегрируем на участке времени (t, t') систему дифференциальных уравнений, соответствующих графу $G(Y)$ (матрице интенсивностей $\|\lambda(t)\|$ при начальных условиях (5.3.11)), и определяем условные вероятности

$$p_{k|1}(t', t) \quad (k = \overline{0, m}), \quad (5.4.12)$$

а по ним находим искомые вероятности:

$$\pi_{1,1}(t', t) = \sum_{y_e \in Z} p_{e|1}(t', t), \quad (5.4.13)$$

$$\pi_{0,1}(t', t) = 1 - \pi_{1,1}(t', t). \quad (5.4.14)$$

Таким образом, совокупность формул (5.4.5) — (5.4.14) дает возможность определить двумерный закон распределения случайной функции $Y(t)$. Заметим, что в данном случае этот закон распределения не является исчерпывающей характеристикой случайной функции $Y(t)$.

Определим характеристики случайной функции $Y(t)$: $m_y(t)$, $D_y(t)$, $k_y(t, t')$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной функции $Y(t)$ будут определяться по формулам:

$$m_y(t) = \pi_1(t), \quad (5.4.15)$$

$$D_y(t) = \pi_1(t) (1 - \pi_1(t)). \quad (5.4.16)$$

Математическое ожидание произведения двух сечений случайной функции $Y(t)$ имеет следующий вид:

$$M[Y(t)Y(t')] = \pi_1(t)\pi_{1|1}(t', t), \quad (5.4.17)$$

откуда

$$k_y(t, t') = \pi_1(t) [\pi_{1|1}(t', t) - \pi_1(t')]. \quad (5.4.18)$$

Когда случайная функция $X(t)$ является однородным каноническим разложением целочисленного марковского случайного процесса, ее характеристики определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} m_x(t) &= nm_y(t), \\ D_x(t) &= nD_y(t), \\ k_x(t, t') &= nk_y(t, t') \end{aligned} \right\}. \quad (5.4.19)$$

Если случайная функция $X(t)$ является однородным разложением целочисленного марковского случайного процесса, то ее характеристики определяются по формулам, аналогичным (5.3.49) — (5.3.52) [см. (5.3.55) — (5.3.57)]:

$$\left. \begin{aligned} m_x(t) &= nm_y(t), \\ D_x(t) &= nD_y(t) + C_n^2 k_{y,y}(t, t'), \\ k_x(t, t') &= \Gamma_x(t, t') - m_x(t)m_x(t'), \\ \Gamma_x(t, t') &= n\Gamma_y(t, t') + C_n^2 \Gamma_{y,y}(t, t'), \end{aligned} \right\}. \quad (5.4.20)$$

Следует обратить внимание на тот факт, что формула для математического ожидания однородного целочисленного случайного процесса $X(t)$ не зависит от того, является ли этот процесс каноническим или нет.

Рассмотрим более сложный случай, когда среди множества состояний Y выделяются два произвольных подмножества Z_1 и Z_2 . Между этими двумя подмножествами могут существовать различные соотношения.

$$1. Z_1 \cup Z_2 = \emptyset, \quad (5.4.21)$$

т. е. подмножества Z_1 и Z_2 не имеют общих состояний (не пересекаются).

$$2. \left. \begin{aligned} Z_1 \cup Z_2 &\neq \emptyset \\ Z_1 &\not\subset Z_2 \\ Z_2 &\not\subset Z_1 \end{aligned} \right\}, \quad (5.4.22)$$

т. е. подмножества Z_1 и Z_2 имеют общие состояния (пересекаются), но ни одно из них не включает полностью другое.

$$3. \left. \begin{aligned} Z_1 \cup Z_2 &\neq \emptyset \\ Z_1 &\subset Z_2 \\ Z_2 &\not\subset Z_1 \end{aligned} \right\}, \quad (5.4.23)$$

т. е. подмножества Z_1 и Z_2 пересекаются и второе полностью включает в себя первое.

$$4. \left. \begin{aligned} Z_1 \cup Z_2 &\neq \emptyset \\ Z_2 &\subset Z_1, \\ Z_1 &\not\subset Z_2. \end{aligned} \right\}$$

Случай аналогичен третьему.

Все эти случаи схематически изображены на рис. 5.16—5.19.

С точки зрения анализа случаи 3 и 4 адекватны, поэтому ограничимся изучением только трех случаев.

Введем в рассмотрение случайную функцию $Y_{z_1, k}(t)$, которую определим следующим образом:

$Y_{z_1, k}(t) = 1$, если в момент времени t k -я единица (из всех n рассматриваемых) находится в одном из состояний подмножества Z_1 ;

$Y_{z_1, k}(t) = 0$, если в момент времени t k -я единица не находится ни в одном из состояний подмножества Z_1 .

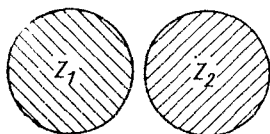


Рис. 5.16.

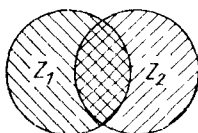


Рис. 5.17.

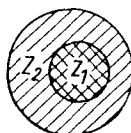


Рис. 5.18.

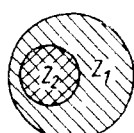


Рис. 5.19.

Таким образом, случайная функция $Y_{z_1, k}(t)$ представляет собой элементарный целочисленный случайный процесс.

Аналогично вводится элементарный целочисленный процесс $Y_{z_2, k}(t)$.

Рассмотрим случайные функции:

$$X^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^n Y_{z_1, k}(t), \quad (5.4.24)$$

$$X^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^n Y_{z_2, k}(t), \quad (5.4.25)$$

которые представляют собой однородные разложения целочисленных случайных процессов.

Для каждой из случайных функций $X^{(1)}(t)$ и $X^{(2)}(t)$ было показано, как находить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию в различных случаях.

Определим способ отыскания взаимной корреляционной функции двух случайных функций $X^{(1)}(t)$ и $X^{(2)}(t)$:

$$R_x^{(1, 2)}(t, t') = M [X^{(1)}(t) X^{(2)}(t')]. \quad (5.4.26)$$

Рассмотрим случай, когда разложения (5.4.24) и (5.4.25) являются однородными каноническими разложениями целочисленных случайных процессов и все элементарные процессы

$$Y_{z_1, k}(t) (k = \overline{1, n}) \text{ и } Y_{z_2, l}(t) (l = \overline{1, n})$$

являются независимыми в своей совокупности.

По определению имеем

$$\begin{aligned} M [\dot{X}^{(1)}(t) \dot{X}^{(2)}(t')] &= M \left[\left(\sum_{k=1}^n \dot{Y}_{z_1, k}(t) \right) \left(\sum_{l=1}^n \dot{Y}_{z_2, l}(t') \right) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n M [\dot{Y}_{z_1, k}(t) \dot{Y}_{z_2, k}(t')] = \sum_{k=1}^n (M [Y_{z_1, k}(t) Y_{z_2, k}(t')] - \\ &\quad - Y_{z_1, k}(t) Y_{z_2, k}(t')) = M [Y_{z_1, k}(t)] M [Y_{z_2, k}(t')]. \end{aligned} \quad (5.4.27)$$

Обозначим

$$M [Y_{z_1, k}(t)] = \pi_{z_1}(t) \quad (5.4.28)$$

— вероятность того, что единица процесса $X(t)$ в момент времени t находится в одном из состояний множества Z_1 . Соответственно

$$M[Y_{z_1, k}(t')] = \pi_{z_2}(t'). \quad (5.4.29)$$

В первом случае (см. рис. 5.16) произведение функций

$$Y_{z_1, k}(t) Y_{z_1, k}(t') = 1 \quad (5.4.30)$$

тогда, когда в момент времени t k -я единица находилась в одном из состояний множества Z_1 и в момент времени $t' > t$ эта единица попадет в одно из состояний множества Z_2 . Обозначим вероятность события (5.4.30) так:

$$p(Y_{z_1, k}(t) Y_{z_1, k}(t')) = \pi_{z_1}(t) \pi_{z_2|z_1}(t', t). \quad (5.4.31)$$

Вероятность $\pi_{z_2|z_1}(t', t)$ определяется путем интегрирования системы дифференциальных уравнений, определяемой матрицей интенсивностей $\|\lambda(t)\|$. Начальные условия для интегрирования на момент времени t определяются аналогично тому, как это делалось выше [см. (5.4.7), (5.4.11)]:

$$p_h^{(0)}(t) = p_h(t) \Big/ \sum_{y_h \in Z_1} p_h(t), \quad (5.4.32)$$

где $p_h(t)$ — вероятность того, что единица (любая) в момент времени t будет находиться в состоянии $y_h \in Z_1$, а суммирование распространяется только на состояние $y_h \in Z_1$.

Интегрирование оканчивается в момент времени $t' > t$, а вероятность (5.4.31) определяется как вероятность пребывания единицы в одном из состояний $y_h \in Z_2$.

Следовательно,

$$R_x^{(1, 2)}(t, t') = n \pi_{z_1}(t) [\pi_{z_2|z_1}(t', t) - \pi_{z_1}(t)]. \quad (5.4.33)$$

Формулы (5.4.24) — (5.4.33) справедливы для всех рассмотренных случаев при $t' \neq t$. Имеется небольшая особенность при $t = t'$. Для первого случая

$$R_x^{(1, 2)}(t, t') = n \pi_{z_1}(t) \pi_{z_2}(t), \quad (5.4.34)$$

так как

$$\pi_{z_2|z_1}(t, t) \equiv 0.$$

Для второго случая

$$\pi_{z_2|z_1}(t, t) = \sum_{y_1} p_l(t) \Big/ \sum_{y_h \in Z_1} p_h(t), \quad (5.4.35)$$

где сумма $\sum p_l(t)$ распространяется на состояния

$$y_l \in Z_1 \cap Z_2, \text{ а сумма } \sum_{y_h \in Z_1} p_h(t) -$$

на состояния $y_h \in Z_1$.

Для третьего случая

$$\pi_{z_2|z_1}(t', t) \equiv 1. \quad (5.4.36)$$

Для четвертого случая

$$\pi_{z_2|z_1}(t', t) = \sum_{y_1 \in Z_2} p_l(t) \Big/ \sum_{y_h \in Z_1} p_h(t), \quad (5.4.37)$$

где сумма $\sum_{y_l \in Z_2} p_l(t)$ распространяется на состояние $y_l \in Z_1 \cap Z_2 = Z_2$, а сумма $\sum_{y_h \in Z_1} p_h(t)$ — на состояние $y_h \in Z_1$.

Найдем взаимную корреляционную функцию $R_x^{(1,2)}(t, t')$ для случая, когда разложения являются однородными разложениями целочисленных случайных процессов. При этом будем считать известными корреляционные функции

$$K_{z_1, z_2}(t, t') = M [\dot{Y}_{z_1, k}^{\circ}(t) \dot{Y}_{z_2, l}^{\circ}(t')] \quad (k, l = \overline{1, n}; k \neq l). \quad (5.4.38)$$

В этом случае выражение (5.4.27) примет такой вид [см. (5.4.33) и (5.4.38)]:

$$R_x^{(1, 2)}(t, t') = M [\dot{X}^{(1)}(t) \dot{X}^{(2)}(t')] = n \pi_{z_1}(t) (\pi_{z_2|z_1}(t', t) - \pi_{z_2}(t')) + 2C_n^2 K_{z_1, z_2}(t, t'). \quad (5.4.39)$$

Пример 5.4.1. Рассматривается случайный процесс накопления однородного информационного массива в ЭВМ системы управления предприятием. Интенсивность простейшего потока событий поступлений документов в массив равна λ , каждый из документов сохраняется в массиве независимо от других случайное время, распределенное по обобщенному закону Эрланга 2-го порядка с параметрами μ_1 и μ_2 . Требуется найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса накопления однородного информационного массива для стационарного режима, считая, что размер массива ограничен числом n .

Решение. Случайный процесс накопления однородного информационного массива $X(t)$ можно представить в виде однородного канонического разложения целочисленного случайного процесса

$$X(t) = \sum_{k=1}^n Y_k(t),$$

где $Y_k(t)$ — элементарный целочисленный случайный процесс, определяемый размеченным графом, изображенным на рис. 5.20,

$$Y_k(t) = \begin{cases} +1, & \text{если процесс находится в состояниях } y_1 \text{ или } y_2; \\ 0, & \text{если процесс находится в состоянии } y_0. \end{cases}$$

Решая систему алгебраических уравнений, соответствующих размеченному графу состояний, изображенному на рис. 5.20 (для стационарного режима), получим

$$P[(Y_k(t) = y_1) + (Y_k(t) = y_2)] = \frac{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}}{1 + \frac{\mu_1 n}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2}};$$

$$P[Y_k(t) = y_0] = \frac{\frac{n\mu_1}{\lambda}}{1 + \frac{\mu_1 n}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2}}.$$

Следовательно,

$$m_x(n) = n \frac{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}}{1 + \frac{\mu_1 n}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2}} = \frac{\lambda}{\mu_1} \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{n\mu_1} + \frac{\lambda}{n\mu_2}};$$

$$D_x(n) = n \frac{\left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \frac{n\mu_1}{\lambda}}{\left(1 + \frac{\mu_1 n}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2} = \frac{\lambda}{\mu_1} \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n\mu_1} + \frac{\lambda}{n\mu_2}\right)^2}.$$

При неограниченном фонде информационного массива ($n \rightarrow \infty$) получим следующие результаты:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_x(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_x(n) = \lambda/\mu_1 (1 + \mu_1/\mu_2).$$

Если вместо закона Эрланга рассматривается показательный закон с параметром μ_1 , то получим следующий результат (полагая $\mu_2 \rightarrow \infty$):

$$m_x(n) = \lambda/\mu_1 \cdot \frac{1}{1 + \lambda/n\mu_1};$$

$$D_x(n) = \lambda/\mu_1 \cdot \frac{1}{(1 + \lambda/n\mu_1)^2}.$$

При неограниченном фонде информационного массива ($n \rightarrow \infty$) получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_x(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_x(n) = \lambda/\mu_1.$$

Последний результат соответствует процессу гибели и размножения, рассмотренному в § 4.2 [см. (4.2.24)].

5.5. Метод динамики средних. Уравнения для математических ожиданий, дисперсий и корреляционных функций отдельных составляющих, являющихся однородными разложениями процессов гибели и размножения

Метод динамики средних берет свое начало от известных уравнений Ланчестера, предложенных им в 1915 г. Однако до появления трудов И. Я. Динера и особенно трудов Е. С. Вентцель [9, 10] эти уравнения записывались без какого-либо обоснования, без указания на ту математическую и вероятностную модель, которой соответствуют эти уравнения. Зачастую такое пренебрежение к определению условий адекватности модели определенному физическому явлению встречается и до сих пор, особенно в работах американских авторов [2, 37 и др.].

Большое теоретическое и практическое значение имеют фундаментальные труды Е. С. Вентцель и ее учеников. Благодаря этим трудам метод динамики средних нашел широкое распространение при решении значительного круга прикладных задач.

В настоящее время во многих организациях, в которых исследуется процесс функционирования сложных систем, широко пользуются этим методом для исследования динамики изменения математических ожиданий различных случайных процессов, поэтому и сам метод назван Е. С. Вентцель «методом динамики средних».

Однако до сих пор не нашли широкого применения методы определения дисперсий и корреляционных функций исследуемых случайных процессов. В литературе известно лишь несколько случаев исследования дисперсий и корреляционных функций [10]. В работе [10] составлены уравнения для математических ожиданий, дисперсий и корреляционной

функции процесса боевых действий для так называемой модели А. В этой модели в качестве элементарного процесса рассматривается элементарный процесс чистой гибели. Имеются также и другие работы, однако они в определенной степени повторяют работу [10], хотя и в несколько ином плане.

В настоящем параграфе проведено дальнейшее развитие метода динамики средних, уточнены допущения, положенные в его основу, дан алгоритм составления уравнений для математических ожиданий, дисперсий и корреляционных функций отдельных составляющих, справедливый для любых моделей. При этом широко использованы методы анализа целочисленных случайных процессов, представленных своими однородными разложениями.

Метод динамики средних описывает динамику изменений математических ожиданий случайных функций $X_1(t), \dots, X_m(t)$. Каждая из этих случайных функций представляет собой однородное разложение целочисленного случайного процесса. Все эти случайные функции находятся в определенной зависимости между собой. Таким образом, метод динамики средних представляет собой метод отыскания математического ожидания векторной случайной функции $X(t)$, составляющие которой являются однородными разложениями целочисленных случайных процессов.

Следовательно, *первым допущением*, положенным в основу метода динамики средних, является допущение о том, что каждая составляющая $X_i(t)$ представляет собой однородное разложение целочисленного случайного процесса. Это означает, что элементарные целочисленные случайные процессы, из которых складывается процесс $X_i(t)$, описываются с помощью марковского процесса блуждания по некоторому множеству состояний $Y^{(i)}$, одинаковому для всех элементарных целочисленных случайных процессов, из которых складывается случайная функция $X_i(t)$.

Таким образом, первое допущение состоит в том, что каждый целочисленный случайный процесс $X_i(t)$ распадается на n_i элементарных целочисленных, одинаково распределенных случайных процессов

$Y_j^{(i)}(t) \ (j = \overline{1, n_i})$:

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^{n_i} Y_j^{(i)}(t), \quad (5.5.1)$$

где $Y_j^{(i)}(t)$ — элементарный целочисленный случайный процесс, описываемый с помощью марковского процесса блуждания j -й единицы по множеству состояний $Y = \{y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_{m_i}^{(i)}\}$, ребра которого определяются матрицей интенсивностей $\|\lambda^{(i)}(t)\|$.

Подробное исследование всех характеристик таких процессов дано в предыдущем параграфе.

Первое допущение эквивалентно тому, что целочисленный случайный процесс $X_i(t)$ представляет собой процесс в общем случае коррелированных блужданий n_i однородных единиц по своим состояниям, составляющим множество $Y^{(i)}$. Блуждание каждой единицы по множеству состояний $Y^{(i)} = \{y_0^{(i)}, \dots, y_{m_i}^{(i)}\}$ представляет собой марковский случайный процесс с непрерывным временем и дискретным числом состояний, который полностью определяется квадратной матрицей интенсивностей $\|\lambda^{(i)}(t)\|$ и матрицей-столбцом начальных условий $\|p^{(i)}(0)\|$.

Для всех n единиц, составляющих процесс гибели $X_i(t)$, все параметры процесса блуждания: множество состояний $Y^{(i)}$, квадратная матрица интенсивностей $\|\lambda^{(i)}(t)\|$ и матрица-столбец начальных условий $\|p^{(i)}(t)\|$ — одинаковы.

На первый взгляд, это допущение может показаться весьма жестким. На самом деле это не так. Всегда можно выделить единицы, которые практически ведут себя *статистически* одинаково. Это вовсе не означает, что они ведут себя в точности одинаково, а лишь значит, что все единицы имеют одинаковый вероятностный закон поведения.

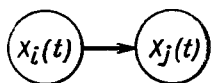


Рис. 5.21.

Здесь уместно отметить еще раз, что уравнения для характеристик изолированного (независимого) случайного процесса $X_i(t)$: $m_i(t)$, $D_i(t)$ и $k_i(t, t')$ — являются точными, справедливыми для любого целого $n_i > 0$. Во всех предшествовавших работах делалось допущение о том, что выражение для математического ожидания $m_i(t)$ является приближенным и его точность увеличивается по мере увеличения числа составляющих его процесса n_i . Проведенные многочисленные моделирования таких процессов методом Монте-Карло тоже подтверждают вывод о том, что уравнения для определения $m_i(t)$, $D_i(t)$ и $k_i(t, t')$ (для независимых случайных процессов) являются точными.

Первое допущение о марковости случайного процесса блуждания единицы по множеству состояний $Y^{(i)}$ также не является жестким. Это утверждение основывается на том, что путем обогащения множества состояний $Y^{(i)}$ можно конструировать такие подмножества в пределах этого множества, закон распределения времени пребывания в которых будет изменяться в весьма широких пределах (см. гл. 3). Однако нужно иметь в виду, что увеличение числа состояний множества $Y^{(i)}$ приводит к тому, что увеличивается число уравнений. Это обстоятельство иногда является решающим при рассмотрении практических задач, если число $m_i^{(i)}$ составляющих векторной случайной функции $X_i(t)$ достаточно велико.

К тому же введение более сложных законов распределения времени пребывания в подмножестве состояний зачастую не приводит к сколько-нибудь значительному изменению выходных параметров и точности решения задачи в целом.

Следующая группа допущений касается порядка взаимодействия двух целочисленных случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ между собой. Другими словами, это допущение должно указывать на то, каким образом определяются элементы матрицы интенсивностей $\|\lambda^{(i)}(t)\|$ и $\|\lambda^{(j)}(t)\|$, если процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$ зависимы.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда множество состояний $Y^{(i)}$ и $Y^{(j)}$ состоит каждое из двух:

$$Y^{(i)} = \{y_0^{(i)}, y_1^{(i)}\}; \quad Y^{(j)} = \{y_0^{(j)}, y_1^{(j)}\}.$$

Размеченные графы состояний для этого случая показаны на рис. 5.22 и 5.23 соответственно. Таким образом, случайные функции $Y_k^{(i)}(t)$ ($k = \overline{1, n_i}$) и $Y_l^{(j)}(t)$ ($l = \overline{1, n_j}$) являются элементарными процессами гибели и размножения, а процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$ представляют собой однородные разложения процессов гибели и размножения.

Исследуем вначале случай, когда процесс $X_i(t)$ является управляющим, а процесс $X_j(t)$ — управляемым (рис. 5.21).

Обычно управление процессом $X_j(t)$ со стороны процесса $X_i(t)$ состоит либо в том, что процесс $X_j(t)$ «возрождается» под воздействием процесса $X_i(t)$, либо в том, что процесс $X_j(t)$ «гибнет» под воздействием процесса $X_i(t)$.

Условимся считать, что единица, находящаяся в состоянии $y_1^{(i)}$, „жива“, а в состоянии $y_0^{(i)}$ — „погибла“. Аналогичные состояния будем считать и для процесса $X_i(t)$.

Рассмотрим случай, когда управление процессом $X_j(t)$ сводится только к «гибели» («поражению») его единиц.

Обычно поражение единиц процесса $X_j(t)$ могут осуществлять только живые единицы процесса $X_i(t)$, число которых в момент времени t равно $X_i(t)$. Пусть условная интенсивность общего потока событий, приводящего к «гибели» единиц процесса $X_j(t)$, равна

$$\varphi_i(X_i(t)), \quad (5.5.2)$$

т. е. некоторой функции (или функционалу) случайной функции $X_i(t)$. В соответствии с равенством (5.5.1) выражение (5.5.2) можно переписать так:

$$\varphi_i(X_i(t)) = \varphi_i \left[\sum_{h=1}^{n_i} Y_h^{(i)}(t) \right]. \quad (5.5.3)$$

Если преобразование (5.5.2) представляет собой либо линейную функцию, либо линейный функционал, то выражение (5.5.3) примет вид

$$\varphi_i(X_i(t)) = \sum_{j=1}^n \varphi_i [Y_j^{(i)}(t)]. \quad (5.5.4)$$

Этот общий поток событий, приводящий к «гибели» единиц процесса $X_j(t)$, должен статистически равномерно распределяться между единицами этого процесса. Данное положение следует из того, что единицы, составляющие процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$, ведут себя статистически однородно. Распределение в общем случае зависит от того, в каком состоянии находится сам процесс $X_j(t)$. Таким образом, интенсивность (5.5.2) должна быть преобразована, и это преобразование зависит от того, в каком состоянии находится процесс $X_j(t)$. Это преобразование запишем в таком виде:

$$\Psi_{X_j(t)}[\varphi_i(X_i(t))]. \quad (5.5.5)$$

Например, если поток гибели единиц распределяется равномерно только между «живыми» единицами процесса $X_j(t)$, то выражение (5.5.5) примет вид

$$\Psi_{X_j(t)}[\varphi_i(X_i(t))] = \varphi_i[X_i(t)]/X_j(t)[X_j(t) > 0]. \quad (5.5.6)$$

Выражение (5.5.6) справедливо для случая, когда $X_j(t) > 0$, при $X_j(t) = 0$ это выражение должно быть равно нулю. Условно это запишем так:

$$\Psi_{X_j(t)}[\varphi_i(X_i(t))] = \varphi_i[X_i(t)]I[X_j(t)]/X_j(t). \quad (5.5.7)$$

Считая, что

$$I[X_j(t)]/X_j(t) = 0 \quad (5.5.8)$$

при

$$X_j(t) = 0. \quad (5.5.9)$$

Если поток гибели единиц распределяется равномерно между всеми единицами процесса $X_j(t)$ (как «живыми», так и «мертвыми»), то выражение (5.5.5) примет такой вид:

$$\Psi X_j(t)[\varphi_i(X_i(t))] = \varphi_i[X_i(t)]/n_j. \quad (5.5.10)$$

Могут быть и другие, более сложные случаи.

Таким образом, интенсивность потока «гибели» каждой из единиц, из которых складывается случайный процесс $X_j(t)$, за счет воздействия единиц, составляющих случайный процесс $X_i(t)$, будет определяться по формуле

$$\begin{aligned} \mu_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) &= M[\Psi_{X_j(t)}(\varphi_i(X_i(t)))] = \\ &= \sum_i \sum_j \Psi_{x_j}[\varphi_i(x_i)] p_{i,j}(t), \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

где

$$p_{i,j}(t) = p[(X_i(t) = x_i) (X_j(t) = x_j)]. \quad (5.5.12)$$

— одномерный закон распределения векторной случайной функции с двумя составляющими: $X_i(t)$ и $X_j(t)$. Выражение (5.5.11) справедливо, если преобразования (5.5.2) и (5.5.5) являются функциями. В случае, когда преобразования (5.5.2) и (5.5.5) являются функционалами, обычно требуется знание закона распределения векторной случайной функции.

Единицы, составляющие процесс $X_j(t)$, могут гибнуть не только за счет поражения их единицами, составляющими процесс $X_i(t)$, но и «сами по себе» (например, за счет поломок, аварий, износа). Интенсивность потока событий, определяющего выход единиц, составляющих процесс $X_j(t)$ за счет функционирования этих единиц, обозначим

$$\mu_{X_j(t)}(t) \quad (5.5.13)$$

и будем считать, что этот поток событий независим от потока событий, интенсивность которого определяется из (5.5.11).

Следовательно, на основании теоремы сложения потоков общая интенсивность потока гибели каждой единицы, составляющей процесс $X_j(t)$, будет определяться по формуле

$$\mu_j(t) = \mu_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) + \mu_{X_j(t)}(t). \quad (5.5.14)$$

Рассмотрим часто встречающийся в практике случай, когда преобразование (5.5.2) является линейной функцией, а преобразование (5.5.5) имеет вид, представленный формулой (5.5.7). В этом случае выражение (5.5.4) можно переписать в таком виде:

$$\begin{aligned} \varphi_i[X_i(t)] &= \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_i[Y_j^{(i)}(t)] = \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} a_i Y_j^{(i)}(t) + b_i = a_i X_i(t) + b_i. \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

Параметры a_i и b_i в общем случае являются известными функциями времени.

Следовательно, интенсивность (5.5.11) в рассматриваемом случае будет выражаться формулой

$$\begin{aligned} \mu_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) &= M[(a_i X_i(t) + b_i) 1_{X_j(t)} / X_j(t)] = \\ &= a_i M[X_i(t) 1_{X_j(t)} / X_j(t)] + b_i M[1_{X_j(t)} / X_j(t)]. \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

Проведенные расчеты показывают, что для неотрицательной целочисленной случайной величины $X_j(t)$ можно предложить следующее приближение:

$$M[1_{X_j(t)} / X_j(t)] \approx 1/M[X_j(t)], \quad (5.5.17)$$

которое дает вполне удовлетворительный по точности результат, если величина $M[X_j(t)]$ не очень мала.

Покажем справедливость этого утверждения, когда случайная величина $X_j(t)$ имеет: 1) равномерное распределение в пределах всех ее возможных значений $0, n_j$; 2) биномиальное распределение с параметрами n_j и p ; 3) распределение Пуассона с параметром a .

Исследуем первый случай. Тогда

$$M[1_{X_j(t)} / X_j(t)] = \varphi(n_j) / (n_j + 1), \quad (5.5.18)$$

где $\varphi(n_j) = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{i}$ — усеченная сумма гармонического ряда, а

$$M[X_j(t)] = n_j/2. \quad (5.5.19)$$

Найдем величину Δ — погрешность приближения (5.5.17) для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned} \Delta &= M[1_{X_j(t)} / X_j(t)] - 1/M[X_j(t)] = \\ &= \varphi(n_j) / (n_j + 1) - 2/n_j. \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

Расчеты показывают, что при $n_j > 3$ погрешность мала и не превышает нескольких сотых. С ростом величины n_j она монотонно убывает.

Рассмотрим второй случай, когда случайная величина $X_j(t)$ распределена по биномиальному закону с параметрами $p = 1 - q$ и n_j . В этом случае погрешность приближения Δ будет определяться по формуле

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{C n_j^i p^i q^{n_j-i}}{i} - 1/p n_j. \quad (5.5.21)$$

Расчеты, проведенные по этой формуле, показывают, что при $p n_j > 3$ погрешность приближения Δ также мала.

Наконец, в третьем случае, когда случайная величина $X_j(t)$ подчинена закону Пуассона с параметром a , получим следующее выражение для погрешности приближения:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cdot e^{-a} / k \cdot k! - 1/a. \quad (5.5.22)$$

Обозначим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k / k \cdot k! = \chi(a). \quad (5.5.23)$$

Тогда

$$d\chi(a)/da = \frac{e^{2a} - e^a}{a}, \quad (5.5.24)$$

откуда

$$\chi(a) = E_i(2a) - E_i(a), \quad (5.5.25)$$

где

$$E_i(x) = e^x \int_0^1 dt / (x + \ln t) \quad (x > 0) \quad (5.5.26)$$

— известная интегральная показательная функция [17]. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\Delta = e^{-a} E_i(2a) - e^{-a} E_i(a) - 1/a. \quad (5.5.27)$$

Расчеты, проведенные по этой формуле, показали, что и в этом случае при $a > 3$ приближение (5.5.17) является вполне удовлетворительным.

Рассмотрим теперь выражение

$$M \left[\frac{X_i(t) 1[X_j(t)]}{X_j(t)} \right].$$

Исследуем случай, когда величина $X_j(t)$ достаточно велика, чтобы можно было рассматривать приближенное равенство

$$M \left[\frac{X_i(t) 1[X_j(t)]}{X_j(t)} \right] \approx M \left[\frac{X_i(t)}{X_j(t)} \right]. \quad (5.5.28)$$

Равенство (5.5.28) справедливо для тех случаев, когда $X_j(t) > 0$. Вероятность такого события обозначим $1 - p_0^{(i)}(t)$. Следовательно, приближение (5.5.28) справедливо, если вероятность $p_0^{(i)}(t)$ мала.

Покажем, что математическое ожидание отношения $X_i(t)/X_j(t)$ приближенно равно отношению математических ожиданий

$$M[X_i(t)]/M[X_j(t)].$$

Для этого рассмотрим сначала систему, состоящую из зависимых, положительных, одинаково распределенных случайных величин $X_1, \dots, X_n$. Докажем справедливость следующей формулы:

$$M \left[\sum_{i=1}^k X_i / \sum_{j=1}^n X_j \right] = M \left[\sum_{i=1}^k X_i \right] / M \left[\sum_{j=1}^n X_j \right], \quad (5.5.29)$$

т. е. что математическое ожидание отношения частичной суммы рассматриваемых случайных величин к полной сумме этих же случайных величин равно отношению математических ожиданий частичной суммы случайных величин к математическому ожиданию полной суммы этих случайных величин.

По теореме сложения математических ожиданий имеем

$$M \left[\sum_{i=1}^k X_i / \sum_{j=1}^n X_j \right] = \sum_{i=1}^k M \left[X_i / \sum_{j=1}^n X_j \right]. \quad (5.5.30)$$

Так как все случайные величины X_i ($i = \overline{1, n}$) распределены одинаково, то

$$M \left[X_i \left/ \sum_{j=1}^n X_j \right. \right] = \alpha \quad (i = \overline{1, n}). \quad (5.5.31)$$

С другой стороны,

$$M \left[\sum_{i=1}^n X_i \left/ \sum_{j=1}^n X_j \right. \right] = n\alpha = 1, \quad (5.5.32)$$

откуда

$$\alpha = 1/n. \quad (5.5.33)$$

Следовательно,

$$M \left[\sum_{i=1}^k X_i \left/ \sum_{j=1}^n X_j \right. \right] = km_x/nm_x = k/n, \quad (5.5.34)$$

$$\text{где } m_x = M[X_i]. \quad (5.5.35)$$

Формула (5.5.29) доказана. Аналогичное доказательство для случая, когда случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы, приведено в [11].

Выражение (5.5.31) можно переписать в таком виде [см. (5.5.35)]:

$$\begin{aligned} M \left[X_i \left/ \sum_{j=1}^n X_j \right. \right] &= M[X_i] M \left[1 \left/ \sum_{j=1}^n X_j \right. \right] + \\ &+ K_{X_i, \frac{1/n}{\sum_{j=1}^n X_j}} = m_x M \left[1 \left/ \sum_{j=1}^n X_j \right. \right] + K_{X_i, \frac{1/n}{\sum_{j=1}^n X_j}} = \alpha, \end{aligned}$$

откуда

$$K_{X_i, \frac{1/n}{\sum_{j=1}^n X_j}} = \alpha - m_x M \left[1 \left/ \sum_{j=1}^n X_j \right. \right]. \quad (5.5.36)$$

Напомним еще раз, что мы рассматриваем случай, когда $\sum_{j=1}^n X_j > 0$.

Выше было показано, что если математическое ожидание некоторой случайной величины достаточно велико, то выполняется приближенное равенство (5.5.17).

Следовательно [см. (5.5.33)]

$$K_{X_i, \frac{1/n}{\sum_{j=1}^n X_j}} \approx \alpha - m_x \frac{1}{M \left[\sum_{j=1}^n X_j \right]} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0. \quad (5.5.37)$$

Перейдем теперь к рассмотрению приближенного равенства (5.5.28). На основании формулы (5.5.1) можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} M[X_i(t)/X_j(t)] &= M \left[\sum_{l=1}^{n_i} Y_l^{(i)}(t) \left/ \sum_{k=1}^{n_j} Y_k^{(j)}(t) \right. \right] = \\ &= \sum_{l=1}^n \{M[Y_l^{(i)}(t)] \cdot M[1/X_j(t)] + K_{Y_l^{(i)}(t); 1/X_j(t)}\}. \end{aligned} \quad (5.5.38)$$

Расчеты, проведенные методом Монте-Карло для различных моделей показывают, что корреляционный момент $K_{Y_i(t); 1/X_j(t)}$ можно практически считать равным нулю. Об этом свидетельствует и формула (5.5.37), справедливая даже для более жесткой связи между случайными величинами. Следовательно, можно пользоваться приближенной формулой

$$M[X_i(t)/X_j(t)] \approx M[X_i(t)]/M[X_j(t)]. \quad (5.5.39)$$

Таким образом, когда процесс $X_i(t)$ управляет процессом $X_j(t)$ путем поражения единиц процесса $X_j(t)$, формулу (5.5.16) можно с достаточной степенью приближения переписать в таком виде:

$$\mu_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)} \approx a_i M[X_i(t)]/M[X_i(t)] + b_i/M[X_j(t)]. \quad (5.5.40)$$

Практические расчеты показывают, что точность этой формулы достаточна при $M[X_j(t)] > 3$.

Рассмотрим теперь случай, когда управление процессом $X_j(t)$ сводится только к «размножению» его единиц. Будем также считать, что «размножение» единиц процесса $X_j(t)$ могут осуществлять только «живые» единицы процесса $X_i(t)$. Пусть опять условная интенсивность общего потока событий, приводящего к «размножению» единиц процесса $X_j(t)$, равна

$$\chi_i[X_i(t)], \quad (5.5.41)$$

где $\chi_i[X_i(t)]$ — некоторая функция (или функционал) случайной функции $X_i(t)$.

Условную интенсивность «размножения» каждой единицы процесса $X_j(t)$ запишем в виде

$$\xi_{X_j(t)}[\chi_i(X_i(t))]. \quad (5.5.42)$$

Следовательно, безусловная интенсивность потока событий, приводящая к «размножению» единиц процесса $X_j(t)$ за счет единиц процесса $X_i(t)$, будет определяться по формуле

$$\lambda_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) = M[\xi_{X_j(t)}(\chi_i(X_i(t)))], \quad (5.5.43)$$

а общая интенсивность «размножения» каждой единицы процесса $X_j(t)$ равна:

$$\lambda_j(t) = \lambda_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) + \lambda_{X_j}(t), \quad (5.5.44)$$

где $\lambda_{X_j}(t)$ — интенсивность потока размножения единиц процесса $X_j(t)$ независимо от процесса $X_i(t)$. В случае, когда выражение (5.5.41) представляет собой линейную функцию случайной функции $X_i(t)$, получим

$$\chi_i(X_i(t)) = c_i X_i(t) + d_i. \quad (5.5.45)$$

Если эта интенсивность «размножения» единиц процесса $X_j(t)$ делится между всеми «живыми» единицами, то интенсивность «размножения» каждой единицы определится по приближенной формуле

$$\lambda_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) \approx c_i M[X_i(t)]/M[X_j(t)] + d_i/M[X_j(t)], \quad (5.5.46)$$

справедливой при $M[X_j(t)] > 3$.

Формулы (5.5.40) и (5.5.46) справедливы в случае, когда функции φ_i и χ_i являются *линейными*, а воздействие производится *равномерно*

на все «живые» единицы. В том и состоит *второе допущение*, положенное в основу метода динамики средних, которое будем называть в дальнейшем допущением о «*линейности взаимодействия целочисленных случайных процессов* $X_i(t)$ и $X_j(t)$ ».

Во всех ранее опубликованных трудах по методу динамики средних это допущение формулировалось как допущение о *квазирегулярности процесса взаимодействия* случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$. Впервые это допущение было сформулировано И. Я. Динером.

Таким образом, квазирегулярность взаимодействия случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ имеет место только для взаимодействия процессов определенного вида, когда выполняются условия линейного взаимодействия этих процессов. Это допущение справедливо только при достаточно больших значениях $M[X_j(t)]$ ($M[X_j(t)] > 3$).

Проводя аналогичные рассуждения при рассмотрении управления процессом $X_i(t)$ со стороны процесса $X_j(t)$, получим следующие выражения для интенсивностей потоков гибели и размножения в случае линейности взаимодействия этих процессов:

$$\mu_{X_j(t) \rightarrow X_i(t)}(t) = \frac{a_j M[X_j(t)]}{M[X_i(t)]} + \frac{b_j}{M[X_i(t)]}, \quad (5.5.47)$$

$$\lambda_{X_j(t) \rightarrow X_i(t)}(t) = \frac{c_j M[X_j(t)]}{M[X_i(t)]} + \frac{d_j}{M[X_i(t)]}, \quad (5.5.48)$$

$$\mu_i(t) = \mu_{X_j(t) \rightarrow X_i(t)}(t) + \mu_{X_i(t)}, \quad (5.5.49)$$

$$\lambda_i(t) = \lambda_{X_j(t) \rightarrow X_i(t)}(t) + \lambda_{X_i(t)}. \quad (5.5.50)$$

В случае, когда функции ϕ_i и χ_i представляют собой полиномы h -й степени случайной функции $X_i(t)$ с коэффициентами, которые зависят от времени, интенсивности потоков гибели и размножения будут содержать начальные моменты случайной функции $X_i(t)$ (до h -го порядка включительно). Эти начальные моменты могут быть легко определены, если предположить нормальность рассматриваемых случайных процессов гибели и размножения.

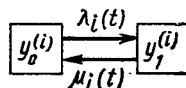


Рис. 5.22.

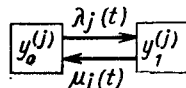


Рис. 5.23.

Сформулируем алгоритм составления уравнений для нахождения математических ожиданий, дисперсий и корреляционных функций двух взаимодействующих процессов гибели и размножения $X_i(t)$ и $X_j(t)$: $m_i(t)$, $m_j(t)$, $D_i(t)$, $D_j(t)$, $K_i(t, t')$, $K_j(t, t')$.

Рассмотрим пока простейший случай, когда выполняется равенство (5.5.1) и $y_{mi} = y^{(i)}_1$; $y_{mj} = y^{(j)}_1$. В этом случае процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$ полностью описываются процессом блуждания одной единицы по своим двум состояниям, размеченные графы которых представлены на рис. 5.22 и 5.23, и теми корреляционными связями, которые существуют между ними. Ребра этих графов определяются по формулам (5.5.14), (5.5.40), (5.5.43), (5.5.44), (5.5.46) — (5.5.50).

Решив систему дифференциальных уравнений, соответствующую этим размеченным графам, находим вероятности

$$\pi_1^{(j)}(t) = P(Y_k^{(i)}(t) = y_1^{(i)} = 1) \quad (k = 1, 2, \dots, n_i), \quad (5.5.51)$$

$$\pi_1^{(i)}(t) = P(Y_l^{(j)}(t) = y_1^{(j)} = 1) \quad (l = 1, 2, \dots, n_j). \quad (5.5.52)$$

Математическое ожидание случайных функций $X_i(t)$ и $X_j(t)$ определяется по формулам:

$$m_i(t) = n_i \pi_1^{(i)}(t); \quad (5.5.53)$$

$$m_j(t) = n_j \pi_1^{(j)}(t). \quad (5.5.54)$$

Заметим, что для определения математических ожиданий процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ не требуется знания тех корреляционных связей, которые существуют между этими процессами.

Перейдем к определению дисперсий и корреляционных функций случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$. Рассмотрим для простоты вначале случай, когда взаимодействие двух процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ осуществляется только за счет взаимного «поражения» [см. (5.5.47) — (5.5.50)]:

$$\mu_i(t) = a_j M[X_j(t)] / M[X_i(t)], \quad (5.5.55)$$

$$\mu_j(t) = a_i M[X_i(t)] / M[X_j(t)], \quad (5.5.56)$$

$$\lambda_{X_j(t) \rightarrow X_i(t)}(t) = \lambda_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) = \mu_{X_i(t)}(t) = \mu_{X_j(t)}(t) = 0. \quad (5.5.57)$$

Интенсивности потоков возрождения каждой единицы для процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ равны $\lambda_i(t)$ и $\lambda_j(t)$ соответственно. В дальнейшем, для сокращения записи, аргумент t в обозначениях интенсивностей потоков будем опускать.

Для отыскания дисперсии и корреляционных функций используем прием, который был впервые введен Е. С. Вентцель и уже применялся нами в гл. 4. Для сокращения записи примем следующие обозначения:

$$X_k(t + \Delta t) = X_k(t) + \Delta X_k(t) = X_k + \Delta X_k \quad (k = i, j), \quad (5.5.58)$$

$$M[X_k(t)] = m_k \quad (k = i, j), \quad (5.5.59)$$

$$D[X_k(t)] = D_k \quad (k = i, j), \quad (5.5.60)$$

$$K[X_i(t) X_j(t)] = M[\dot{X}_i(t) \dot{X}_j(t)] = K_{ij}, \quad (5.5.61)$$

$$\Gamma[X_i(t) X_j(t)] = M[X_i(t) X_j(t)] = \Gamma_{ij}. \quad (5.5.62)$$

Запишем матрицу приращений ΔX_i и ΔX_j процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$:

$\Delta X_i \backslash \Delta X_j$	-1	0	+1
-1	$0(\Delta t)$	$\mu_j m_j \Delta t + 0(\Delta t)$	$0(\Delta t)$
0	$\mu_i m_i \Delta t + 0(\Delta t)$	$1 - [\lambda_i n_i - (\lambda_i + \mu_i) m_i + \lambda_j n_j - (\lambda_j + \mu_j) m_j] \Delta t + 0(\Delta t)$	$\lambda_i (n_i - m_i) \Delta t + 0(\Delta t)$
+1	$0(\Delta t)$	$\lambda_j (n_j - m_j) \Delta t + 0(\Delta t)$	$0(\Delta t)$

), (5.5.63)

где $0(\Delta t)$ — величина, порядок малости которой выше, чем Δt . Матрица (5.5.63) имеет место для случая, когда ни один из процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ не находится на «левой» границе, т. е. $0 < X_i(t) \leq n_i$ и $0 < X_j(t) \leq n_j$. Как быть в случае, когда один из процессов находится на границе [$X_i(t) = 0$ или $X_j(t) = 0$], будет указано ниже.

Найдем математические ожидания и дисперсии приращений ΔX_i и ΔX_j , для чего воспользуемся матрицей (5.5.63):

$$M[\Delta X_k] = \Delta m_k = [\lambda_k n_k - (\lambda_k + \mu_k) m_k] \Delta t + 0(\Delta t) \quad (k=i, j), \quad (5.5.64)$$

$$D[\Delta X_k] = D[X_k(t + \Delta t) - X_k(t)] = M[\Delta X_k^2] - (M[\Delta X_k])^2 = \\ = [\lambda_k n_k + (\mu_k + \lambda_k) m_k] \Delta t + 0(\Delta t) \quad (k=i, j). \quad (5.5.65)$$

Очевидно, что

$$K[\Delta X_i, \Delta X_j] = 0(\Delta t). \quad (5.5.66)$$

Найдем теперь приращения дисперсий, которые в общем случае не равны дисперсиям приращений [см. (5.5.58), (5.5.60)]:

$$\Delta D_k = D[X_k(t + \Delta t)] - D[X_k(t)] = \\ = D[\Delta X_k] + 2K[X_k; \Delta X_k] + 0(\Delta t), \quad (5.5.67)$$

где

$$K[X_k; \Delta X_k] = K[X_k(t), \Delta X_k(t)]. \quad (5.5.68)$$

Приращения корреляционной функции $K_{i,j}$ определяются по формуле

$$\Delta K_{i,j} = K[X_i(t + \Delta t), X_j(t + \Delta t)] - K[X_i(t), X_j(t)] = \\ = K[X_i; \Delta X_j] + K[X_j; \Delta X_i] + 0(\Delta t). \quad (5.5.69)$$

Для отыскания корреляционных моментов (5.5.68) и (5.5.69) запишем выражения для приращений ΔX_i и ΔX_j , которые вытекают из условия линейности взаимодействия процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_i &= [-a_j X_j + \lambda_i (n_i - X_i)] \Delta t + 0(\Delta t) \\ \Delta X_j &= [-a_i X_i + \lambda_j (n_j - X_j)] \Delta t + 0(\Delta t) \end{aligned} \right\}. \quad (5.5.70)$$

Выражение для корреляционного момента $K[X_i; \Delta X_i]$ можно привести к такому виду:

$$K[X_i; \Delta X_i] = (-a_j K_{i,j} - \lambda_i D_i) \Delta t + 0(\Delta t), \quad (5.5.71)$$

откуда

$$K[X_j; \Delta X_j] = (-a_i K_{i,j} - \lambda_j D_j) \Delta t + 0(\Delta t). \quad (5.5.72)$$

Проделав соответствующие преобразования, получим:

$$K[X_i; \Delta X_j] = (-a_i D_i - \lambda_j K_{i,j}) \Delta t + 0(\Delta t), \quad (5.5.73)$$

$$K[X_j; \Delta X_i] = (-a_j D_j - \lambda_i K_{i,j}) \Delta t + 0(\Delta t). \quad (5.5.74)$$

Теперь, на основании формул (5.5.64), (5.5.65), (5.5.67), (5.5.69) — (5.5.74), можно обычным путем получить систему пяти дифференциальных уравнений для всех основных характеристик двух случайных функций $X_i(t)$ и $X_j(t)$:

$$\left. \begin{aligned} dm_i(t)/dt &= \lambda_i n_i - (\lambda_i + \mu_i) m_i(t), \\ dm_j(t)/dt &= \lambda_j n_j - (\lambda_j + \mu_j) m_j(t), \\ dD_i(t)/dt &= \lambda_i n_i + (\mu_i - \lambda_i) m_i(t) - 2a_j K_{i,j} - 2\lambda_i D_i(t), \\ dD_j(t)/dt &= \lambda_j n_j + (\mu_j - \lambda_j) m_j(t) - 2a_i K_{i,j} - 2\lambda_j D_j(t), \\ dK_{i,j}(t)/dt &= -a_i D_i(t) - a_j D_j(t) - (\lambda_i + \lambda_j) K_{i,j}(t) \end{aligned} \right\}. \quad (5.5.75)$$

Эта система дифференциальных уравнений была выведена при условии, что $0 < X_i(t) \leq n_i$ и $0 < X_j(t) \leq n_j$. Рассмотрим, к каким изменениям этих уравнений должно привести включение границ. Заметим, что система дифференциальных уравнений для математических ожиданий является замкнутой, поэтому она может быть рассмотрена отдельно. Перепишем ее в следующем виде [см. (5.5.55), (5.5.56)]:

$$\left. \begin{aligned} dm_i(t)/dt &= \lambda_i(n_i - m_i(t)) - a_j m_j(t), \\ dm_j(t)/dt &= \lambda_j(n_j - m_j(t)) - a_i m_i(t) \end{aligned} \right\}. \quad (5.5.76)$$

Учет границы в данном случае сводится к тому, что член $a_j m_j(t)$ в первом уравнении (5.5.76) должен умножаться на вероятность того, что процесс $X_i(t)$ не равен нулю. Подробно этот вопрос обсуждался в §§ 5.3 и 5.4. Эту вероятность приближенно можно записать в таком виде:

$$P(X_i(t) > 0) = P_{i>0}(t) \approx 1 - e^{-m_i(t)}. \quad (5.5.77)$$

При рассмотрении двух связанных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ приближение (5.5.77) является более грубым, чем при рассмотрении одного несвязанного процесса. Это объясняется тем, что вероятность $P[X_i(t) > 0] = \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l=0}^{n_j} P(X_i(t) = k)(X_j(t) = l)$ зависит не только от математического

ожидания $m_i(t)$, а определяется всем законом распределения системы случайных величин $X_i(t)$ и $X_j(t)$.

Таким образом, приближенный учет наличия границ $X_i(t) = 0$ и $X_j(t) = 0$ можно провести следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} dm_i(t)/dt &= \lambda_i[n_i - m_i(t)] - \mu_i m_i P_{i>0}(t) \\ dm_j(t)/dt &= \lambda_j[n_j - m_j(t)] - \mu_j m_j P_{j>0}(t) \\ dD_i(t)/dt &= \lambda_i(n_i - m_i(t) + [\mu_i m_i(t) - \\ &\quad - 2a_j K_{i,j}(t)] P_{i>0}(t) - 2\lambda_i D_i(t) \\ dD_j(t)/dt &= \lambda_j(n_j - m_j(t) + [\mu_j m_j(t) - \\ &\quad - 2a_i K_{i,j}(t)] P_{j>0}(t) - 2\lambda_j D_j(t) \\ dK_{i,j}(t)/dt &= -a_i D_i(t) P_{i>0}(t) - a_j D_j(t) P_{j>0}(t) - \\ &\quad - (\lambda_i + \lambda_j) K_{i,j}(t) \end{aligned} \right\}. \quad (5.5.78)$$

Эти уравнения интегрируются при начальных условиях:

$$m_i(0) = n_i, m_j(0) = n_j, D_i(0) = D_j(0) = K_{i,j}(0) = 0. \quad (5.5.79)$$

Основное достоинство формул (5.5.78) состоит в том, что с их помощью можно рассчитывать вероятности различных состояний взаимодействующих процессов на любой момент времени t . Эти вероятности могут быть вычислены, если случайные величины $X_i(t)$ и $X_j(t)$ подчиняются нормальному закону с характеристиками, определяемыми по формулам (5.5.78). В этом случае можно найти вероятность события

$$P[(X_i(t) \subset S_i)(X_j(t) \subset S_j)] = \int_{(S_i)} \left[\int_{(S_j)} f_t(x_i, x_j) dx_j \right] dx_i, \quad (5.5.80)$$

где S_i, S_j — произвольные области;

$$f_i(x_i, x_j) = (1/2\pi\sigma_i\sigma_j\sqrt{1-r_{i,j}}) \exp - \frac{1}{2(1-r_{i,j})^2} \left[\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2} - \frac{2r(x_i - m_i)(x_j - m_j)}{\sigma_i\sigma_j} + \frac{(x_j - m_j)^2}{\sigma_j^2} \right]. \quad (5.5.81)$$

Нормальная плотность распределения случайных величин $X_i(t)$ и $X_j(t)$ с характеристиками $m_i(t), m_j(t), \sigma_i = \sqrt{D_i(t)}, \sigma_j = \sqrt{D_j(t)}$ и

$$r = r_{i,j} = K_{i,j}(t)/\sqrt{D_i(t)D_j(t)} \quad (5.5.82)$$

коэффициент корреляции случайных величин $X_i(t)$ и $X_j(t)$.

В предположении о нормальности системы случайных величин $X_i(t)$ и $X_j(t)$ вероятности $P_{i>0}(t)$ и $P_{j>0}(t)$ определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} P_{i>0}(t) &= \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f_i(x_i, x_j) dx_j \right) dx_i \\ P_{j>0}(t) &= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^\infty f_i(x_i, x_j) dx_j \right) dx_i \end{aligned} \right\}. \quad (5.5.83)$$

Уравнения (5.5.78) — (5.5.83) при $\lambda_i(t) = \lambda_j(t) \equiv 0$ были впервые получены Е. С. Вентцель [10], где они записаны в несколько ином виде.

В качестве первого примера применения указанных формул найдем характеристики двух связанных процессов чистой гибели при условии, что $n_i = n_j = n; a_i = a_j = a (\lambda_i = \lambda_j \equiv 0)$. В этом простом случае, очевидно, должны выполняться равенства:

$$m_i(t) = m_j(t) = m(t); \quad D_i(t) = D_j(t) = D(t).$$

Тогда систему (5.5.78) можно переписать в таком виде:

$$\begin{aligned} dm(t)/dt &= -am(t) P_{>0}(t), \\ dD(t)/dt &= (am(t) - 2aK_{i,j}(t)) P_{>0}(t), \\ dK_{i,j}(t)/dt &= -2aD(t) P_{>0}(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим приближенное решение этих уравнений для небольших времен t , когда $P_{>0}(t) \approx 1$. В этом случае решение имеет такой вид:

$$\begin{aligned} m(t) &= ne^{-at}, \\ D(t) &= (n/6)[e^{2at} - 3e^{-2at} + 2e^{-at}], \\ K_{i,j}(t) &= (n/6)[3e^{-2at} + e^{2at} - 4e^{-at}]. \end{aligned}$$

Найдем значение этих характеристик на момент времени, когда обе стороны понесут в среднем потери равные 50% первоначальной численности ($at_1 \approx 0,7$):

$$\begin{aligned} m(t_1) &= n/2 = 0,50n; \\ D(t_1) &= (n/6)[e^{1,4} - 3e^{-1,4} + 1] = 0,71n; \\ \sigma(t_1) &= 0,84 \sqrt{n}, \\ K_{i,j}(t_1) &= -(n/6)[3 \cdot 0,25 - 4 - 2] = -0,45n; \\ r_{i,j}(t_1) &= -0,66. \end{aligned}$$

Например, при $n=100$ система случайных величин $X_i(t)$ и $X_j(t)$ имеет следующие характеристики: $m_i(t) = m_j(t) = 50$; $\sigma_i(t) = \sigma_j(t) = 8,4$; $r_{i,j}(t) = -0,66$.

Найдем вероятность того, что к моменту времени t_1 у j -й стороны будет не менее $1,2m_j = 60$ единиц, а у i -й стороны — не более $0,8m_i = 40$ единиц, считая, что система случайных величин $X_i(t)$, $X_j(t)$ подчинена нормальному закону. В этом случае выражение (5.5.80) примет вид $P((X_i(t_1) < 0,8m_i) (X_j(t_1) < 1,2m_j))$.

Вероятность того, что к моменту времени t_1 одна из сторон будет иметь не менее 60 единиц, а другая — не более 40, равна $2P((X_i(t_1) < 40) (X_j(t_1) > 60))$.

В качестве второго примера рассмотрим случай взаимодействия двух процессов гибели с восстановлением, когда $n_i = n_j = 100$; $a_i = a_j = a$; $\lambda_i = \lambda_j = 2a$.

В этом случае при $\lambda > a$ и $t \rightarrow \infty$ существует стационарный режим, для которого $m_i = m_j = 66$; $\sigma_i = \sigma_j = 4,5$; $r_{i,j} = 0,5$.

5.6. Метод динамики моментов. Уравнения для математических ожиданий, дисперсий и корреляционных функций отдельных составляющих, являющихся однородными разложениями целочисленных случайных процессов

В этом параграфе продолжено исследование характеристик векторной случайной функции $X(t) = \{X_1(t), \dots, X_m(t)\}$ с зависимыми составляющими. Каждая из этих составляющих является однородным разложением целочисленного случайного процесса

$$X_i(t) = \sum_{k=1}^{n_i} Y_k^{(i)}(t). \quad (5.6.1)$$

Процесс $Y_k^{(i)}(t) (k = \overline{1, n_i})$ представляет собой процесс блуждания по произвольному множеству состояний $Y^{(i)} = \{y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_{m_i}^{(i)}\}$, одинаковому для всех случайных функций $Y_k^{(i)}(t) (k = \overline{1, n_i})$, и является элементарным целочисленным случайным процессом.

Рассмотрим случай, когда между составляющими $X_i(t)$ и $X_j(t)$ осуществляется линейное взаимодействие. Исследуем для простоты частный случай, когда взаимодействие между процессами $X_i(t)$ и $X_j(t)$ осуществляется только за счет «гибели» единиц этих процессов.

Для того чтобы приступить к выводу уравнений для математических ожиданий, дисперсий и корреляционных функций составляющих векторной случайной функции $X(t)$, вернемся к предыдущему параграфу и рассмотрим полученное в нем решение с несколько иных позиций.

Введем следующие обозначения:

$X_i^{(1)}(t) = X_i^{(1)}$ — число единиц процесса $X_i(t)$, находящихся в состоянии $y_1^{(i)}$;

$X_i^{(0)}(t) = n_i - X_i^{(1)}$ — число единиц процесса $X_i(t)$, находящихся в состоянии $y_0^{(i)}$.

Соответственно вводятся величины $X_j(t) = X_j^{(1)}$, $X_j^{(0)} = n_j - X_j^{(1)}$.

У этих четырех введенных в рассмотрение случайных функций имеются следующие характеристики: четыре математических ожидания

$$m_i^{(0)}; m_i^{(1)}; m_j^{(0)}; m_j^{(1)} \quad (5.6.2)$$

и корреляционная матрица $\|K\|$, в которой должны быть определены 10 ее элементов:

$$\|K\| = \begin{vmatrix} D_i^{(0)}K[X_i^{(0)}; X_i^{(1)}]K[X_i^{(1)}; X_j^{(0)}]K[X_i^{(1)}; X_j^{(1)}] \\ D_i^{(1)} & K[X_i^{(1)}; X_j^{(0)}]K[X_i^{(1)}; X_j^{(1)}] \\ D_j^{(0)} & K[X_j^{(0)}; X_j^{(1)}] \\ D_j^{(1)} \end{vmatrix}. \quad (5.6.3)$$

Следовательно, нужно определить четырнадцать характеристик случайных функций $X_i^{(0)}; X_i^{(1)}; X_j^{(0)}; X_j^{(1)}$, т. е. нужно составить систему четырнадцати уравнений с четырнадцатью неизвестными:

- 1) $n_i = m_i^{(0)} + m_i^{(1)}$;
- 2) $n_j = m_j^{(0)} + m_j^{(1)}$;
- 3) $D_i^{(0)} + D_i^{(1)} + 2K[X_i^{(1)}; X_i^{(1)}] = 0$;
- 4) $D_j^{(0)} + D_j^{(1)} + 2K[X_j^{(0)}; X_j^{(0)}] = 0$;
- 5) $K[X_i^{(0)}; X_j^{(0)}] = K[X_i^{(1)}; X_j^{(1)}]$;
- 6) $K[X_i^{(0)}; X_j^{(1)}] = K[X_i^{(1)}; X_j^{(1)}]$;
- 7) $K[X_i^{(1)}; X_j^{(0)}] = K[X_i^{(1)}; X_j^{(1)}]$;
- 8) $K[X_i^{(0)}; X_i^{(1)}] = -D_i^{(1)}$;
- 9) $K[X_j^{(0)}; X_j^{(1)}] = -D_j^{(1)}$.

В предыдущем параграфе было получено 5 уравнений [см. (5.5.75)], которые запишем в обозначениях, принятых в этом параграфе:

- 10) $dm_i^{(1)}/dt = \lambda_i n_i - (\lambda_i + \mu_i) m_i^{(1)}$;
- 11) $dm_j^{(1)}/dt = \lambda_j n_j - (\lambda_j + \mu_j) m_j^{(1)}$;
- 12) $dD_i^{(1)}/dt = \lambda_i n_i + (\mu_i - \lambda_i) m_i^{(1)} - 2Q_j K[X_i^{(1)}; X_j^{(1)}] - 2\lambda_i D_i^{(1)}$;
- 13) $dD_j^{(1)}/dt = \lambda_j n_j + (\mu_j - \lambda_j) m_j^{(1)} - 2Q_i K[X_j^{(1)}; X_i^{(1)}] - 2\lambda_j D_j^{(1)}$;
- 14) $dK[X_i^{(1)}; X_j^{(1)}]/dt = -a_i D_i^{(1)} - a_j D_j^{(1)} - (\lambda_i + \lambda_j) K[X_i^{(1)}; X_j^{(1)}]$

Таким образом, получена система четырнадцати уравнений с четырнадцатью неизвестными.

Перейдем к изучению более сложного случая, когда каждая единица процесса $X_i(t)$ совершает случайное блуждание по множеству $Y_i =$

$=\{y_0^{(i)}; y_1^{(i)}; y_2^{(i)}\}$. Для определенности рассмотрим один частный случай и будем считать, что эти состояния являются следующими:

$y_0^{(i)}$ — единица процесса $X_i(t)$ поражена;

$y_1^{(i)}$ — единица процесса $X_i(t)$ находится на месте и ведет поражение неподвижных единиц процесса $X_j(t)$;

$y_2^{(i)}$ — единица процесса $X_i(t)$ находится в движении.

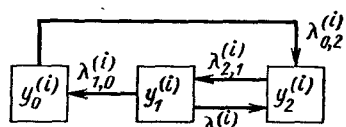


Рис. 5.24.

В этом состоянии она не может поражать единицы процесса $X_j(t)$ и сама не подвергается поражению.

Размеченный граф состояний процесса блуждания единицы по своим состояниям показан на рис. 5.24.

Интенсивности потоков имеют следующий физический смысл:

$\lambda_{0,2}(i)$ — интенсивность потока восстановления пораженной единицы процесса $X_i(t)$;

$\lambda_{2,1}^{(i)}$ — интенсивность потока прекращения движения единицы процесса $X_i(t)$;

$\lambda_{1,2}^{(i)}$ — интенсивность потока прекращения нахождения на месте единицы процесса $X_i(t)$;

$\lambda_{1,0}^{(i)}$ — интенсивность потока поражения единицы процесса $X_i(t)$.

Будем считать, что интенсивности потоков событий $\lambda_{0,2}^{(i)}$, $\lambda_{2,1}^{(i)}$, $\lambda_{1,2}^{(i)}$ не зависят от состояния единиц процесса $X_j(t)$.

Интенсивность потока поражений $\lambda_{1,0}^{(i)}$ определим по формуле

$$\lambda_{1,0}^{(i)} = a_j m_j^{(1)} / m_i^{(1)}, \quad (5.6.4)$$

где a_j — интенсивность потока успешных выстрелов, осуществляемых одной единицей процесса $X_j(t)$ по единицам процесса $X_i(t)$.

Аналогично определяются состояния, размеченный граф состояний и интенсивности потоков событий для единиц, составляющих процесс $X_j(t)$.

Сами процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$ определим следующим образом:

$$X_l(t) = \sum_{k=1}^{n_l} Y_{k,l}^{(1)}(t) \quad (l=i, j), \quad (5.6.5)$$

где $Y_{k,l}^{(1)}(t) = 1$, если единица процесса $X_i(t)$ находится либо в состоянии $y_1^{(i)}$, либо в состоянии $y_2^{(i)}$ („жива“);

$Y_{k,l}^{(1)}(t) = 0$, если единица процесса $X_i(t)$, находится в состоянии $y_0^{(i)}$, т. е. „погибла“.

Аналогичные выражения справедливы и для процесса $X_j(t)$.

Введем в рассмотрение следующие случайные функции (аргумент t для сокращения записи опускаем):

$X_i^{(l)}$ — число единиц процесса $X_i(t)$, находящихся в состоянии l ($l=0, 1, 2$) в момент времени t .

Аналогично вводятся случайные функции $X_j^{(l)}$ ($l=0, 1, 2$).

Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} X_i(t) &= X_i^{(1)} + X_i^{(2)} \\ X_j(t) &= X_j^{(1)} + X_j^{(2)} \end{aligned} \right\}. \quad (5.6.6)$$

Найдем характеристики шести введенных в рассмотрение случайных функций

$$m_k^{(l)} = M[X_k^{(l)}] \quad (k=i, j; l=0, 1, 2), \quad (5.6.7)$$

$$\|K\| = \left\| \begin{array}{cccccc} D_i^{(0)} k_{i,i}^{(0,1)} k_{i,i}^{(0,2)} k_{i,j}^{(0,0)} k_{i,j}^{(0,1)} k_{i,j}^{(0,2)} \\ D_i^{(1)} k_{i,i}^{(1,2)} k_{i,j}^{(1,0)} k_{i,j}^{(1,1)} k_{i,j}^{(1,2)} \\ D_i^{(2)} k_{i,j}^{(2,0)} k_{i,j}^{(2,1)} k_{i,j}^{(2,2)} \\ D_j^{(0)} k_{j,j}^{(0,1)} k_{j,j}^{(0,2)} \\ D_j^{(1)} k_{j,j}^{(1,2)} \\ D_j^{(2)} \end{array} \right\}, \quad (5.6.8)$$

где

$$m_k^{(l)} = M[X_k^{(l)}] \quad (k=i, j; l=0, 1, 2), \quad (5.6.9)$$

$$D_k^{(l)} = D[X_k^{(l)}] \quad (k=i, j; l=0, 1, 2), \quad (5.6.10)$$

$$k_{k,h}^{(l,m)} = K[X_k^{(l)}; X_h^{(m)}] \quad (k, h=i, j; l, m=0, 1, 2). \quad (5.6.11)$$

Следовательно, требуется составить алгоритм определения 17 характеристик шести случайных функций

В соответствии с размеченным графом (рис. 5.24) и выражением (5.6.4) составим уравнения для приращений случайных функций $X_k^{(l)}$ ($k=i, j, l=0, 1, 2$), аналогичные тем, которые были составлены в предыдущем параграфе [см. (5.5.70)]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_i^{(0)} &= (-\lambda_{0,2}^{(i)} X_i^{(0)} + Q_j X_j^{(1)}) \Delta t + 0(\Delta t) \\ \Delta X_i^{(1)} &= (-a_j X_j^{(1)} - \lambda_{1,2}^{(i)} X_i^{(1)} + \lambda_{2,1}^{(i)} X_i^{(2)}) \Delta t + 0(\Delta t) \\ \Delta X_i^{(2)} &= (-\lambda_{2,1}^{(i)} X_i^{(2)} + \lambda_{1,2}^{(i)} X_i^{(1)} + \lambda_{0,2}^{(i)} X_i^{(0)}) \Delta t + 0(\Delta t) \end{aligned} \right\}. \quad (5.6.12)$$

Аналогичные уравнения составляются для единиц процесса $X_j(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_j^{(0)} &= (-\lambda_{0,2}^{(j)} X_j^{(0)} + a_i X_i^{(1)}) \Delta t + 0(\Delta t) \\ \Delta X_j^{(1)} &= (-a_i X_i^{(1)} - \lambda_{1,2}^{(j)} X_j^{(1)} + \lambda_{2,1}^{(j)} X_j^{(2)}) \Delta t + 0(\Delta t) \\ \Delta X_j^{(2)} &= (-\lambda_{2,1}^{(j)} X_j^{(2)} + \lambda_{1,2}^{(j)} X_j^{(1)} + \lambda_{0,2}^{(j)} X_j^{(0)}) \Delta t + 0(\Delta t) \end{aligned} \right\}. \quad (5.6.13)$$

Теперь зафиксируем время t и составим ряды распределений для приращений соответствующих случайных функций за время Δt так, как

это было сделано в предыдущем параграфе [см. (5.5.63)]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_f^{(0)} &\sim \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & +1 \\ \hline \lambda_{0,2}^{(j)} m_j^{(0)} \Delta t + 0 (\Delta t) & 1 - a_i m_i \Delta t - \\ & - \lambda_{0,2}^{(j)} m_j^{(0)} \Delta t + 0 (\Delta t) & a_i m_i^{(1)} \Delta t + 0 (\Delta t) \\ \hline \end{array} \\ \\ \Delta X_f^{(1)} &\sim \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & +1 \\ \hline a_i m_i \Delta t + \\ + \lambda_{1,2}^{(j)} m_j^{(1)} \Delta t + 0 (\Delta t) & 1 - \lambda_{2,1}^{(j)} m_j^{(2)} \Delta t - a_i m_i^{(1)} \Delta t - \\ & - \lambda_{1,2}^{(i)} m_i^{(1)} \Delta t + 0 (\Delta t) & \lambda_{2,1}^{(j)} m_j^{(2)} \Delta t + 0 (\Delta t) \\ \hline \end{array} \\ \\ \Delta X_f^{(2)} &\sim \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & +1 \\ \hline \lambda_{2,1}^{(j)} m_j^{(2)} \Delta t + 0 (\Delta t) & 1 - \lambda_{1,2}^{(j)} m_j^{(1)} \Delta t - \lambda_{0,2}^{(j)} m_j^{(0)} \Delta t - \\ & - \lambda_{2,1}^{(j)} m_j^{(2)} \Delta t + 0 (\Delta t) & \lambda_{1,2}^{(j)} m_i^{(1)} \Delta t + \\ & & + \lambda_{0,2}^{(j)} m_j^{(0)} \Delta t + 0 (\Delta t) \\ \hline \end{array} \end{aligned} \right\} \cdot \quad (5.6.14)$$

Составим уравнения для отыскания характеристик шести случайных функций.

Запишем следующие два равенства, которые назовем *нормировочными* условиями:

$$n_i = \sum_{k=0}^2 X_i^{(k)} \quad (5.6.15)$$

$$n_j = \sum_{k=0}^2 X_j^{(k)} \quad (5.6.16)$$

На основании этих равенств можно записать следующие 4 уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad n_i &= \sum_{k=0}^2 m_i^{(k)} \\ 2) \quad n_j &= \sum_{k=0}^2 m_j^{(k)} \end{aligned} \right\}; \quad (5.6.17)$$

$$\left. \begin{aligned} 3) \quad \sum_{k=0}^2 D_i^{(k)} + 2 \sum_{k < l} k_{i,i}^{(k,l)} &= 0 \\ 4) \quad \sum_{k=0}^2 D_j^{(k)} + 2 \sum_{k < l} k_{j,j}^{(k,l)} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (5.6.18)$$

где

$$k_{h,h}^{(k,l)} = K[X_h^{(k)}; X_h^{(l)}] \quad (h=i, j; k, l=0, 1, 2). \quad (5.6.19)$$

Введем еще два обозначения для первых смешанных начальных моментов:

$$\Gamma_{h,l}^{(k,l)} = M[X_h^{(k)} X_h^{(l)}] \quad (h=i, j; k, l=0, 1, 2), \quad (5.6.20)$$

$$\Gamma_{i,j}^{(k,l)} = M[X_i^{(k)} X_j^{(l)}] \quad (k, l=0, 1, 2). \quad (5.6.21)$$

Между корреляционными функциями и первыми смешанными начальными моментами существуют следующие зависимости:

$$\Gamma_{i,j}^{(k,l)} = k_{i,j}^{(k,l)} + m_i^{(k)} m_j^{(l)}; \quad (5.6.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{i,i}^{(k,k)} &= D_i^{(k)} + (m_i^{(k)})^2 \\ \Gamma_{i,i}^{(k,l)} &= k_{i,i}^{(k,l)} + m_i^{(k)} m_i^{(l)} \end{aligned} \right\}. \quad (5.6.23)$$

Умножим левую и правую части первого равенства (5.6.16) на величину $X_i^{(0)}$ и найдем математическое ожидание обеих частей:

$$5) \quad n_i m_i^{(0)} = \sum_{k=0}^z \Gamma_{i,i}^{(0,k)}. \quad (5.6.24)$$

Аналогично получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 6) \quad n_i m_i^{(1)} &= \sum_{k=0}^z \Gamma_{i,i}^{(1,k)} \\ 7) \quad n_i m_i^{(2)} &= \sum_{k=0}^z \Gamma_{i,i}^{(2,k)} \\ 8) \quad n_j m_j^{(0)} &= \sum_{k=0}^z \Gamma_{j,j}^{(0,k)} \\ 9) \quad n_j m_j^{(1)} &= \sum_{k=0}^z \Gamma_{j,j}^{(1,k)} \\ 10) \quad n_j m_j^{(2)} &= \sum_{k=0}^z \Gamma_{j,j}^{(2,k)} \\ 11) \quad n_i m_j^{(0)} &= \sum_{k=0}^z \Gamma_{i,j}^{(k,0)} \\ 12) \quad n_i m_j^{(1)} &= \sum_{k=0}^z \Gamma_{i,j}^{(k,1)} \\ 13) \quad n_i m_j^{(2)} &= \sum_{k=0}^z \Gamma_{i,j}^{(k,2)} \\ 14) \quad n_j m_i^{(0)} &= \sum_{k=0}^z \Gamma_{i,j}^{(0,k)} \\ 15) \quad n_j m_i^{(1)} &= \sum_{k=0}^z \Gamma_{i,j}^{(1,k)} \end{aligned} \right\}. \quad (5.6.25)$$

На основании рядов распределений (5.6.14) и (5.6.15) можно составить дифференциальные уравнения для математических ожиданий

$$\left. \begin{aligned} 16) \quad dm_i^{(0)}/dt &= -\lambda_{0,2}^{(i)} m_i^{(1)} + a_j m_j^{(1)} \\ 17) \quad dm_i^{(1)}/dt &= -a_j m_j^{(1)} - \lambda_{1,2}^{(i)} m_i^{(1)} + \lambda_{2,1}^{(i)} m_i^{(2)} \\ 18) \quad dm_j^{(0)}/dt &= -\lambda_{0,2}^{(j)} m_j^{(0)} + a_i m_i^{(1)} \\ 19) \quad dm_j^{(1)}/dt &= -a_i m_i^{(1)} - \lambda_{1,2}^{(j)} m_j^{(1)} + \lambda_{2,1}^{(j)} m_j^{(2)} \end{aligned} \right\}. \quad (5.6.26)$$

Найдем дисперсии приращений:

$$\left. \begin{aligned} D[\Delta X_i^{(0)}] &= (\lambda_{0,2}^{(i)} m_i^{(0)} + a_j m_j^{(1)}) \Delta t + 0(\Delta t) \\ D[\Delta X_i^{(1)}] &= (a_j m_j^{(1)} + \lambda_{1,2}^{(i)} m_i^{(1)} + \lambda_{2,1}^{(i)} m_i^{(2)}) \Delta t + 0(\Delta t) \\ D[\Delta X_j^{(0)}] &= (\lambda_{0,2}^{(j)} m_j^{(0)} + a_i m_i^{(1)}) \Delta t + 0(\Delta t) \\ D[\Delta X_j^{(1)}] &= (a_i m_i^{(1)} + \lambda_{1,2}^{(j)} m_j^{(1)} + \lambda_{2,1}^{(j)} m_j^{(2)}) \Delta t + 0(\Delta t) \end{aligned} \right\} \quad (5.6.27)$$

Поделим правую и левую части этих уравнений на величину Δt и найдем пределы правой и левой частей при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\left. \begin{aligned} d\tilde{D}_i^{(0)} / dt &= \lambda_{0,2}^{(i)} m_i^{(0)} + a_j m_j^{(1)} \\ d\tilde{D}_i^{(1)} / dt &= a_j m_j^{(1)} + \lambda_{1,2}^{(i)} m_i^{(1)} + \lambda_{2,1}^{(i)} m_i^{(2)} \\ d\tilde{D}_j^{(0)} / dt &= \lambda_{0,2}^{(j)} m_j^{(0)} + a_i m_i^{(1)} \\ d\tilde{D}_j^{(1)} / dt &= a_i m_i^{(1)} + \lambda_{1,2}^{(j)} m_j^{(1)} + \lambda_{2,1}^{(j)} m_j^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (5.6.28)$$

Заметим, что правые части этих уравнений равны модулю правых частей соответствующих уравнений для математических ожиданий.

Найдем первые смешанные начальные моменты вида [см. (5.6.12)]

$$M[X_i^{(0)} \Delta X_i^{(0)}] = (-\lambda_{0,2}^{(i)} \Gamma_{i,i}^{(0,0)} + a_j \Gamma_{i,j}^{(0,1)}) \Delta t + 0(\Delta t). \quad (5.6.29)$$

Аналогично получим [см. (5.6.12) и (5.6.13)]:

$$\left. \begin{aligned} M[X_i^{(1)} \Delta X_i^{(1)}] &= (-a_j \Gamma_{i,j}^{(1,1)} - \lambda_{1,2}^{(i)} \Gamma_{i,i}^{(1,1)} + \lambda_{2,1}^{(i)} \Gamma_{i,i}^{(1,2)}) \Delta t + 0(\Delta t) \\ M[X_j^{(0)} \Delta X_j^{(0)}] &= (-\lambda_{0,2}^{(j)} \Gamma_{j,j}^{(0,0)} + a_i \Gamma_{j,i}^{(0,1)}) \Delta t + 0(\Delta t) \\ M[X_j^{(1)} \Delta X_j^{(1)}] &= (-a_i \Gamma_{j,i}^{(1,1)} - \lambda_{1,2}^{(j)} \Gamma_{j,j}^{(1,1)} + \lambda_{2,1}^{(j)} \Gamma_{j,j}^{(1,2)}) \Delta t + 0(\Delta t) \end{aligned} \right\} \quad (5.6.30)$$

Теперь можно составить дифференциальные уравнения для дисперсий [см. (5.5.65) — (5.5.68), (5.6.22) — (5.6.30)]

$$\left. \begin{aligned} 20) \quad dD_i^{(0)} / dt &= \lambda_{0,2}^{(i)} m_i^{(0)} + a_j m_j^{(1)} + 2(-\lambda_{0,2}^{(i)} \Gamma_{i,i}^{(0,0)} + a_j \Gamma_{i,j}^{(0,1)} - \\ &\quad - m_i^{(0)} (\lambda_{0,2}^{(i)} m_i^{(1)} + a_j m_j^{(1)})) \\ 21) \quad dD_i^{(1)} / dt &= a_j m_j^{(1)} + \lambda_{1,2}^{(i)} m_i^{(1)} + \lambda_{2,1}^{(i)} m_i^{(2)} + Z(-a_j \Gamma_{i,j}^{(1,1)} - \\ &\quad - \lambda_{1,2}^{(i)} \Gamma_{i,i}^{(1,1)} + \lambda_{2,1}^{(i)} \Gamma_{i,i}^{(1,2)} - m_i^{(1)} (-a_j m_j^{(1)} - \lambda_{1,2}^{(i)} m_i^{(1)} + \lambda_{2,1}^{(i)} m_i^{(2)})) \\ 22) \quad dD_j^{(0)} / dt &= \lambda_{0,2}^{(j)} m_j^{(0)} + a_i m_i^{(1)} + 2(-\lambda_{0,2}^{(j)} \Gamma_{j,j}^{(0,0)} + a_i \Gamma_{j,i}^{(0,1)} - \\ &\quad - m_j^{(0)} (\lambda_{0,2}^{(j)} m_j^{(1)} + a_i m_i^{(1)})) \\ 23) \quad dD_j^{(1)} / dt &= a_i m_i^{(1)} + \lambda_{1,2}^{(j)} m_j^{(1)} + \lambda_{2,1}^{(j)} m_j^{(2)} + 2(-a_i \Gamma_{j,i}^{(1,1)} - \\ &\quad - \lambda_{1,2}^{(j)} \Gamma_{j,j}^{(1,1)} + \lambda_{2,1}^{(j)} \Gamma_{j,j}^{(1,2)} - m_j^{(1)} (-a_i m_i^{(1)} - \lambda_{1,2}^{(j)} m_j^{(1)} + \lambda_{2,1}^{(j)} m_j^{(2)})) \end{aligned} \right\} \quad (5.6.31)$$

Найдем приращение первых смешанных начальных моментов

$$\Delta \Gamma_{i,j}^{(1,1)} = M[X_i^{(1)} \Delta X_j^{(1)}] + M[X_j^{(1)} \Delta X_i^{(1)}] + 0(\Delta t). \quad (5.6.32)$$

Определим эти математические ожидания [см. (5.6.12) и (5.6.13)]

$$M[X_i^{(1)} \Delta X_j^{(1)}] = (-a_i \Gamma_{i,i}^{(1,1)} - \lambda_{1,2}^{(j)} \Gamma_{i,j}^{(1,1)} + \lambda_{2,1}^{(j)} \Gamma_{i,j}^{(1,2)}) \Delta t + 0(\Delta t). \quad (5.6.33)$$

Аналогично получим

$$M[X_j^{(1)} \Delta X_i^{(1)}] = (-a_j \Gamma_{j,j}^{(1,1)} - \lambda_{1,2}^{(i)} \Gamma_{j,i}^{(1,1)} + \lambda_{2,1}^{(i)} \Gamma_{j,i}^{(1,2)}) \Delta t + 0(\Delta t). \quad (5.6.34)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 24) \quad d\Gamma_{i,j}^{(1,1)}/dt = & -a_i \Gamma_{i,i}^{(1,1)} - \lambda_{1,2}^{(j)} \Gamma_{i,j}^{(1,1)} + \lambda_{2,1}^{(j)} \Gamma_{i,j}^{(1,2)} - a_j \Gamma_{j,j}^{(1,1)} - \\ & - \lambda_{1,2}^{(i)} \Gamma_{j,i}^{(1,1)} + \lambda_{2,1}^{(i)} \Gamma_{j,i}^{(1,2)}. \end{aligned} \quad (5.6.35)$$

С помощью такого же приема можно составить дифференциальные уравнения для определения функций $\Gamma_{i,j}^{(0,1)}$, $\Gamma_{i,j}^{(1,0)}$, $\Gamma_{i,j}^{(0,0)}$:

$$\begin{aligned} 25) \quad d\Gamma_{i,j}^{(0,1)}/dt = & -a_i \Gamma_{i,i}^{(0,1)} - \lambda_{1,2}^{(j)} \Gamma_{i,j}^{(0,1)} + \lambda_{2,1}^{(j)} \Gamma_{i,j}^{(0,2)} - a_j \Gamma_{j,j}^{(0,1)} - \\ & - \lambda_{1,2}^{(i)} \Gamma_{j,i}^{(0,1)} + \lambda_{2,1}^{(i)} \Gamma_{j,i}^{(0,2)}; \end{aligned} \quad (5.6.36)$$

$$26) \quad d\Gamma_{i,j}^{(1,0)}/dt = -\lambda_{0,2}^{(j)} \Gamma_{i,j}^{(1,0)} + a_i \Gamma_{i,i}^{(1,1)} - \lambda_{0,2}^{(i)} + a_j \Gamma_{j,j}^{(1,1)}; \quad (5.6.37)$$

$$27) \quad d\Gamma_{i,j}^{(0,0)}/dt = -\lambda_{0,2}^{(j)} \Gamma_{i,j}^{(0,0)} + a_i \Gamma_{i,i}^{(0,1)} - \lambda_{0,2}^{(i)} + a_j \Gamma_{j,j}^{(0,1)}. \quad (5.6.38)$$

Таким образом, мы получили замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (27 уравнений и 27 неизвестных), которую обычно решают при следующих начальных условиях:

$$\bar{m}_k^{(e)}(0) = \bar{m}_k^l(k, j; l=0, 1, 2), \quad (5.6.39)$$

а корреляционная матрица $\|K\|$ является нулевой, т. е. все элементы корреляционной матрицы (5.6.8) равны нулю. На начальные условия (5.6.39) налагаются естественные ограничения:

$$\sum_{l=0}^2 \bar{m}_k^l = n_k (\bar{m}_k^l \geq 0; k=i, j; l=0, 1, 2). \quad (5.6.40)$$

Перейдем к рассмотрению самого общего случая исследования характеристик двух произвольно связанных целочисленных случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$, представленных своими однородными разложениями

$$\left. \begin{aligned} X_i(t) &= \sum_{k=1}^{n_i} Y_k^{(i)}(t) \\ X_j(t) &= \sum_{k=1}^{n_j} Y_k^{(j)}(t) \end{aligned} \right\}. \quad (5.6.41)$$

Каждая единица процесса $X_i(t)$ блуждает по произвольному множеству состояний $Y^{(i)} = \{y_0, \dots, y_{m_i}^{(i)}\}$. Процесс блуждания каждой единицы полностью описывается соответствующим размеченным графом состояний, из которого можно определить матрицу интенсивностей $\|\lambda^{(i)}\|$. Аналогичные величины даны и в множестве состояний

$$Y^{(j)} = \{y_0^{(j)}, \dots, y_{m_j}^{(j)}\}.$$

Рассмотрим случайные функции

$$X_k^{(l)}(t) = X_k^{(l)} \quad (k=i, j; l=\overline{0, m_i}; l=\overline{0, m_j}), \quad (5.6.42)$$

которые определим следующим образом:

$$X_k^{(l)} = \sum_{h=1}^{n_k} Y_{k,h}^{(l)}(t) \quad (k=i, j; l=\overline{0, m_i}; l=\overline{0, m_j}), \quad (5.6.43)$$

где $Y_{k,h}^{(l)}(t) = 1$, если h -я единица, из которых складывается процесс $X_k^{(l)}(t)$, в момент времени t находится в l -м состоянии ($k=i, j$); $Y_{k,h}^{(l)}(t) = 0$, если h -я единица, из которых складывается процесс $X_k(t)$, в момент времени t не находится в l -м состоянии ($k=i, j$).

Очевидно, что для введенных в рассмотрение случайных функций должны выполняться нормировочные условия

$$\sum_{l=0}^{m_k} X_k^{(l)} = n_k \quad (k=i, j). \quad (5.6.44)$$

Случайная функция $X_k(t)$ ($k=i, j$) определяется следующим образом:

$$X_k(t) = \sum_{z_l \in z_k} X_k^{(l)} \quad (k=i, j), \quad (5.6.45)$$

т. е. эта случайная функция равна числу единиц, находящихся в момент времени t в некотором подмножестве состояний $z_k \subset Y_k$ ($k=i, j$).

Для того чтобы найти характеристики случайных функций $X_i(t)$ и $X_j(t)$, в общем случае нужно найти характеристики векторной случайной функции, составляющие которой определяются выражением (5.6.42). Число этих составляющих m можно найти из формулы

$$m = m_i + 1 + m_j + 1. \quad (5.6.46)$$

Общее число характеристик n для всех этих составляющих будет: m — математических ожиданий;

$$m_k^{(l)} \quad (k=i, j; l=\overline{0, m_i}); \quad (5.6.47)$$

$(m^2 + m)/2$ — элементов корреляционной матрицы $\|K\|$ для случайных функций, определяемых выражением (5.6.42), откуда общее число характеристик n будет равно:

$$n = (m^2 + 3m)/2. \quad (5.6.48)$$

Таким образом, при необходимости определить не только математические ожидания, но и корреляционную матрицу, число уравнений, которое нужно решать, увеличивается в $(m+3)/2$ раз. Однако число дифференциальных уравнений увеличивается в меньшее, чем $(m+3)/2$, число раз. Так, если $m_i = m_j$, то число дифференциальных уравнений будет $2m_i$ для определения математических ожиданий; $2m_i$ — для определения дисперсий; m_i^2 — для определения первых смешанных начальных элементов. Итого будет $m_i^2 + 4m$ дифференциальных уравнений, т. е. число дифференциальных уравнений увеличивается в $(m_i + 4)/2 = (m+6)/4$ число раз.

В общем случае составить систему уравнений для всех характеристик нет возможности, так как матрицы интенсивностей $\|\lambda^{(i)}\|$ и $\|\lambda^{(j)}\|$ могут иметь самый произвольный вид. Поэтому мы ограничимся здесь

лишь определением последовательности действий, необходимых для составления таких уравнений.

Прежде всего составляются размеченные графы состояний $G(Y^{(i)})$ и $G(Y^{(j)})$. На основе этих графов состояний составляются ряды распределений приращений случайных функций $X_i^{(l)}$ [см. (5.6.42)].

	-1	0	+1
$\Delta X_i^{(l)} \sim$	$m_j^{(l)} \sum_{h=0}^{m_j} \lambda_{l,h}^{(j)} \Delta t + 0 \quad (\Delta t)$	$1 - m_j^{(l)} \sum_{h=0}^{m_j} \lambda_{l,h}^{(j)} \Delta t -$ $-\sum_{h=0}^{m_j} \lambda_{h,l}^{(i)} m_i^{(h)} \Delta t + 0 \quad (\Delta t)$	$\sum_{h=0}^{m_j} \lambda_{h,l}^{(j)} m_j^{(h)} \Delta t + 0 \quad (\Delta t)$ $(l = \overline{0, m_j}).$

(5.6.49)

Заметим, что так как интенсивности некоторых потоков событий зависят от характеристик других случайных функций, то в выражении (5.6.49) будут фигурировать не только математические ожидания процесса $X_i^{(l)}$ ($l = \overline{0, m}$), но и математические ожидания процессов $X_j^{(l)}$ ($l = \overline{0, m_j}$). При этом будем по-прежнему считать, что взаимодействие процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ линейное.

Такие же ряды распределений можно записать и для приращений случайных функций $X_j^{(l)}$:

	-1	0	+1
$\Delta X_j^{(l)} \sim$	$m_j^{(l)} \sum_{h=0}^{m_j} \lambda_{l,h}^{(j)} \Delta t + 0 \quad (\Delta t)$	$1 - m_j^{(l)} \sum_{h=0}^{m_j} \lambda_{l,h}^{(j)} \Delta t -$ $-\sum_{h=0}^{m_j} \lambda_{h,l}^{(i)} m_i^{(h)} \Delta t + 0 \quad (\Delta t)$	$\sum_{h=0}^{m_j} \lambda_{h,l}^{(j)} m_j^{(h)} \Delta t + 0 \quad (\Delta t)$ $(l = \overline{0, m_j}).$

(5.6.50)

После этого запишем уравнения для самих приращений этих случайных функций $\Delta X_i^{(l)}$ ($l = \overline{0, m_i}$); $\Delta X_j^{(l)}$ ($l = \overline{0, m_j}$).

Обратим внимание на то, что в тех местах, где происходит взаимодействие процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ интенсивности потоков событий в выражениях для приращений

$$\Delta X_i^{(l)} \quad (l = \overline{0, m_i}) \quad \text{и} \quad \Delta X_j^{(l)} \quad (l = \overline{0, m_j})$$

являются случайными функциями. В тех местах, где не происходит взаимодействие процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$, эти интенсивности потоков не являются случайными. Это обстоятельство мы отметим тем, что при записи выражений для приращения случайных функций $\Delta X_i^{(l)}$ и $\Delta X_j^{(l)}$ все интенсивности потоков обозначим Λ .

Тогда на основании выражений (5.6.49) и (5.6.50) можно записать формулы для приращений случайных функций $\Delta X_i^{(l)}$ и $\Delta X_j^{(l)}$:

$$\Delta X_i^{(l)} = \left(-X_i^{(l)} \sum_{h=0}^{m_i} \Lambda_{i,h}^{(i)} + \sum_{h=0}^{m_i} \Lambda_{h,i}^{(i)} X_i^{(h)} \right) \Delta t + 0(\Delta t) \quad (l = \overline{0, m_i}), \quad (5.6.51)$$

$$\Delta X_j^{(l)} = \left(-X_j^{(l)} \sum_{h=0}^{m_j} \Lambda_{j,h}^{(j)} + \sum_{h=0}^{m_j} \Lambda_{h,j}^{(j)} X_j^{(h)} \right) \Delta t + 0(\Delta t) \quad (l = \overline{0, m_j}). \quad (5.6.52)$$

Выпишем нормировочные условия:

$$n_i = \sum_{l=0}^{m_i} X_i^{(l)}, \quad (5.6.53)$$

$$n_j = \sum_{l=0}^{m_j} X_j^{(l)}. \quad (5.6.54)$$

На основе этих нормировочных условий можно записать следующих 4 уравнения [см. (5.6.17), (5.6.18) и (5.6.23)]:

$$\left. \begin{aligned} n_i &= \sum_{l=0}^{m_i} m_i^{(l)} \\ n_j &= \sum_{l=0}^{m_j} m_j^{(l)} \\ \sum_{l=0}^{m_i} D_i^{(l)} + 2 \sum_{k < 2} (\Gamma_{i,i}^{(k,l)} - m_i^{(k)} m_i^{(l)}) &= 0 \\ \sum_{l=0}^{m_j} D_j^{(l)} + 2 \sum_{k < j} (\Gamma_{j,j}^{(k,l)} - m_j^{(k)} m_j^{(l)}) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.6.55)$$

Разобьем корреляционную матрицу $\|K\|$ на 4 подматрицы (см. [11])

$$\|K\| = \left\| \begin{array}{cc} \|k_i\| : \|k_{i,j}\| \\ \dots \dots \\ \|k_{j,i}\| : \|k_j\| \end{array} \right\|. \quad (5.6.56)$$

Подматрица $\|k_i\|$ является корреляционной матрицей случайных функций $X_i^{(l)}$ ($l = \overline{0, m_i}$) и, следовательно, является квадратной матрицей $(m_i + 1)$ -го порядка. Подматрица $\|k_j\|$ является корреляционной матрицей случайных функций $X_j^{(l)}$ ($l = \overline{0, m_j}$) и квадратной матрицей $(m_j + 1)$ -го порядка. Подматрица $\|k_{i,j}\|$ является матрицей взаимных корреляционных функций случайных функций $X_i^{(l)}$ и $X_j^{(l)}$. Если случайные процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$ независимы, то матрица (5.6.56) превращается в квазидиагональную матрицу [11].

Дифференциальные уравнения составляются для:

m_i — математических ожиданий $m_i^{(l)}$ ($l = \overline{1, m_i}$);

m_j — математических ожиданий $m_j^{(l)}$ ($l = \overline{1, m_j}$);

m_i — дисперсий $D_i^{(l)}$ ($l = \overline{1, m_i}$), которые являются элементами главной диагонали подматрицы $\|k_i\|$;

m_j — дисперсий $D_j^{(l)}$ ($l = \overline{1, m_j}$), которые являются элементами главной диагонали подматрицы $\|k_j\|$;

$m_i \times m_j$ — первых смешанных начальных моментов, которые являются элементами матрицы $\|k_{i,j}\|$ после вычеркивания в ней одной (произвольной) строки и одного (произвольного) столбца.

Выпишем эту систему дифференциальных уравнений [см. (5.6.49), (5.6.50)]

$$am_i^{(l)}/dt = -m_i^{(l)} \sum_{h=0}^{m_i} \lambda_{i,h}^{(i)} + \sum_{h=0}^{m_i} \lambda_{h,i}^{(i)} m_i^{(h)} \quad (l = \overline{1, m_i}); \quad (5.6.57)$$

$$dm_j^{(l)}/dt = -m_j^{(l)} \sum_{h=0}^{m_j} \lambda_{j,h}^{(j)} + \sum_{h=0}^{m_j} \lambda_{h,j}^{(j)} m_j^{(h)} \quad (l = \overline{1, m_j}); \quad (5.6.58)$$

$$dD_i^{(0)}/dt = m_i^{(l)} \sum_{h=0}^{m_i} \lambda_{i,h}^{(i)} + \sum_{h=0}^{m_i} \lambda_{h,i}^{(i)} m_i^{(h)} + 2 \left\{ M \left[X_i^{(l)} \left(X_i^{(l)} \sum_{h=0}^{m_i} \Lambda_{i,h}^{(i)} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \sum_{h=0}^{m_i} \Lambda_{h,i}^{(i)} X_i^{(h)} \right) \right] - m_i^{(l)} M_i \left[-X_i^{(l)} \sum_{h=0}^{m_i} \Lambda_{i,h}^{(i)} + \sum_{h=0}^{m_i} \Lambda_{h,i}^{(i)} X_i^{(h)} \right] \right\} \\ (l = \overline{1, m_i}); \quad (5.6.59)$$

$$dD/dt = m_j^{(l)} \sum_{h=0}^{m_j} \lambda_{j,h}^{(j)} + \sum_{h=0}^{m_j} \lambda_{h,j}^{(j)} m_j^{(h)} + 2 \left\{ M \left[X_j^{(l)} \left(-X_j^{(l)} \sum_{h=0}^{m_j} \Lambda_{j,h}^{(j)} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \sum_{h=0}^{m_j} \Lambda_{h,j}^{(j)} X_j^{(h)} \right) \right] - m_j^{(l)} M \left[-X_j^{(l)} \sum_{h=0}^{m_j} \Lambda_{j,h}^{(j)} + \sum_{h=0}^{m_j} \Lambda_{h,j}^{(j)} X_j^{(h)} \right] \right\} \quad (l = \overline{1, m_j}), \quad (5.6.60)$$

Если процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$ находятся в линейной зависимости, то правые части уравнений (5.6.59) и (5.6.60) выражаются через математические ожидания и первые смешанные начальные моменты случайных функций

$$X_i^{(l)} \text{ и } X_j^{(l)} \quad (l = \overline{0, m_i}; m_i, h = \overline{0, m_j}).$$

Дифференциальные уравнения для первых смешанных начальных моментов имеют такой вид [см. (5.6.32) — (5.6.38), (5.6.51), (5.6.52)]:

$$d\Gamma_{i,j}^{(l,k)}/dt = M \left[X_i^{(l)} \left(-\sum_{h=0}^{m_j} \Lambda_{h,j}^{(j)} + \sum_{h=0}^{m_j} \Lambda_{h,h}^{(j)} X_j^{(h)} \right) \right] + \\ + M \left[X_j^{(k)} \left(-X_i^{(l)} \sum_{h=0}^{m_i} \Lambda_{i,h}^{(i)} + \sum_{h=0}^{m_i} \Lambda_{h,i}^{(i)} X_i^{(h)} \right) \right] \quad (l = \overline{1, m_i}; k = \overline{1, m_j}). \quad (5.6.61)$$

К этим дифференциальным уравнениям добавляются алгебраические уравнения типа уравнений (5.6.22) — (5.6.25), которые получаются в результате умножения нормировочных условий (5.6.53), (5.6.54) на случайные функции и нахождения математических ожиданий таких произведений.

Необходимо указать, что все уравнения этого параграфа являются приближенными. Неточность этих уравнений связана с тем, что они не учитывают возможность получения отрицательных значений некоторых случайных функций. Способы уточнения этих уравнений рассмотрены в предыдущем параграфе.

Разработанный в этой главе алгоритм составления уравнений для определения математических ожиданий, дисперсий и корреляционных функций стохастически зависимых случайных процессов типа гибели и размножения назовем *методом динамики моментов*. Общеизвестный метод динамики средних, с помощью которого можно составлять уравнения для определения математических ожиданий стохастически зависимых случайных процессов, является частным случаем метода динамики моментов.

Пример 5.6.1. Речь пойдет о том, как планировать производство расходуемых материалов, ЗИПа и тому подобное, необходимых для поддержания некоторых образцов в постоянной технической готовности. Например, при эксплуатации ЭВМ по нормам требуется расходовать определенное количество запасных частей (полупроводников, отдельных элементов и узлов) в заданные временные интервалы. Такая постановка задачи относится не только к ЭВМ, но и к любым изделиям, а также заводам, нормальная работа которых требует определенного расхода каких-то материалов для эксплуатации. Поэтому пример носит общеэкономический характер.

Для простоты рассмотрим случай, когда имеется всего один вид основного образца. Число эксплуатируемых в момент времени t основных образцов (в дальнейшем просто образцов) обозначим $X(t)$ и будем считать, что их производят с интенсивностью $\lambda(t)$. Каждый произведенный образец может по тем или иным причинам выйти из строя и больше не восстанавливается. Интенсивность выхода из строя каждого образца обозначим $\mu(t)$. Таким образом, каждый образец может быть в двух состояниях: работать (эксплуатироваться) и не работать (не эксплуатироваться).

Каждый работающий образец требует для своей нормальной работы в среднем $\nu(t)$ расходуемых единиц в единицу времени. Если параметр ν постоянный, то данная постановка задачи эквивалентна тому, что за время жизни образца T ему потребуется в среднем νT расходуемых единиц. Если этот параметр зависит от времени, то среднее

число расходуемых единиц будет определяться по формуле $\int_0^T \nu(t) dt$.

Интенсивность производства расходуемых единиц обозначим $\gamma(t)$, а число таких единиц на складе в момент времени t — $Y(t)$. Будем для простоты считать, что хранение расходуемых единиц на складе не приводит к их выходу из строя.

Таким образом, налицо два стохастически связанных процесса гибели и размножения: $X(t)$ — число работающих образцов и $Y(t)$ — число расходуемых единиц на складе. Будем, опять для простоты, считать, что число работающих образцов практически не лимитируется числом расходуемых единиц, что предполагает соблюдения условий $P[Y(t) > 0] \approx 1$.

Следовательно, в рассматриваемом примере $X(t)$ — управляющий процесс гибели и размножения, а $Y(t)$ — управляемый процесс гибели и размножения. При этом управление процессом $Y(t)$ со стороны процесса $X(t)$ происходит за счет гибели процесса $Y(t)$. Составим матрицу распределения приращений процессов $X(t) = X$ и $Y(t) = Y$ так, как это было показано в данной главе. При этом будем предполагать, что нет никаких физических ограничений сверху на процессы $X(t)$ и $Y(t)$:

$\Delta Y \backslash \Delta X$	-1	0	+1
-1	$0 (\Delta t)$	$m_x \nu \Delta t$	$0 (\Delta t)$
0	$m_x \mu \Delta t$	$1 - [m_x (\mu + \nu) + \lambda + \gamma] \Delta t + 0 (\Delta t)$	$\lambda \Delta t$
+1	$0 (\Delta t)$	$\gamma \Delta t$	$0 (\Delta t)$

Зависимость всех величин от времени t для краткости опущена.

На основании этой матрицы уравнения для приращений случайных функций $\bar{X}=X(t)$ и $\bar{Y}=Y(t)$ будут иметь вид:

$$\Delta X = -(X\mu + \lambda)\Delta t; \quad \Delta Y = (-X\nu + \gamma)\Delta t.$$

Следовательно, уравнение для математических ожиданий будет иметь вид

$$\frac{dm_x}{dt} = -m_x\mu + \lambda, \quad \frac{dm_y}{dt} = -m_x\nu + \gamma.$$

Найдем дисперсию приращения ΔX : $D[\Delta X] = (m_x\mu + \lambda)\Delta t$ и выражение для корреляционного момента $K[X, \Delta X] = M[X\Delta X] - m_x M[\Delta X] = -\mu D_x \Delta t$.

Следовательно, приращение дисперсии будет иметь вид [см. (5.5.67)]:

$$\Delta D_x = D[\Delta X] + 2K[X, \Delta X] = (m_x\mu + \lambda - 2\mu D_x)\Delta t, \text{ откуда } dD_x/dt = m_x\mu + \lambda - 2\mu D_x.$$

Аналогично найдем уравнение для определения производной dD_y/dt :

$$D[\Delta Y] = (m_x\nu + \gamma)\Delta t,$$

$$K[Y, \Delta Y] = M[Y(-X\nu + \gamma)]\Delta t =$$

$$-m_y(\gamma - m_x\nu)\Delta t = \nu k_{xy}\Delta t,$$

следовательно, $dD_y/dt = m_x\nu + \gamma - 2\nu k_{xy}$.

Приращение корреляционной функции определяется по формуле (5.5.69) $\Delta k_{xy} = K[X, \Delta Y] + K[Y, \Delta X] = -\nu D_x \Delta t - \mu k_{xy} \Delta t$, откуда $dk_{xy}/dt = -\nu D_x - \mu k_{xy}$.

Таким образом, система дифференциальных уравнений для определения характеристик процессов $X(t)$ и $Y(t)$ будет иметь вид:

$$\frac{dm_x}{dt} = -m_x\mu + \lambda; \quad \frac{dD_x}{dt} = m_x\mu + \lambda - 2\mu D_x;$$

$$\frac{dm_y}{dt} = -m_x\nu + \gamma; \quad \frac{dD_y}{dt} = m_x\nu + \gamma - 2\nu k_{xy};$$

$$\frac{dk_{xy}}{dt} = -\nu D_x - \mu k_{xy}.$$

Необходимо иметь в виду, что уравнения для функций $m_y(t)$, $D_y(t)$, $k_{xy}(t)$ являются приближенными. Они не учитывают различных граничных условий.

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие возможности предложенной модели. Будем считать, что $\lambda(t) = \lambda I(t - \tau)$ ($t > 0$), т. е. основные образцы производятся с постоянной интенсивностью на интервале времени $(0, \tau)$, а $\mu = \text{const}$. В этом случае для интервала $(0, \tau)$ получим $dm_x/dt = -m_x\mu + \lambda$; $dD_x/dt = m_x\mu + \lambda - 2\mu D_x$, которые следует интегрировать при начальных условиях $D_x(0) = m_x(0) = 0$.

Выражение для математического ожидания $m_x(t)$ имеет вид

$$m_x(t) = \lambda(1 - e^{-\mu t})/\mu \quad (0 < t < \tau).$$

Из этого уравнения следует, что если производство длится достаточно долго ($\tau \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$), то для установившегося режима $m_x = \lambda/\mu$. Этот результат произведен в гл. 4.

Ранее (в гл. 4) было показано, что в этом случае имеет место равенство $D_x(t) = m_x(t)$.

Заметим, что для практических расчетов при $m_x > 20$ можно считать, что случайная функция $X(t)$ является нормальной.

Если в момент времени τ производство основных образцов прекращается, то система дифференциальных уравнений для $t > \tau$ будет той же, что приведена выше, но $\lambda \equiv 0$. Для $t > \tau$ имеем:

$$m_x(t) = m_x(\tau) e^{-\mu(t-\tau)},$$

$$D_x(t) = D_x(\tau) \left[e^{-\mu(t-\tau)} + \mu \frac{m_x(\tau)}{D_x(\tau)} (t - \tau) e^{-\mu(t-\tau)} \right].$$

На рис. 5.25 показан график зависимости $m_x(t)$ при $\mu = 1$; $\lambda = 100$ (в единицу времени) и $\tau = 100$ (единиц времени). Найдя выражения для m_x и D_x , можно найти выражения для k_{xy} , D_y и m_y .

Обратим внимание на то обстоятельство, что по методике, изложенной в этом параграфе, можно составить дифференциальные уравнения и для случая, когда закон распределения времени жизни образца определяется законом распределения времени пребывания в произвольной группе состояний. Это дает довольно большую свободу выбора закона распределения времени жизни образца.

Изложенная методика позволяет определить необходимую интенсивность производства расходуемых единиц, исходя из определенных установок о наличии числа основных образцов и числа расходуемых единиц на складе.

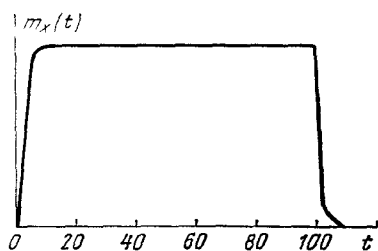


Рис. 5.25.

В самом общем виде эта задача может быть сформулирована следующим образом. Заданы интенсивность производства $\lambda(t)$, интенсивность «потребления» расходуемых единиц каждым «живым» образцом $\nu(t)$ и интенсивность гибели каждого образца $\mu(t)$. Параметры $\lambda(t)$, $\nu(t)$ и $\mu(t)$ считаются известными и при решении данной задачи не варьируемыми. В качестве «ошибки» будем рассматривать случайную функцию $Z(t) = Y(t) - X(t)$.

В качестве управляемого параметра рассматривается интенсивность производства расходуемых единиц. Требуется подобрать такое управление, которое обеспечило бы экстремум выражения $M[\varphi(Z(t))]$, где $\varphi(Z(t))$ может быть произвольный функционал.

Рассмотрим, например, случай, когда желаемое управление ищется из простейшего условия $M[z(t)] = m_y(t) - m_x(t) = C > 0$.

Это условие эквивалентно тому, что среднее число расходуемых единиц на складе ровно на C единиц превышает среднее число основных единиц, находящихся в эксплуатации.

В соответствии с определенными выше в этом примере выражениями для рассматриваемого случая найдем математическое ожидание $m_y(t)$, считая величину ν постоянной и $m_y(0) = C$:

$$m_y(t) = \nu \frac{\lambda}{\mu} t - \frac{\nu \lambda}{\mu^2} (e^{-\mu t} - 1) + \int_0^t \gamma(t) dt + C \quad (0 < t < \tau);$$

$$m_y(t) = -\nu \frac{\lambda}{\mu} \tau - \frac{\nu \lambda}{\mu^2} (e^{-\mu t} - 1) + m_x(\tau) \nu t (e^{-\mu(t-\tau)} - 1) + \int_0^t \gamma(t) dt + C \quad (t > \tau).$$

Найдем разность $m_y(t) - m_x(t)$ для случая $(0 < t < \tau)$:

$$m_y(t) - m_x(t) = C - \frac{\nu \lambda}{\mu} t + \frac{\nu \lambda}{\mu^2} (1 - e^{-\mu t}) + \int_0^t \gamma(t) dt - \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}).$$

Эта разность должна быть равна по условию C ; следовательно,

$$\int_0^t \gamma(t) dt = \frac{\lambda}{\mu} \left[\nu t + (1 - e^{-\mu t}) \left(1 - \frac{\nu}{\mu} \right) \right] \quad (0 < t < \tau).$$

Считая, что $\lambda > \mu$ (это условие обычно всегда соблюдается), получим $\gamma(t) = \lambda \nu / \mu + (\mu - \nu) e^{-\mu t} \quad (0 < t < \tau)$.

Аналогично можно найти выражение и для $t > \tau$.

При достаточно больших значениях t и τ установится стационарный режим, и в этом случае получим естественный результат $\gamma = \lambda \nu / \mu = m_x \nu$.

Заметим, что накопление «запаса» расходуемых единиц, равного C , осуществляет до момента $t=0$ ($m_y(0) = C$). Другими словами, данная постановка задачи привела нас к тому, что расходуемые единицы надо создавать еще до того, как появились основные образцы.

Другая возможная простейшая постановка задачи заключается в том, чтобы обеспечить заданное отношение $m_y(t)/m_x(t) = C > 1$, откуда $m_y(t) = C m_x(t)$.

С другой стороны, $dm_y/dt = -m_x v + \gamma = C(dm_x(t)/dt)$ и $m_x v - \gamma = C\lambda - C m_x \mu$. Следовательно, в этом случае $\gamma(t) = C\lambda - m_x(t)(C\mu - v)$. Для установившегося режима получаем

$$\gamma = C\lambda - \lambda(C\mu - v)/\mu = \lambda v/\mu = m_x v.$$

Таким образом, оба рассмотренных условия в установившемся режиме приводят к одинаковой интенсивности производства.

При исследовании различных технико-экономических проблем возникает иногда следующая задача: допустим, что в момент $t_0 (t_0 > 0)$ поступила точная информация о том, сколько имеется в строю образцов $x_0 = X(t_0)$ и сколько имеется расходуемых единиц на складе $y_0 = Y(t_0)$. Требуется определить протекание процессов $X(t)$ и $Y(t)$ в будущем при $t > t_0$ после того, как поступила такая информация.

Решение этой задачи сводится к тому, что интегрирование полной системы уравнений нужно проводить при $t > t_0$ с начальными условиями на момент t_0 :

$$\begin{aligned} m_x(t_0) &= x_0; \quad m_y(t_0) = y_0; \quad D_x(t_0) = \\ &= D_y(t_0) = k_{xy}(t_0, t_0) = 0. \end{aligned}$$

Методы решения, рассмотренные в этом примере, могут быть использованы при составлении динамических моделей межотраслевого баланса экономики, которые позволят находить не только средние значения выпускаемых и потребляемых продуктов, но определять их дисперсии и корреляции, что даст возможность проводить более тонкий анализ экономики.

6

ПРОЦЕССЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

6.1. Введение

В большинстве практически интересных задач потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, могут быть с достаточной точностью аппроксимированы потоками Пуассона. В этом случае процесс, протекающий в системе, благодаря замене реальных потоков пуассоновскими сводится к марковскому, т. е. становится процессом без последействия, для которого оказывается удобным аналитическое исследование (примеры приведены в предыдущих главах).

Представление процесса функционирования системы в виде марковского случайного процесса с непрерывным временем позволяет применить для описания процесса ее функционирования аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений.

Замена эмпирического процесса марковским путем замены реальных потоков пуассоновскими потоками приводит, естественно, к некоторым погрешностям, величина которых зависит от степени последействия реальных потоков. В большинстве практических случаев эти погрешности невелики и не превышают погрешностей в исходных данных, возникающих при статистической обработке реальных потоков. Однако иногда имеют место случаи, когда потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, являются потоками с ограниченным последействием, замена которых пуассоновскими потоками возможна лишь в качестве первого приближения.

В теории массового обслуживания имеется большое число работ (наиболее широко известны [27, 48, 14]), где применительно к системам обслуживания рассмотрены различные виды обслуживания при потоках с ограниченным последействием. Однако применительно к системам,

функционирование которых описывается процессами с дискретным числом состояний и непрерывным временем, т. е. уравнениями динамики средних и уравнениями для вероятностей состояний марковского процесса, использование потоков с ограниченным последствием еще не нашло широкого применения.

На основании этого возникает необходимость рассмотреть вопрос о том, каким образом учесть последствие потоков так, чтобы процесс функционирования систем можно было описать по-прежнему в виде марковского процесса с непрерывным временем и дискретным числом состояний.

В данной главе рассматривается простой метод, который в некоторых случаях может быть полезным в ситуациях такого рода. В этом методе используются два свойства потока Эрланга, состоящих в том, что, во-первых, поток Эрланга является потоком с ограниченным последствием и, во-вторых, закон распределения промежутка времени между событиями в потоке Эрланга является композицией показательных законов распределения.

С этой целью в начале главы приведены основные понятия процессов с ограниченным последствием, затем рассматриваются свойства потоков Эрланга, способ замены реальных потоков потоками Эрланга и способ представления процессов с ограниченным последствием в виде марковского процесса с непрерывным временем и дискретным числом состояний.

6.2. Основные понятия и определения процессов с ограниченным последствием

Процессом с ограниченным последствием будем называть такой процесс, при котором потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, являются потоками с ограниченным последствием.

Условимся называть потоком с ограниченным последствием всякий поток, у которого промежутки времени между событиями в потоке $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ — последовательность независимых случайных величин. Для однозначного описания такого потока достаточно задать законы распределения всех величин τ_k ($k=1, 2, \dots, n$).

Если поток без последствия, то величины $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ очевидно, взаимонезависимы. Однако обратное утверждение неверно. Взаимная независимость величин τ_k в значительной степени ограничивает последствие, но не исключает его полностью.

Потоки с взаимонезависимыми τ_k но с наличием последствия играют важную роль при моделировании реальных процессов. Поэтому займемся установлением некоторых основных свойств таких потоков.

Известно, что если данный поток стационарный и ординарный, то полное отсутствие последствия влечет за собой простейший характер потока. Следовательно, стационарный и ординарный поток с ограниченным последствием можно рассматривать как некоторое обобщение простейшего потока.

Стационарный ординарный поток с ограниченным последствием будем для краткости называть потоком Пальма [53]. Для потоков Пальма совместный закон распределения $f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ представляется в виде

$$f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = f(\tau_1)f(\tau_2) \dots f(\tau_n). \quad (6.2.1)$$

Законы распределения $f(\tau_i)$ при $i > 1$ являются условными законами распределения величин τ_i при условии, что в начальный момент промежутка τ_i ($i > 1$) произошло событие. В отличие от этого, закон распределения $f(\tau_1)$ является безусловным законом распределения промежутка τ_1 , при этом относительно появления события в начальный момент времени ничего не известно.

Для потоков Пальма имеет место соотношение

$$f(\tau_2) = f(\tau_3) = \dots = f(\tau_n). \quad (6.2.2)$$

Отсюда следует, что промежутки времени τ_i между событиями в потоке Пальма при $i > 1$ одинаково распределены. Математическое ожидание случайной величины τ_i при $i > 1$

$$\bar{\tau} = \int_0^{\infty} \tau f(\tau) d\tau \quad (6.2.3)$$

имеет смысл средней длины промежутка времени между событиями в потоке, при этом плотность потока событий Λ равна:

$$\Lambda = 1/\bar{\tau}. \quad (6.2.4)$$

В качестве примера потока Пальма можно привести поток с равномерным распределением интервала времени между событиями в потоке, для которого плотность распределения

$$f(\tau) = 1/l \quad (0 \leq \tau \leq l).$$

Для стационарных потоков с ограниченным последствием имеет место следующая зависимость между $f(\tau_1)$ и $f(\tau)$ (формула Пальма):

$$f(\tau_1) = \Lambda \left[1 - \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau \right], \quad (6.2.5)$$

где Λ — плотность потока Пальма, $f(\tau)$ — закон распределения промежутка времени между событиями в потоке Пальма.

Используя (6.2.5), можно получить законы распределения промежутка времени до появления первого события в потоке $f(\tau_1)$ для любых стационарных потоков с ограниченным последствием.

Примером стационарного потока с ограниченным последствием может служить также поток Эрланга, который мы рассмотрим более подробно.

6.3. Потоки Эрланга и их свойства

Потоком Эрланга k -го порядка называется ординарный стационарный поток с ограниченным последствием, у которого промежутки времени T между событиями в потоке являются суммами случайных величин, распределенных по показательному закону с параметром λ .

Поясним это с помощью рис. 6.1. Обозначим через E события, соответствующие пуассоновскому потоку, и предположим, что они пронумерованы в порядке их появления, начиная с некоторого исходного момента. Пусть E^* — собы-

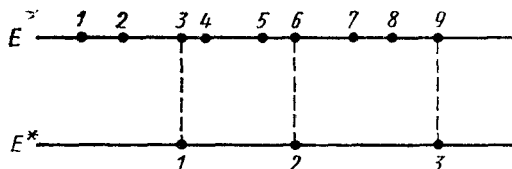


Рис. 6.1.

тия, определяемые следующим образом: E^* наступает в момент появления событий E с номером, кратным k . Тогда поток, состоящий из последовательности событий E^* , и будет потоком Эрланга k -го порядка. В частности, на рисунке приведен поток Эрланга при $k=3$. Очевидно, при $k=1$ имеем исходный пуассоновский поток, для которого промежутки времени T между событиями в потоке распределены по закону с плотностью

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (6.3.1)$$

где λ — параметр потока.

Промежуток времени между n -м и $n+k$ -м событиями в потоке Эрланга равен сумме k промежутков времени между событиями в пуассоновском потоке. Следовательно, искомый закон является k -кратной композицией закона (6.3.1), плотность распределения его имеет вид

$$f_k(t) = \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, \quad (6.3.2)$$

где k — порядок потока Эрланга, λ — плотность исходного пуассоновского потока.

Закон распределения с плотностью (6.3.2) называется законом Эрланга k -го порядка.

В качестве примера на рис. 6.2 приведены законы распределения $f_k(t)$ для $k=1, 2, 3, 6, 11, 26$ при $\lambda=1$.

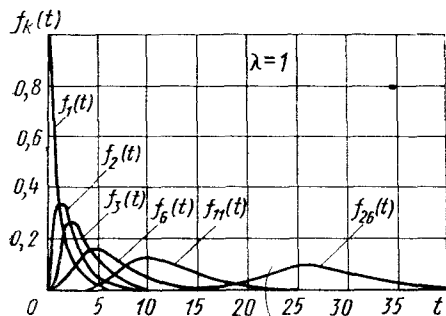


Рис. 6.2.

Известно, что поток называется потоком с ограниченным последствием (или потоком Пальма), если промежутки времени между последовательными событиями представляют собой независимые случайные величины. Следовательно, потоки Эрланга являются потоками с ограниченным последствием (потоками Пальма), так как промежутки времени T между событиями, являясь суммами независимых случайных величин, независимы между собой.

Математическое ожидание и дисперсия промежутка времени между событиями в потоке Эрланга k -го порядка определяются формулами:

$$m_k = k/\lambda, \quad (6.3.3)$$

$$D_k = k/\lambda^2. \quad (6.3.4)$$

Из этих формул получаем, что для закона Эрланга любого порядка справедливо соотношение

$$m_k = \lambda D_k. \quad (6.3.5)$$

Плотность потока Эрланга Λ_k обратна величине математического ожидания m_k :

$$\Lambda_k = \lambda/k, \quad (6.3.6)$$

где λ — параметр показательного закона.

Из (6.3.6), (6.3.3), (6.3.4) имеем:

$$m_k = 1/\Lambda_k, \quad (6.3.7)$$

$$D_k = 1/k\Lambda_k^2. \quad (6.3.8)$$

С учетом (6.3.6) выражение $f_k(t)$ через плотность Λ_k имеет вид:

$$f_k(t) = \frac{[k\Lambda_k]^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\Lambda_k t}. \quad (6.3.9)$$

Законы $f_k(t)$ при $\Lambda_k=1$ для $k=1, 2, 3, 6, 11, 26$ показаны на рис. 6.3.

Из (6.3.7), (6.3.8) и рис. 6.3 видно, что при постоянной плотности потока Λ_k математическое ожидание не зависит от порядка потока k , а дисперсия с возрастанием k неограниченно убывает, при $k \rightarrow \infty$ $D_k \rightarrow 0$.

Таким образом, поток Эрланга обладает ценным свойством, которое состоит в следующем: при неограниченном увеличении порядка потока k и при постоянной плотности Λ_k поток Эрланга приближается к регулярному потоку с постоянными интервалами времени между событиями, равными $1/\Lambda_k$, а плотность распределения $f_k(t)$ при $k \rightarrow \infty$ обращается в δ -функцию в точке $t=1/\Lambda_k$.

Это свойство потоков Эрланга позволяет при различных k получить практически любую степень последствия потока — от полного отсутствия последствия ($k=1$) до жесткой функциональной связи между моментами появления событий (при $k \rightarrow \infty$). Таким образом, порядок потока k может служить как бы мерой последствия, имеющегося в потоке. Заметим, что даже при $k \rightarrow \infty$ поток Эрланга остается потоком с ограниченным последствием.

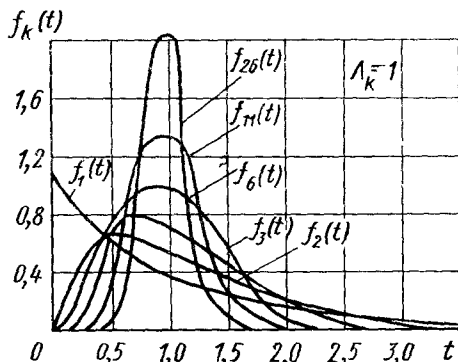


Рис. 6.3.

Определим асимметрию S_k закона Эрланга:

$$S_k = \mu_{k_3} / (V D_k)^3, \quad (6.3.10)$$

где μ_{k_3} — третий центральный момент распределения $f_k(t)$.

В свою очередь,

$$\mu_{k_3} = \alpha_{k_3} - 3m_k(D_k - m_k^2) + 2m_k^3, \quad (6.3.11)$$

где α_{k_3} — третий начальный момент распределения $f_k(t)$:

$$\alpha_{k_3} = \int_0^{\infty} t^3 f_k(t) dt = \int_0^{\infty} t^3 \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} dt. \quad (6.3.12)$$

Берем интеграл по частям, после чего получаем

$$\alpha_{k_3} = k(k+1)(k+2)/\lambda^3. \quad (6.3.13)$$

Подставляя полученные выражения в (6.3.10) и производя несложные преобразования, получаем

$$S_k = 2/\sqrt{k}. \quad (6.3.14)$$

Для показательного закона ($k=1$) $S_k=2$. При $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{k}} = 0. \quad (6.3.15)$$

Таким образом, при увеличении порядка потока k скошенность распределения постепенно исчезает, распределение становится более симметричным. Закон Эрланга любого порядка имеет положительную асимметрию.

Определим эксцесс распределения $f_k(t)$:

$$\varepsilon_{x_k} = [\mu_{k_4} / (\sqrt{D_k})] - 3, \quad (6.3.16)$$

где μ_{k_4} — четвертый центральный момент распределения $f_k(t)$:

$$\mu_{k_4} = \alpha_{k_4} - 4m_k \alpha_{k_3} + 6m_k^2 \alpha_{k_2} - 3m_k^4. \quad (6.3.17)$$

Начальные моменты определим аналогично (6.3.12):

$$\begin{aligned} \alpha_{k_4} &= k(k+1)(k+2)(k+3)/\lambda^4, \\ \alpha_{k_3} &= k(k+1)(k+2)/\lambda^3, \\ \alpha_{k_2} &= k(k+1)/\lambda^2. \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

Подставляя полученные выражения в (6.3.17) и (6.3.16) и производя несложные преобразования, получим

$$\varepsilon_{x_k} = 6/k. \quad (6.3.19)$$

Для показательного закона ($k=1$) $\varepsilon_{x_k} = 6$. С увеличением k ε_{x_k} уменьшается и в пределе при $k \rightarrow \infty$ $\varepsilon_{x_k} \rightarrow 0$ (так как закон Эрланга при $k \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к нормальному закону). Пределы изменения $\varepsilon_{x_k} = 6 \div 0$. Следовательно, закон Эрланга любого порядка всегда имеет положительный эксцесс.

Используя зависимость числовых характеристик и степени последствия потока Эрланга от порядка потока k , рассмотрим способ замены реальных потоков с ограниченным последствием потоками Эрланга различного порядка.

6.4. Замена реальных потоков потоками Эрланга

Произвольные потоки с ограниченным последствием, встречающиеся на практике, можно заменить потоками Эрланга с теми же математическим ожиданием и дисперсией промежутка времени между событиями в потоке.

Пусть, например, в результате статистической обработки промежутков времени между событиями в произвольном потоке с ограниченным последствием получены оценки для математического ожидания и дисперсии величины T : $m_c=2$, $D_c=1$.

Заменяем этот поток потоком Эрланга с теми же характеристиками. Из (6.3.5) получаем $\lambda = m_c/D_c$.

Далее из (6.3.3) и (6.3.4) получаем

$$k = m_c^2/D_c,$$

откуда $k=4$.

Таким образом, произвольный поток с ограниченным последствием с математическим ожиданием промежутка времени между событиями $m_c=2$ и дисперсией $D_c=1$ можно заменить потоком Эрланга 4-го порядка с плотностью $\lambda=2$.

Следует заметить, что такая замена возможна при соблюдении условия

$$D_c \leq m_c^2. \quad (6.4.1)$$

Ввиду функциональной зависимости между математическим ожиданием и дисперсией в потоке Эрланга рассмотренная замена возможна не для любых значений математического ожидания m_c и дисперсии D_c произвольного потока. Например, при $m_c=2$ и $D_c=1,6$ получаем $k=2,5$, т. е. дробное значение k . Таким образом, используя лишь рассмотренные потоки Эрланга, не всегда удастся реальный поток с ограниченным последствием заменить рассмотренными потоками Эрланга. Однако существует класс потоков, так называемые обобщенные потоки Эрланга [8], с помощью которых можно заменить любой реальный поток с ограниченным последствием, с любым математическим ожиданием и дисперсией, если соблюдено условие (6.4.1).

Обобщенным потоком Эрланга называется поток, у которого промежутки времени T между событиями являются суммами случайных величин T_i , подчиняющихся показательному закону распределения с различными параметрами λ_i .

Для обобщенных законов Эрланга введем обозначение $f^*_k(t)$. Тогда закон распределения с плотностью

$$f^*_k(t) = \left(\prod_{i=1}^k \lambda_i \right) \sum_{i=1}^k e^{-\lambda_i t} \left/ \prod_{j=1}^k (\lambda_j - \lambda_i) \right. \quad (6.4.2)$$

будем называть обобщенным законом Эрланга k -го порядка.

Определим числовые характеристики закона $f^*_k(t)$ — математическое ожидание m^*_{*k} , дисперсию D^*_{*k} , асимметрию S^*_{*k} и эксцесс ε^*_{*k} .

В общем случае для обобщенного закона Эрланга k -го порядка $f^*_k(t)$ с параметрами λ_i ($i=1, 2, \dots, k$) математическое ожидание

$$m^*_{*k} = \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \lambda_i \left/ \prod_{i=1}^k \lambda_i \right., \quad (6.4.3)$$

дисперсия

$$D^*_{*k} = \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \lambda_i^2 \left/ \prod_{i=1}^k \lambda_i^2 \right., \quad (6.4.4)$$

асимметрия

$$S^*_{*k} = 2 \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \lambda_i^3 \left/ \sqrt{\left(\sum_{j=1}^k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \lambda_i^2 \right)^3} \right., \quad (6.4.5)$$

эксцесс

$$\varepsilon^*_{*k} = 6 \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \lambda_i^4 \left/ \left(\sum_{j=1}^k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \lambda_i^2 \right)^2 \right. \quad (6.4.6)$$

Рассмотрим некоторые свойства обобщенных законов Эрланга. Для простоты возьмем обобщенный закон Эрланга 2-го порядка

$$f^*_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (6.4.7)$$

Очевидно, при $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$ $f_2^*(t) = f_2(t)$, где $f_2(t)$ — закон Эрланга второго порядка.

При $\lambda_2 \rightarrow \infty$

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} f_2^*(t) = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} = f_1(t), \quad (6.4.8)$$

где $f_1(t)$ — показательный закон с параметром λ_1 .

Естественно, при λ_1 или λ_2 , стремящихся к нулю, $f_2^*(t) \rightarrow 0$.

При рассмотрении обобщенных законов Эрланга более высокого порядка выявляются некоторые дополнительные свойства. Рассмотрим изменение обобщенного закона Эрланга третьего порядка $f_3^*(t)$ при изменении параметров λ_1 , λ_2 и λ_3 :

$$f_3^*(t) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right]. \quad (6.4.9)$$

Очевидно, при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ $f_3^*(t) = f_3(t)$. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, а $\lambda_3 \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{\lambda_3 \rightarrow \infty} f_3^*(t) = f_2^*(t). \quad (6.4.10)$$

Если же $\lambda_3 = \lambda_2$, но $\lambda_2 \neq \lambda_1$, то

$$\lim_{\lambda_3 \rightarrow \lambda_2} f_3^*(t) = f_{3(1)}^*(t), \quad (6.4.11)$$

где $f_{3(1)}^*(t)$ — обобщенный закон Эрланга 3-го порядка, у которого два параметра из трех равны между собой.

Если для $f_{3(1)}^*(t)$ положить $\lambda_1 = \lambda_2$, то

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} f_{3(1)}^*(t) = f_3(t). \quad (6.4.12)$$

Если же для $f_{3(1)}^*(t)$ положить $\lambda_1 \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} f_{3(1)}^*(t) = f_2(t). \quad (6.4.13)$$

Примем для обобщенных законов Эрланга с несколькими равными параметрами λ_0 следующие обозначения: $f_k^*(t)$ — все k параметров λ_i разные; $f_{k(h-2)}^*(t)$ — два параметра равны λ_0 , остальные $k-2$ параметров λ_i разные; $f_{k(h-3)}^*(t)$ — три параметра равны λ_0 , остальные $k-3$ параметров λ_i разные; $f_{k(1)}^*(t)$ — $k-1$ параметров равны λ_0 , один параметр λ_1 отличен от остальных; $f_h(t)$ — все параметры равны между собой, т. е. λ_i ($i=1, 2, \dots, k$) равны λ_0 .

Используя эти обозначения, все превращения обобщенных законов Эрланга при изменении параметров λ_i можно представить в виде рис. 6.4.

Переходы слева направо, обозначенные на схеме горизонтальными стрелками, происходят при одном из $\lambda_i \rightarrow \lambda_0$.

Переходы слева направо, обозначенные на схеме вертикальными стрелками, происходят, когда один из параметров $\lambda_i \rightarrow \infty$, т. е. при понижении порядка законов Эрланга, при этом количество равных параметров λ_0 остается прежним. Переходы справа налево, обозначенные вертикальными стрелками, происходят, когда один из параметров $\lambda_0 \rightarrow \infty$, при этом также получается понижение порядка закона Эрланга.

Из рассмотрения свойств обобщенных законов Эрланга можно сделать важный для практики вывод, что при постоянной плотности потока

Эрланга $\Lambda^*_{k_0}$, а следовательно, при постоянном математическом ожидании $m^*_{k_0}$, изменяя параметры λ_i от λ_0 до ∞ , можно получить различные значения дисперсии $D^*_{k_0}$. При этом наиболее удобным в практическом отношении является обобщенный закон Эрланга $f^*_{k(1)}(t)$, у которого все параметры равны λ_0 , кроме одного — λ_1 . Варьируя эти параметры при постоянном математическом ожидании $m^*_{k_0}$, можно получить различные значения дисперсии $D^*_{k_0}$.

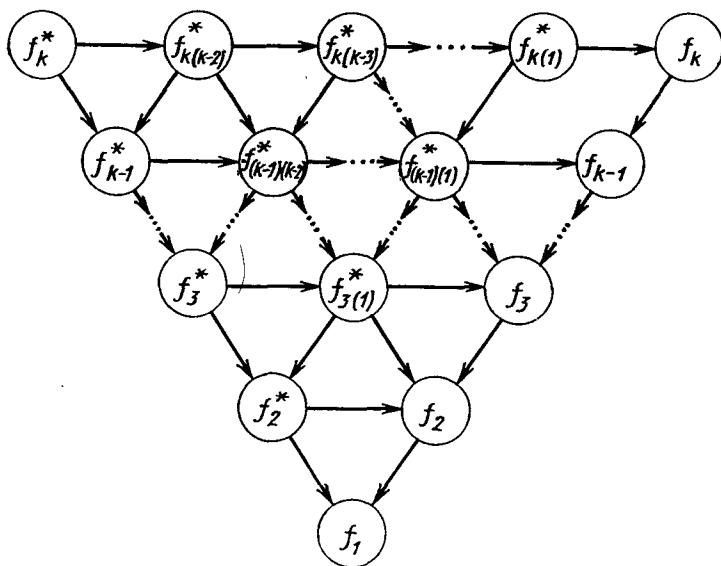


Рис. 6.4.

Используя это свойство, можно реальные потоки с ограниченным последствием заменять потоками Эрланга с теми же математическим ожиданием и дисперсией промежутка времени между событиями в потоке. При этом, однако, необходимо соблюдать условие

$$m_k^2/k \leq D_k \leq m_k^2. \quad (6.4.14)$$

Из выражений (6.4.3) и (6.4.4) нетрудно получить общее выражение для математического ожидания и дисперсии закона $f^*_{k(1)}(t)$:

$$m^*_{k(1)} = \frac{(k-1)\lambda_1 + \lambda_0}{\lambda_1\lambda_0}, \quad (6.4.15)$$

$$D^*_{k(1)} = \frac{(k-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_1^2\lambda_0^2}. \quad (6.4.16)$$

Тогда порядок замены реального потока с ограниченным последствием с математическим ожиданием m_c и дисперсией D_c обобщенным потоком Эрланга $f^*_{k(1)}(t)$ с теми же характеристиками сводится к следующему.

Определяется порядок потока Эрланга $k = m_c^2/D_c$. Дробное значение k округляется в большую сторону.

Из выражения (6.4.15) имеем

$$\lambda_1 = \lambda_0 / (1 - k + \lambda_0 m_c). \quad (6.4.17)$$

Подставляя (6.4.17) в (6.4.16) и производя несложные преобразования, получим

$$(m_c^2 - D_c) \lambda_0^2 - 2(1 - k) m_c \lambda_0 + k(k - 1) = 0,$$

откуда

$$\lambda_{0_{1,2}} = \frac{m_c(k-1) \pm \sqrt{(k-1)^2 m_c^2 - k(k-1)(m_c^2 - D_c)}}{(m_c^2 - D_c)}. \quad (6.4.18)$$

Подставляя λ_{0_1} и λ_{0_2} в (6.4.17), получим два значения λ_{1_1} и λ_{1_2} . Таким образом, для одних и тех же значений m_c и D_c получаем закон $f_{k(1)}^*(t)$ с двумя различными сочетаниями параметров λ_1 и λ_0 : $(\lambda_{1_1}, \lambda_{0_1})$, $(\lambda_{1_2}, \lambda_{0_2})$, при этом $m_{k_1}^* = m_c$, $D_{k_1}^* = D_c$.

Метод, с помощью которого получено распределение Эрланга, подсказывает способ моделирования процессов с ограниченным последствием, при котором потоки, переводящие систему из одного состояния в другое, являются потоками Эрланга (рис. 6.1).

Предположим для конкретности, что события E обозначают процесс переходов системы из состояния в состояние, число состояний системы равно k и процесс протекает следующим образом: 1) в каждый момент времени система может находиться только в одном из k состояний; 2) система последовательно проходит состояния 1, 2, ..., k . Время пребывания системы в каждом состоянии распределено по показательному закону с параметром $\lambda = k\Lambda_k$.

Длительность пребывания системы во всех k состояниях соответствует промежутку времени между событиями E^* , эти события и образуют поток Эрланга.

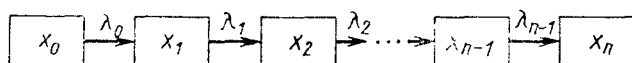
Такое разбиение каждого состояния системы на k состояний позволяет продемонстрировать важный факт. Пусть $n^*(t)$ и $n(t)$ — соответственно числа появления событий E^* и E за время от 0 до t . Пуассоновский процесс $n(t)$ является марковским, процесс $n^*(t)$, напротив, не марковский: вероятность того, что $n^*(t)dt = j$ при условии $n^*(t) = i$, зависит от момента появления последнего события в потоке E^* , следовательно, от того, в каком из k состояний находится система [от значения $n(t)$]. Следовательно, разбиение каждого состояния системы на k состояний позволяет свести исследуемый процесс к марковскому $n(t)$, который более удобен для исследования.

6.5. Описание процесса с ограниченным последствием при блуждании из начального состояния

Рассмотрим способ, позволяющий в необходимых случаях описывать процессы функционирования систем уравнениями для марковского процесса с непрерывным временем и дискретным числом состояний при потоках событий, имеющих ограниченное последствие. В качестве потоков с ограниченным последствием будем рассматривать только потоки Эрланга, считая, что произвольный стационарный поток с ограниченным последствием всегда можно заменить обобщенным потоком Эрланга способом, рассмотренным в § 6.4.

Особенность данного процесса состоит в том, что каждое из подмножеств Y_{β} и Y_{γ} состоит из единственного состояния и для определенности будем считать, что $Y_{\beta} = \{x_0\}$, $Y_{\gamma} = \{x_n\}$.

Введем ограничение, состоящее в том, что процесс блуждания по состояниям подмножества Y возможен только в одном направлении: $x_1 \rightarrow x_n$.



В первую очередь, нас будет интересовать закон распределения времени T пребывания в транзитивном подмножестве состояний Y при условии, что время отсчитывается от момента начала блуждания процесса из состояния x_0 до момента выхода процесса из состояний подмножества Y , т. е. до момента перехода процесса из состояния x_{n-1} в состояние x_n подмножества Y_r .

$$\dot{p}_0(t) = -\lambda_0 p_0(t),$$

$$\dot{p}_1(t) = -\lambda_1 p_1(t) + \lambda_0 p_0(t), \quad (6.5.1)$$

• • • • •

$$\dot{p}_n(t) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t).$$

$$p_0(0)=1, \quad p_i(0)=0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (6.5.2)$$
$$\dot{f}(t) = \dot{p}_n(t). \quad (6.5.3)$$

Здесь случайная величина T — время пребывания в транзитивном подмножестве состояний Y — является суммой случайных величин τ_i , распределенных по показательному закону с параметрами λ_i . Очевидно, закон распределения случайной величины T — композиция показательных законов распределения с параметрами λ_i , следовательно, является

обобщенным законом Эрланга. Порядок закона Эрланга определяется количеством состояний подмножества Y . Для $n-1$ состояний подмножества Y имеем обобщенный закон Эрланга $(n-1)$ -го порядка $f_{n-1}^*(t)$.

Для рассматриваемого частного случая, таким образом, закон распределения случайной величины T можно найти, не интегрируя систему уравнений (6.5.1).

Отметим то важное для практики обстоятельство, о котором речь шла раньше. Оно состоит в том, что если транзитивное подмножество состояний Y представить в виде одного обобщенного состояния $\tilde{x}$ (рис. 6.6), время пребывания в котором T определяется законом Эрланга, то процесс, протекающий в этом преобразованном множестве состояний $\tilde{X}=\{x_0, \tilde{x}, x_n\}$, будет уже не марковским, а процессом с ограниченным последствием.

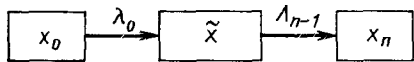


Рис. 6.6.

Справедливо обратное утверждение. Если имеем процесс с ограниченным последствием, состояния которого составляют множество $\tilde{X}=\{x_0, \tilde{x}, x_n\}$, то данный процесс с ограниченным последствием можно представить в виде марковского случайного процесса с множеством состояний $X=\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ путем введения дополнительных состояний x_i ($i=1, 2, \dots, n-1$). При этом произвольные потоки переходов процесса из состояния в состояние заменяются потоками Эрланга соответствующего порядка, а состояние $\tilde{x}$ представляется в виде транзитивного множества состояний $Y=\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$. В этом случае процесс с ограниченным последствием может быть описан дифференциальными уравнениями (6.5.1).

6.6. Описание процесса с ограниченным последствием при блуждании из транзитивного состояния

До сих пор мы рассматривали случай, когда процесс начинает блуждание из состояния x_0 . Рассмотрим теперь тот же процесс, состояние которого представляет множество $X=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ с транзитивным подмножеством состояний Y при условии, что в начальный момент времени процесс находится в транзитивном подмножестве состояний Y . Общий вид закона распределения времени пребывания в транзитивном подмножестве состояний по-прежнему определяется зависимостью (6.5.3) $f(t) = \dot{p}_n(t)$.

Однако для того чтобы представить процесс с ограниченным последствием в виде марковского случайного процесса с помощью введения дополнительных состояний, необходимо определить закон распределения времени T пребывания процесса в обобщенном состоянии $\tilde{x}$, поскольку вид этого закона будет зависеть от начала отсчета времени блуждания процесса.

Для любого потока с ограниченным последствием закон распределения времени появления первого события после начала отсчета определяется выражением (6.2.5)

$$f(\tau_1) = \Lambda \left[1 - \int_0^{\tau_1} f(t) dt \right],$$

где Λ — плотность потока, $f(t)$ — закон распределения промежутка времени между событиями в потоке.

Так, для потока Эрланга 2-го порядка закон распределения промежутка времени до появления первого события $f(\tau_1)$ равен:

$$f^{(2)}(\tau_1) = \frac{\lambda}{2} \left[1 - \int_0^{\tau_1} \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt \right] = \frac{1}{2} [\lambda e^{-\lambda \tau_1} + \lambda^2 \tau_1 e^{-\lambda \tau_1}] = \frac{1}{2} f_1(t) + \frac{1}{2} f_2(t), \quad (6.6.1)$$

где λ — плотность исходного простейшего потока, $f_1(t)$ — плотность распределения показательного закона, $f_2(t)$ — плотность распределения закона Эрланга 2-го порядка.

Таким образом, закон распределения промежутка времени до появления первого события $f^{(2)}(\tau_1)$ для потока Эрланга 2-го порядка есть полусумма показательного закона и закона Эрланга 2-го порядка.

Для потока Эрланга 3-го порядка закон распределения промежутка времени до появления 1-го события $f^{(3)}(\tau_1)$ равен:

$$f^{(3)}(\tau_1) = \frac{\lambda}{3} \left[1 - \int_0^{\tau_1} \frac{\lambda (\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} dt \right] = \frac{1}{3} \left[\lambda e^{-\lambda \tau_1} + \lambda^2 \tau_1 e^{-\lambda \tau_1} + \frac{\lambda^3 \tau_1^2}{2} e^{-\lambda \tau_1} \right] = \\ = \frac{1}{3} f_1(t) + \frac{1}{3} f_2(t) + \frac{1}{3} f_3(t). \quad (6.6.2)$$

Для потока Эрланга k -го порядка

$$f^{(k)}(\tau_1) = 1/k [f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_k(t)]. \quad (6.6.3)$$

Таким образом, для потока Эрланга любого порядка закон распределения промежутка времени до появления первого события в потоке $f^{(k)}(\tau_1)$ можно определить, пользуясь следующим простым мнемоническим правилом, а именно: необходимо просуммировать законы распределения Эрланга от $m=1$ до k и умножить на коэффициент $1/k$.

Очевидно, при $k \rightarrow \infty$

$$f^{(k)}(\tau_1) = \lambda/k = \Lambda_k = 1/\tau. \quad (6.6.4)$$

Для потока Эрланга k -го порядка имеем

$$f^{(k)}(\tau_1) = \frac{\lambda}{k} \sum_{m=1}^k \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda t}, \quad (6.6.5)$$

где λ — плотность простейшего потока.

Проинтегрировав систему уравнений (6.5.1) с начальными условиями

$$p_0(0) = 0, p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_{n-1}(0) = 1/(n-1), p_n(0) = 0, \quad (6.6.6)$$

получим

$$f(t) = p_n(t) = \frac{\lambda}{k} \sum_{m=1}^k \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda t}. \quad (6.6.7)$$

Сравнивая выражения (6.6.5) и (6.6.7), нетрудно видеть, что для одного и того же числа дополнительных состояний они совпадают. Следовательно, положив в качестве начальных условий (6.6.6), можно про-

цесс с ограниченным последствием свести к марковскому при условии, что в начальный момент времени процесс находится в состоянии $\tilde{x}$.

Рассмотренный метод сведения процессов с ограниченным последствием к марковскому процессу в литературе носит название метода

вложенных цепей Маркова. Действительно, при таком рассмотрении расширение определения истинного состояния $\tilde{x}$ позволяет представлять заданный процесс как бы вложенным в другой, более сложный процесс, сохраняющий марковское свойство.

На рис. 6.7 представлена зависимость изменения $\tilde{x}(t)$ при различном числе дополнительных состояний, т. е. при различных порядках потоков Эрланга, переводящих систему из состояния $\tilde{x}$ в состояние x_n .

Из рассмотрения этих зависимостей видно, что различие в изменении $\tilde{x}(t)$ для пуассоновского потока ($k=1$) и для потоков с различной степенью последствия ($k=2, 3, \dots, \infty$) зависит от степени последствия потока. Чем больше степень последствия потока, тем существеннее различие в изменении $\tilde{x}(t)$ при пуассоновском потоке и потоке с ограниченным последствием;

следовательно, тем больше ошибки, возникающие на практике от замены потоков с ограниченным последствием пуассоновскими потоками. Введение дополнительных состояний позволяет избежать ошибок.

6.7. Разреженные потоки с ограниченным последствием

До сих пор мы считали, что поток событий, переводящий систему из состояния $\tilde{x}_1$ в состояние x_n , — поток Эрланга, при этом каждое событие является успешным с вероятностью, равной единице.

Рассмотрим теперь случай, когда событие в потоке с вероятностью p_1 является успешным, а с вероятностью $1-p_1$ — безуспешным. Другими словами, при появлении очередного события система с вероятностью p_1 переходит из состояния $\tilde{x}_1$ в состояние x_n , а с вероятностью $1-p_1$ остается в состоянии $\tilde{x}_1$.

Определим закон распределения времени пребывания системы в состоянии $\tilde{x}_1$ для рассматриваемого случая.

Пусть исходный поток событий является потоком Эрланга 2-го порядка. Тогда закон распределения времени пребывания системы в состоянии $\tilde{x}_1$ является законом распределения промежутка времени между успешными событиями в потоке Эрланга 2-го порядка. Граф состояний для этого случая можно представить в виде графа с подмножеством состояний $Y=\{x_1, x_2\}$ (рис. 6.8).

Закон распределения промежутка времени между успешными событиями $f_y(t)$ определим как сумму композиций четного числа показательных законов $f_1^{(0)}(t)$ и $f_1^{(1)}(t)$, причем каждое слагаемое этой суммы умножается на вероятность того, что все предыдущие события были безуспешными, а очередное событие будет успешным с вероятностью p_1 :

$$f_y(t) = p_1 f_1^{(0)}(t) * f_1^{(1)}(t) + p_1 (1-p_1) f_1^{(0)}(t) * f_1^{(1)}(t) * f_1^{(0)}(t) * f_1^{(1)}(t) + \dots, \quad (6.7.1)$$

где $f_1^{(0)}(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$, $f_1^{(1)}(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$.

При

$$\hat{f}_1^{(0)}(t) = \hat{f}_1^{(1)}(t) = \hat{f}_1(t)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_y(t) &= p_1 \hat{f}_2(t) + p_1 (1 - p_1) \hat{f}_4(t) + p_1 (1 - p_1)^2 \hat{f}_8(t) + \dots = \\ &= p_1 \lambda^2 t e^{-\lambda t} \left(1 + (1 - p_1) \frac{\lambda^2 t^2}{3!} + (1 - p_1)^2 \frac{\lambda^4 t^4}{5!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Обозначим $(1 - p_1) \lambda^2 t e^{-\lambda t} = x^2$, после чего получим

$$\hat{f}_y(t) = p_1 \lambda^2 t e^{-\lambda t} / x \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) = (p_1 \lambda^2 t e^{-\lambda t} / x) \operatorname{sh} x,$$

или окончательно

$$\hat{f}_y(t) = (p_1 / \sqrt{1 - p_1} \lambda e^{-\lambda t}) \operatorname{sh} \lambda \sqrt{1 - p_1} t. \quad (6.7.2)$$

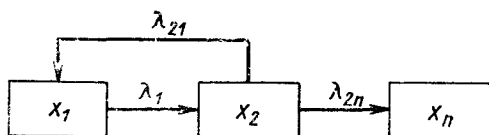


Рис. 6.8.

Аналогичным образом можно определить закон распределения промежутка времени между успешными событиями в потоке Эрланга любого порядка.

В общем виде $\hat{f}_{yh}(t)$ определяется выражением

$$\hat{f}_{yh}(t) = p_1 \lambda e^{-\lambda t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{h(m-1)}}{[k(m-1)!]} (1 - p_1)^{m-1}. \quad (6.7.3)$$

Закон распределения промежутка времени между успешными событиями в потоках Эрланга различного порядка можно определить также методом дифференциальных уравнений аналогично приведенному в гл. 3.

7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ

7.1. Критерии и методы

Изучение процессов функционирования систем с применением аналитических методов является одним из подходов, позволяющих во многих случаях получить характеристики процессов, протекающих в системах, а также проанализировать функционирование систем и их составляющих элементов.

Применение аналитических методов исследования систем позволяет изучать влияние различных факторов и параметров систем, не прибегая к конструированию и испытаниям реальных систем. В связи с этим при-

менение аналитических методов исследования систем чаще оказывается более дешевым и быстрее приводит к желаемым результатам, чем использование реального оборудования. Аналитические исследования важны также для понимания процессов функционирования систем, для которых метод экспериментов на реальной системе невозможен или неприемлем из-за больших затрат времени или средств или из-за невозможности провести эксперимент в реальных условиях (например, для военных систем).

Аналитические модели и моделирование дополняют друг друга: модель представляет процесс или систему, а моделирование позволяет определить, как процесс или система будет реагировать на различные условия или ситуации.

Аналитическая модель реальной системы является тем абстрактным формально описанным объектом, изучение которого возможно с помощью математических методов, в том числе математического моделирования. Сложность и многообразие процессов функционирования реальных систем не позволяют строить их абсолютно адекватные математические модели.

Математическая модель, описывающая формализованный процесс функционирования системы, в состоянии охватить только основные, характерные его закономерности, оставляя в стороне несущественные второстепенные факторы.

При разработке модели любую систему можно рассматривать как совокупность взаимосвязанных элементов, предназначенную для выполнения некоторого определенного вида работ или решения достаточно четко очерченного класса задач. В соответствии с этим процесс функционирования системы представляется как совокупность действий ее элементов, подчиненных единой цели.

Определенная совокупность элементов данной системы рассматривается как ее подсистема. Обычно подсистемы являются некоторыми самостоятельно функционирующими частями системы. Правильное выделение подсистем часто способствует упрощению расчетов при исследовании и более наглядной интерпретации его результатов. Почти в каждой системе можно выделить часть ее элементов, образующих подсистему, которая выполняет определенные специфические функции. В крупном плане в составе любой системы можно выделить подсистемы, осуществляющие функции управления, основного процесса системы, обеспечения основного процесса.

Управление представляет собой процесс сбора, переработки и передачи информации, используемой в процессе управления.

От элементов системы в систему управления поступает осведомительная информация, характеризующая состояния элементов системы. Система управления осуществляет сбор, накопление и переработку поступающей информации, формирует управляющие команды, которые изменяют состояния и режимы функционирования элементов системы.

В настоящее время в качестве средств управления стали использоваться ЭВМ, выполняющие функции сбора и обработки информации, решения задач оценки ситуаций, возникающих в системе, а также задач для принятия решения и планирования процессов, протекающих в системе. Выполняя определенную последовательность операций в соответствии с заданной программой, ЭВМ обеспечивает обработку информации и решение информационных и расчетных задач.

Результаты переработки информации в ЭВМ используются системой управления как управляющие воздействия на основные и обеспечивающие процессы, протекающие в системе.

Под основным процессом системы будем понимать процесс, для выполнения которого предназначена данная система. Основной процесс определяет лицо системы и ее основное назначение. Так, если в качестве системы рассматривать крупное предприятие, то основным процессом является процесс производства определенного вида продукции. Для военных систем основным процессом, естественно, является процесс боевых действий. В свою очередь, элементы системы, участвующие в основном процессе, называются основными средствами системы. Например, в производственном комплексе, предназначенном для поточного выпуска штучных изделий, основные средства — это станки, обеспечивающие выполнение технологических операций. Станки объединяются в техно-

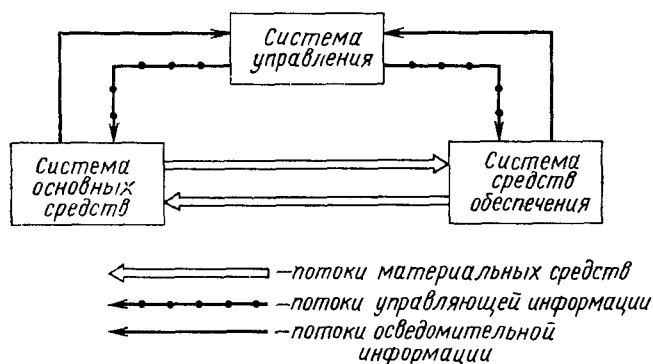


Рис. 7.1.

логические линии сборки изделий. Работа станков, линий и другого оборудования и составляет основной процесс производства продукции.

Для военных систем основными средствами, участвующими в основном процессе — боевых действиях, являются боевые средства — самолеты, ракеты, танки, орудия и т. д.

В производственном процессе или в процессе боевых действий, помимо основных процессов, существуют некоторые вспомогательные, обеспечивающие основной процесс системы. К ним относятся транспортировка сырья и готовой продукции, процессы снабжения и др.

Таким образом, в любой достаточно сложной системе можно выделить следующие специфические процессы: управления, основные процессы системы, обеспечения.

В соответствии с этим в любой достаточно сложной системе можно выделить следующие функциональные подсистемы (рис. 7.1): средств управления, основных средств, средств обеспечения.

При исследовании систем существенное значение имеет определение целей функционирования систем и перечня решаемых ими задач. Если цели и задачи системы определены, можно ставить вопрос об оценке качества ее функционирования. Качество функционирования системы оценивают с помощью критериев эффективности.

Используя основные положения гл. 1, рассмотрим вопрос о выборе критериев эффективности для оценки основных функциональных подсистем.

При оценке эффективности подсистем необходимо всегда иметь в виду, что каждая конкретная рассматриваемая подсистема является частью системы более высокого порядка. На этом уровне важно получить ответ: насколько эффективен будет вклад конкретной рассматриваемой подсистемы в решении задач системы?

Поскольку любая существующая подсистема является только частью системы, то ее эффективность можно определить как приращение эффективности системы при включении рассматриваемой подсистемы в ее состав. Система имеет свои определенные задачи. С изменением содержания задач изменяется и содержание понятия эффективности рассматриваемой подсистемы.

С этой целью введем понятие «оперативной эффективности подсистемы», под которой понимается степень ее приспособленности к выполнению задач системы, в состав которой входит рассматриваемая подсистема.

В качестве критерия оперативной эффективности подсистемы необходимо использовать критерий эффективности системы, в состав которой входит рассматриваемая подсистема.

Критерии эффективности системы обозначим: W_i^0 — значение i -го критерия эффективности системы при отсутствии в ее составе рассматриваемой подсистемы, W_i^p — значение i -го критерия эффективности системы при включении в ее состав рассматриваемой подсистемы.

Тогда показатель оперативной эффективности подсистемы можно определить как

$$P_{uc} = \frac{W_i^p - W_i^0}{W_i^0} 100\% \quad (7.1.1)$$

Используя критерии W_i^p , W_i^0 , можно определить, кроме того, понятие показателя качества подсистемы. Для этого необходимо ввести дополнительно понятие «идеальной» подсистемы.

Под «идеальной» будем понимать такую подсистему, которая соответствует предельным требованиям, предъявляемым к ней системой.

В частности, если в качестве подсистемы взять систему управления, то «идеальной» системой управления, очевидно, будет такая система, которая обладает мгновенным быстрым действием, абсолютной надежностью и способностью обрабатывать и передавать информацию без искажений.

Обозначим W_i^u значение критерия эффективности системы при включении в ее состав идеальной рассматриваемой подсистемы. Тогда наиболее просто показатель качества подсистемы можно представить в виде (рис. 7.2).

$$U_{uc} = \frac{W_i^p - W_i^0}{W_i^u - W_i^0} \quad (7.1.2)$$

Показатель качества подсистемы U_{uc} по физическому смыслу соответствует показателю оперативной эффективности подсистемы P_{uc} . При $W_i^p = W_i^0$ $U_{uc} = 0$. Практически это означает, что рассматриваемая подсистема имеет нулевую эффективность. При $W_i^p = W_i^u$ $U_{uc} = 1$, т. е. рас-

смаатриваемая подсистема удовлетворяет предельным требованиям системы. Диапазону $U_{\text{пс}}$ от 0 до 1 соответствуют все остальные возможные значения оперативной эффективности подсистемы.

Для определения показателя оперативной эффективности подсистемы во всех случаях необходимо иметь модель оценки эффективности системы. При моделировании систем с помощью математического метода модель подсистемы выражается как часть общей модели системы.

Используя модель системы, определяют критерии эффективности W_l^0 , W_l^p , W_l^u , а затем показатель оперативной эффективности подсистемы $P_{\text{пс}}$.

Из изложенного можно сделать вывод о принципиальном отличии двух подходов к оценке эффективности подсистем, а именно: эффективность подсистемы W_l — мера полноты решения задачи подсистемы в определенных условиях ее оперативного применения — определяется характеристиками элементов самой подсистемы, т. е. связана с внутренними свойствами подсистемы. Оперативная эффективность подсистемы $P_{\text{пс}}$ — мера вклада, вносимого подсистемой в решение задач более высокого уровня, где данная подсистема является только составной частью общего комплекса средств решения задач системы. Поскольку может быть несколько уровней задач и вариантов действий, то однозначного универсального показателя эффективности систем не существует. Выбор соответствующего критерия эффективности из матрицы эффективностей зависит от лица, принимающего решение. Теория систем не дает решений, а только обеспечивает руководителей полной, точной и организованной информацией относительно четко определенных задач, проблем и альтернатив.

Мы рассмотрели одну группу задач оценки эффективности, относящихся к оценке эффективности существующих подсистем. Существует вторая группа задач оценки эффективности, относящаяся к оценке эффективности разрабатываемых подсистем. Принципиальным отличием оценки эффективности разрабатываемых подсистем является необходимость учета затрат на подсистему, поскольку ресурсы, выделяемые на разработку всей системы, как правило, ограничены.

Необходимость учета затрат накладывает дополнительные требования на оценку эффективности подсистем. При этом задача сводится в основном к задаче поиска компромисса между характеристиками отдельных элементов подсистемы, позволяющих оптимизировать решение поставленной задачи по срокам и стоимости разработки подсистемы. Задача теории систем сводится к поиску оптимального варианта распределения ограниченных ресурсов между элементами подсистемы, а методы их решения позволяют определить целесообразность затрат.

Рассмотрим задачу оценки эффективности разрабатываемой подсистемы с учетом затрат на ее разработку и эксплуатацию. Основную роль при решении этой задачи играют методы анализа эффективности затрат. Назначение метода анализа эффективности затрат заключается в обеспечении выбора наилучшего из имеющихся способов использования ресурсов для достижения поставленной задачи. Конечный резуль-

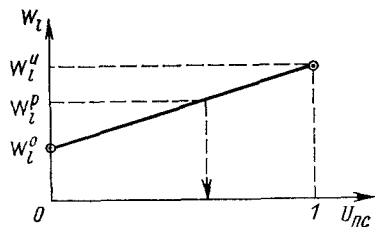


Рис. 7.2.

тат каждого из возможных способов использования ресурсов может быть представлен более или менее однозначно мерой выполнения поставленной задачи. Основное назначение метода анализа эффективности затрат заключается в том, чтобы установить прямую связь затрат с конечным результатом их использования, т. е. мерой выполнения поставленной задачи. В качестве такой меры можно использовать критерий эффективности системы. Методы анализа эффективности затрат могут использоваться на различных уровнях систем, однако для этого всегда необходимо определение трех основных факторов: 1) ресурсов (материалы, оборудование, кадры, финансы и др.) в стоимостном и натуральном выражении; 2) способов использования ресурсов (варианты состава подсистемы с учетом особенностей их создания, содержания и использования); 3) конечных результатов (меры выполнения поставленных задач).

Кроме того, необходимо наличие практически освоенных методик.

Анализ эффективности затрат производится в определенной последовательности:

1. Определение условий использования подсистемы, которое заключается в характеристике той среды, в которой должна действовать подсистема. Условия использования подсистемы представляются определенными количественными показателями.

2. Определение альтернативных вариантов подсистемы. Решение такой задачи заключается в определении технических характеристик вариантов подсистемы, способных выполнить поставленные задачи в определенных условиях их использования. Разные варианты подсистемы могут иметь различную стоимость.

3. Определение критериев оценки эффективности подсистемы. Решение этой задачи является особенно сложным, когда оценка результатов использования подсистемы, согласно ее назначению; невозможна на основе одного показателя.

4. Разработка модели затрат, позволяющей определять стоимость подсистемы как функцию ее характеристик

$$C = f(\{X\}), \quad (7.1.3)$$

где X — множество характеристик подсистемы.

При разработке модели затрат должна быть учтена стоимость всех ресурсов, которые необходимо затратить на достижение поставленной цели.

5. Разработка общей модели эффективности системы.

Задача моделирования заключается в том, чтобы связать значения характеристик подсистемы с мерой выполнения системой ее основного назначения, т. е. определить зависимость

$$W_l = \varphi(\{X\}), \quad (7.1.4)$$

где X — множество характеристик системы.

Поскольку оперативная эффективность подсистемы определяется через эффективность подсистемы

$$P_{\text{пс}} = \psi(W_l), \quad (7.1.5)$$

то оперативная эффективность подсистемы может быть связана с множеством ее основных характеристик

$$P_{\text{пс}} = \xi(\{X\}). \quad (7.1.6)$$

Поскольку, с другой стороны, в модели стоимости характеристики подсистемы связаны с затратами, результаты моделирования эффективности должны обеспечить возможность связи затрат с эффективностью и, следовательно, возможность выбора из имеющихся альтернатив наиболее эффективного способа использования ресурсов.

Для анализа эффективности затрат ресурсов при отсутствии разработанных элементов материальной части подсистемы определение эффективности становится предметом прогнозирования, так же как и определение затрат.

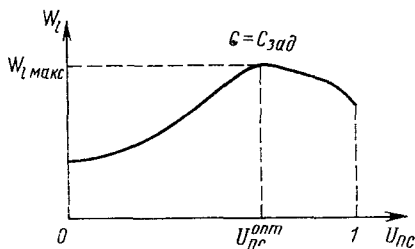


Рис. 7.3.

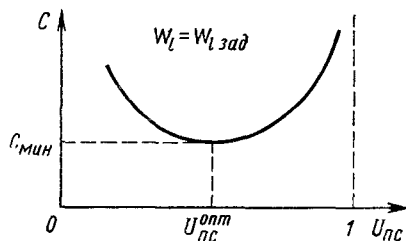


Рис. 7.4.

6. Анализ соотношения стоимости и эффективности подсистемы. На этом этапе производится оценка соотношения меры эффективности каждого из вариантов подсистемы и объема соответствующих затрат.

При решении практических задач с учетом экономических факторов показатель качества подсистем $U_{пс}$ является параметром оптимизации при определении оптимума основного критерия.

Например, если рассматривается задача создания системы, включающей рассматриваемую подсистему, при выделенном ресурсе на создание системы, то она сводится к такому распределению выделенных средств между подсистемами, при котором достигается максимум показателя эффективности системы W_l . При этом существует $U_{пс} = U_{пс}^{опт}$, при котором $W_l = W_{l_{макс}}$ (рис. 7.3).

При решении обратной задачи, когда показатель эффективности системы задан, требуется определить состав системы, которая включает рассматриваемую подсистему, имеющую минимальную стоимость. При этом критерием оценки является стоимость создания системы C . В этом случае задача сводится к определению такого эффективного состава системы, который имеет минимальную стоимость.

Здесь также $U_{пс} = U_{пс}^{опт}$, при котором $C = C_{мин}$ (рис. 7. 4).

Результаты анализа в конечном итоге позволяют установить связь объема затрат ресурсов с эффективностью достижения поставленной задачи. При этом различные варианты подсистемы выступают в качестве альтернативных способов использования ресурсов.

Применяя анализ эффективности затрат аналогичным образом для оценки эффективности затрат системы, можно определить связь объема затрат ресурсов с эффективностью этой системы и таким образом определить оптимальный вариант распределения ресурсов между системами внутри системы более высокого уровня.

Процесс и результаты анализа эффективности затрат не предопределяют заранее выбора определенного варианта по возможным способам использования ресурсов. Задача анализа заключается лишь в том,

чтобы выделить возможные и целесообразные варианты и обеспечить исходные данные для принятия окончательного решения руководством.

Расчет показателей эффективности систем представляет собой весьма сложную задачу, которая требует привлечения специальных математических методов описания процессов функционирования систем.

Для описания процессов функционирования систем можно избрать один из двух подходов, существующих в математической теории систем. Они обозначаются терминами «квазирегулярный» (или «детерминистический») и «стохастический» (или «вероятностный») и отражают причинную природу модели процесса, протекающего в подсистеме, которую мы выражаем в математической форме. Математические уравнения, описывающие процесс, для этих двух подходов могут быть очень сходными по форме. Вместе с тем большая разница между этими двумя подходами заключается в характере вопросов, которые ставятся при разработке модели и на которые мы хотим получить ответ с помощью рассматриваемых подходов, а также в интерпретации результатов.

В качестве примера рассмотрим простую квазирегулярную модель гибели элементов некоторой системы. Пусть действительная и непрерывная функция $x(t)$ обозначает число элементов системы в момент времени t . Чтобы описать гибель элементов, мы должны сформулировать модель, основывающуюся на реальном процессе, определяющем характер изменения числа элементов по времени.

Будем считать, что в момент t система имеет $x(t)$ элементов, число элементов может только уменьшаться и это уменьшение за интервал времени $(t, t+\Delta t)$ пропорционально числу элементов, имеющихся в момент t . Следовательно, имеет место соотношение $\Delta x(t) = -\lambda x(t) \Delta t$, $\lambda > 0$; где λ — плотность потока событий гибели каждого элемента.

На основании данного выражения получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda x(t). \quad (7.1.7)$$

При начальных условиях $x(0) = x_0 > 0$ решение уравнения имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t}. \quad (7.1.8)$$

Очевидно, по мере того, как $t \rightarrow \infty$, число элементов системы изменяется от x_0 до 0, а число погибших элементов системы изменяется от 0 до x_0 .

Теперь отметим основную отличительную черту квазирегулярной модели, которая состоит в том, что всякий раз, когда начальное значение x_0 одно и то же, число элементов в данный момент времени t всегда будет одним и тем же.

Рассмотрим вероятностный аналог данной модели. Пусть целочисленная случайная величина $x(t)$ представляет собой число элементов системы в момент t . Будем также считать, что $x(0) = x_0 > 0$.

При вероятностном подходе мы не выводим функционального уравнения для $x(t)$, а стремимся получить выражение для вероятности того, что число элементов в момент t будет равно x . Следовательно, нас интересует вероятность $p_x(t) = p(x(t) = x)$.

Если при квазирегулярном подходе мы фактически рассматривали только два возможных состояния системы, которые определялись состояниями элементов «жив» или «погиб», то при вероятностном подходе число состояний системы определяется числом элементов.

Чтобы построить вероятностную модель, будем считать, что если в момент t число элементов равно $x > 0$, то вероятность гибели одного элемента за интервал времени $(t, t + \Delta t)$ равна $\lambda x \Delta t + 0(\Delta t)$, а вероятность гибели двух или более элементов за время Δt есть $0(\Delta t)$.

Эти предположения приводят к соотношению $p_x(t + \Delta t) = (1 - \lambda x \Delta t) \times \times p_x(t) + \lambda(x + 1)p_{x+1}(t)$.

При $\Delta t \rightarrow 0$ получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_x(t)}{dt} = -xp_x(t) + \lambda(x + 1)p_{x+1}(t). \quad (7.1.9)$$

Начальными условиями для интегрирования системы являются $p_x(0) = 1$ при $x = x_0$, $p_x(0) = 0$ при $x \neq x_0$.

Сравнивая полученные квазирегулярную и вероятностную модели, видим, что в квазирегулярной модели число элементов представляется действительной и непрерывной функцией. в то время как в вероятностной модели случайная величина, характеризующая число элементов, может принимать лишь целочисленные значения x ; при этом для любой пары (x, t) $x \leq x_0$, $t \leq 0$ существует число $p_x(t)$, $0 \leq p_x(t) \leq 1$, которое представляет собой вероятность того, что случайная величина примет значение x в момент времени t .

Интересно отметить, что квазирегулярная модель является частным случаем вероятностной модели в том смысле, что в квазирегулярной модели вероятность того, что случайная величина примет значение x в момент t , равна единице.

Сравнение квазирегулярной и вероятностной моделей мы продолжим относительно изменения среднего числа элементов на основе вероятностной модели.

По определению

$$\bar{x}(t) = \sum_{x=0}^{x_0} xp_x(t). \quad (7.1.10)$$

Дифференцируя по t обе части уравнения, получим

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \sum_{x=0}^{x_0} x \frac{dp_x(t)}{dt}. \quad (7.1.11)$$

Суммируя правые части уравнений вероятностной модели и производя преобразования, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} &= 0 \frac{dp_0(t)}{dt} + 1 \frac{dp_1(t)}{dt} + 2 \frac{dp_2(t)}{dt} + \dots + x_0 \frac{dp_{x_0}(t)}{dt} = \\ &= \lambda p_1(t) + 2\lambda p_2(t) - 3\lambda p_3(t) - \dots - x_0 \lambda p_{x_0}(t) = -\lambda \bar{x}(t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = -\lambda \bar{x}(t). \quad (7.1.12)$$

Интегрируя полученное уравнение при $\bar{x}(0) = x_0$, имеем

$$\bar{x}(t) = x_0 e^{-\lambda t}. \quad (7.1.13)$$

Следовательно, выражение для среднего числа элементов, полученное на основе вероятностной модели, совпадает с числом элементов, полученным на основе квазирегулярной модели. Учитывая это соответст-

вие, можно утверждать, что уравнения квазирегулярной модели описывают среднее число элементов системы на момент t , в то время как уравнения для вероятностной модели учитывают случайные изменения числа элементов системы. Следует отметить, что указанное соответствие получено в предположении, что плотность потока λ не зависит от числа элементов системы. В общем случае, когда λ зависит от числа элементов системы, такое соответствие между указанными моделями не имеет места. Однако можно утверждать, что в тех случаях, когда плотность потока гибели каждого элемента системы λ не зависит от числа элементов системы, уравнения для квазирегулярной модели в точности описывают среднее число элементов системы на любой момент времени t .

Необходимо иметь в виду, что в приведенных выше примерах термины «квазирегулярный процесс» и «вероятностный процесс» относились к математической абстракции, к модели, но не к самому реальному процессу. Реальным являлся процесс гибели элементов некоторой системы, а моделями — квазирегулярный процесс гибели и вероятностный процесс гибели.

При этом число элементов трактовалось как некоторая система, а состояния системы для квазирегулярной модели определялись функциональными состояниями элементов системы, для вероятностной модели состояниями системы являлось возможное число сохранившихся элементов $x_0, x_0-1, \dots, 1, 0$.

Рассмотрим аналог квазирегулярной модели реального процесса, описываемой с помощью вероятностей состояний системы, представляющих собой средние относительные численности элементов системы, находящихся в различных функциональных состояниях

$$p_i(t) = x_i(t)/N, \quad (7.1.14)$$

где $x_i(t)$ — среднее число элементов системы в i -м состоянии, N — общее число элементов системы.

Число состояний элементов системы можно расширить, вводя необходимые функциональные состояния, соответствующие реальному процессу. Обозначим $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ пространство всех возможных состояний, в которых могут находиться элементы системы, а следовательно, и сама система, и опишем марковский процесс с n состояниями. При этом будем считать, что система находится в некотором состоянии, если она полностью описывается значениями переменных, которые задают это состояние. Система совершает переход из одного состояния в другое, если описывающие ее переменные изменяются со значений, задающих одно состояние, на значения, которые определяют другое.

Если система переходит из одного состояния в другое в строго определенные моменты времени, то такой процесс является процессом с дискретным временем. Однако если рассматривать случайное время между переходами, то можно считать, что система описывается процессом с непрерывным временем. Будем рассматривать именно этот класс процессов.

Первая задача, с которой мы сталкиваемся, состоит в том, как описать марковский процесс с n состояниями, время между переходами которого случайно. При этом будем рассматривать процесс гибели и размножения элементов системы.

Обозначим λ_{ij} интенсивность перехода системы из состояния i в состояние j , когда $i \neq j$. Будем рассматривать пока только постоянные ин-

тенсивности λ_{ij} . Для пуассоновского потока переходов системы из одного состояния в другое величины λ_{ij} определяются следующим образом. За бесконечно малый интервал времени dt система, которая находится в состоянии i , будет совершать переход в состояние j с вероятностью $\lambda_{ij}dt$ ($i \neq j$). Вследствие ординарности пуассоновского потока переходов вероятность двух или более переходов за время dt имеет порядок $(dt)^2$ и выше и предполагается, что она бесконечно мала, если dt выбрано достаточно малым.

Вероятность того, что система находится в состоянии i к моменту t , будем называть вероятностью состояния $p_i(t)$. Вероятность состояния системы в момент $t+dt$ можно связать с вероятностями состояний системы в момент t посредством уравнений.

Система может попасть в состояние i двумя путями. Во-первых, в момент t она уже может находиться в состоянии i и в течение интервала dt не сделать ни одного перехода в другие состояния. Эти события имеют вероятности $p_i(t)$ и $1 - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}dt$ соответственно. Во-вторых, в момент времени t система может находиться в одном из состояний $j \neq i$ и за время dt совершить переход из состояния j в состояние i . Эти события имеют вероятности $p_j(t)$ и $\lambda_{ji}dt$ соответственно.

$$\text{Тогда } p_i(t + \Delta t) = p_i(t) \left[1 - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}dt \right] + \sum_{j \neq i} p_j(t) \lambda_{ji}dt \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{или } p_i(t + \Delta t) - p_i(t) = -p_i(t) \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}dt + \sum_{j \neq i} p_j(t) \lambda_{ji}dt.$$

Деля обе части уравнения на dt и переходя к пределу при $dt \rightarrow 0$, получаем

$$dp_i(t)/dt = -p_i(t) \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} + \sum_{j \neq i} p_j(t) \lambda_{ji}. \quad (7.1.15)$$

Если определить диагональные элементы матрицы Λ λ_{ii} как

$$\lambda_{ii} = - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}, \quad (7.1.16)$$

то получим

$$dp_i(t) dt = \sum_{i=1}^n p_i(t) \lambda_{ji} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (7.1.17)$$

Или в векторной форме

$$d/dt \bar{P}(t) = \Lambda \bar{P}(t), \quad (7.1.18)$$

где $\bar{P}(t)$ — вектор вероятностей состояний в момент t . Очевидно,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} = 0. \quad (7.1.19)$$

Матрица, сумма элементов строк которой равна нулю, называется дифференциальной.

При описании эмпирических процессов дифференциальными уравнениями для марковских процессов с непрерывным временем и дискретным числом состояний приходится схематизировать реальный процесс и делать те или иные допущения. При этом, естественно, приходит-

ся идти на некоторую приближенность получаемых результатов. Однако это не должно являться существенным препятствием для применения такого подхода при исследовании реальных процессов, так как исходные данные носят, как правило, приближенный характер, что не позволяет получить точные результаты даже при отсутствии допущений при использовании точных методов решения. Преимуществом такого подхода являются наглядность получаемых результатов и наглядность представления причинно-следственных связей реального процесса. Безусловно, положительной стороной такого подхода является возможность описания динамики функционирования системы небольшим числом уравнений при большом числе элементов системы.

В дальнейшем при описании процессов функционирования системы управления, системы основных средств и системы средств обеспечения будем пользоваться тем или иным из рассмотренных методов в зависимости от существа процесса, протекающего в системе. Однако основное внимание будет уделено методу описания процессов функционирования систем средств с помощью дискретного марковского процесса с непрерывным временем, в котором используются функциональные состояния средств, входящих в состав системы.

7.2. Моделирование системы управления

Описание процесса функционирования системы управления целесообразно начать с определения критерия эффективности. Выбор критерия определяется в основном целью исследования и характером задач, решаемых системой управления. При этом одну и ту же систему управления в зависимости от цели исследования можно рассматривать с различных точек зрения и оценивать по различным критериям. В общем случае целесообразно воспользоваться двумя группами критериев, которые рассмотрены в § 7.1: критериями эффективности системы и оперативной эффективности системы.

Критерии эффективности можно рассматривать как частные критерии эффективности системы управления, критерии оперативной эффективности — как общие.

Для сравнительной оценки эффективности систем управления, а также для решения некоторых частных задач не обязательно вычислять критерий оперативной эффективности системы. В этих случаях оказывается достаточным использование критерия эффективности системы — частного критерия. В качестве частных критериев эффективности системы управления могут быть использованы: время сбора, обработки и выдачи информации; время решения основных расчетных задач; время доведения задач до исполнителей и др.

Однако в общем случае все времена являются случайными величинами со своими законами распределения, поэтому для практического использования это не всегда оказывается удобным. Поэтому рассмотрим вопрос выбора более приемлемого критерия эффективности управления.

Если проанализировать содержание управления в процессе функционирования системы, то в нем вырисовываются две взаимосвязанные сферы деятельности системы управления: управление основными средствами системы; управление средствами системы обеспечения.

Обе сферы управления представляют собой единый процесс, направленный на обеспечение успешного выполнения задач системы. Однако первая сфера деятельности является определяющей для второй

сферы, так как процесс функционирования средств системы обеспечения подчинен процессу функционирования основных средств системы.

В общем случае процесс функционирования системы управления можно представить как некоторый процесс, элементами которого являются входные сообщения, модули преобразования информации и выходные сообщения.

Под входными сообщениями будем понимать первичные сведения, полученные от источников информации об основных и обеспечивающих средствах системы. Основу системы модулей преобразования информации в АСУ составляет комплекс алгоритмов и программ решения основных расчетных и информационно-логических задач на ЭВМ. Выходные сообщения представляют собой обобщенную осведомительную информацию для лиц, принимающих решения, или командную информацию для основных и обеспечивающих средств системы.

Технические средства, с помощью которых реализуются АСУ, можно условно разделить на следующие основные группы в соответствии с выполняемыми ими функциями, назначением и местом в системе:

- средства, предназначенные для обработки информации: ЭВМ и комплексы ЭВМ;

- средства обмена данными: технические средства связи, средства коммутации, контроля, преобразования сигналов, повышения достоверности передаваемой информации и т. д.;

- средства конечных объектов (органов) системы управления, включающие аппаратуру ввода — вывода данных, представленных в различных формах и на различных носителях информации, средства отображения, документирования, размножения, подготовки и контроля подготовки информации, а также специальные рабочие места, обеспечивающие работу операторов.

Центральное место среди перечисленных технических средств автоматизации процессов управления принадлежит средствам электронной вычислительной техники. ЭВМ реализуют вычислительный процесс, который в широком смысле этого слова можно трактовать как процесс двустороннего обмена информацией между человеком и машиной и процесс переработки информации в машине.

Основной задачей системы управления является своевременный сбор информации, ее обработка, доведение задач до исполнителей и контроль исполнения. Поэтому в качестве одного из критериев эффективности можно принять вероятность того, что время, затрачиваемое на выполнение этих процессов, не превысит заданной величины

$$P(t_3) = p(t_{\text{обр}} < t_3) = \int_0^{t_3} dF(t_{\text{обр}}), \quad (7.2.1)$$

где $t_{\text{обр}}$ — время полного цикла обработки информации, t_3 — заданное время обработки, $F(t_{\text{обр}})$ — функция распределения времени обработки информации.

Таким образом, все частные временные критерии можно свести к одному — вероятности полного цикла обработки информации за время не более заданного. Причем в каждом конкретном частном случае под временем $t_{\text{обр}}$ можно понимать как время сбора информации, время решения расчетных задач и т. д., так и любую их совокупность.

Показатель $P(t_3)$ должен учитывать такие характеристики системы управления, как потоки входной информации, количество решаемых за-

дач, потоки выходной информации, а также организационно-технические возможности системы (количество средств, их пропускная способность и т. д.)

Процесс сбора, обработки и выдачи информации является стохастическим. Это определяется вероятностным характером входного потока сообщений, случайными временами ожидания, обработки и выдачи информации в системе.

В самом общем виде вероятность своевременной обработки информации $P(t_3)$ будет иметь вид $P(t_3) = f(\lambda, T_{\pi}, n, T_{\text{обр}})$, где λ — интенсивность потока сообщений, T_{π} — среднее допустимое время пребывания данных в системе (время сохранения ценности данных), n — число звеньев (фаз) обслуживания, $T_{\text{обр}}$ — среднее время обработки информации.

Интенсивность потока λ определяется количеством сообщений (количеством решаемых задач) в единицу времени.

Допустимое время пребывания данных в системе определяется динамичностью процессов, протекающих в системе, и характером информации. Число звеньев (фаз) обслуживания n определяется структурой системы управления. Время обработки информации в системе $T_{\text{обр}}$ характеризует процесс обработки информации в системе управления и зависит от ряда характеристик системы управления.

При сборе и обработке информации происходят два случайных процесса: обработки и одновременно с ним процесс старения сообщений, т. е. потеря ценности информации.

Ценность информации с течением времени убывает независимо от того, передается ли она по каналам связи или находится в системе.

Если функция старения информации $S(t)$ и функция распределения времени пребывания информации в системе $F(t)$ непрерывны, то существует интеграл вида

$$\int_0^{\infty} F(t) dS(t). \quad (7.2.2)$$

При экспоненциальном законе старения информации с интенсивностью ν вероятность своевременной обработки информации можно определить как

$$p_c = \int_0^{\infty} F(t) dS(t) = \nu \int_0^{\infty} e^{-\nu t} F(t) dt, \quad (7.2.3)$$

где

$$\nu = \frac{1}{T_{\pi}}.$$

Задача определения $P(t_3)$ в общем случае является довольно сложной. Поэтому мы остановимся на достаточно простом случае, когда задача может быть решена при следующих предположениях.

Имеется система, состоящая из m источников информации и n звеньев обработки информации, на вход которой поступает случайный поток требований на обработку. Каждое из требований обрабатывается соответствующим звеном системы управления в течение промежутка времени, длительность которого случайна. Потоки требований, поступающих в систему, принимаются пуассоновскими, время обработки требований и старения информации распределены по показательному закону.

Рассмотрим процессы обработки требований в системе управления при этих предположениях. Будем считать, что требования в системе управления проходят несколько звеньев обслуживания, в каждом из которых длительность ожидания и длина очереди не ограничиваются. Эти звенья образуют более или менее сложную сеть, характеризуемую, с одной стороны, структурой, т. е. связями, существующими между звеньями, составляющими сеть, а с другой стороны, свойствами самих звеньев.

В качестве звеньев системы управления могут быть различные технические устройства, ЭВМ, а также различные отделы и службы.

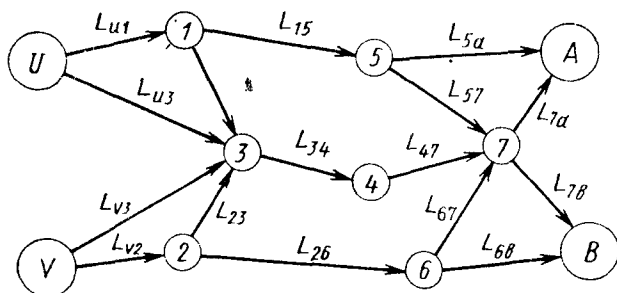


Рис. 7.5.

Под сетью будем понимать структурную модель системы управления, отображающую взаимосвязи между отдельными операциями (работами) и звеньями и позволяющую определить значение параметров процесса, исходя из значений параметров звеньев и отдельных работ и взаимосвязей между ними.

Сеть является средством формализации процессов управления и дает возможность четко отобразить структуру исследуемого процесса; выявить с любой степенью детализации последовательность работ, образующих единый комплекс; отобразить в наглядной форме взаимосвязи и логическую последовательность выполнения работ; оценить степень важности каждой организационной единицы (звена); исследовать продолжительность выполнения комплекса работ в целом; проанализировать возможные варианты достижения заданного результата и выбрать из них оптимальный по некоторому критерию (по времени, ресурсам и др.).

Сеть, в виде которой можно представить систему управления, может быть построена путем соединения конечного числа n звеньев. Структуру сети можно представить графом (рис. 7.5).

Каждое i -е звено системы управления ($i=1, 2, \dots, n$) можно трактовать как определенное i -е состояние, в котором находится требование. Такими звеньями сети, представленной на рис. 7.5, могут быть: 1, 2 — учет поступающих требований (документов); 3 — подготовка данных для ЭВМ; 4 — решение задач на ЭВМ; 5, 6 — исполнение требований (документов); 7 — руководство и т. д.

В процессе обработки в системе управления требование перемещается из одного звена в другое до тех пор, пока не покинет систему.

Рассмотрим пути $U-1-5-7-A$ и $U-1-3-4-7-A$.

Требование от источника информации U поступает в отдел учета требований (звено 1), где оно регистрируется и направляется на ис-

полнение в отдел ручной обработки (звено 5) или в отдел машинной обработки (звено 3). В отделе ручной обработки требование выполняется и направляется или непосредственно в систему средств (A) или докладывается руководству (звено 7), после чего направляется в систему A или B . Из отдела машинной обработки (звено 3) требование может быть введено и обработано в ЭВМ (звено 4), результаты решения на ЭВМ докладываются руководству (звено 7), которое принимает решение, после чего оно доводится до исполнителей (система A или B).

Таким образом, требование в процессе обработки переходит из состояния i в состояние j . Формально прохождение требований в системе управления можно представить следующим образом.

Требования, выходящие из звена i ($i=1, 2, \dots, n$), с вероятностью δ_{ij} поступают в звено j ($j=1, 2, \dots, n$) или покидают сеть, поступая в системы (A, B) с вероятностью δ_{ia}, δ_{ib} . Такими системами (A, B) могут быть система основных средств, система средств обеспечения и др.

С другой стороны, требования от внешних источников (U, V) поступают в сеть. Внешними источниками (U, V) могут быть источники информации о состоянии основных средств, средств обеспечения и др. Особенность звена «источник информации» состоит в том, что оно содержит бесконечное число требований. Вероятность того, что какое-нибудь из требований поступит от источников информации (U, V) в звено j , равна δ_{uj} и δ_{vj} .

Очевидно, имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} = 1 \quad (i=U, V, 1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n).$$

Из приведенного выше определения сети вытекает, что последовательность состояний $1, 2, \dots, n$ образует некоторую реализацию цепи Маркова, описывающей действие сети со стохастической матрицей [27]

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}, \quad (7.2.4)$$

где

$$0 \leq \delta_{ij} \leq 1; \quad \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = 1. \quad (7.2.5)$$

Пусть теперь λ_i — интенсивность потока требований, покидающих i -е звено за единицу времени. Тогда среднее число требований $x_i(t)$, находящихся в i -м звене системы в момент времени t , может быть получено в результате интегрирования системы уравнений

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) \sum_{j \neq i} \delta_{ij} \lambda_i + \sum_{j \neq i} x_j(t) \delta_{ji} \lambda_j. \quad (7.2.6)$$

В общем случае величины λ и δ могут быть функциями времени, однако для простоты записи индексы t опущены.

Пусть также Λ_i — суммарная интенсивность потока требований. Тогда для сети, приведенной на рис. 7.5, система уравнений будет

иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -(\delta_{13} + \delta_{15}) \lambda_1 x_1(t) + \delta_{u1} \Lambda_u, \\
 \dot{x}_2(t) &= -(\delta_{23} + \delta_{26}) \lambda_2 x_2(t) + \delta_{v2} \Lambda_v, \\
 \dot{x}_3(t) &= -\lambda_3 x_3(t) + \delta_{13} \lambda_1 x_1(t) + \delta_{23} \lambda_2 x_2(t) + \delta_{u3} \Lambda_u + \delta_{v3} \Lambda_v, \\
 \dot{x}_4(t) &= -\lambda_4 x_4(t) + \lambda_3 x_3(t), \\
 \dot{x}_5(t) &= -(\delta_{57} + \delta_{5a}) \lambda_5 x_5(t) + \delta_{15} \lambda_1 x_1(t), \\
 \dot{x}_6(t) &= -(\delta_{67} + \delta_{6b}) \lambda_6 x_6(t) + \delta_{26} \lambda_2 x_2(t), \\
 \dot{x}_7(t) &= -(\delta_{7a} + \delta_{7b}) \lambda_7 x_7(t) + \delta_{57} \lambda_5 x_5(t) + \lambda_4 x_4(t) + \delta_{67} \lambda_6 x_6(t). \quad (7.2.7)
 \end{aligned}$$

Для интегрирования системы необходимо задать исходные данные $\lambda_i(t)$, $\Lambda_i(t)$, $\delta_{ij}(t)$ и начальные условия $x_i(0)$.

Иногда вместо среднего числа требований $x_i(t)$, находящихся в i -м звене в момент t , интересно знать вероятность того, что требования в момент t находятся в состоянии i (в i -м звене). Эта вероятность может быть определена как

$$p_i(t) = x_i(t) / x(t), \quad (7.2.8)$$

где $x(t)$ — общее число требований, находящихся в системе в момент t :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t). \quad (7.2.9)$$

Уравнения для вероятностей $p_i(t)$ в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$\dot{p}_i(t) = -p_i(t) \sum_{j \neq i} \delta_{ij} \lambda_j + \sum_{j \neq i} p_j(t) \delta_{ji} \lambda_j. \quad (7.2.10)$$

Для интегрирования системы необходимо задать исходные данные $\lambda_i(t)$, $\delta_{ij}(t)$ и начальные условия $p_i(0)$.

На практике часто бывает трудно оценить интенсивности λ_i и вероятности δ_{ij} статистическими методами. Зато можно измерить величину Λ_i , представляющую собой количество требований, покидающих i -е звено в единицу времени, и величину

$$L_{ij} = \Lambda_i \delta_{ij}, \quad (7.2.11)$$

представляющую собой количество требований, проходящих в единицу времени из звена i в звено j .

Тогда

$$\delta_{ij} = L_{ij} / \Lambda_i. \quad (7.2.12)$$

Величина λ_i может быть определена как

$$\lambda_i = 1 / \bar{T}_i, \quad (7.2.13)$$

где $\bar{T}_i$ — среднее время пребывания требований в i -м звене.

Закон распределения времени пребывания требований в i -м звене $f_i(t)$ на практике может быть легко определен статистическими методами.

Тогда

$$\bar{T}_i = \int_0^{\infty} t_i f_i(t) dt. \quad (7.2.14)$$

Определение величины λ_i рассмотрим на примере ЭВМ — наиболее сложном звене системы управления, составляющем основу любой АСУ.

ЭВМ включает группу обязательных устройств, выполняющих самостоятельные функции (арифметическое устройство, оперативное ЗУ, устройство управления, устройство ввода и вывода) и группы внешних устройств, служащих в основном для информационного обмена между ЭВМ и человеком или внешними элементами (долговременные ЗУ большой емкости на магнитных барабанах, магнитной ленте или магнитных дисках, печатающие и считывающие устройства, пункты управления, устройства отображения информации, аппаратура передачи данных, перфорирующие устройства и т. д.).

Величину λ_i можно трактовать как λ_0 — производительность ЭВМ. λ_0 зависит от таких основных технических характеристик ЭВМ, как быстродействие V , емкости ЗУ q , скорости работы устройств ввода и вывода $v_{\text{вв}}$, $v_{\text{выв}}$ и др.

Так как различные универсальные ЭВМ в разной степени приспособлены к решению того или иного класса задач, целесообразно оценивать их производительность относительно некоторой эталонной задачи Ω_0 . В качестве эталонной задачи можно выбрать типовую вычислительную или логическую задачу по обработке информации, объединяющую основные особенности некоторого множества классов задач.

Таким образом, параметр производительности λ_0 в данном случае выступает в качестве обобщенной характеристики ЭВМ, зависящей от совокупности ее основных параметров и учитывающей приспособленность ЭВМ к решению задач того или иного класса.

Расчетную формулу для оценки производительности ЭВМ получают на основе следующих допущений:

1. Под эталонной задачей Ω_0 понимается задача, для которой задано:

$S(\Omega_0)$ — операторная схема вычислительного процесса; R_1 — количество чисел, входящих в исходную числовую информацию (исходные данные); R_2 — количество чисел, входящих в результаты вычислений (выходные данные).

2. Под операторной схемой вычислительного процесса $S(\Omega_0)$ подразумевается подробное описание алгоритма задачи с указанием содержания и последовательности выполнения математических операций, возможных разветвлений и условий перехода к той или иной ветви процесса, численных методов выполнения неэлементарных математических операций и т. п.

3. Под производительностью ЭВМ будем понимать количество решаемых ЭВМ в единицу времени эталонных задач Ω_0 в режиме ее нормальной эксплуатации, т. е.

$$\lambda_0 = 1/T_0, \quad (7.2.15)$$

где T_0 — время решения эталонной задачи.

Время решения эталонной задачи может быть определено следующим образом:

$$T_0 = t_{\text{вв}} + t_p + t_{\text{выв}}, \quad (7.2.16)$$

где $t_{\text{вв}}$ — время ввода программ и исходных данных, t_p — время решения задачи, $t_{\text{выв}}$ — время вывода результатов решения задачи.

Выразим составляющие времени T_3 через параметры эталонной задачи и основные характеристики ЭВМ

$$t_{\text{вв}} = (R_1 + R_{\text{з}})/v_{\text{вв}}, \quad (7.2.17)$$

где $R_{\text{з}}$ — объем программы эталонной задачи.

Для ЭВМ, у которых программа «защита» или вводится один раз, можно положить

$$t_{\text{вв}} = R_1/v_{\text{вв}}. \quad (7.2.18)$$

Время решения задачи

$$t_{\text{р}} = R_{\text{п}}/V, \quad (7.2.19)$$

где $R_{\text{п}}$ — количество машинных операций в развернутой программе вычислений, необходимое для процесса обработки по данной задаче, V — быстродействие, определяемое по формуле

$$V = 1 \left/ \sum_i^k p_j \tau_j, \right. \quad (7.2.20)$$

где p_j , τ_j — соответственно частота и длительность выполнения j -й машинной операции, k — количество команд в списке команд машины.

Время решения задачи на ЭВМ (счет) можно определить и другим способом:

$$t_{\text{р}} = \sum_1^n \frac{R_i}{v_i}, \quad (7.2.21)$$

где R_i — число машинных операций i -го типа, содержащихся в алгоритме эталонной задачи $i=1, 2, \dots, n$; v_i — число операций i -го типа, выполняемых машиной за единицу времени (быстродействие по операциям i -го типа).

Время вывода результатов решения задачи

$$t_{\text{выв}} = R_2/v_{\text{выв}}. \quad (7.2.22)$$

Подставляя полученные выражения в (7.5.15), получим выражение для производительности ЭВМ

$$\lambda_3 = \frac{v_{\text{вв}} V v_{\text{выв}}}{v_{\text{вв}} R_2 v + v_{\text{вв}} R_{\text{п}} v_{\text{выв}} + v R_1 v_{\text{выв}} + v R_{\text{з}} v_{\text{выв}}}. \quad (7.2.23)$$

Полученное выражение позволяет определить производительность ЭВМ λ_3 с учетом ее характеристик v_1 , $v_{\text{вв}}$, $v_{\text{выв}}$ и характеристик эталонной задачи R_1 , $R_{\text{з}}$, $R_{\text{п}}$, R_2 .

Общий объем памяти ЭВМ, необходимый для решения эталонной задачи, равен:

$$q_3 = q_1 + q_2 + \sum_{l=1}^m R_l r_l, \quad (7.2.24)$$

где q_1 — число ячеек для хранения констант, q_2 — число рабочих ячеек, необходимых для хранения промежуточных результатов, R_l — общее число входных и выходных данных l -го типа, r_l — число ячеек, необходимых для хранения данных каждого l -го типа, m — число типов данных.

После того как мы определили основные математические зависимости, определяющие процесс обработки требований в системе управления, вернемся к определению критерия эффективности системы — вероятности обработки требований за время не более заданного $p(t_3)$ (7.5.1).

Функция распределения времени пребывания требований в системе управления согласно (3.1.6) равна:

$$F(t_{\text{обп}}) = p(T_{\text{обп}} < t) = \sum_{l=1}^k p_l(t), \quad (7.2.25)$$

где $p_l(t)$ — вероятность того, что требование в момент t находится в поглощающем состоянии l , k — число поглощающих состояний.

В нашем случае такими поглощающими состояниями для требований являются системы основных и обеспечивающих средств (A, B) .

Согласно (3.1.6)

$$\frac{d}{dt} F(t_{\text{обп}}) = \dot{f}(t_{\text{обп}}) = \sum_{l=1}^k \dot{p}_l(t). \quad (7.2.26)$$

В свою очередь,

$$\dot{p}_l(t) = \sum_{i=1}^n \delta_{il} \lambda_i p_i(t) \quad (l = 1, 2, \dots, k). \quad (7.2.27)$$

Таким образом,

$$\dot{f}(t_{\text{обп}}) = \sum_{l=1}^k \sum_{i=1}^n \delta_{il} \lambda_i p_i(t). \quad (7.2.28)$$

Для отыскания вероятностей $p_i(t)$ достаточно проинтегрировать систему уравнений (7.5.10) с учетом того, что переход из подмножества состояний i ($i = 1, 2, \dots, n$) возможен только в подмножество состояний l ($l = 1, 2, \dots, k$) и что последнее состоит только из поглощающих состояний.

Начальными условиями для системы (7.5.10) являются

$$\sum_{i=1}^n p_i(0) = 1. \quad (7.2.29)$$

Для определения $\dot{f}(t_{\text{обп}})$ интегрируем при условиях

$$\Lambda_u = \Lambda_v = 0, \quad (7.2.30)$$

т. е. дополнительных требований после момента $t=0$ в систему не поступает.

Критерий эффективности системы $p(t_3)$ с учетом (7.5.28) определяется выражением

$$p(t_3) = p(T_{\text{обп}} < t_{\text{зад}}) = \int_0^{t_3} \dot{f}(t_{\text{обп}}) dt. \quad (7.2.31)$$

Критерий $p(t_3)$ позволяет учесть такие характеристики системы управления, как число звеньев и их взаимосвязь, пропускную способность каждого звена, потоки информации в системе и другие характеристики. Он отражает временные характеристики управления и степень

ее приспособленности к времени решения задач по переработке информации. Однако, как было показано, вычисление этого критерия возможно только при наличии аналитической модели системы управления.

При разработке систем управления аналитические модели наряду с другими методами найдут самое широкое применение при решении и других задач.

Одна из таких задач ставит целью определение различных вариантов структуры системы управления. Ее решение экспериментальным путем потребовало бы создания экспериментальных средств автоматизации не только для элементов процесса управления, но и для процесса в целом. Это связано с неприемлемыми затратами времени и средств. Оценка альтернативных вариантов структурной схемы системы управления с помощью аналитической модели может оказаться весьма эффективным средством сравнительной оценки альтернативных вариантов структуры системы управления как на стадии ее проектирования, так и на стадии совершенствования методов управления.

Анализ результатов моделирования с помощью аналитических моделей процесса функционирования системы управления при различных вариантах структурной схемы позволяет установить: структуру звеньев системы управления; необходимое число ЭВМ и других средств автоматизации в каждом звене управления; степень автоматизации различных звеньев системы управления и др.

При этом может быть выбран такой вариант структурной схемы системы управления, который наилучшим образом удовлетворяет предъявляемым требованиям по техническим и экономическим показателям.

С помощью аналитических моделей можно установить предельные значения времени выполнения работ и решения отдельных задач на ЭВМ, а следовательно, после разработки алгоритмов решения этих задач определить и тактико-технические требования к быстродействию ЭВМ в каждом звене управления.

Применение аналитических моделей систем управления может дать обнадеживающие результаты также и при исследовании способов функционирования основных и обеспечивающих средств системы. Аналитическую модель системы управления в этом случае следует рассматривать как составную часть модели всей системы в целом, в которой найдут отражение не только процессы управления основными и обеспечивающими средствами, но и функционирование самих этих средств.

Такая модель даст возможность судить об эффективности предлагаемых способов управления и функционирования как основных, так и обеспечивающих средств системы.

7.3. Моделирование системы основных средств

При описании динамики функционирования системы основных средств с помощью марковского процесса с непрерывным временем и дискретным числом состояний, прежде всего, необходимо четко определить те допущения, которые нужно сделать по отношению к реальному процессу функционирования системы.

Первым является допущение о марковском характере процесса, которое формулируется следующим образом.

Процесс, протекающий в системе, является марковским, если будущее развитие процесса зависит от того, в каком состоянии система на-

ходится в данный момент, и не зависит от того, каким образом она пришла в это состояние.

Определим чисто интуитивно текущее состояние системы как такую часть настоящего и прошлого системы, которая необходима для определения настоящего и будущего значений процесса.

Другими словами, мы рассматриваем состояние системы как некоторую (внутреннюю) характеристику системы, значение которой в данный момент времени определяет текущее значение процесса и оказывает влияние на его будущее.

Если рассуждать совсем упрощенно, то состояние можно рассматривать как своего рода хранилище информации, или запоминающее устройство, или накопитель прецедентов о прошлом и настоящем системы. При этом, конечно, необходимо, чтобы множество внутренних состояний системы было достаточно полным для того, чтобы вместить всю информацию о прошлом и настоящем системы, необходимую для определения текущего значения процесса и предсказания развития процесса в будущем.

Следует заметить, что в общем случае не представляется возможным указать какие-либо формальные правила для выбора состояний и параметров состояний реальных систем. Исследователь в этом отношении может руководствоваться лишь собственной интуицией, опирающейся на понимание существа процесса функционирования системы и существа решаемой задачи.

В этом смысле моделирование в настоящее время все еще является в какой-то степени искусством, а не наукой. Отсутствие формальных правил не позволяет ставить вопросы, связанные с полнотой и единственностью данной совокупности состояний и параметров состояний системы.

Конкретные рекомендации по этому поводу могут быть даны только при рассмотрении сравнительно узких классов систем с учетом специфики их структуры и процессов функционирования. Тем не менее в самом общем виде при определении состояний основных средств системы можно выделить ряд признаков.

Основными признаками, на наш взгляд, по которым могут определяться состояния основных средств системы, являются: изменение способа функционирования средств; изменение способа взаимодействия с другими средствами системы; переход средств к взаимодействию с другими средствами системы.

При описании процесса функционирования средств необходимо рассматривать по возможности все основные физические состояния, позволяющие учесть все основные факторы, влияющие на эффективность функционирования системы.

С другой стороны, при определении физических состояний каждого типа средств должны учитываться только принципиально различные физические состояния, так как увеличение числа физических состояний приводит к усложнению модели. Количество состояний и их конкретный смысл определяются процессом функционирования средств.

Описание процесса функционирования основных средств как марковского процесса с непрерывным временем существенно упрощается, если потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, полагаются пуассоновскими потоками (т. е. потоками без после-

действия), хотя в общем случае и не стационарными. Это является вторым допущением.

Представление процесса, протекающего в системе, в виде марковского случайного процесса с непрерывным временем при наличии указанных допущений позволяет применить для описания поведения системы аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наличие принятых допущений приводит, естественно, к некоторым погрешностям. Однако, они как показывают исследования, невелики и, как правило, не превышают погрешностей в исходных данных.

Для разработки модели системы, описываемой с помощью уравнений для марковского процесса с непрерывным временем и дискретным числом состояний, необходимо: 1) определить основные типы средств, входящих в состав системы; 2) для каждого типа средств определить схему основных физических состояний; 3) записать в общем виде систему дифференциальных уравнений, описывающую вероятности состояний системы средств в процессе их функционирования; 4) определить конкретные значения интенсивностей переходов системы из одного состояния в другое и записать уравнения в окончательном виде; 5) определить начальные условия для интегрирования.

При изучении систем большого масштаба, включающих значительное количество разнородных средств, возникает необходимость поиска более экономных способов описания процесса функционирования системы, основанных на более высокой степени абстракции.

Выбор из всего многообразия средств, входящих в состав системы, основных средств, подлежащих учету в модели системы, является одной из задач этого плана.

На наш взгляд, основными признаками, которые определяют решение о включении данного средства в модель, являются следующие:

1. Это должно быть основное средство системы. Это значит, что назначение средств определяет назначение системы, а количество этих средств однозначно определяет состав всей системы основных средств и, кроме того, определяет состав средств обеспечения.

2. Средство должно иметь существенное влияние на эффективность функционирования системы. Если средство является важным с какой-либо точки зрения, но непосредственно в процессе функционирования не участвует, то такое средство должно быть из модели исключено.

Кроме крупных одиночных средств или объектов, в состав системы могут входить мелкие средства или объекты, которые функционируют в составе групп. Такие средства или объекты будем называть групповыми.

Для группового объекта дополнительными признаками, определяющими его как единый организм, являются:

1) выполнение в любой момент времени только одной из присущих ему задач;
2) совместное функционирование всех элементов объекта;
3) для военных объектов компактное расположение на местности, которое позволяет рассматривать его при поражении как одну цель.

Если один из этих признаков для группового объекта не выполняется, то необходимо этот объект расчленить на более мелкие объекты, обладающие этими признаками. Необходимость соблюдения таких требований определяется возможностями модели с дискретным числом состояний.

В том случае, когда технические характеристики различных средств одного типа несущественно отличаются друг от друга, все средства одного типа объединяются в обобщенное средство, которое принимается в качестве основного. Это обобщение производится на основе анализа и осреднения технических характеристик средств одного типа.

Составление схемы состояний средств и системы дифференциальных уравнений рассмотрим на упрощенном примере функционирования некоторой произвольной системы подвижных средств. Однако если при рассмотрении внимательно, то нетрудно увидеть, что эта схема является довольно общей и описывает ряд практически интересных процессов функционирования подвижных средств, предназначенных для решения самых разнообразных задач. Этими подвижными средствами могут быть торговые суда, военные корабли, самолеты гражданской авиации, военные самолеты, средства автомобильного, железнодорожного, речного и других видов транспорта.

При составлении схемы состояний будем иметь в виду перечисленные выше признаки и допущения.

Схема состояний средств изображена на рис. 7.6.

Под состояниями системы мы условились понимать физические состояния средств системы, в которых они могут находиться в процессе функционирования.

Состояния системы обозначим порядковыми номерами ($k=1, 2, 3 \dots$). Вероятность k -го состояния системы обозначим $p^{(k)}(t)$, тип средства — индексом i ($i=1, 2, 3 \dots$). Таким образом, запись $p_i^{(k)}(t)$ обозначает вероятность k -го состояния системы средств i -го типа.

В процессе функционирования средство переходит из одного состояния в другое под воздействием некоторого потока событий. Обозначим $\mu_{ki}^{(i)}$ интенсивность перехода (параметр потока событий) системы средств i -го типа из состояния k в состояние l ($k \neq l$). Запись уравнений производится аналогично (7.2.9).

Таким образом, система дифференциальных уравнений для рис. 7.6 будем иметь вид [10]:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^{(1)} &= -\mu_{12}^{(i)} p_i^{(1)} + \mu_{41}^{(i)} p_i^{(4)}, \\ \dot{p}_i^{(2)} &= -\mu_{23}^{(i)} p_i^{(2)} + \mu_{12}^{(i)} p_i^{(1)}, \\ \dot{p}_i^{(3)} &= -\mu_{34}^{(i)} p_i^{(3)} + \mu_{23}^{(i)} p_i^{(2)}, \\ \dot{p}_i^{(4)} &= -\mu_{41}^{(i)} p_i^{(4)} + \mu_{34}^{(i)} p_i^{(3)}. \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

В общем случае величины $p_i^{(k)}$ и $\mu_{ki}^{(i)}$ являются функциями времени, однако для простоты записи индексы t опускаются.

После составления системы уравнений типа (7.4.1) необходимо определить интенсивности $\mu_{ki}^{(i)}$ переходов системы из одного состояния в другое. Выражения для интенсивностей переходов в каждом конкретном случае зависят от того, какой схемой состояний мы описываем процесс и каковы технические характеристики рассматриваемых средств. Поэтому их определение всегда связано с каждым типом средств и конкретным процессом функционирования этих средств.

После определения интенсивностей $\mu_{ki}^{(i)}$ уравнения записываются в явном виде.

При интегрировании системы необходимо задать начальные условия, например, при $t=0$ $p_i^{(1)}(0)=1$, $p_i^{(2)}(0)=p_i^{(3)}(0)=p_i^{(4)}(0)=0$.

Для случая, когда рассматривается функционирование системы, состоящей из двух взаимодействующих подсистем основных средств, для второй подсистемы введем следующие обозначения:

$q_j^{(n)}$ — вероятность состояния системы средств j -го типа, находящихся в состоянии n ; $v_{nm}^{(i)}$ — интенсивность перехода системы из состояния n в состояние m .

В общем случае подсистемы, входящие в состав рассматриваемой системы, могут быть конфликтующие, тогда характеристики функционирования должны определяться с учетом взаимного воздействия подсистем друг на друга.

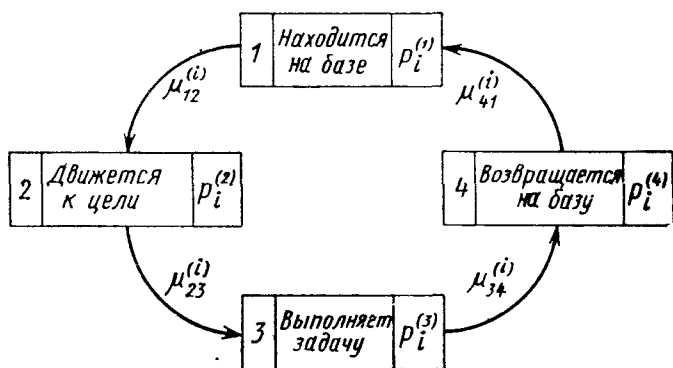


Рис 7.6.

При исследовании конфликтующих систем на практике реальные процессы сводят, как правило, к двум различным типам процессов: процессам, протекающим только во времени, и процессам, протекающим во времени и пространстве. Модели этих двух типов процессов рассматриваются в §§ 7.5 и 7.6.

7.4. Временная модель функционирования основных средств системы

В данном параграфе рассмотрены процессы функционирования боевых средств системы, протекающие только во времени. Рассмотрим также принципы учета основных факторов, влияющие на изменение физических состояний основных средств, схемы физических состояний основных средств системы и получим основные математические зависимости, описывающие функционирование основных средств системы во времени. В процессе функционирования системы часть средств может быть подвижной.

Под подвижными основными средствами системы будем понимать такие, для которых процесс функционирования при решении ими основных задач связан с изменением их местоположения.

Рассмотрим марковский процесс двусторонних боевых действий группировок, каждая из которых состоит из однородных боевых средств. Общее число средств первой стороны равно X , второй сторо-

ны — У. Пусть все боевые средства подвижные, т. е. могут менять свое местоположение в ходе боевых действий. Каждое боевое средство в ходе боевых действий может находиться в различных состояниях. Этими состояниями могут быть следующие (рис. 7.7):

1. Боевое средство не разведано и ведет огонь по разведанным боевым средствам противника со скорострельностью $\lambda = 1/\bar{T}_в$, где $\bar{T}_в$ — среднее время между выстрелами.

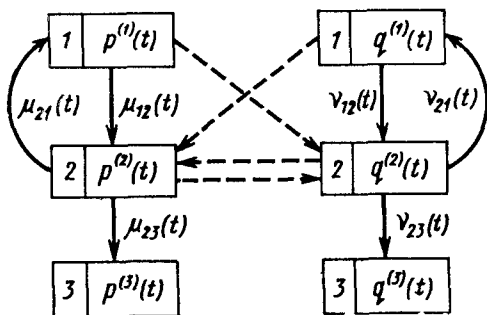


Рис. 7.7.

Так как средство не разведано, то по нему противник вести огонь не может. Вероятности состояний системы боевых средств, находящихся в первом состоянии к моменту t , обозначены $p^{(1)}(t)$ для первой стороны и $q^{(1)}(t)$ для второй стороны.

2. Боевое средство разведано, ведет огонь по боевым средствам противника, не поражено. Так как боевое средство разведано, противник может вести по нему огонь. За

счет подвижности боевое средство может перейти снова в неразведанное состояние. Вероятности состояний системы боевых средств, находящихся во втором состоянии к моменту t , обозначим $p^{(2)}(t)$ и $q^{(2)}(t)$.

3. Боевое средство поражено в результате успешного удара противника. Вероятности состояний для пораженных средств сторон к моменту t обозначим $p^{(3)}(t)$ и $q^{(3)}(t)$.

Интенсивности пуассоновских потоков, переводящие каждое боевое средство из одного состояния в другое, обозначим μ_{kl} для первой стороны и ν_{nm} для второй стороны.

В соответствии с (7.2.9) систему уравнений, описывающую процесс боевых действий сторон в динамике, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(1)}(t) &= -\mu_{12}p^{(1)}(t) + \mu_{21}p^{(2)}(t), \\ \dot{p}^{(2)}(t) &= -(\mu_{23} + \mu_{21})p^{(2)}(t) + \mu_{12}p^{(1)}(t), \\ \dot{q}^{(1)}(t) &= -\nu_{12}q^{(1)}(t) + \nu_{21}q^{(2)}(t), \\ \dot{q}^{(2)}(t) &= -(\nu_{23} + \nu_{21})q^{(2)}(t) + \nu_{12}q^{(1)}(t), \\ p^{(1)}(t) + p^{(2)}(t) + p^{(3)}(t) &= 1, \\ q^{(1)}(t) + q^{(2)}(t) + q^{(3)}(t) &= 1.\end{aligned}$$

Начальными условиями для интегрирования системы могут быть:

$$\begin{aligned}t=0, \quad p^{(1)}(0) &= 1 - p^{(2)}(0), \quad p^{(3)}(0) = 0, \\ q^{(1)}(0) &= 1 - q^{(2)}(0), \quad q^{(3)}(0) = 0,\end{aligned}$$

где $p^{(2)}(0)$ и $q^{(2)}(0)$ — вероятности состояний системы боевых средств, разведанных к началу боевых действий.

Определим интенсивности μ_{kl} и ν_{nm} , входящие в уравнения. Эти величины в общем случае могут быть функциями времени, однако индекс t для простоты написания опущен.

Определим интенсивности μ_{hi} для первой стороны. Для второй стороны соответствующие интенсивности γ_{nm} определяются аналогичным образом.

Величина μ_{12} является интенсивностью обнаружения боевых средств, находящихся в первом состоянии (неразведанных).

Определим μ_{12} из следующих соображений. Допустим, что площадь, занимаемая средствами первой стороны, равна S . На этой площади статистически равномерно расположено X средств. K разведчиков второй стороны независимо друг от друга производят случайный поиск этих боевых средств.

В этом случае вероятность обнаружения каждого боевого средства является показательной функцией времени $p_i(t) = 1 - e^{-\mu_{12}^{(i)} t}$.

Интенсивность обнаружения каждого боевого средства одним i -м разведчиком $\mu_{12}^{(i)}$ в единицу времени равна:

$$\mu_{12}^{(i)} = D_{pi} v_{pi} p_{0i} / S,$$

где D_{pi} — ширина полосы обнаружения i -го разведчика; v_{pi} — поисковая скорость i -го разведчика, p_{0i} — условная вероятность обнаружения боевого средства при попадании его в зону обнаружения i -го разведчика.

При независимости действий k разведчиков общая вероятность обнаружения каждого боевого средства может быть определена как вероятность обнаружения хотя бы одним разведчиком

$$p(t) = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_i(t)) \text{ или } p(t) = 1 - e^{-\mu_{12} t}, \text{ где } \mu_{12} = \sum_{i=1}^k \mu_{12}^{(i)}.$$

Среднее время обнаружения боевого средства в этом случае равно:

$$\bar{T}_{обн} = \int_0^{\infty} e^{-\mu_{12} t} dt = \frac{1}{\mu_{12}}.$$

Таким образом, интенсивность обнаружения μ_{12} является обратной величиной среднего времени обнаружения боевого средства.

Рассматривая задачи средств обнаружения, можно установить, что они состоят обычно в обнаружении к заданному сроку или в кратчайшее время возможно большего или заданного числа объектов.

При этом под средним временем обнаружения объекта $\bar{T}_{обн}$ понимается среднее время обнаружения *любого* из объектов, находящихся в зоне поиска.

Величина $\bar{T}_{обн}$ является достаточно объективным показателем эффективности системы обнаружения, причем она, как правило, не зависит от числа объектов, находящихся в зоне поиска, а характеризует только систему средств обнаружения с точки зрения количества средств обнаружения, способа обнаружения объектов и технических характеристик средств обнаружения.

Величина $\bar{T}_{обн}$, являясь характеристикой эффективности действия разведки, позволяет учесть способ действий разведки, количество разведчиков k , ширину полосы разведчика D_p , разрешающую способность

ρ_0 аппаратуры разведчика (достоверность обнаружения) и поисковую скорость разведчика v_p , т. е. все основные характеристики разведки.

Определим теперь величины μ_{21} и μ_{23} , которые равны: $\mu_{21} = \mu_2(1 - p_y)$; $\mu_{23} = \mu_2 p_y$, где p_y — вероятность уничтожения боевой единицы в разведанном состоянии, μ_2 — интенсивность перехода боевых единиц из 2-го (разведанного) состояния:

$$\mu_2 = 1/\bar{T}_p + 1/\bar{T}_{обсл},$$

где $\bar{T}_p$ — среднее время пребывания боевой единицы в разведанном состоянии, $\bar{T}_{обсл}$ — среднее время обслуживания требований.

$$\bar{T}_{обсл} = \int_0^{\infty} t_{обсл} dF(t_{обсл}).$$

Определим величину $\bar{T}_p$.

Так как боевые средства подвижны, они могут быть обнаружены или в движении, или на боевой позиции. Считаем, что цикл работы боевого средства состоит из периода движения и периода пребывания на боевой позиции.

Время каждого периода для данного типа боевых средств можно определить из оперативно-тактических нормативов.

Вероятность того, что боевое средство будет обнаружено в движении, равна: $p_d = \bar{T}_d / \bar{T}_ц$, где $\bar{T}_d$ — среднее время периода движения, $\bar{T}_ц$ — среднее время цикла.

Вероятность того, что боевое средство будет обнаружено на боевой позиции, равна: $p_6 = \bar{T}_6 / \bar{T}_ц$, где $\bar{T}_6$ — среднее время пребывания боевого средства на боевой позиции.

Тогда закон распределения времени пребывания боевого средства в разведанном состоянии равен: $f(t_p) = p_d f_d(t_p) + p_6 f_6(t_p)$.

Теперь среднее время пребывания средства в разведанном состоянии определится известной формулой

$$\bar{T}_p = \int_0^{\infty} t_p f(t_p) dt_p,$$

где $f_d(t_p)$ — закон распределения времени пребывания боевого средства в разведанном состоянии при обнаружении ее в движении, $f_6(t_p)$ — закон распределения времени пребывания боевого средства в разведанном состоянии при обнаружении его на боевой позиции.

Вид законов $f_d(t_p)$ и $f_6(t_p)$ зависит от характеристик конкретных типов средств. Поэтому в рамках рассматриваемой модели будем считать их заданными.

Определив величину $\bar{T}_p$, необходимо для использования в модели полученный закон распределения $f(t_p)$ заменить показательным с параметром $\mu_{21} = 1/\bar{T}_p$.

Определим теперь величину p_y — вероятность уничтожения боевого средства в разведанном состоянии.

Эта вероятность равна: $p_y = p_i p_c p_n$, где p_i — вероятность того, что время прохождения информации в системе управления меньше времени пребывания боевого средства в разведанном состоянии; p_c — вероятность того, что к моменту поступления заявки в систему боевых средств будет свободное боевое средство, которое может обстрелять разведанную цель, p_n — вероятность поражения цели с учетом рассеивания и загона поражения.

Вероятность p_t , очевидно, равна:

$$p_t = p(t_{\text{обсл}} < t_p) = \int_0^{\infty} F(t_{\text{обсл}}) f(t_p) dt.$$

Вероятность p_c определим следующим образом.

Общий поток разведанных целей для второй стороны равен $v_{12}Y^{(1)}$, где $Y^{(1)} = q^{(1)}Y$.

Поток выстрелов, который может обеспечить первая сторона, равен $\lambda_1(X^{(1)} + X^{(2)})$, где λ_1 — скорострельность боевой единицы первой стороны, $X^{(1)} = p^{(1)}X$, $X^{(2)} = p^{(2)}X$.

Если $\lambda_1(X^{(1)} + X^{(2)}) < v_{12}Y^{(1)}$, полагаем $p_c = \lambda_1(X^{(1)} + X^{(2)})/v_{12}Y^{(1)}$.

Если $\lambda_1(X^{(1)} + X^{(2)}) \geq v_{12}Y^{(1)}$, полагаем $p_c = 1$. Следовательно, $p_c = \min\{1, \lambda_1(X^{(1)} + X^{(2)})/v_{12}Y^{(1)}\}$.

Величина p_c является характеристикой пропускной способности системы боевых средств. Приведенные формулы справедливы для регулярного потока заявок и постоянного времени обслуживания. Поэтому они дают верхнюю оценку для вероятности p_c .

В действительности за счет случайных сгущений потока заявок вероятность p_c будет ниже. Имеющиеся формулы для вероятности p_c в теории массового обслуживания получены для установившегося режима обслуживания. В нашем случае — ярко выраженный переходный режим. Поэтому целесообразнее использовать предложенную формулу.

Таким образом, общая формула для вероятности уничтожения имеет вид

$$p_y = p_n \min\{1, \lambda_1(X^{(1)} + X^{(2)})/v_{12}Y^{(1)}\} \int_0^{\infty} F(t_{\text{обсл}}) f(t_p) dt.$$

При идеальной системе управления, когда $t_{\text{обсл}} = 0$,

$$F(0) = 1, \int_0^{\infty} f(t_p) dt = 1, \text{ имеем } p_y = p_n \min\{1, \lambda_1(X^{(1)} + X^{(2)})/v_{12}Y^{(1)}\}.$$

Если при этом поток обнаруживаемых целей меньше потока потенциально возможных выстрелов, т. е. $\lambda_1(X^{(1)} + X^{(2)}) \geq v_{12}Y^{(1)}$, то $p_c = 1$, $p_y = p_n$.

Величина p_y в общем случае является функцией времени, так как зависит от средних относительных численностей боевых единиц. Следовательно, ее необходимо вычислять в процессе интегрирования системы уравнений.

Если теперь в качестве критерия эффективности группировки принять число пораженных средств противника на конец боевых действий $Y^{(3)}(T)$ с учетом своих потерь $X^{(3)}(T)$, т. е. например, $W = Y^{(3)}(T) - X^{(3)}(T)$, то вычисляя в результате интегрирования системы уравнений значения $Y^{(3)}(T)$ и $X^{(3)}(T)$ при рассматриваемых и идеальных системах разведки и управления, получим значения W_p и W_n .

Оценить эффективность этих систем можно показателем

$$Q = (W_p - W_0)/(W_n - W_0).$$

Для простоты мы рассмотрели модель боевых действий однородных группировок. Для случая разнородных группировок метод остается прежним, увеличивается только число дифференциальных уравнений.

7.5. Пространственно-временная модель функционирования основных средств

В § 7.4 рассмотрены процессы функционирования основных средств системы, описываемые дискретным марковским процессом, протекающим только во времени. Однако на практике часто при исследовании

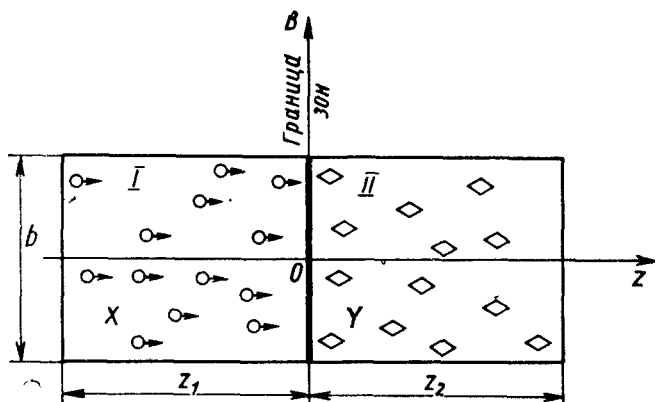


Рис. 7.8.

процессов функционирования систем описание их как протекающих только во времени оказывается недостаточным. В настоящем параграфе рассматриваются модели процесса функционирования основных средств, протекающего как во времени, так и в пространстве.

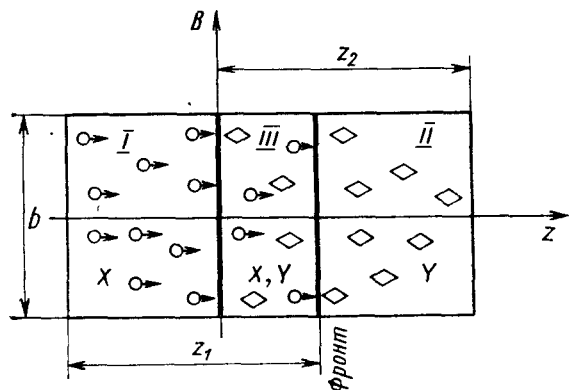


Рис. 7.9.

На рис. 7.8 изображены зоны размещения средств в начальный момент времени $t=0$. В зоне I площадью $S_I = bz_1$, расположены средства X. По ширине полосы b средства расположены статистически равномерно, по глубине полосы z плотность расположения средств переменная и равна $\pi_x(z)$. Линия соприкосновения зон S_I и S_{II} на рис. 7.8 называется границей зон. Средства X, расположенные в начальный момент в площади S_I , подвижны и при перемещении имеют одинаковую для всех скорость $v_1 = \text{const}$, направление которой совпадает с направлением оси Z. Начало отсчета оси Z совпадает с передней линией площади S_{II} , т. е. с границей зон.

В зоне II расположены неподвижные средства Y. Площадь зоны II равна: $S_{II} = bz_2$. По ширине полосы средства Y расположены также статистически равномерно, по глубине полосы плотность расположения средств переменная и равна $\pi_y(z)$.

Средства каждой из сторон однородны между собой, но не обязательно однородны со средствами другой стороны.

Процесс взаимодействия средств состоит в следующем (рис. 7.9). Подвижные средства X со скоростью v_1 перемещаются, постепенно занимая площадь S_{II} . При этом средства Y пытаются уничтожить средства X . Возможности каждого средства Y таковы, что оно может уничтожать только те средства X , которые попадают в его полосу шириной b_1 (рис. 7.10). Средства X , проходящие за пределами полосы b_1 , не могут уничтожаться данным средством Y . Средства X в свою очередь пытаются уничтожить средства Y . Таким образом, между средствами X и Y происходят своего рода дуэли.

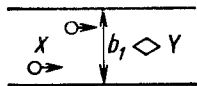


Рис. 7.10.

Если в результате такой дуэли средство X уничтожило средство Y , то средство Y считается погибшим, а средство X после этого возвращается в свою зону. Если в результате дуэли оба средства оказались не уничтоженными, то средство X возвращается в свою зону, а средство Y сохраняет способность к уничтожению других средств X , попадающих в его зону b_1 . Средство Y считается сохранившимся и тогда, когда оно уничтожает средство X . При этом средство X считается погибшим. Взаимодействие средств X и Y происходит только в зоне III. Размеры этой зоны изменяются с течением времени. Это изменение зависит от скорости перемещения передней линии (фронта) первой стороны. Так как средства X после дуэли со средствами Y погибают или возвращаются, то скорость перемещения Z фронта средств X меньше скорости перемещения самих средств v_1 .

Определим скорость перемещения фронта Z средств X .

Скорость перемещения фронта средств X определим как

$$\dot{z} = \Delta z / \Delta t. \quad (7.5.1)$$

Выберем в качестве интервала Δz расстояние между двумя соседними средствами Y по глубине z :

$$\Delta z = 1 / \pi_y(z). \quad (7.5.2)$$

Перемещение средств X на расстояние Δz происходит за время

$$\Delta t = \Delta z / v_1 + 1 / \lambda_1(t), \quad (7.5.3)$$

где $\lambda_1(t)$ — плотность потока средств X в момент t :

$$\lambda_1(t) = \pi_1(z) v_1, \quad (7.5.4)$$

где

$$z = v_1 t.$$

Для того чтобы получить λ_1 для заданного момента времени t , необходимо при данном значении t определить $z = v_1 t$, затем для полученного значения z в формулу (7.5.4) подставить значение $\pi_1(z)$.

Если $\pi_1(z)$ задана аналитически:

$$\pi_1(z) = \varphi(z),$$

то достаточно сделать замену переменной $z = v_1 t$, после чего получим в явном виде $\lambda_1(t)$.

Имея в виду (7.5.2) — (7.5.4), получим

$$\dot{z}(t) = \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_1(t) + \pi_y(z) v_1}. \quad (7.5.5)$$

Величину $\dot{z}(t)$ на глубине z получим, положив

$$\lambda_{1z}(t) = \lambda_1 \left(t - \frac{z}{v_1} \right). \quad (7.5.6)$$

Из формулы (7.5.6) видно, что глубина z функционально связана со временем t .

По мере продвижения фронта в глубину зоны II число средств Y , поступающих в зону III, увеличивается.

Плотность потока средств Y , поступающих в зону III, равна:

$$\lambda_y(z) = \pi_y(z) \dot{z}. \quad (7.5.7)$$

Часть средств Y , поступающих в зону III, оказывается уничтоженной. Плотность потока погибших средств, поступающих в зону III, равна:

$$\lambda_{yn}(z) = \pi_y(z) \dot{z} P_2(z), \quad (7.5.8)$$

где $P_2(z)$ — вероятность поражения средства Y , расположенного на глубине z , средством X .

Вероятность $P_2(z)$ определяется выражением

$$P_2(z) = \bar{P}_1 P_2 \bar{\mathcal{P}}_1(z), \quad (7.5.9)$$

где $\bar{\mathcal{P}}_1(z)$ — вероятность того, что средство X будет не поражено в зоне III сохранившимися средствами Y ; $\bar{P}_1$ — вероятность того, что средство X будет не уничтожено «своим» средством Y ; P_2 — вероятность уничтожения средства Y средством X без учета противодействия средства Y .

Вероятность $\bar{\mathcal{P}}_1(z)$ того, что средство X будет не поражено в процесс преодоления зоны III, можно определить следующим образом.

Сделаем допущение о том, что в зоне III средства Y расположены статистически равномерно по ширине полосы и с переменной (новой) плотностью $\pi_{yn}(z)$ по глубине полосы. Определим при этом допущении математическое ожидание числа средств Y , сохранившихся в зоне III и воздействующих по каждому средству X при перемещении его на глубину z :

$$m_{y0}(z) = (b_1/b) m_{yn}(z). \quad (7.5.10)$$

где b_1 — ширина полосы воздействия средств Y ;

$$m_{yn}(z) = \int_0^z \lambda_{yn}(z) dz = \int_0^z \pi_y(z) \dot{z} [1 - P_2(z)] dz. \quad (7.5.11)$$

Считаем, что при преодолении зоны III средство X подвергается последовательности независимых воздействий со стороны средств Y , тогда

$$\mathcal{P}_1(z) = 1 - e^{-m_{y0}(z) P_1}. \quad (7.5.12)$$

Подставляя (7.5.10), (7.5.11) в (7.5.12), получим

$$\mathcal{P}_1(z) = 1 - e^{-P_1 \int_0^z \pi_y(z) \dot{z} [1 - P_2(z)] dz}. \quad (7.5.13)$$

Плотность потока средств X на линии фронта равна:

$$\lambda_{1\Phi}(z) = \lambda_{1\Phi} \left(t - \frac{z}{v_1} \right) \bar{\mathcal{G}}_1(z). \quad (7.5.14)$$

Обозначим математические ожидания числа средств X к моменту t : непораженных $m_{x\pi}(t)$, пораженных $m_{x\pi}(t)$. Используя полученные выше зависимости, получим общую систему уравнений, описывающую процесс гибели и размножения средств X и Y с учетом перемещения:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{y\pi} &= \pi_y(z) \dot{z} P_2(z), \\ \dot{m}_{y\pi} &= \pi_y(z) \dot{z} [1 - P_2(z)], \\ \dot{m}_{y0} &= \pi_y(z) b_1 \dot{z} [1 - P_2(z)], \\ \dot{m}_{x\pi} &= \lambda_{1\Phi} \left(t - \frac{z}{v_1} \right) \bar{P}_1(z), \\ m_{x\pi} &= \lambda_{1\Phi} \left(t - \frac{z}{v_1} \right) [1 - \bar{P}_1(z)], \\ \dot{z} &= \frac{\lambda_{1\Phi}(z)}{\lambda_{1\Phi}(z) + \pi_y(z) v_1} v_1, \\ P_2(z) &= \bar{P}_1 \bar{\mathcal{G}}_1(z) P_2, \\ \mathcal{G}_1(z) &= 1 - e^{-\pi_{y0}(z) P_1} \end{aligned} \quad (7.5.15)$$

Начальными условиями для интегрирования системы являются:

$$\begin{aligned} t=0, z=0, m_{y\pi}(0) &= m_{y\pi}(0) = m_{y0}(0) = \\ &= m_{x\pi}(0) = m_{x\pi}(0) = 0. \end{aligned}$$

Полученная система уравнений (7.5.15) позволяет исследовать изменение средних численностей средств X и Y во времени с учетом перемещения средств X по глубине зоны размещения средств Y .

7.6. Моделирование системы средств обеспечения

В настоящем параграфе рассмотрена модель системы средств обеспечения. Основными ее задачами является обеспечение системы в целом и в первую очередь системы основных средств различными видами материальных средств, необходимых для их функционирования.

Основной проблемой при описании процесса функционирования системы средств обеспечения является выбор уровня описания, который поддается анализу и приводит к полезным результатам.

В качестве уровня, выбранного в данной модели, рассматривается последовательность звеньев, где каждое звено представляет собой совокупность средств, необходимых для хранения и перемещения определенных количеств материальных средств различного вида из одного пункта в другой. Эта идея является достаточно общей и оказывается полезной для анализа почти любой аналогичной системы, хотя в данном конкретном случае в составе системы средств обеспечения мы будем рассматривать только систему складов для хранения и транспортные средства для перемещения различных материальных средств, а также

сами материальные средства, которые рассматриваются как некоторые грузы различного назначения [55].

При изучении движения грузов необходимо принимать в расчет все действия, происходящие по пути их продвижения от исходного пункта к потребителю. Эти действия составляют основу сложной системы транспортировки и должны рассматриваться как последовательность погрузочно-разгрузочных работ и перевозок между складами. Таким образом, в основу процессов, протекающих в системе средств обеспечения, наиболее разумным представляется положить процессы движения грузов. Одной из характеристик процесса движения груза является его маршрут, под которым будем понимать последовательность маршрутов транспортных средств, перевозящих груз от исходного пункта к потребителю. В процессе движения груза по маршруту производится ряд операций, основными из которых являются перевозка груза транспортными средствами, погрузочно-разгрузочные работы и хранение грузов на складах. Перевозку грузов транспортными средствами можно рассматривать как последовательность циклических операций, где каждое транспортное средство перевозит груз из одного пункта в другой, а затем возвращается и повторяет операцию. Погрузочно-разгрузочные работы также можно рассматривать как последовательность циклических операций погрузочно-разгрузочного оборудования (крана, автопогрузчика и др.), где кран или автопогрузчик в процессе разгрузки поднимает груз с транспортного средства, переносит его на склад для временного хранения, а затем повторяет операцию. В процессе погрузки операция повторяется в обратном порядке, а именно: после хранения на складе в течение некоторого времени погрузочное средство перевозит комплекты грузов со склада и укладывает его на транспортное средство. Последовательность операции полной обработки груза погрузочно-разгрузочным оборудованием или транспортным средством называется циклом. Различные действия, которые могут производиться в течение цикла, относятся к следующим четырем категориям: погрузка, транспортировка груза, разгрузка, движение порожнего средства. Кроме

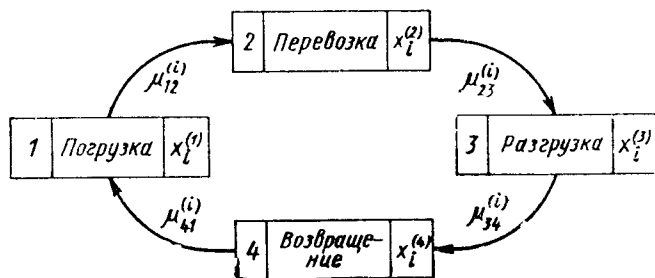


Рис. 7.11.

производительных действий, цикл может содержать задержку. Задержки могут быть двух типов: 1) задержки вызваны невозможностью средства погрузить или разгрузить груз из-за того, что соседнее с ним звено не находится с ним в фазе; 2) задержки вызваны поломкой или остановкой средства. Сумма времени производительных операций плюс задержки, присущие циклу, назовем рабочим временем. Помимо этих основных действий, существуют различные мелкие операции, которые занимают относительно небольшую долю рабочего времени цикла.

Транспортное или погрузочно-разгрузочное средство, обеспечивающее совокупность операций, составляющих цикл, называется звеном. Точки между звеньями, в которых груз может храниться некоторое время, — это склады. На складах характеристики груза могут изменяться. Например, груз может поступать в виде отдельных ящиков, а выходить партиями по несколько ящиков.

Основным принципом поставки грузов в большинстве существующих систем снабжения является поставка грузов вышестоящим складом

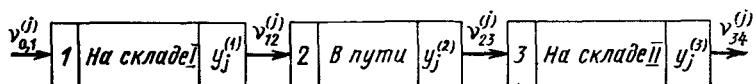


Рис. 7.12.

нижестоящему по заявкам нижестоящего склада, т. е. ответственным за поставку грузов и транспортировку к нижестоящему складу является вышестоящий склад (база). Схематически описанный процесс можно представить в виде рис. 7.11.

Основными состояниями для транспортных средств являются: погрузка, перевозка, разгрузка, возвращение.

Основными состояниями груза являются (рис. 7.12): 1) на складе I, 2) в пути, 3) на складе II.

Обозначим число транспортных средств i -го типа, находящихся в k -м состоянии, $x_i^{(k)}$, а интенсивности перехода средств i -го типа из состояния k в состояние e $\mu_{ki}^{(i)}$.

Тогда цикл работы транспортных средств может быть описан системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^{(1)} &= -\mu_{12}^{(i)} x_i^{(1)} + \mu_{41}^{(i)} x_i^{(4)}, \\ \dot{x}_i^{(2)} &= -\mu_{23}^{(i)} x_i^{(2)} + \mu_{12}^{(i)} x_i^{(1)}, \\ \dot{x}_i^{(3)} &= -\mu_{34}^{(i)} x_i^{(3)} + \mu_{23}^{(i)} x_i^{(2)}, \\ \dot{x}_i^{(4)} &= -\mu_{41}^{(i)} x_i^{(4)} + \mu_{34}^{(i)} x_i^{(3)}.\end{aligned}\quad (7.6.1)$$

Величины $x_i^{(k)}$ и $\mu_{ki}^{(i)}$ являются в общем случае функциями времени, однако для простоты записи индексы „ t “ опускаются.

Очевидно, что

$$\sum_k x_i^{(k)} = N_i, \quad (7.6.2)$$

где N_i — общее число транспортных средств.

Для интегрирования этой системы на ЭВМ необходимо определить интенсивности $\mu_{ki}^{(i)}$ и начальные условия, которые могут быть, например,

$$x_i^{(1)}(0) = N_i, \quad x_i^{(2)}(0) = x_i^{(3)}(0) = x_i^{(4)}(0) = 0. \quad (7.6.3)$$

Определим интенсивности переходов транспортных средств из состояния в состояние.

Интенсивность перехода i -го транспортного средства из состояния 1 в состояние 2 $\mu_{12}^{(i)}$ определяется как

$$\mu_{12}^{(i)} = 1/\bar{T}_i^{(1)}, \quad (7.6.4)$$

где $\bar{T}_i^{(1)}$ — среднее время пребывания транспортного средства в состоянии i :

$$\bar{T}_i^{(1)} = \bar{T}_{i\text{ож}}^{(1)} + \bar{T}_{i\text{п}}^{(1)}, \quad (7.6.5)$$

где $\bar{T}_{i\text{ож}}^{(1)}$ — среднее время ожидания погрузки, $\bar{T}_{i\text{п}}^{(1)}$ — среднее время погрузки.

Среднее время погрузки транспортного средства $\bar{T}_{i\text{п}}^{(1)}$, т. е. собственно время его загрузки определенной партией товара, можно определить как

$$\bar{T}_{i\text{п}}^{(1)} = \frac{\Delta_i}{\delta_i^{(1)} n^{(1)}} \bar{t}_{\text{п}}^{(1)}, \quad (7.6.6)$$

где Δ_i — грузоподъемность транспортного средства, $\delta_i^{(1)}$ — грузоподъемность погрузочного средства, $n^{(1)}$ — число погрузочных средств, $\bar{t}_{\text{п}}^{(1)}$ — время цикла погрузочного средства.

Среднее время ожидания в очереди, когда под погрузкой одновременно может находиться только одно транспортное средство, равно:

$$\bar{T}_{i\text{ож}}^{(1)} = \bar{T}_{i\text{п}}^{(1)} x_i^{(1)}, \quad (7.6.7)$$

где $x_i^{(1)}$ — число транспортных средств, находящихся в первом состоянии.

Тогда среднее время пребывания транспортного средства в первом состоянии

$$\bar{T}_i^{(1)} = \bar{T}_{i\text{п}}^{(1)} + \bar{T}_{i\text{ож}}^{(1)} = \bar{T}_{i\text{п}}^{(1)} (x_i^{(1)} + 1), \quad (7.6.8)$$

а интенсивность

$$\mu_{12}^{(i)} = 1/\bar{T}_i^{(1)} (x_i^{(1)} + 1). \quad (7.6.9)$$

В случае, когда под погрузкой могут одновременно находиться $m^{(1)}$ транспортных средств,

$$\mu_{12}^{(i)} = m^{(1)}/\bar{T}_{i\text{п}}^{(1)} (x_i^{(1)} + 1). \quad (7.6.10)$$

Функционирование погрузочных средств достаточно полно можно описать, используя выражение (7.6.6.), в котором учитываются все основные характеристики погрузочных средств. Таким образом, нет необходимости для описания функционирования погрузочных средств составлять систему дифференциальных уравнений для основных состояний погрузочного средства, тем более, что время цикла погрузочного средства пренебрежимо мало по сравнению с временем цикла транспортного средства.

Определим теперь интенсивность перехода i -го транспортного средства из состояния 2 в состояние 3 — $\mu_{23}^{(i)}$.

$$\mu_{23}^{(i)} = 1/\bar{T}_i^{(2)}, \quad (7.6.11)$$

где $\bar{T}_t^{(2)}$ — среднее время рейса транспортного средства от одного склада до другого.

Среднее время $\bar{T}_t^{(2)}$ зависит от расстояния между складами L и средней технической скорости транспортного средства v_t , а также времени задержки в пути по различным причинам:

$$\bar{T}_t^{(2)} = L/v_t + \bar{T}_{\text{зад}} \quad (7.6.12)$$

Время задержки в пути (на переездах, перекрестках и т. д.) устанавливается статистическим путем. В частном случае при отсутствии постоянных задержек в пути $\bar{T}_{\text{зад}} = 0$. Через характеристики v_t и $\bar{T}_{\text{зад}}$ можно учесть влияние на общие запасы грузов на складах пропускной способности дорожной сети. Например, плохое состояние дорожной сети или их малая пропускная способность снижают техническую скорость, что, в свою очередь, приводит к увеличению времени рейса, а следовательно, к увеличению потребного количества транспортных средств при заданной интенсивности перевозок. При исследовании процесса перевозок в условиях военного времени $\bar{T}_{\text{зад}}$ может характеризовать степень разрушения дорог и скорость восстановительных работ ремонтными бригадами и т. д.

Перейдем теперь к определению интенсивности $\mu_{34}^{(i)}$ и времени пребывания транспортного средства в состоянии 3 $\bar{T}_t^{(3)}$:

$$\mu_{34}^{(i)} = 1/\bar{T}_t^{(3)}. \quad (7.6.13)$$

Среднее время пребывания транспортного средства в состоянии 3 с учетом времени ожидания разгрузки можно определить аналогично $\bar{T}_t^{(1)}$:

$$\bar{T}_t^{(3)} = \bar{T}_{\text{гр}}^{(3)} x_t^{(3)}, \quad (7.6.14)$$

где $\bar{T}_{\text{гр}}^{(3)}$ — среднее время разгрузки транспортного средства:

$$\bar{T}_{\text{гр}}^{(3)} = \frac{\Delta_t}{\delta_t^{(3)} n^{(3)}} \bar{t}^{(3)}, \quad (7.6.15)$$

где $\delta_t^{(3)}$ — грузоподъемность разгрузочного средства, $n^{(3)}$ — число разгрузочных средств, $\bar{t}^{(3)}$ — время цикла разгрузочного средства.

Для случая, когда имеется $m^{(3)}$ разгрузочных площадок,

$$\bar{T}_{\text{гр}}^{(3)} = \Delta_t \bar{t}^{(3)} / \delta_t^{(3)} n^{(3)} m^{(3)}. \quad (7.6.16)$$

Интенсивность $\mu_{41}^{(i)}$ определяется выражением, аналогичным (7.6.12), только в этом случае необходимо техническую скорость определять для порожнего транспортного средства.

При встречных транспортных перевозках все полученные выражения для характеристики функционирования транспортных средств остаются в силе, только в этом случае в схему состояний транспортных средств необходимо добавить два дополнительных состояния — состояние 1 разгрузки у склада и состояние 2 погрузки у склада. Интенсивности перехода для этих состояний определяются аналогично рассмотренным выше. Число дифференциальных уравнений в этом случае будет равно уже не четырем, а шести.

Таким образом, с учетом полученных выражений для интенсивностей переходов $\mu_{kl}^{(i)}$ дифференциальные уравнения для средних численностей средств, находящихся в различных состояниях, будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^{(1)} &= -\frac{\delta_i^{(1)} n^{(1)}}{\Delta_i \bar{t}_{\text{ц}}^{(1)} m^{(1)} (x_i^{(1)} + 1)} x_i^{(1)} + \frac{v_{\text{т}}^{(4)}}{L + \bar{T}_{\text{зад}}^{(4)} v_{\text{т}}^{(4)}} x_i^{(4)}, \\ x_i^{(2)} &= -\frac{v_{\text{т}}^{(2)}}{L + \bar{T}_{\text{зад}}^{(2)} v_{\text{т}}^{(2)}} x_i^{(2)} + \frac{\delta_i^{(1)} n^{(1)}}{\Delta_i \bar{t}_{\text{ц}}^{(1)} m^{(1)} (x_i^{(1)} + 1)} x_i^{(1)}, \\ \dot{x}_i^{(3)} &= -\frac{\delta_i^{(3)} n^{(3)}}{\Delta_i \bar{t}_{\text{ц}}^{(3)} m^{(3)} (x_i^{(3)} + 1)} x_i^{(3)} + \frac{v_{\text{т}}^{(2)}}{L + \bar{T}_{\text{зад}}^{(2)} v_{\text{т}}^{(2)}} x_i^{(2)}, \\ \dot{x}_i^{(4)} &= -\frac{v_{\text{т}}^{(4)}}{L + \bar{T}_{\text{зад}}^{(4)} v_{\text{т}}^{(4)}} x_i^{(4)} + \frac{\delta_i^{(3)} n^{(3)}}{\Delta_i \bar{t}_{\text{ц}}^{(3)} m^{(3)} (x_i^{(3)} + 1)} x_i^{(3)}.\end{aligned}\quad (7.6.17)$$

Задав начальные условия, данную систему уравнений можно проинтегрировать на ЭВМ одним из численных методов, например методом Рунге—Кутты.

Мы определили состояния и получили систему дифференциальных уравнений, описывающих процесс функционирования транспортных средств. Нашей дальнейшей и основной задачей является исследование процесса перемещения груза. Очевидно, что основную роль при перемещении груза играют транспортные и погрузочно-разгрузочные средства. Поэтому не случайно мы рассмотрели вначале процессы их функционирования.

Рассмотрим процесс перемещения груза. К исследованию этого процесса подойдем таким же образом, как и к исследованию транспортных средств, т. е. вначале определим основные физические состояния для груза, затем получим систему дифференциальных уравнений, описывающих процесс перемещения груза.

Как уже указывалось, процесс движения груза сводится к следующим четырем действиям: хранению, погрузке, транспортировке и разгрузке. Погрузка и разгрузка занимают, как правило, незначительную долю времени по сравнению с хранением и транспортировкой. Поэтому в дальнейшем время погрузки и разгрузки будем включать во время хранения.

В особых случаях, когда время погрузки и разгрузки соизмеримо с временами хранения и транспортировки, не представляет особого труда ввести два дополнительных состояния — погрузку и разгрузку.

Итак, основными состояниями груза при перемещении его от одного склада к другому будем считать: 1) груз на складе *I*, 2) груз транспортируется, 3) груз на складе *III*.

Схема состояний груза приведена на рис. 7.12.

Система дифференциальных уравнений, описывающих процесс перемещения груза *j*-го типа, имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{y}_j^{(1)} &= -v_{12}^{(j)} y_j^{(1)} + v_{01}^{(j)} y_j^{(0)}, \\ \dot{y}_j^{(2)} &= -v_{23}^{(j)} y_j^{(2)} + v_{12}^{(j)} y_j^{(1)}, \\ \dot{y}_j^{(3)} &= -v_{34}^{(j)} y_j^{(3)} + v_{23}^{(j)} y_j^{(2)}.\end{aligned}\quad (7.6.18)$$

Для интегрирования данной системы дифференциальных уравнений на ЭВМ необходимо задать начальные условия для величин $y_j^{(1)}(0)$, $y_j^{(2)}(0)$, $y_j^{(3)}(0)$, а также определить интенсивности $v_{mn}^{(j)}$.

Определим интенсивность убывания грузов j -го типа на складе $I - v_{12}^{(j)}$.

Интенсивность $v_{12}^{(j)}$ — не что иное, как интенсивность вывоза грузов со склада транспортными средствами. Следовательно, $v_{12}^{(j)}$ зависит от интенсивности перехода транспортных средств из состояния 1 (рис. 7.11) в состояние 2 $\mu_{12}^{(j)}$ и грузоподъемности транспортных средств i -го типа Δ_i .

Следовательно,

$$v_{12}^{(j)} = \mu_{12}^{(j)} \Delta_i x_i^{(1)}. \quad (7.6.19)$$

В свою очередь,

$$v_{23}^{(j)} = \mu_{23}^{(j)} \Delta_i x_i^{(2)}. \quad (7.6.20)$$

Интенсивность $v_{01}^{(j)}$ определяется аналогично интенсивности $v_{23}^{(j)}$, только вместо $\mu_{23}^{(j)}$ и Δ_i необходимо подставлять интенсивности и грузоподъемности транспортных средств, перевозящих грузы в предыдущей зоне между предыдущим складом и последующим складом I . Интенсивность $v_{34}^{(j)}$ определяется аналогично $v_{12}^{(j)}$, только для ее определения необходимо брать интенсивности и грузоподъемности транспортных средств для следующей зоны, в которой происходит перевозка грузов между складом II и последующим.

Из формул (7.6.19) и (7.6.20) видно, что для описания процесса движения грузов во 2-м состоянии не обязательно интегрировать уравнения (7.6.18), а достаточно воспользоваться уравнениями (7.6.17), умножая число транспортных средств $x_i^{(2)}$ на их грузоподъемность. Однако это имеет место только для 2-го состояния. Поскольку нас интересует не только перемещение грузов, но и их запасы на складах, уравнения (7.6.17) и описывают количество грузов в различных состояниях.

Таким образом, системы уравнений, описывающих процесс перемещения и накопления грузов на складах, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{y}_j^{(1)} &= -\mu_{12}^{(j)} \Delta_i x_i^{(1)} + \mu_{01}^{(j)} \Delta_i x_i^{(0)}, \\ \dot{y}_j^{(2)} &= -\mu_{23}^{(j)} \Delta_i x_i^{(2)} + \mu_{12}^{(j)} \Delta_i x_i^{(1)}, \\ \dot{y}_i^{(3)} &= -\mu_{34}^{(s)} \Delta_i x_i^{(3)} + \mu_{23}^{(j)} \Delta_i x_i^{(2)}. \end{aligned} \quad (7.6.21)$$

До сих пор мы рассматривали процессы движения транспортных средств и перемещения грузов без учета потребностей в перевозках.

Рассмотрим вопрос, каким образом учесть процесс управления перевозками грузов. Как уже отмечалось, основным принципом функционирования систем снабжения является ответственность вышестоящего склада за поставку грузов и транспортировку к нижестоящему складу по заявкам нижестоящего склада.

Очевидно, заявка на поставку грузов появляется тогда, когда в нижестоящем складе запас грузов оказывается ниже необходимого уровня. Однако заявка может быть обслужена в том случае, если на выше-

стоящем складе имеется некоторый запас груза, который вышестоящий склад может поставить нижестоящему.

С учетом указанных условий число заявок, подлежащих обслуживанию, можно определить из зависимости $z_i^{(0)} = \min [(Y_{зап}^{(3)} - Y_j^{(3)})/\Delta_i, Y_j^{(1)}/\Delta_i]$, где $Y_j^{(1)}$ — наличие грузов на складе I, $Y_{зап}^{(3)}$ — заданный уровень необходимых запасов грузов на складе II: $Y_{зап}^{(3)} \leq Y_{\max}^{(3)}$, где $Y_{\max}^{(3)}$ — максимальная вместимость склада II.

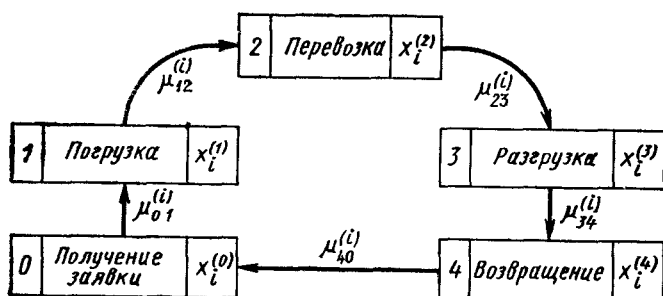


Рис. 7.13.

Для того чтобы ввести управление потоком транспортных средств, сформируем дополнительное состояние для транспортных средств $x_i^{(0)}$, которое назовем «получение заявки».

Тогда схема функционирования транспортных средств, приведенная на рис. 7.11, будет иметь вид, как на рис. 7.13. Интенсивность $\mu_{01}^{(i)}$ с учетом наличия заявок можно определить следующим образом:

$$\mu_{01}^{(i)} = \mu_0^{(i)} \min [1, (Y_{зап}^{(3)} - Y_j^{(3)})/x_i^{(0)}\Delta_i, Y_j^{(1)}/x_i^{(0)}\Delta_i], \text{ где } \mu_0^{(i)} = 1/\bar{T}_i^{(0)}.$$

Среднее время пребывания средства в состоянии 0 определяется как время получения заявки и подготовки к выезду.

До сих пор мы рассматривали только одно звено системы снабжения, т. е. систему транспортных и погрузочно-разгрузочных средств, обеспечивающих перемещение грузов между двумя смежными складами. В общем случае система снабжения может иметь разветвленную сеть складов, которые располагаются не обязательно последовательно один за другим. Например, с одного вышестоящего склада грузы могут поставляться одновременно на несколько нижестоящих складов, каждый из которых, в свою очередь, поставляет грузы на несколько последующих складов и т. д. Кроме того, часть складов предназначена только для хранения определенного вида продукции, на других складах может храниться несколько видов продукции или все. Что касается транспортных средств, то они, как правило, являются специализированными, т. е. предназначены для перевозки только определенного вида продукции. Если они не являются таковыми, то все равно за один рейс они перевозят только один вид продукции. Это обстоятельство существенно облегчает задачу моделирования систем снабжения, так как позволяет выделить из общего процесса перемещения грузов процесс перемещения j -го вида продукции Y_j i -м видом транспорта x_i .

Вследствие этого всю систему снабжения с разветвленной системой складов и различными типами транспортных и погрузочно-разгрузочных средств можно рассматривать как совокупность отдельных звеньев, каждое из которых состоит из двух смежных складов, системы транспортных и погрузочно-разгрузочных средств, обеспечивающих перемещение грузов между этими складами. Функционирование такого звена описано выше. Коротко остановимся на том, как описать функционирование системы снабжения, состоящей из разветвленной сети складов и транспортных средств.

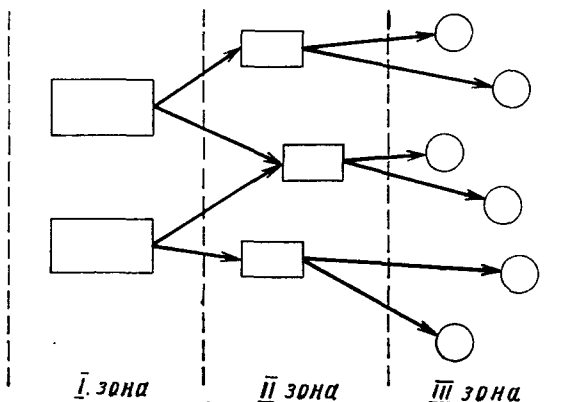


Рис. 7.14.

Пусть система снабжения имеет вид, как на рис. 7.14.

Всю сеть складов представим в виде иерархической системы, состоящей из трех уровней: зоны *I*, зоны *II* и зоны *III*.

I — зона главных складов, *II* — зона промежуточных складов, *III* — зона складов потребителей продукции.

Вся приведенная система может быть описана с помощью приведенных выше уравнений (7.6.17), (7.6.21), составляющих систему из 21 уравнения для грузов и 50 уравнений для транспортных средств.

Очевидно, эта система может быть расширена за счет потоков грузов, поступающих на главные склады из сферы производства, расширения системы за счет увеличения сети складов, а также за счет потоков потребления продукции в зоне *III*.

Основной задачей было изложение метода исследования систем снабжения, поэтому нашей целью было описание основных факторов, влияющих на работу системы снабжения, а не рассмотрение конкретной системы снабжения.

При расширении системы число уравнений увеличивается, однако при использовании ЭВМ интегрирование системы не представляет особого труда.

Список литературы

1. Авонд-Бодио. Применение в экономике теории графов. М., «Прогресс», 1966.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
3. Андреев Н. И. Корреляционная теория статистически оптимальных систем. М., «Наука», 1966.
4. Берж К. Теория графов и ее применение. М., ИЛ, 1962.
5. Беллман Р. Теория устойчивости решения дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1954.
6. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. М., «Наука», 1968.
7. Бусленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов на ЦВМ. М., «Наука», 1964.
8. Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний. М., Физматгиз, 1961.
9. Вентцель Е. С. Введение в исследование операций. М., «Сов. радио», 1965.
10. Вентцель Е. С. Исследование операций. М., «Сов. радио», 1972.
11. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. М., «Наука», 1969.
12. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.
13. Винер Н. Кибернетика. М., «Сов. радио», 1968.
14. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., «Наука», 1966.
15. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958.
16. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
17. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
18. Глушков В. М. Введение в кибернетику. Киев. АНУССР, 1964.
19. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.
20. Дынкин Е. Б. Основы теории марковских процессов. М., Физматгиз, 1959.
21. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.
22. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М., «Наука», 1966.
23. Ито К. Вероятностные процессы. Вып. 1 и 2. М., ИЛ, 1960, 1963.
24. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1962.
25. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М., «Мир», 1970.
26. Кендалл М., Стюарт А. Теория распределений. М., «Наука», 1966.
27. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. М., «Мир», 1965.
28. Лэннинг Д., Бэттин Р. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., ИЛ, 1958.
29. Мидлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. М., «Сов. радио», 1961, т. 1.
30. Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. М., Физматгиз, 1962.
31. Общая теория систем. Сборник статей. М., «Мир», 1966.
32. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. М., «Машиностроение», 1969.
33. Овчаров Л. А. Реферат доклада на 1-ом Всесоюзном симпозиуме по статистическим проблемам кибернетики. М., Изд. ИАТ АН СССР, 1967.
34. Оре О. Теория графов. М., «Наука», 1968.
35. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1965.
36. Прикладная комбинаторная математика. М., «Мир», 1966.
37. Применение теории игр в военном деле. М., «Сов. радио», 1962.
38. Поспелов Д. А. Вероятностные автоматы. М., «Энергия», 1970.
39. Пугачев В. С. Общие условия минимума средней квадратической ошибки динамической системы. — «Автоматика и телемеханика», 1956, т. XVII, № 4.

40. Пугачев В. С. Возможное общее решение проблемы определения оптимальной динамической системы. — «Автоматика и телемеханика», 1956, т. XVII, № 7.
41. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Гостехиздат, 1957.
42. Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей. М., «Наука», 1968.
43. Пугачев В. С. Статистические методы в технической кибернетике. М., «Сов. радио», 1971.
44. Пустыльник Е. И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М., «Наука», 1968.
45. Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей. Л., Судпромгиз, 1962.
46. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.
47. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., Гостехиздат, 1956.
48. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М., «Сов. радио», 1965.
49. Современная математика для инженеров, ИЛ, 1958.
50. Феллер В. Введение в теорию вероятностей. М., «Мир», 1964, т. 1.
51. Феллер В. Введение в теорию вероятностей. М., «Мир», 1967, т. 2.
52. Хазен Э. М. Методы оптимальных статистических решений. М., «Сов. радио», 1968.
53. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М., Физматгиз, 1963.
54. Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы. М., «Сов. радио», 1962.
55. Хорас Д. Н. Системы и моделирование. М., «Мир», 1967.
56. Цянь Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. М., ИЛ, 1956.

Предметный указатель

А

- Анализ соотношения стоимости и эффективности подсистемы 197
- эффективности системы 26

В

- Вектор вероятностей состояний 201
- Вероятность обнаружения каждого боевого средства 217
- поражения средства 222
- своевременной обработки информации 204
- состояний системы боевых средств 216
- — — средств в процессе их функционирования 213
- условная 103, 143
- Время обнаружения каждого боевого средства
- цикла погрузочного средства 226
- — транспортного средства 226

Г

- Глубина размещения зоны основных средств 223
- Граф информационных задач 24
- системы структурный 6
- случайной функции 115
- состояний ориентированный 29
- процесса гибели и размножения 82, 83
- размеченный 103, 109, 141, 147
- — — простейший 39
- эргодический 40
- целей и задач системы 10

Д

- Дисперсия приращений 159, 168
- случайного процесса гибели и размножения 106
- случайной функции 143
- Документ первичный 22

Е

- Единица расходуемая 174

З

- Задача моделирования системы снабжения 230
- эталонная 208
- Закон Пуассона 153
- распределения жизни образца 176
- — промежутка времени между успешными событиями 191
- — случайной функции 131
- Эрланга 148
- — обобщенный 183

И

- Иерархия частных и основных показателей эффективности системы 13
- Изменение системы качественное 8
- — количественное 8
- состояния элементов и подсистем 8
- Интенсивность гибели образца 176
- обнаружения каждого боевого средства 217
- перехода системы из одного состояния в другое 213, 214
- — транспортных средств из одного состояния в другое 225

- постоянная 200
- потоков восстановления пораженной единицы процесса 164
- — гибели 85
- — — единиц процесса 126
- — — поражения единицы процесса 164
- — — прекращения движения единицы процесса 164
- — — нахождения на месте единицы процесса 164
- — — размножения 85, 101
- — — рождения единиц 124
- — — событий 66, 73, 147, 171
- — — сообщений 204
- — — требований 206
- — — условная 127
- — — потребления расходуемых единиц образца 176
- — — производства единиц техники 91
- — — образца 176
- — — расходуемых единиц 174
- — — убывания грузов 229
- Информация командная 14
- состояния 7, 24
- Искажение информации субъективное 22
- Исследование взаимного влияния характеристик двух случайных процессов гибели и размножения 122
- процесса перемещения груза 228

К

- Квазирегулярность взаимодействия процессов гибели и размножения 124
- процесса взаимодействия 157
- Количество состояний процесса гибели и размножения 85
- Коэффициент корреляции случайных величин 161
- Критерий эффективности 193, 202, 210

Л

- Линейность взаимодействия целочисленных случайных процессов 157

М

- Массив информации 23
- Матрица диагональная 135
- единичная 135
- интенсивностей 38 141, 170
- — квадратная 149
- корреляционной функции 134
- простейшая 39
- стохастическая 206
- эффективностей 195
- Метод анализа эффективности затрат 195
- вложенных цепей Маркова 190
- динамики моментов 162, 174
- — средних 148
- исследования аналитический метод 191
- Монте-Карло 150, 156

- Рунге-Кутта 228
- статистических испытаний 27
- статистического анализа 26
- — моделирования 26
- Моделирование математическое 27
- натурное 27
- процессов функционирования систем 191
- системы основных средств 211
- — средств обеспечения 223
- — управления 202—211
- Модель аналитическая 192, 211
- боевых действий однородных группировок 219
- временная функционирования основных средств системы 215
- гибели элементов вероятностная 199
- — — квазирегулярная 198
- пространственно-временная 220
- стоимости 197
- с дискретным числом состояний 213
- Модуль преобразования входной информации 203
- Момент начальный смешанный 168

О

- Ожидание времени математическое 35
- Отношение взаимодействия 7
- подчинения 7
- подчиненности 7

П

- План функционирования средств системы 14, 17
- Плотность потока основных средств 222
- — Пальма 179
- — погибших средств 222
- расположения основных средств 220
- распределения времени работы вычислительного центра 110
- — случайной величины 108, 161
- Подграф состояний ориентированный 32
- Подмножество состояний транзитивное 187
- Показатель качества системы 208
- — эффективности основной 12
- — — плановый 17
- — — системы обнаружения 217
- — функционирования системы 11
- — частный 13
- Поток выстрелов 219
- — гибели единиц 151
- — обнаруживаемых целей 219
- — Пальма 178
- — Пуассона 177
- — разведанных целей 219
- — размножения единиц 156
- — разреженный с ограниченным последствием 190
- — с ограниченным последствием 177
- — событий 214
- — пуассоновский 33
- — требований 206

- на обработку информации 204
- Эрланга 178
- Преобразование белого шума линейное 140
- Процесс блуждания марковский 141
- взаимодействия основных средств 221
- гибели и размножения 82, 128
- движения грузов 224
- двусторонних боевых действий 215
- марковский 35
- — дискретный 187
- — простейший 39
- обмена информацией 20
- размножения единиц 156
- с дискретным временем 200
- с непрерывным временем 200
- с ограниченным последствием 177
- случайный дискретный 32
- — марковский 144
- — — однородный 78
- — независимый 116
- — непрерывный 41
- — стохастически зависимый 121
- — транзитивный 119
- — управляемый 118
- — управляющий 118
- целочисленный элементарный 141
- функционирования основных средств 212, 220
- — средств системы 8
- — чистого размножения 84, 110
- — — элементарный случайный 131, 132
- — чистой гибели 84, 110

Р

- Разложение случайного процесса гибели и размножения 133
- — — каноническое 134, 141
- — — однородное 141
- целочисленных случайных процессов 141—148
- Разработка модели затрат 196
- общей модели эффективности системы 196
- Расчет показателей эффективности систем 198
- Режим блуждания 47
- — стационарный 48
- работы вычислительного центра 107

С

- Свойство транзитивное
- эргодическое 39, 61, 108
- Связь информационная 7
- корреляционная 135
- Система автоматизированной словарной службы 26
- автоматического редактирования данных буквенно-цифровой информации 25

- ассоциативного обобщения информации 25
- информационно-поисковая 25
- конфликтующая 10
- массового обслуживания 85
- обеспечивающих средств 210
- основных средств 210
- преобразования информации для выдачи ее на устройства 25
- программного управления 25
- специального назначения 26
- эргодическая 40
- Состав средств обеспечения 213
- Состояние взаимно связанное 31
- изолированное 29
- конечное 30
- начальное 30
- связанное 31
- транзитивное 30, 65
- Структура системы иерархическая 6
- управления системой 14
- Схема вычислительного процесса оперативная 208
- — — операторная 208
- основных физических состояний 213
- состояний груза 228
- — средств 214

Т

- Теорема локальная Муавра — Лапласа 137
- сложения потоков 152
- Теория массового обслуживания 177

У

- Управление основными средствами системы 202
- средствами системы обеспечения 202
- в системе 5
- системой 13
- Условие нормировочное 37, 102, 166

Ф

- Формула Пальма 179
- Функционирование погрузочных средств 226
- Функция времени неотрицательная 105
- корреляционная 136
- — нормированная 135
- распределения времени обработки информации 203
- — — пребывания требований в системе управления 210
- случайная элементарная 128
- старения информации 204

Х

- Характеристика процесса чистого размножения 111

- — чистой гибели 113
- функционирования средств системы 11
- эффективности действия разведки 217

Ц

Цель функционирования системы 5

Ш

Шум белый нестационарный 138
 — — стационарный 69

Э

Элемент корреляционной матрицы 170
 — системы 6
 — — исполнительный 6
 — — управляемый 6
 — — управляющий 6
Эффективность оперативная 194
 — функционирования системы 212, 213

Я

Язык информационный 21
 — машинный 25

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. ВВЕДЕНИЕ	
1.1. Основные понятия и определения теории систем	5
1.2. Цели и задачи. Характеристики и показатели эффективности функционирования систем	10
1.3. Управление системами	13
1.4. Информационно-расчетное обеспечение процесса управления в системе	20
Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ И ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ	
2.1. Классификация состояний. Ориентированный граф состояний. Классификация групп состояний	28
2.2. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным состоянием. Пуассоновские потоки событий	32
2.3. Размеченный граф состояний системы. Система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний	35
2.4. Эргодическое свойство марковского случайного процесса. Стационарный режим	39
Глава 3. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ В ГРУППЕ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО МАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ	
3.1. Определение закона распределения времени пребывания в группе состояний в общем случае	41
3.2. Определение закона распределения времени пребывания в группе состояний для эргодического простейшего процесса	47
3.3. Определение математического ожидания и дисперсии времени пребывания в группе состояний для эргодического простейшего процесса	54
3.4. Другой способ определения математического ожидания времени пребывания в группе состояний для эргодического простейшего процесса	59
3.5. Определение закона распределения и числовых характеристик времени пребывания в транзитивном подмножестве состояний с одним входом и одним выходом	63
3.6. Закон распределения времени t пребывания в транзитивном состоянии	65
3.7. Закон распределения s -го момента пересечения марковским случайным процессом заданного уровня	73
Глава 4. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ	
4.1. Основные понятия и определения	82
4.2. Характеристики случайных процессов гибели и размножения без ограничения на число состояний процесса при $\lambda_k = \lambda$ и $\mu_k = k\mu$	85
4.3. Характеристики случайных процессов гибели и размножения без ограничения на число состояний процесса в общем случае	94
4.4. Характеристики процессов гибели и размножения с конечным числом состояний	99
4.5. Характеристики процессов чистой гибели и чистого размножения	110
Глава 5. СТОХАСТИЧЕСКИ ЗАВИСИМЫЕ ПРОЦЕССЫ ТИПА ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ	
5.1. Основные понятия и определения	115
5.2. Исследование взаимного влияния характеристик двух случайных процессов гибели и размножения	122

5.3. Разложение случайных процессов гибели и размножения	127
5.4. Разложение целочисленных случайных процессов	141
5.5. Метод динамики средних. Уравнения для математических ожиданий, дисперсий и корреляционных функций отдельных составляющих, являющихся однородными разложениями процессов гибели и размножения	148
5.6. Метод динамики моментов. Уравнение для математических ожиданий, дисперсий и корреляционных функций отдельных составляющих, являющихся однородными разложениями целочисленных случайных процессов	162

Глава 6. ПРОЦЕССЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

6.1. Введение	177
6.2. Основные понятия и определения процессов с ограниченным последствием	178
6.3. Потоки Эрланга и их свойства	179
6.4. Замена реальных потоков потоками Эрланга	182
6.5. Описание процесса с ограниченным последствием при блуждании из начального состояния	186
6.6. Описание процесса с ограниченным последствием при блуждании из транзитивного состояния	188
6.7. Разреженные потоки с ограниченным последствием	190

Глава 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ

7.1. Критерии и методы	190
7.2. Моделирование системы управления	202
7.3. Моделирование системы основных средств	211
7.4. Временная модель функционирования основных средств системы	215
7.5. Пространственно-временная модель функционирования основных средств	220
7.6. Моделирование системы средств обеспечения	223
Список литературы	232
Предметный указатель	234

Тараканов К. В. и др.

**Т19 Аналитические методы исследования систем. М.,
«Сов. радио», 1974.**

240 с. с ил.

Перед загл. авт.: К. В. Тараканов, Л. А. Овчаров,
А. Н. Тырышкин.

Систематически изложены методы математического описания динамических процессов функционирования систем. Излагаются конкретные рекомендации по составлению математических моделей динамических процессов.

Книга предназначена для широкого круга читателей, занимающихся исследованием динамики процессов в больших системах.

Т $\frac{30501-076}{046(01)-74}$ 70-74

6Ф0.1

**КОНСТАНТИН ВАСИЛЬЕВИЧ ТАРАКАНОВ
ЛЕВ АЛЕКСАНДРОВИЧ ОВЧАРОВ
АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ ТЫРЫШКИН**

Аналитические методы исследования систем

Редактор *Н. Я. Гутчина*
Художественный редактор *В. Т. Сидоренко*
Обложка художника *Б. К. Шаповалова*
Технический редактор *Г. А. Мешкова*
Корректор *Н. М. Кухтяева*

Сдано в набор 21/II—1974 г.

Подписано в печать 17/X—1974 г.

Т-12992

Формат 70×100/16

Бумага типографская № 1

Объем 19,5 усл. п. л.,

17,712 уч.-изд. л.

Тираж 10 200 экз.

Зак. 677

Цена 1 р. 36 к.

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

**Московская типография № 10 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва М-114, Шлюзовая наб., 10.**