М. Месарович
Я. Такахара

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ:
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

Mathematics in science and engineering

Volume 113

GENERAL SYSTEMS THEORY: MATHEMATICAL FOUNDATIONS

M. D. Mesarovic and Yasuhiko Takahara

Systems Research Center

Case Western Reserve **University**

Cleveland, Ohio

ACADEMIC PRESS New York San Francisco London 1975

A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers

М. Месарович

Я. Такахара

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Перевод с английского

Э. Л. НАППЕЛЬБАУМА

Под редакцией

С. В. ЕМЕЛЬЯНОВА

Издательство «Мир»

Москва 1978

УДК 658.562 + 519.95 + 519.5

Книга известных американских специалистов по теории систем М. Месаровича и Я. Такахары, хорошо знакомых советскому читателю по переведенным на русский язык сборнику «Общая теория систем» и монографии «Теория иерархических многоуровневых систем», подводит итог пятнадцатилетнему развитию этого направления науки.

В ней рассматриваются проблемы, связанные с введением понятия состояния системы, с управляемостью и реализуемостью системы, с возможностями ее структурной декомпозиции. Обсуждаются также проблемы устойчивости и возможности использования аппарата теории категорий.

Книга представляет интерес для математиков, а также для широкого круга специалистов в области теории управления и моделирования сложных систем.

Редакция литературы по математическим наукам

М $\frac{20203-007}{041(01)-78}$ 07—78

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию советского читателя книга М. Месаровича и Я. Такахары «Общая теория систем: математические основы» занимает среди других книг на эту тему особое место. В ней, пожалуй, впервые сделана попытка не только отразить точку зрения авторов на то, что же представляет собой это новое и довольно интенсивно развивающееся направление исследований, но и подвести определенный итог всем наиболее важным достижениям, полученным в этой области за более чем пятнадцатилетний период ее существования. Не удивительно, что одним из авторов этой попытки оказался М. Месарович, стоявший у самых истоков новой теории и на протяжении всего этого периода бывший ее верным сторонником и пропагандистом.

Конечно, общая теория систем излагается здесь именно так, как ее понимают М. Месарович и его последователи, что находит свое отражение и в формулировке основного понятия системы, и в том, что в книге рассматриваются главным образом результаты алгебраического плана, и в том, что сама направленность исследований продиктована в неявном виде традициями теории автоматического регулирования, а не логики и теории формальных систем. Но все же в книге собрано подавляющее большинство результатов (по крайней мере алгебраических), относящихся собственно к общей теории систем, и поэтому трудно рекомендовать какую-либо другую книгу, которая могла бы служить лучшим введением в современную проблематику этой теории и позволяла бы ознакомиться с ее нынешними достижениями и недочетами.

В предисловии авторов, в первой вводной главе книги и в приложениях достаточно подробно излагается, какие цели ставят перед общей теорией систем М. Месарович и Я. Такахара, как они представляют себе другие возможные подходы к построению этой теории и каково место их подхода среди прочих. Вот почему мы не видим особой необходимости говорить здесь на эту тему, а отмечаем лишь взаимосвязи теории с более широким кругом родственных вопросов, с различными конкретными теориями систем и теорией управления.

Прежде всего приходится признать, что отношение специалистов, имеющих дело с изучением систем, к общей теории систем вообще и к книге М. Месаровича и Я. Такахары в частности неоднозначно. Многие ученые, работающие в традиционных областях теории систем с давно выкристаллизовавшимся конкретным языком моделирования, относятся к подобным работам с изрядной долей скептицизма и считают получаемые в них результаты чрезмерно выхолощенными и бесплодными, не содержащими ничего скольнибудь полезного, кроме того, что уже имеется в результатах других более конкретных теорий. Например, зачем нужны все эти пространные рассуждения об объектах состояний для специалиста по динамическим (дифференциальным) системам, если он располагает естественным пространством состояний в виде пространства фазовых координат?

С подобной точкой зрения трудно согласиться. Рассуждая подобным образом, люди, занимающиеся конкретными разделами теории систем, зачастую забывают, что в получаемых ими результатах очень часто содержится гораздо больше от особенностей используемого ими предметного языка (скажем, от теории дифференциальных уравнений), чем собственно от теории систем. Задача общей теории систем как раз в том и состоит, чтобы очистить эти результаты от подобных необязательных наслоений и выявить нечто, присущее лишь самой теории систем, безотносительно к тому предметному языку, который оказался наиболее подходящим для данной конкретной системы.

Правомочность и плодотворность подобных исследований находят много косвенных подтверждений. Укажем хотя бы на то, что аналогичные по своему духу работы ведутся сегодня и в рамках теории измерений, теории выбора, теории формальных языков и во многих других областях. Но кроме чисто академического интереса, общая теория систем вызывает и значительный прикладной, практический интерес. От нее многого ждут специалисты в более новых областях теории систем, где адекватный язык моделирования еще не сформировался и приходится обходиться без введения соответствующих математических структур. Успешная работа авторов данной книги и их сотрудников в важных прикладных (по сравнению с уровнем этой книги) областях глобального моделирования и теории иерархических (организационных) систем может служить лишним доказательством того, что надежды этого круга ученых, возлагаемые на общую теорию систем, не беспочвенны.

В заключение отметим одну особенность книги М. Месаровича и Я. Такахары, вызывающую наше сожаление. Ее авторы сознательно отказались от интерпретаций получаемых формальных результатов, отсылая за этим читателей к другим книгам. Однако указать в этой связи какой-либо вполне конкретный адрес совсем нелегко. И в то же время для принятого уровня абстракции кажется чрезвычайно важным понимать, почему именно эти, а не какие-то другие вопросы показались авторам наиболее интересными для исследований. Впрочем, эта особенность книги М. Месаровича и Я. Такахары характерна не только для нее, но и для большинства родственных исследований по общей теории систем.

С. В. ЕМЕЛЬЯНОВ

Жордане и Мицуэ
с любовью и признательностью

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

В книге речь пойдет о развитии математической общей теории систем, зародившейся более десяти лет тому назад. Эта теория пытается воплотить в жизнь обширную и далеко идущую программу, нацеленную на формализацию всех основных системных понятий и на построение аксиоматической общей теории систем. Настоящий том можно рассматривать как основу и первый шаг на пути претворения этой программы в жизнь, причем главное внимание уделяется математическим аспектам теории. Что же касается приложений получаемых здесь результатов и тех общеметодологических выводов, которые из них следуют, то их нужно искать в других книгах.

Основные черты предлагаемой общей теории систем и ее роль довольно подробно охарактеризованы в первой главе книги. Однако нам особенно хотелось бы подчеркнуть, насколько широки возможности предлагаемых оснований теории. Именно благодаря этому нам удалось с единых позиций, опираясь по существу на единую математическую структуру, используемую для описания систем, рассмотреть (в надежде получить содержательные результаты) такие различные проблемы, как проблема существования и минимальности системы аксиом, гарантирующих возможность представлений в пространстве состояний, необходимые и достаточные условия управляемости многомерных систем, проблема минимальной реализации закономерностей, связывающих входные воздействия с выходными величинами, необходимые и достаточные условия устойчивости по Ляпунову для динамических систем, теорема Гёделя о непротиворечивости и полноте, проблема автономности многомерных систем, теорема Крона — Роудза о декомпозиции и проблема классификации систем, основанная на использовании теории категорий.

Всякую систему можно описать либо как некоторое преобразование входных воздействий (стимулов) в выходные величины (реакции) — в этом состоит феноменологический подход (называемый иногда еще и причинно-следственным или терминальным), либо с позиций достижения ею некоторой цели или выполнения некоторой функции — в этом заключается подход с точки зрения целенаправленности или принятия решений. В настоящей книге мы ограничимся лишь феноменологическим подходом. Первоначально мы рассчитывали включить сюда и общую математическую теорию целенаправленности, но чрезмерное количество других забот и дел помешало выполнению этого плана. Однако нам бы хотелось подчеркнуть,— так как без этого картина развития наших исследований не соответствовала бы действительности,— что теория многоуровневых систем, которой мы посвятили другую книгу [1]) и которая преследует совсем другие цели, на самом деле уже содержит зародыш общей теории сложных целенаправленных систем. Для полноты изложения мы решили привести в приложении III основные определения целенаправленной системы и открытой системы (с этим связано еще одно важное направление исследований).

Материал этой книги на протяжении ряда лет обсуждался со многими коллегами и студентами. Особенно конструктивными для нас оказались советы и помощь Дональда Мако и Сейдзи Ёсии. Впрочем, только благодаря неутомимости и согласию перепечатывать практически несчетное множество редакций, проявленным миссис Мэри Лу Кантини, эта книга не осталась кипой разрозненных заметок.

---

[1]) Mesarovic M. D., Macko D., Takahara Y., Theory of Hierarchical Multilevel Systems, Academic Press, New York, 1970. (Русский перевод: Месарович М., Мако Д., Такахара И., Теория иерархических многоуровневых систем, «Мир», М., 1973.)

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ. ЧТО ЭТО ТАКОЕ И ДЛЯ ЧЕГО ЭТО НУЖНО?

Теория систем представляет собой научную дисциплину, которая изучает различные явления, отвлекаясь от их конкретной природы, и основывается лишь на формальных взаимосвязях между различными составляющими их факторами и на характере их изменений под влиянием внешних условий. При этом результаты всех наблюдений объясняются лишь взаимодействием их компонент, например характером их организации и функционирования, а не с помощью непосредственного обращения к природе вовлеченных в явление механизмов (будь они физическими, биологическими, социологическими или чисто концептуальными). Для теории систем объектом исследования является не «физическая реальность», не, скажем, химическое или социальное явление, а «система», т.е. *формальная взаимосвязь между наблюдаемыми признаками и свойствами.* В силу ряда принципиальных соображений язык, используемый для описания поведения систем,— это язык теории обработки информации и теории целенаправленного действия (принятия решений, управления).

Общая теория систем интересуется самыми фундаментальными понятиями и аспектами систем. Многие теории, посвященные системам более конкретного типа (например, динамическим системам, автоматам, системам управления, теоретико-игровым системам и т. п.), развиваются уже довольно длительное время. Общая же теория систем занимается основными вопросами, общими для всех этих более специальных дисциплин. Кроме того, для действительно сложных явлений,— а к этой категории относится большинство явлений, изучаемых в социологии и биологии,— специфический язык, используемый классическими теориями (которые базируются на таких конкретных математических структурах, как дифференциальные или разностные уравнения, арифметические или абстрактные алгебры и т. п.), не позволяет адекватным и надлежащим образом описать происходящее в реальности. И либо из-за подобного несоответствия между характером событий и имеющимися возможностями описания, либо просто из-за недостатка сведений многие действительно сложные проблемы можно сформулировать лишь в самых общих терминах, имеющих качественный, а весьма часто и просто лингвистический характер.

Поэтому другая цель общей теории систем состоит в том, чтобы описать и объяснить подобные сложные явления.

При этом мы предполагаем, что и для той, и для другой цели может служить одна и та же теория. Более того, чтобы она смогла справиться со всем этим, она заведомо должна быть *простой*, *элегантной*, *общей* и *строгой* (исключающей всякую возможность разночтения). Вот почему мы выбрали чисто математический и предельно общий подход. Рискуя впасть в чрезмерное упрощение, мы перечислим ниже основные характеристики подхода, основания которого развиваются в этой книге.

(i) Здесь излагается *математическая* теория общих систем, причем все основные понятия вводятся аксиоматически и все свойства систем и их поведения исследуются самым строгим образом.

(ii) Наша теория в равной степени относится и к описанию систем, основанному на предположении о целенаправленности их поведения (и использующему понятия принятия решений и управления), и к их феноменологическому описанию, фиксирующему характер (причинно-следственных) преобразований входных воздействий в выходные величины. Например, с самых первых шагов этой теории одной из основных ее конечных целей мы считали достижение возможности изучения иерархических, многоуровневых систем принятия решений.

(iii) Математические структуры, необходимые для формализации основных понятий теории, вводятся таким образом, чтобы обеспечить строгость утверждений и не потерять при этом их общности. Очень важно понять, что, отказываясь от использования точного языка (т. е. математики) в утверждениях об интересующих нас системах, мы ничего не выигрываем. Поэтому мы не согласны рассматривать общую теорию систем как некоторую философию науки, а предпочитаем считать ее определенной научной программой, не отрицая, конечно, значения для нее достижений философии науки в целом и эпистомологии в частности. Более того, встав на путь использования математических методов, мы получаем возможность делать логические заключения о поведении систем. И, действительно, изучение логических следствий из того, что системы обладают определенными свойствами, должно быть основным содержанием любой общей теории систем, которая никогда не сможет ограничиться лишь дескриптивной классификацией систем.

Возможность изучать поведение системы, исследуя протекающие в ней процессы принятия решений или механизмы, обеспечивающие целенаправленность ее поведения, представляет исключительную важность. Общая теория систем не сводится к обобщению теории цепей — точка зрения, по нашему мнению, вызвавшая большую путаницу и приведшая к отказу от использования теории систем и системного подхода в областях, где целенаправленность поведения играет основную роль, например в психологии, биологии и т. п. На самом деле излагаемая в настоящей книге теория с тем же успехом могла претендовать и на название общей кибернетики, т. е. рассматриваться как общая теория управления и управляемых систем. Ее название «общая теория систем» родилось одновременно с созданием теории и отражает более широкие ее интересы. Однако в ретроспективе кажется, что сделанный выбор был не самым удачным, поскольку этот термин уже использовался в совсем другом контексте.

Применение математической теории общих систем может сыграть существенную роль для решения следующего круга важных задач.

(a) Изучение систем в условиях неопределенности

Весьма часто информация об интересующей нас системе и ее функционировании оказывается недостаточной для построения ее детальной математической модели (даже если нам известны основные причинно-следственные связи, реализуемые этой системой в целом). Тем не менее в такой ситуации иногда удается построить модель на языке общей теории систем, а модели такого типа вполне могут служить прочной основой для дальнейшего изучения или более подробного анализа поведения изучаемой системы. В этом смысле общая теория систем, как она понимается в настоящей книге, существенно расширяет область применения математических методов и открывает возможности для их использования в разнообразных областях знаний и для самых различных целей, где ранее математическое моделирование казалось нереальным.

(b) Изучение крупномасштабных и сложных систем

Сложность описания системы с большим числом переменных может быть связана с тем, каким образом описываются эти переменные и взаимосвязи между ними, или с тем, какое число деталей принимается во внимание, даже если не все они обязательно играют первостепенную роль для цели конкретного исследования. В подобных случаях, разрабатывая менее структуризованную модель, опирающуюся лишь на ключевые факторы, т. е. модель общей теории систем теоретико-множественного или алгебраического типа, мы можем существенно повысить эффективность анализа поведения системы или же просто обеспечить возможность такого анализа. Короче говоря, для описания так называемых больших, сложных систем следует использовать с математической точки зрения более абстрактное и менее структуризованное описание. На этом уровне можно решать многие структурные вопросы, например проблему декомпозиции, координации и многие другие. Более того, даже многие классические задачи, как, например, проблему устойчивости по Ляпунову, удается решать алгебраическими методами, используя более абстрактную характеризацию системы.

Здесь хотелось бы отметить существенную разницу между классическими методами приближенного анализа и подходом, основанным на использовании более абстрактных моделей. В первом случае мы продолжаем использовать ту же математическую структуру, что и раньше, а упрощение достигается за счет отбрасывания той части модели, которая признается менее важной. Например, дифференциальное уравнение пятого порядка можно заменить уравнением второго порядка, сохраняя лишь две «доминирующие» канонические переменные системы. В то же время при втором подходе можно перейти к использованию других математических структур — структур, которые более абстрактны, но тем не менее позволяют рассматривать систему в целом, но на менее детализированном уровне. В этом случае упрощение достигается не за счет решения не рассматривать некоторые переменные, а за счет отказа от деталей, которые мы считаем несущественными.

(с) Структурные соображения при разработке моделей

Структурные соображения играют первостепенную роль как при анализе, так и при синтезе систем самого разного типа. Действительно, наиболее важный этап процесса разработки модели как раз и состоит в выборе структуры модели интересующей нас системы. И вряд ли можно считать целесообразным начинать исследования сразу с подробной математической модели еще до того, как проверены основные гипотезы и достигнуто более глубокое понимание механизма работы системы. Гораздо эффективнее, особенно для систем, состоящих из большого числа взаимосвязанных подсистем, вначале наметить основные подсистемы и установить главные взаимосвязи между ними, а затем уже переходить к детальному моделированию механизмов функционирования различных подсистем. Обычно инженеры используют принципиальные схемы для выявления общей структуры системы, а также для упрощения работы по дальнейшей структуризации и построению аналитических моделей. При этом основная притягательная сила принципиальных схем заключается в их простоте, а их главный недостаток — в отсутствии строгости. Модели общей теории систем устраняют этот недостаток, внося в описание математическую строгость, и в то же время сохраняют их достоинство, т. е. простоту принципиальных схем. Роль общей теории систем в системном анализе можно пояснить схемой, приведенной на рис. 1.1. Модели общей теории систем лежат где-то посередине между описанием системы с помощью ее принципиальной схемы и ее математической (или машинной) моделью. И особенно для сложных систем модели общей теории систем вполне могут оказаться совершенно необходимым этапом исследования, так как именно в этом случае пропасть между языком принципиальных схем и

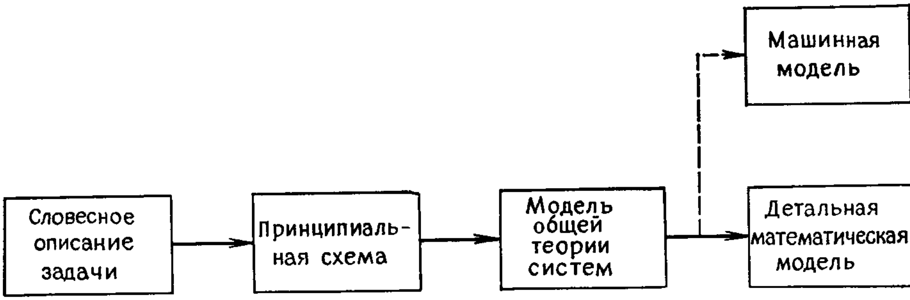


Рис. 1.1.

языком детального моделирования часто оказывается слишком глубокой. А тот факт, что методы и результаты общей теории систем позволяют решить некоторые из проблем на весьма общем уровне, открывает возможность осуществлять этот промежуточный этап на практике.

(d) Строгое определение понятий и возможность междисциплинарного обмена научной информацией

Общая теория систем предоставляет язык для междисциплинарного обмена научными результатами, поскольку она достаточно обща для того, чтобы не вносить своих собственных ограничений, и в то же время в силу своей строгости она устраняет возможность весьма опасных разночтений. (Например, различные толкования термина «адаптация» в психологии, биологии, технике и других областях знаний можно было бы сначала формализовать на языке общей теории систем, а уже затем сравнивать между собой.) Нередко утверждают, что теория систем должна отражать «инвариантные» структурные аспекты различных систем, встречающихся в реальной жизни, т. е. те аспекты их поведения, которые остаются неизменными в аналогичных явлениях из разных областей знания (дисциплин). Но подобное сходство можно по-настоящему установить только тогда, когда соответствующие понятия определены достаточно аккуратно и строго. В противном случае опасность путаницы становится слишком большой. Поэтому кажется вполне оправданным рассматривать математическую теорию общих систем как основу для формализации любых системных понятий. И в этом смысле общая теория систем образует фундамент для применения «системного подхода» и теории систем практически к любой ситуации. В процессе использования общей теории систем для определения понятий необходимо иметь в виду, что решающим фактом является не то, «правильно» ли это определение при каждой из возможных интерпретаций, а то, определено ли это понятие настолько строго, что его можно ясно и недвусмысленно понять и как таковое исследовать дальше и использовать в других дисциплинах. Именно в этом смысле общая теория систем может служить языком междисциплинарного обмена. Конечно, подобное применение общей теории систем может показаться тривиальным с чисто математической точки зрения, но это отнюдь не так, если речь идет об управлении усилиями коллектива, в котором специалисты по различным областям знаний работают совместно над решением некоторой сложной проблемы, как это часто бывает в задачах экологического характера, связанных с развитием городов или регионов, и в других крупномасштабных проектах.

(e) Унификация и построение единого фундамента для более узких разделов теории систем

Многие вопросы, касающиеся основных проблем теории систем и исследуемые во многих более узких разделах этой теории (например, вопрос о существовании представлений в пространстве состояний), можно успешно решить на уровне общей теории систем. Читатель будет иметь возможность неоднократно убедиться в этом на протяжении всей нашей книги. Проблема построения оснований теории систем особенно важна в связи с тем, что эта теория должна все более широко и правильно использоваться на практике, играть все бо́льшую роль в педагогике и служить фундаментом для последующей организации фактов и наблюдений, полученных в широких областях системных исследований.

2. ПРОБЛЕМА ФОРМАЛИЗАЦИИ В РАМКАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБЩИХ СИСТЕМ

Подход, с помощью которого мы строим общую теорию систем, излагаемую в настоящей книге, состоит в следующем [1]).

(i) Основные системные понятия вводятся с помощью *формализации*. Это значит, что мы, исходя из словесного описания некоторого интуитивного понятия, даем точное математическое опре-

---

[1]) Сравнение этого подхода с некоторыми другими возможными подходами приведено в приложении II.

деление этого понятия, используя для этого минимальную математическую структуру, например минимум аксиом, допускающий его правильную интерпретацию.

(ii) Опираясь затем на основные понятия, полученные в результате формализации, мы далее развиваем математическую теорию общих систем, добавляя новые математические структуры, необходимые для исследования различных свойств систем. Подобная процедура позволяет выяснить, насколько действительно фундаментальным является какое-то конкретное свойство, а также каково минимальное множество предположений, необходимых для того, чтобы система обладала этим свойством или чтобы для нее выполнялось данное соотношение.

Отправной точкой всего нашего исследования служит понятие системы, определенное в теоретико-множественных терминах. На этом уровне система весьма просто и совершенно естественно определяется как отношение на языке теории множеств. Точнее говоря, мы предполагаем, что задано семейство множеств

$$\bar{V} = \{V_i\colon i \in I\},$$

где I — множество индексов, и определяем систему, заданную на $\bar{V}$, как некоторое собственное подмножество декартова произведения $\times \bar{V}$:

$$S \subset \times \{V_i\colon i \in I\}.$$

Все компоненты V_i, $i \in I$, декартова произведения $\times V_i$ мы называем объектами системы S. При этом нас будут в основном интересовать системы с двумя объектами — входным объектом X и выходным объектом Y:

$$S \subset X \times Y. \tag{1.1}$$

Идея построения математической теории общих систем на теоретико-множественном уровне полностью согласуется с провозглашенным выше принципом начинать с наименее структуризированных и наиболее широко применяемых понятий и на их основе аксиоматическим образом развивать дальнейшую математическую теорию.

Для того чтобы лучше понять причины, по которым мы решили определить систему как теоретико-множественное отношение, кажется уместным сделать следующие замечания.

Система определяется в терминах ее наблюдаемых свойств или, точнее говоря, в терминах взаимосвязей между этими свойствами, а не тем, что они на самом деле собою представляют (т. е. не с помощью физических, биологических, социальных или других явлений). И это вполне согласуется с самой природой системных исследований, направленных на выяснение организации и взаимосвязи элементов системы, а не на изучение конкретных механизмов в рамках данной феноменологической реальности.

Определение системы как отношения вида (1.1) является предельно общим. Действительно, если, с одной стороны, некоторая система задается какими-то более конкретными математическими конструкциями, скажем системой уравнений, то очевидно, что эти конструкции одновременно определяют или задают и некоторое отношение, соответствующее определению (1.1). Конечно, различным системам отвечают и различные способы задания, но все они суть не более чем отношения такого вида, как (1.1). С другой стороны, даже в условиях предельно нечеткой информации, когда систему удается описать лишь словесно, все эти словесные утверждения в силу их лингвистических функций вновь определяют отношения типа (1.1). В самом деле, каждое высказывание содержит две основные лингвистические категории: денотаты и функторы, причем денотаты используются для обозначения объектов, а функторы для обозначения отношения между ними. И для каждого правильного множества словесных утверждений существует отношение (в математическом смысле этого слова), описывающее формальную взаимосвязь между объектами, обозначаемыми денотатами (это отношение на профессиональном языке и называется моделью этих утверждений). Короче говоря, система, таким образом, всегда является отношением в смысле (1.1), а уже более узкие классы систем определяются более точно своими специфическими средствами, будь они лингвистическими, математическими, программными или какими-то другими.

Система определяется у нас как некоторое множество (особого вида), например отношение. Она рассматривается как совокупность всех проявлений объекта исследования, а не как сам этот объект. Это вызвано желанием использовать математику в качестве основного языка нашей теории, в которой «механизм» (функция или отношение) определяется как множество, т. е. как совокупность всех правильных комбинаций его компонент. Такая характеризация системы не должна создавать каких-либо трудностей, поскольку теоретико-множественное отношение вместе с дополнительными данными содержит всю информацию о реальном «механизме», которую можно на законных основаниях использовать при построении формальной теории.

Системы часто задаются с помощью некоторых уравнений относительно соответствующих переменных. Каждой такой переменной можно поставить в соответствие некоторый объект системы, описывающий область значений соответствующей переменной. Утверждая, что система описывается системой уравнений относительно некоторого множества переменных, мы в сущности говорим, что система есть такое отношение над соответствующими объектами системы, порожденными этими переменными (по одному объекту на каждую переменную, область значений которой он представляет), что любая комбинация элементов этих объектов, принадлежащая этому отношению, удовлетворяет исходной системе уравнений.

Чтобы, исходя из определения (1.1), построить некоторую теорию, необходимо наделить систему как отношение некоторой дополнительной структурой. Это можно сделать двумя способами:

(i) ввести дополнительную структуру для элементов объектов системы, скажем, рассматривать сам элемент $v_i \in V_i$ как некоторое множество с подходящей структурой;

(ii) ввести структуру непосредственно для самих объектов системы V_i, $i \in I$.

Первый путь приводит к понятию (абстрактных) временны́х систем, а второй — к понятию алгебраической системы.

(а) Временны́е системы

Этот подход к изучению систем будет описан на строгой формальной основе в гл. II и используется на протяжении всей этой книги. Поэтому здесь мы остановимся на нем лишь вкратце.

Если элементы одного из объектов системы суть функции, например $v: T_v \to A_v$, то этот объект называют функциональным. В подобной ситуации особый интерес представляет случай, когда области и кообласти всех функций для данного объекта V одинаковы, т. е. каждая функция $v \in V$ является отображением T в A, $v: T \to A$. В этом случае T называется *индексирующим множеством* для V, а A — *алфавитом* объекта V. Заметим, что при этом мы не ограничиваем мощности множества A. Если, кроме того, индексирующее множество линейно упорядочено, то его называют *множеством моментов времени*. Такая терминология была выбрана в связи с тем, что подобные индексирующие множества улавливают те минимальные свойства, которые необходимы для построения понятия времени, особенно в связи с идеей исследовать эволюцию во времени и динамику поведения систем.

Функции, определенные на подобных множествах моментов времени, принято называть (*абстрактными*) *функциями времени*. Объект, элементами которого являются временны́е функции, называют временным объектом и, наконец, системы, определенные на временны́х объектах,— *временны́ми системами*.

Особый интерес для исследования представляют системы, у которых элементы и входного, и выходного объектов определены на одном и том же множестве, $X \subseteq A^T$ и $Y \subseteq B^T$. В этом случае под системой мы понимаем отношение

$$S \subseteq A^T \times B^T.$$

(b) Алгебраические системы

Другой путь наделения объектов V системы математическими структурами,— а это необходимо для их конструктивного описания — состоит в определении на V одной или нескольких операций, относительно которых V становится алгеброй. В самом простом случае определяется бинарная операция $R: V \times V \to V$ и предполагается, что в V можно выделить такое подмножество W, зачастую конечное, что любой элемент $v \in V$ можно получить в результате применения операции R к элементам из W или к элементам, уже построенным из элементов множества W подобным образом. В этом случае W называют множеством производящих элементов или *алфавитом* объекта, его элементы — *символами*, а элементы объекта V — *словами*. И если R есть операция сочленения, то слова — это просто последовательности элементов алфавита W.

Необходимо иметь в виду, что алфавит временного объекта — это не совсем то же самое, что алфавит алгебраического объекта. Для объектов с конечными алфавитами это обычно одни и те же множества. Например, объект, элементами которого являются последовательности символов из данного множества, можно рассматривать либо как множество функций времени (определенных, впрочем, на различных временных интервалах), либо как множество, порожденное некоторой алгебраической операцией над тем же множеством символов. Но как только алфавит становится бесконечным, возникают осложнения: множество производящих элементов и кообласть функций времени оказываются различными множествами, в общем случае даже разной мощности.

В более общей ситуации алгебраический объект порождается целым семейством операций. Точнее говоря, объект V задается некоторым множеством элементов W, называемых примитивными, некоторым множеством операций $\bar{R} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ и правилом, согласно которому V содержит, во-первых, все примитивные элементы, $W \subset V$, а кроме того, и все элементы, которые могут быть порождены из примитивных в результате многократного применения операций из $\bar{R}$.

В этой книге мы будем следовать в основном подходу, связанному с изучением временных систем, поскольку этот подход обещает более содержательную интуитивную интерпретацию, в частности для явлений, связанных с эволюцией во времени и переходами состояний. В действительности же можно показать, что оба эти подхода в основном эквивалентны. Однако следует подчеркнуть, что мы будем использовать алгебраические структуры как для общих систем $S \subset X \times Y$, так и для общих временных систем $S \subset A^T \times B^T$, хотя и не обязательно для решения задач, связанных с эволюцией во времени.

Стоит отметить, что два упомянутых выше метода соответствуют двум основным способам конструктивного описания множеств — с помощью (трансфинитной) индукции на упорядоченном множестве и с помощью алгебраической индукции. Однако мы не собираемся здесь делать какие-либо выводы из этого интересного факта или говорить о его значении.

Глава II

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этой главе мы собираемся ввести некоторые основные понятия теории систем на теоретико-множественном уровне и установить определенные взаимосвязи между ними. Прежде всего определим общую систему как некоторое отношение на абстрактных множествах, а затем определим временные и динамические системы как общие системы на множествах абстрактных функций времени.

Для того чтобы получить возможность определять системы различных типов более конкретно, введем так называемые вспомогательные функции. Эти функции соответствуют на абстрактном уровне тем отношениям, чаще всего имеющим вид системы уравнений, с помощью которых обычно задаются системы. К тому же вспомогательные функции позволяют более подробно проанализировать поведение системы и в особенности ее эволюцию во времени.

Однако для определения различных вспомогательных функций нам приходится вводить новые вспомогательные объекты, которые называются объектами состояний, а их элементы — состояниями системы. Роль понятия состояния в том виде, в каком оно вводится в настоящей главе, заключается главным образом в следующем:

(i) обеспечить представление системы и ее сужений, являющихся в общем случае отношениями, с помощью функций;

(ii) обеспечить возможность определять будущий выход системы, зная лишь будущий ее вход и текущее состояние системы и совершенно не обращая внимания на ее предысторию (состояние системы в любой момент времени воплощает в себе всю предысторию системы);

(iii) обеспечить возможность соотносить состояния системы в различные моменты времени с тем, чтобы определять, изменяется ли состояние системы во времени и если да, то каким образом.

Это последнее требование приводит к понятию пространства состояний. Общая динамическая система определяется в таком пространстве.

В этой главе приводится несколько основных условий существования различных типов вспомогательных функций в общем случае и по отношению к таким свойствам системы, как полнота ее входа или линейность. Кроме того, предлагается также классификация систем, основанная на разных типах инвариантности во времени вспомогательных функций. Наконец, поднимается несколько вопросов, связанных с причинностью изменений состояний системы во времени. В этой связи вводятся два следующих понятия:

(i) система называется неупреждающей, если существует такое семейство объектов состояний, что будущие значения любых выходных величин системы определяются исключительно состоянием системы в предшествующий момент времени и входными воздействиями на рассматриваемом отрезке времени;

(ii) система называется предопределенной, если по прошествии некоторого начального периода времени значения любой выходной величины определяются исключительно прошлыми значениями пары «вход — выход».

В главе приводятся условия, которым должны удовлетворять неупреждающие и предопределенные системы.

1. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ОБЩИХ СИСТЕМ

(а) Общая система, глобальные состояния и глобальная реакция системы

При построении теории общих систем мы будем исходить из следующих определений.

Определение 1.1. (*Общей*) *системой* называется отношение на непустых (абстрактных) множествах

$$S \subset \times \{V_i: i \in I\}, \tag{2.1}$$

где $\times$ — символ декартова произведения, а I — множество индексов. Множество V_i мы будем называть *объектом* системы. Если множество I конечно, то (2.1) можно переписать в виде

$$S \subset V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n. \tag{2.2}$$

Определение 1.2. Пусть $I_x \subset I$ и $I_y \subset I$ образуют разбиение множества I, т. е. пусть $I_x \cap I_y = \varnothing$ и $I_x \cup I_y = I$. Множество $X = \times \{V_i: i \in I_x\}$ мы будем называть *входным объектом*, а множество $Y = \times \{V_i: i \in I_y\}$ — *выходным объектом* системы. Тогда система S определяется отношением

$$S \subset X \times Y \tag{2.3}$$

(такую систему мы будем называть *системой «вход — выход»* [1])).

---

[1]) В кибернетической литературе ее называют иногда «черным ящиком». — *Прим. перев.*

На протяжении всей этой книги мы будем пользоваться в основном представлением (2.3), а не (2.2).

Определение 1.3. Если S является функцией

$$S\colon X \to Y, \tag{2.4}$$

то соответствующая система будет называться *функциональной*.

Заметим, что в формулах (2.2) и (2.3) используется один и тот же символ S, хотя, строго говоря, элементами отношения в (2.2) являются n-ки, в то время как в (2.3) — это пары. Мы согласились на это ради упрощения системы обозначений. Конкретный характер интерпретации S всегда будет ясен из контекста, в котором этот символ используется. Аналогичные замечания можно высказать и по поводу использования одинакового символа S в (2.3) и в (2.4).

Для удобства обозначений мы примем также следующее соглашение: скобки в выражении $F\colon (A) \to B$ будут означать, что функция F является всего лишь частичной, т. е. что она не обязательно определена для любого элемента множества A. Область определения функции F (или просто область) будет обозначаться через $\mathscr{D}(F) \subset A$, а область ее значений (или ее кообласть) — через $\mathscr{R}(F) \subset B$. Аналогично будут обозначаться и область, и кообласть отношения $S \subset X \times Y$:

$$\mathscr{D}(S) = \{x\colon (\exists y)\ ((x, y) \in S)\} \quad \text{и} \quad \mathscr{R}(S) = \{y\colon (\exists x)\ ((x, y) \in S)\}.$$

Для упрощения обозначений в дальнейшем всегда будет предполагаться, что $\mathscr{D}(S) = X$, если только не оговорено противное.

Определение 1.4. Для данной общей системы S пусть C — произвольное множество, а функция $R\colon (C \times X) \to Y$ такова, что

$$(x, y) \in S \Longleftrightarrow (\exists c)\ [R(c, x) = y].$$

Тогда C называется *множеством* или *объектом глобальных состояний* системы, а его элементы — просто *глобальными состояниями* системы, функция же R называется *глобальной реакцией* (системы S).

Теорема 1.1. Каждой системе соответствует некоторая глобальная реакция, и эта функция R не является частичной, т. е.

$$R\colon C \times X \to Y.$$

Доказательство. Пусть $F = Y^X = \{f\colon f\colon X \to Y\}$. Пусть множество $G = \{f_c\colon c \in C\} \subseteq F$ таково, что $f_c \in G \Longleftrightarrow f_c \subseteq S$, где C — индексирующее множество для G. Определим теперь $R\colon C \times X \to Y$ с помощью условия $R(c, x) = f_c(x)$. Покажем тогда, что $S = \{(x, y)\colon (\exists c)\ (y = R(c, x))\}$. Пусть $S' = \{(x, y)\colon (\exists c)\ (y = R(c, x))\}$. Рассмотрим произвольную пару $(x, y) \in S'$. Тогда $y = R(c, x) = f_c(x)$ для некоторого $c \in C$. Следовательно, $(x, y) \in S$, так как $f_c \subseteq S$. Значит, $S' \subseteq S$. Обратно, возьмем произвольную пару $(x, y) \in S$. Поскольку $\mathscr{D}(S) = X$ и $x \in X$, множество S непусто. Выберем некоторое $f_c \in G$ и положим $\hat{f} = (f_c \setminus \{(x, f_c(x))\}) \cup \{(x, y)\}$. Тогда $\hat{f} \in F$ и $\hat{f} \subseteq S$. Поэтому $\hat{f} = f_{c'}$ для некоторого $c' \in C$ и, следовательно, $y = f_{c'}(x)$ или $(x, y) \in S'$, откуда $S \subseteq S'$. А это значит, что $S = S'$, ч. т. д.

В только что доказанной теореме ни на C, ни на R не налагалось никаких дополнительных условий. Однако если потребовать, чтобы R обладала какими-то определенными свойствами, то может оказаться, что, хотя подобная глобальная реакция все еще может быть определена, ее нельзя определить на всем произведении $C \times X$, т. е. R оказывается частичной функцией. С подобной ситуацией мы сталкиваемся, например, тогда, когда хотим, чтобы функция R была причинной. А так как случай, когда реакция R не является частичной функцией, представляет для нас особую важность, мы договоримся на будущее

называть R глобальной реакцией системы только тогда, когда она не является частичной функцией. В противном случае будем называть ее частичной глобальной реакцией.

(b) Абстрактные линейные системы

Хотя многие понятия теории систем и можно определить, опираясь исключительно на понятие общей системы, получение содержательных математических результатов становится возможным только после введения дополнительных структур. Чтобы избежать чрезмерного количества определений, мы будем, как правило, вводить конкретные понятия на том же уровне общности, на котором для них можно получить нетривиальные математические результаты. Например, понятие динамической системы будет введено лишь в контексте временных систем. Тем не менее понятие линейности оказывается полезным уже на любом уровне общности. Поэтому мы определим это понятие сейчас и будем пользоваться им как стандартным на протяжении всей нашей книги.

Определение 1.5. Пусть $\mathscr{A}$ — некоторое поле, X и Y — линейные алгебры [1]) над $\mathscr{A}$, S — отношение, $S \subset X \times Y$, причем S непусто. Пусть, кроме того,

(i) $s \in S \;\&\; s' \in S \Rightarrow s + s' \in S$,

(ii) $s \in S \;\&\; \alpha \in \mathscr{A} \Rightarrow \alpha s \in S$,

где $+$ обозначает (внутреннюю) операцию сложения в $X \times Y$,

---

[1]) В соответствии с современной терминологией *алгеброй* называют множество вместе с некоторыми конечноместными операциями, а *линейной алгеброй*, в частности, множество с одной внутренней и одной внешней операциями, удовлетворяющими аксиомам векторного пространства. — *Прим. перев.*

а через αx обозначен результат (внешней) операции умножения на скаляр[1]). Тогда S называется *(абстрактной) полной линейной системой.*

Во многих приложениях приходится сталкиваться с линейными системами, не являющимися полными. К их числу относится система, описываемая линейными дифференциальными уравнениями, множество допустимых начальных условий которых не образует линейного пространства. Для простоты в этой книге рассматриваются в основном полные системы, и потому *каждая линейная система будет предполагаться полной, если только явно не оговорено противное.* Это едва ли приведет к какой-либо потере общности, поскольку любую неполную линейную систему можно пополнить совершенно очевидным и естественным образом.

Следующая теорема играет в теории линейных систем фундаментальную роль.

Теорема 1.2. Пусть X и Y — линейные алгебры над одним и тем же полем $\mathscr{A}$. Система $S \subset X \times Y$ является линейной в том и только в том случае, когда найдется такая глобальная реакция R: $C \times X \to Y$, что

(i) C есть линейная алгебра над $\mathscr{A}$;

(ii) существует пара таких линейных отображений

$$R_1\colon C \to Y \qquad \text{и} \qquad R_2\colon X \to Y,$$

что для всех $(c, x) \in C \times X$

$$R(c, x) = R_1(c) + R_2(x).$$

Доказательство. Доказательство достаточности очевидно. Докажем поэтому только необходимость. Прежде всего установим существование такого линейного отображения R_2: $X \to Y$, что $\{(x, R_2(x))\colon x \in X\} \subset S$. Пусть X_s — некоторое подпространство в X, а L_s: $X_s \to Y$ — такое линейное отображение, что $\{(x, L_s(x))\colon x \in X_s\} \subset S$. Такие X_s и L_s существуют всегда. В самом деле, пусть $(\hat{x}, \hat{y}) \in S \neq \varnothing$; тогда необходимыми свойствами обладают, например, $X_s = \{\alpha\hat{x}\colon \alpha \in \mathscr{A}\}$ и L_s: $X_s \to Y$, причем $L_s(\alpha\hat{x}) = \alpha\hat{y}$. Если $X_s = X$, то L_s и есть искомое линейное отображение. Если же $X_s \neq X$, то L_s, согласно лемме Цорна, можно продолжить так, что $X_s = X$. Действительно, обозначим через $\tilde{L} = \{L_p\}$ класс всевозможных линейных отображений, определенных на линейных подпространствах пространства X и таких, что если подпространство X_p является областью определения

[1]) Операция $+$ и умножение на скаляр определяются на $X \times Y$ естественным образом: $(x, y) + (\hat{x}, \hat{y}) = (x + \hat{x}, y + \hat{y})$ и $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, где $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ и $\alpha \in \mathscr{A}$.

отображения L_p, то $\{(x, L_p(x)): x \in X_p\} \subset S$. Заметим, что множество $\widetilde{L}$ не пусто. Определим на $\widetilde{L}$ отношение частичного порядка $\leqslant$ следующим образом. Если L' и L'' принадлежат $\widetilde{L}$, то $L' \leqslant L''$ тогда и только тогда, когда $L' \subseteq L''$. Такое определение корректно, поскольку любое отображение можно рассматривать как отношение между его областью и кообластью, а каждое отношение отождествляется с некоторым множеством. Пусть теперь $P \subset \widetilde{L}$ есть любое линейно упорядоченное подмножество в $\widetilde{L}$, и пусть $L_0 = \bigcup P$, где через $\bigcup P$ мы обозначили объединение элементов, принадлежащих P. Покажем тогда, что L_0 принадлежит $\widetilde{L}$. Предположим, что (x, y) и (x, y') являются элементами из L_0. Тогда в силу того, что $L_0 = \bigcup P$, найдутся два отображения L и L' из P, такие, что $(x, y) \in L$, а $(x, y') \in L'$. Но поскольку P линейно упорядочено и, значит, скажем $L \leqslant L'$, пара (x, y) должна принадлежать и L'. А так как L' — отображение, то $y = y'$, т. е. L_0 — тоже отображение. Аналогичные рассуждения можно повторить и для случая, когда $(x', y') \in L_0$ и $(x'', y'') \in L_0$. Тогда существует такое $L'' \subset P$, что $(x', y') \in L''$ и $(x'', y'') \in L''$. Поскольку отображение L'' линейно, $(x' + x'', y' + y'') \in L'' \subset L_0$. Если теперь $(x', y') \in L_0$ и $\alpha \in \mathscr{A}$, то найдется такое $L' \in P$, что $(x', y') \in L'$, т. е. $(\alpha x', \alpha y') \in L' \subset L_0$. Поэтому отображение L_0 линейно. Наконец, если $(x', y') \in L_0$, то $(x', y') \in L'$, где L' принадлежит P; следовательно, $(x', y') \in S$, или $L_0 \subset S$. Поэтому $L_0 \in \widetilde{L}$. Значит, L_0 является мажорантой множества P в $\widetilde{L}$. Тогда, согласно лемме Цорна, в $\widetilde{L}$ существует по крайней мере один максимальный элемент, который мы обозначим через R_2. Докажем теперь, что $\mathscr{D}(R_2) = X$. Если это не так, то $\mathscr{D}(R_2)$ является собственным подпространством в X и в X найдется такой элемент $\hat{x}$, который не принадлежит $\mathscr{D}(R_2)$. Тогда $X' = \{\alpha\hat{x} + x: \alpha \in \mathscr{A} \,\&\, x \in \mathscr{D}(R_2)\}$ есть линейное подпространство, содержащее $\mathscr{D}(R_2)$ как собственное подпространство. Заметим, что каждый элемент $x' \in X'$ можно однозначно представить в виде суммы $\alpha\hat{x} + x$, где $x \in \mathscr{D}(R_2)$. Действительно, если $x' = \alpha\hat{x} + x = \beta\hat{x} + y$, где $x, y \in \mathscr{D}(R_2)$, то $(\alpha - \beta)\hat{x} = y - x$. Если $\alpha \neq \beta$, то $\hat{x} = (\alpha - \beta)^{-1}(y - x) \in \mathscr{D}(R_2)$ и мы получили противоречие. Используя этот факт, мы можем определить линейное отображение $L': X' \to Y$ так, что $L'(\alpha\hat{x} + x) = \alpha\hat{y} + R_2(x)$, где $(\hat{x}, \hat{y}) \in S$, а $x \in \mathscr{D}(R_2)$. Но отображение L' линейно и $\{(x', L'(x')): x' \in X'\} \subset S$, а R_2 — собственное подмножество в L', что противоречит максимальности R_2 в $\widetilde{L}$. Поэтому R_2 и есть искомое отображение с областью определения $\mathscr{D}(R_2) = X$. Чтобы завершить построение R, положим $C = \{(0, y): (0, y) \in S\}$. Очевидно, что C является линейным пространством над $\mathscr{A}$, если сложение и умножение на скаляр определить в нем следующим образом: $(0, y) + (0, y') = (0, y + y')$ и $\alpha (0, y) = (0, \alpha y)$, где $\alpha \in \mathcal{A}$. Пусть R_1: $C \to Y$ таково, что $R_1 ((0, y)) = y$. Тогда отображение R_1 линейно. Обозначим через $R (c, x)$ сумму $R_1 (c) + R_2 (x)$. Покажем теперь, что

$$S = \{(x, y): (\exists c) (c \in C \,\&\, y = R (c, x))\} \equiv S'.$$

Предположим, что $(x, y) \in S$. Тогда $(x, R_2 (x)) \in S$, а так как система S линейна, то $(x, y) - (x, R_2 (x)) = (0, y - R_2 (x)) \in S$. Поэтому $(\exists c) (c \in C \& y = R_1 (c) + R_2 (x))$, т. е. $S \subseteq S'$. Обратно, предположим, что $(x, R_1 (c) + R_2 (x)) \in S'$. Но так как $(0, R_1 (c)) \in S$ и $(x, R_2 (x)) \in S$, а S линейна, то

$$(x, R_2 (x)) + (0, R_1 (c)) = (x, R_1 (c) + R_2 (x)) \in S.$$

Следовательно, $S' \subseteq S$, ч. т. д.

Фундаментальный характер только что доказанной теоремы подтверждается хотя бы тем фактом, что на ней базируется каждый доказанный в этой книге результат относительно линейных систем. Теперь мы можем ввести новое определение.

Определение 1.6. Пусть $S \subset X \times Y$ — линейная система, а R — отображение, R: $C \times X \to Y$. Отображение R называется *линейной глобальной реакцией* системы тогда и только тогда, когда

(i) R согласуется с S, т. е.

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (\exists c) [y = R (c, x)];$$

(ii) C является линейной алгеброй над полем $\mathcal{A}$ скаляров линейных алгебр X и Y;

(iii) существуют два таких линейных отображения R_1: $C \to Y$ и R_2: $X \to Y$, что для любых $(c, x) \in C \times X$

$$R (c, x) = R_1 (c) + R_2 (x).$$

В этом случае C называют *линейным объектом глобальных состояний*, отображение R_1: $C \to Y$ — *глобальной реакцией на состояние*, а R_2: $X \to Y$ — *глобальной реакцией на вход*.

Обратите внимание на разницу между глобальной реакцией системы и линейной глобальной реакцией. Первое понятие требует лишь выполнения условия (i), а для второго необходимо, чтобы, кроме того, выполнялись условия (ii) и (iii). Поэтому поведение линейной системы может описываться и реакцией, которая не является линейной.

Из теоремы 1.2 мы сразу же получаем следующее

Предложение 1.1. Система является линейной тогда и только тогда, когда для нее существует линейная глобальная реакция.

В понятии линейной системы в том виде, как оно было дано в определении 1.5, используется больше, чем «минимум» математической структуры. Наиболее абстрактное формальное определение линейной системы на самом деле выглядит следующим образом:

Определение 1.7. Пусть X есть некоторая (абстрактная) алгебра с бинарной операцией $\cdot$: $X \times X \to X$ и семейством эндоморфизмов $\bar{\alpha} = \{\alpha: X \to X\}$. Аналогично, пусть в Y заданы бинарная операция $*$: $Y \times Y \to Y$ и семейство эндоморфизмов $\bar{\beta} = \{\beta: Y \to Y\}$. Функциональная система S: $X \to Y$ является *общей линейной системой* тогда и только тогда, когда найдется такое взаимно однозначное отображение ψ: $\bar{\alpha} \to \bar{\beta}$, что

(i) $(\forall x, x') [S (x \cdot x') = S (x) * S (x')]$,

(ii) $(\forall x) (\forall \alpha) [S (\alpha (x)) = \psi (\alpha) (S (x))]$.

Возможны и другие определения линейной системы, опирающиеся на структуры, промежуточные по отношению к использовавшимся в определениях 1.5 и 1.7. Например, можно предположить, что X и Y — модули, а не линейные пространства. Мы не рассматриваем такие «промежуточные» понятия в нашей книге, поскольку для получения некоторых существенных результатов нам потребуется именно структура линейного пространства. Можно даже утверждать, что понятие линейности, базирующееся на понятии модуля, не вполне удовлетворительно, поскольку оно не является ни самым общим (ср. с определением 1.7), ни достаточно богатым для того, чтобы позволить доказывать такие фундаментальные математические результаты, как теорема 1.2.

2. ОБЩИЕ ВРЕМЕННЫЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

(а) Общие временные системы

Чтобы ввести понятие общей временной системы, нужно формализовать понятие времени. В соответствии с нашей общей стратегией, изложенной в гл. I, мы должны определить понятие времени, используя «минимальную» математическую структуру, отражающую при этом наиболее существенные черты наших интуитивных представлений о времени. Эта задача кажется очень простой, однако то, как мы решим ее, самым решающим образом сказывается на всем последующем. Выбор структуры для такого фундаментального понятия, как множество моментов времени, оказывает существенное влияние на дальнейшее развитие теории, а также на богатство и изящность получаемых математических результатов. Здесь мы определим это понятие следующим образом.

Определение 2.1. *Множеством моментов времени* (общей временной системы) называется линейно упорядоченное (абстрактное) множество. Это множество будет обозначаться символом T, а определенное в нем отношение порядка — через $\leqslant$.

Легко видеть, что минимальным свойством, присущим множеству моментов времени, мы считаем здесь то, что его элементы следуют один за другим в вполне определенном порядке. Это отражает наше стремление использовать понятие времени для изучения эволюции поведения системы. Отметим, что на мощность множества моментов времени мы не налагаем никаких ограничений. Однако может оказаться необходимым задавать на множестве моментов времени какие-то дополнительные структуры, например структуру абелевой группы. Такие дополнительные предположения мы будем вводить по мере их необходимости.

Для удобства обозначений мы будем считать, что в множестве T имеется минимальный элемент 0. Другими словами, мы предполагаем, что существует некоторое надмножество $\bar{T}$, линейно упорядоченное отношением $\leqslant$ и содержащее фиксированный элемент 0, такой, что множество T можно определить как $T = \{t\colon t \geqslant 0\}$[1].

Введем теперь еще одно определение.

Определение 2.2. Пусть A и B — какие-то произвольные множества, T — некоторое множество моментов времени, A^T и B^T — множества всевозможных отображений из T в A и B соответственно и $X \subset A^T$, $Y \subset B^T$. *Общей временно́й системой* S над X и Y называется отношение на X и Y, т. е. $S \subset X \times Y$. Множества A и B называются *алфавитами входных воздействий* (*входов*) *и выходных величин* (*выходов*) системы соответственно. Множества X и Y называют еще *временны́ми объектами* системы; их элементами $x\colon T \to A$ и $y\colon T \to B$ служат абстрактные функции времени. Значения функций из X и Y в момент времени t будут соответственно обозначаться через $x(t)$ и $y(t)$.

Для того чтобы изучать динамику поведения временных систем, необходимо ввести в рассмотрение подходящие для этой цели *отрезки* (*интервалы*) *времени*. В этой связи мы договоримся пользоваться следующими обозначениями.

Для любых t, $t' > t$

$$T_t = \{t'\colon t' \geqslant t\}, \quad T^t = \{t'\colon t' < t\}, \quad T_{tt'} = \{t^*\colon t \leqslant t^* < t'\},$$
$$\bar{T}_{tt'} = T_{tt'} \cup \{t'\}, \quad \bar{T}^t = T^t \cup \{t\}.$$

---

[1]) Заметим, что подобное предположение о существовании множества $\bar{T}$ совсем не обязательно для определения минимального элемента и может служить примером «неминимальности» вводимой структуры. — *Прим. перев.*

Сужения функции $x \in A^T$ на различные отрезки времени будут определяться следующим образом:

$$x_t = x \mid T_t, \quad x^t = x \mid T^t, \; x_{tt'} = x \mid T_{tt'}, \; \bar{x}_{tt'} = x \mid \bar{T}_{tt'},$$
$$\bar{x}^t = x \mid \bar{T}^t, \quad X_t = \{x_t\colon x_t = x \mid T_t \& x \in X\},$$
$$X^t = \{x^t\colon x^t = x \mid T^t \;\&\; x \in X\}, \; X_{tt'} = \{x_{tt'}\colon x_{tt'} = x \mid T_{tt'} \& x \in X\},$$
$$X(t) = \{x(t)\colon x \in X\}.$$

Мы также договоримся, что

$$x_{tt} = \varnothing, \quad X_{tt} = \{\varnothing\}.$$

С помощью операции сужения мы введем новую операцию — операцию сочленения. Пусть $x \in A^T$ и $x^* \in A^T$. Тогда для любого t можно определить новый элемент $\hat{x}$ из A^T, положив

$$\hat{x}(\tau) = \begin{cases} x(\tau), & \text{если } \tau < t, \\ x^*(\tau), & \text{если } \tau \geqslant t, \end{cases}$$

и условившись обозначать $\hat{x}$ через $\hat{x} = x^t \cdot x_t^*$. Последнюю операцию и называют *операцией сочленения* элементов x^t и x_t^*.

Для заданного множества $X \subset A^T$ семейство всевозможных определенных выше сужений элементов из X мы будем обозначать через $\bar{X}$. Другими словами,

$$\bar{X} = \{\hat{x}\colon (\hat{x} = x \vee \hat{x} = x_t \vee \hat{x} = x^t \vee \hat{x} = x_{tt'} \vee \hat{x} =$$
$$= \bar{x}_{tt'} \vee \hat{x} = \bar{x}^t) \& x \in X \& t,\ t' \in T \& t' \geqslant t\}.$$

Сужения функций из Y и соответствующие операции в Y определяются точно так же, как и в X.

Для удобства последующих выкладок мы дадим следующее

Определение 2.3. Временная система $S \subset X \times Y$ называется *системой с полным входом* тогда и только тогда, когда

$$(\forall x)\,(\forall x^*)\,(\forall t)\,(x,\ x^* \in \mathscr{D}(S) \& t \in T \Rightarrow x^t \cdot x_t^* \in \mathscr{D}(S))$$

и

$$(\forall t)\,(\{x(t)\colon x \in X\} = A).$$

В последующем мы всегда будем предполагать, что все рассматриваемые общие временные системы относятся к категории систем с полным входом, если только явно не оговорено противное.

Сужения временной системы S определяются через сужения ее входных воздействий и выходных величин:

$$S_t = \{(x_t, y_t)\colon x_t = x \mid T_t \& y_t = y \mid T_t \& (x, y) \in S\},$$
$$S^t = \{(x^t, y^t)\colon x^t = x \mid T^t \& y^t = y \mid T^t \& (x, y) \in S\},$$
$$S_{tt'} = \{(x_{tt'}, y_{tt'})\colon x_{tt'} = x \mid T_{tt'} \& y_{tt'} = y \mid T_{tt'} \& (x, y) \in S\},$$
$$\bar{S} = \{\hat{s}\colon \hat{s} = s \vee \hat{s} = s^t \vee \hat{s} = s_t \vee \hat{s} = s_{tt'}\}.$$

Мы будем пользоваться еще и следующими условными обозначениями:

$$X_t = X \mid T_t, \qquad X^t = X \mid T^t, \qquad X_{tt'} = X \mid T_{tt'}.$$

Аналогичные обозначения вводятся для Y и S. Например,

$$S_t = S \mid T_t, \qquad S^t = S \mid T^t, \qquad S_{tt'} = S \mid T_{tt'}.$$

Определение 2.4. Пусть S — временная система, $S \subset A^T \times B^T$. *Объектом начальных состояний* системы S и *начальной реакцией* системы называются соответственно объект глобальных состояний и глобальная реакция этой системы. Начальная реакция системы обозначается через ρ_0. Другими словами, ρ_0: $C_0 \times X \to Y$ удовлетворяет условию

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (\exists c)\,[\rho_0(c, x) = y].$$

Теперь мы готовы ввести еще одно

Определение 2.5. Пусть S — временная система и $t \in T$. *Объектом состояний в момент времени* t, который мы будем обозначать через C_t, называется объект начальных состояний для сужения S_t. Другими словами, это абстрактное множество, для которого найдется такая функция ρ_t: $C_t \times X_t \to Y$, что

$$(x_t, y_t) \in S_t \Leftrightarrow (\exists c)\,[\rho_t(c, x_t) = y_t].$$

Функцию ρ_t называют *реакцией* (системы) *в момент времени* t.

Семейство всех реакций данной системы, т. е.

$$\bar{\rho} = \{\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t \,\&\, t \in T\},$$

назовем *семейством реакций* системы S, а множество $\bar{C} = \{C_t\colon t \in T\}$ — *семейством объектов состояний*.

Определение 2.6. Пусть S — временная система, $S \subset X \times Y$, и ρ_t — некоторая функция, такая, что ρ_t: $C_t \times X_t \to Y_t$. Мы будем говорить, что ρ_t *согласуется с* S тогда и только тогда, когда она совпадает с реакцией системы S в момент времени t, т. е. когда

$$(x_t, y_t) \in S_t \Leftrightarrow (\exists c)\,[\rho_t(c, x_t) = y_t].$$

Пусть

$$S_t^\rho = \{(x_t, y_t)\colon (\exists c)\,(y_t = \rho_t(c, x_t))\}.$$

Тогда условие согласованности можно переписать в виде

$$S_t^\rho = S_t.$$

Пусть $\bar{\rho} = \{\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t\}$ — семейство произвольных функций. Мы будем говорить, что $\bar{\rho}$ *согласуется с временной системой*

S тогда и только тогда, когда $\bar{\rho}$ совпадает с семейством реакций системы S, т. е. когда для любого $t \in T$

$$S_t^\rho = S_t = S_0^\rho \mid T_t.$$

Что же касается существования семейства реакций, то справедливо одно очевидное следствие теоремы 1.1:

Предложение 2.1. Для каждой временной системы существует семейство реакций.

Семейство произвольных отображений, естественно, не обязательно должно быть семейством реакций какой-нибудь временной системы, как это следует из следующей теоремы:

Теорема 2.1. Пусть $\bar{\rho} = \{\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t \ \& \ t \in T\}$ — семейство произвольных отображений. Для существования временной системы $S \subset X \times Y$, согласующейся с $\bar{\rho}$ (т. е. $\bar{\rho}$ должно быть семейством реакций системы S), необходимо и достаточно, чтобы для всех $t \in T$ выполнялись следующие условия:

(P1) $(\forall c_0)\,(\forall x^t)\,(\forall x_t)\,(\exists c_t)\,[\rho_t\,(c_t, x_t) = \rho_0\,(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t]$,

(P2) $(\forall c_t)\,(\forall x_t)\,(\exists c_0)\,(\exists x^t)\,[\rho_t\,(c_t, x_t) = \rho_0\,(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t]$.

Доказательство. Прежде всего докажем достаточность. Для этого необходимо установить, что равенство $S_t^\rho = S_0^\rho \mid T_t$ выполняется при всех $t \in T$. Возьмем произвольную пару $(x_t, y_t) \in S_t^\rho$. Тогда $y_t = \rho_t\,(c_t, x_t)$ для некоторого $c_t \in C_t$ и, согласно условию (P2),

$$y_t = \rho_t\,(c_t, x_t) = \rho_0\,(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t$$

для некоторого $(c_0, x^t) \in C_0 \times X^t$. Поэтому

$$(x_t, y_t) = (x^t \cdot x_t, \rho_0\,(c_0, x^t \cdot x_t)) \mid T_t,$$

или $(x_t, y_t) \in S_0^\rho \mid T_t$. Отсюда следует, что $S_t^\rho \subseteq S_0^\rho \mid T_t$. Обратно, возьмем произвольную пару $(x, y) \in S_0^\rho$. Тогда для некоторого c_0

$$y = \rho_0\,(c_0, x) = \rho_0\,(c_0, x^t \cdot x_t).$$

Из условия (P1) тогда вытекает, что для некоторого $c_t \in C_t$

$$y \mid T_t = \rho_0\,(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t = \rho_t(c_t, x_t),$$

или $(x, y) \mid T_t \in S_t^\rho$. Значит, $S_0^\rho \mid T_t \subseteq S_t^\rho$. А последнее включение вместе с предыдущим дает $S_t^\rho = S_0^\rho \mid T_t$.

Перейдем теперь к доказательству необходимости. Выберем произвольные x и c_0. Тогда $(x, \rho_0\,(c_0, x)) \in S_0^\rho$. Так как $S_0^\rho \mid T_t \subseteq S_t^\rho$, то

$$(x, \rho_0\,(c_0, x)) \mid T_t = (x_t, \rho_0\,(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t) \in S_t^\rho,$$

или для некоторого c_t

$$\rho_0(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t = \rho_t(c_t, x_t).$$

Но отсюда

$$(\forall t)(\forall c_0)(\forall x^t)(\forall x_t)(\exists c_t)(\rho_t(c_t, x_t) = \rho_0(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t).$$

Выберем произвольные c_t и x_t. Тогда $(x_t, \rho_t(c_t, x_t)) \in S_t^\rho$. Так как $S_t^\rho \subseteq S_0^\rho \mid T_t$, то для некоторых c_0 и x^t

$$\rho_t(c_t, x_t) = \rho_0(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t,$$

а потому

$$(\forall t)(\forall c_t)(\forall x_t)(\exists c_0)(\exists x^t)(\rho_t(c_t, x_t) = \rho_0(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t), \quad \text{ч. т. д.}$$

(b) Общие динамические системы

Понятие динамической системы возникает тогда, когда появляется необходимость исследовать, как система развивается во времени. Поэтому нужно установить взаимосвязь между значениями объектов системы, относящимися к различным моментам времени. Для этой цели одного понятия реакции системы уже недостаточно и приходится вводить другое семейство функций.

Определение 2.7. Временная система $S \subset X \times Y$ называется *динамической* (или она *допускает динамическое представление*) тогда и только тогда, когда найдутся два таких семейства отображений

$$\bar{\rho} = \{\rho_t \colon C_t \times X_t \to Y_t \,\&\, t \in T\}$$

и

$$\bar{\varphi} = \{\varphi_{tt'} \colon C_t \times X_{tt'} \to C_{t'} \,\&\, t, t' \in T \,\&\, t' > t\},$$

что

(i) семейство $\bar{\rho}$ согласуется с S, т. е. является семейством реакций этой системы;

(ii) все функции $\varphi_{tt'}$ из семейства $\bar{\varphi}$ удовлетворяют следующим условиям:

(α) $\rho_t(c_t, x_t) \mid T_{t'} = \rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t'})$, где $x_t = x_{tt'} \cdot x_{t'}$;

(β) $\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}) = \varphi_{t''t'}(\varphi_{tt''}(c_t, x_{tt''}), x_{t''t'})$, где $x_{tt'} = x_{tt''} \cdot x_{t''t'}$.

Функции $\varphi_{tt'}$ называются *функциями перехода состояний* (на $T_{tt'}$), а семейство $\bar{\varphi}$ — *семейством функций перехода состояний.*

Функции $\varphi_{tt'}$, вообще говоря, определены лишь для $t < t'$. Однако в дальнейшем мы договоримся считать, что

(γ) $\varphi_{tt}(c_t, x_{tt}) = c_t$ для всех $t \in T$.

Поскольку динамическая система полностью описывается двумя семействами отображений $\bar{\rho}$ и $\bar{\varphi}$, мы будем называть динамическим представлением системы и даже просто динамической системой саму эту пару $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$. Если для семейства реакций существует согласующееся с ним семейство перехода состояний, то мы будем называть первое семейство *семейством реакций динамической системы*. Ниже мы покажем, что не каждое семейство реакций может служить семейством реакций динамической системы.

Условие (α) определения 2.7 соответствует *свойству согласованности семейства функций перехода состояний* (с заданным семейством реакций), а условие (β) — *свойству композиции переходов состояний* (называемому еще и полугрупповым свойством). Условия (α) и (β) довольно сильно связаны между собой. На самом деле при достаточно слабых предположениях условие (β) вытекает из условия (α), и поэтому для того, чтобы $\bar{\varphi}$ можно было считать семейством функций перехода состояний, достаточно только согласованности $\bar{\varphi}$ с семейством $\bar{\rho}$. Для того чтобы сформулировать эти предположения, нам понадобится следующее

Определение 2.8. Пусть $\bar{\rho}$ есть семейство реакций, согласующееся с некоторой временной системой S. Семейство $\bar{\rho}$ называется *приведенным семейством реакций* тогда и только тогда, когда для любого $t \in T$

$$(\forall c_t)\,(\forall \hat{c}_t)\,[(\forall x_t)(\rho_t(c_t, x_t) = \rho_t(\hat{c}_t, x_t)) \Rightarrow c_t = \hat{c}_t].$$

Приведенность семейства $\bar{\rho}$, а значит, и связанного с ним семейства объектов состояний $\bar{C} = \{C_t\colon t \in T\}$, не представляется существенным ограничением. Оно лишь означает, что если два состояния в любой момент времени $t \in T$ обусловливают идентичное поведение системы в будущем, то их следует отождествлять.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 2.2. Пусть $\bar{\rho} = \{\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t\}$ является семейством реакций, а $\bar{\varphi} = \{\varphi_{tt'}\colon C_t \times X_{tt'} \to C_{t'}\}$ — семейством функций, согласующимся с $\bar{\rho}$, т. е. удовлетворяющим условию (α) определения 2.7:

$$\rho_t(c_t, x_t) \mid T_{t'} = \rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t'}).$$

Тогда если семейство $\bar{\rho}$ приведено, то семейство $\bar{\varphi}$ обладает свойством композиции переходов состояний, т. е. удовлетворяет условию (β) определения 2.7.

Доказательство. Из согласованности $\bar{\varphi}$, т. е. из условия (α), следует, что для $t \leqslant t' \leqslant t''$

$$\rho_t(c_t, x_t) \mid T_{t''} = \rho_{t''}(\varphi_{tt''}(c_t, x_{tt''}), x_t),$$
$$\rho_t(c_t, x_t) \mid T_{t'} = \rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t'}),$$
$$\rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t'}) \mid T_{t''} = \rho_{t''}(\varphi_{t't''}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t't''}), x_{t''}).$$

Но так как

$$\rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t'}) \mid T_{t''} = (\rho_t(c_t, x_t) \mid T_{t'}) \mid T_{t''} = \rho_t(c_t, x_t) \mid T_{t''},$$

то для любого $x_{t''} \in X_{t''}$

$$\rho_{t''}(\varphi_{tt''}(c_t, x_{tt''}), x_{t''}) = \rho_{t''}(\varphi_{t't''}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t't''}), x_{t''}).$$

А поскольку семейство $\{\rho_t\}$ приведенное,

$$\varphi_{tt''}(c_t, x_{tt''}) = \varphi_{t't''}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t't''}), \text{ ч. т. д.}$$

Необходимо отметить, что в определении временной системы и входной, и выходной объекты определялись на одном и том же множестве моментов времени. Очевидно, что это не самый общий случай (скажем, выходная величина может быть, вообще говоря, точечной, а не функцией времени). Мы остановились на данном подходе потому, что он позволяет получать все результаты, представляющие интерес для обычной теории систем (например, для теории реализации, о которой пойдет речь в гл. III). Свойства и поведение систем, входные и выходные объекты которых определены на различных множествах моментов времени, можно вывести из наиболее полного случая, который рассматривается в этой книге.

(c) Общие динамические системы в пространстве состояний

Понятие объекта состояний системы в том виде, в каком оно было введено нами, обладает одним существенным недостатком. В нем отсутствует требование, чтобы состояния, относящиеся к двум различным моментам времени, были связаны между собой. Другими словами, вообще говоря, возможно, что для любых моментов времени $t \neq t'$ выполняется равенство $C_t \cap C_{t'} = \varnothing$. Для того чтобы более полно использовать потенциальные возможности понятия состояния, состояния, относящиеся к различным моментам времени, должны быть как-то соотнесены друг другу. Например, мы должны иметь возможность выяснить, когда система вернулась в «прежнее» состояние или когда ее состояние вообще не менялось, т. е. оставалось таким же, как и раньше. Короче говоря, необходимо научиться устанавливать, какие состояния в различные моменты времени можно считать эквивалентными. А это значит, что нам нужно иметь такое множество C, что для каждого $t \in T$ выполняется равенство $C_t = C$. Такое множество служило бы пространством состояний данной системы. В этом случае состоянием системы в любой момент времени будет элемент этого пространства, и динамику (т. е. изменение поведения во времени) системы при любом заданном входном воздействии можно будет представлять в виде отображения пространства состояний в себя.

Все эти соображения подводят нас к следующему определению:

Определение 2.9. Пусть S — временная система, $S \subset X \times Y$, а C — произвольное множество. Множество C является *пространством состояний* системы S тогда и только тогда, когда найдутся два таких семейства функций $\bar{\rho} = \{\rho_t\colon C \times X_t \to Y_t\}$ и $\bar{\varphi} = \{\varphi_{tt'}\colon C \times X_{tt'} \to C\}$, что

(i) для всех $t \in T$, $S_t \subset S_t^\rho$ и $S_0^\rho = \{(x, y)\colon (\exists c)\,(y = \rho_0(c, x))\} = S$;

(ii) для всех t, t' и $t'' \in T$

(α) $\rho_t(c, x_t) \mid T_{t'} = \rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c, x_{tt'}), x_{t'})$,

(β) $\varphi_{tt'}(c, x_{tt'}) = \varphi_{t''t'}(\varphi_{tt''}(c, x_{tt''}), x_{t''t'})$,

(γ) $\varphi_{tt}(c, x_{tt}) = c$,

где $x_t = x_{tt'} \cdot x_{t'}$ и $x_{tt'} = x_{tt''} \cdot x_{t''} \cdot x_{t'}$. В этом случае S называется *динамической системой в пространстве состояний* C.

Заметим, что в общем случае S_t является собственным подмножеством S_t^ρ. Это объясняется тем, что $\bar{\rho}$ определяется на всем пространстве состояний C, а реальная система не обязательно должна иметь возможность в любой момент времени находиться во всех состояниях, т. е. в какой-то момент времени t множество допустимых состояний системы может оказаться ограниченным.

Это приводит нас к следующему определению:

Определение 2.10. Динамическая система в пространстве состояний C называется *полной* тогда и только тогда, когда для всех $t \in T$ выполняется равенство $S_t = S_t^\rho$.

В этой книге мы часто будем рассматривать полные динамические системы (скажем, линейные и инвариантные во времени). Однако в общем случае система не должна быть полной. Например, даже конечный автомат в общем случае не является полной динамической системой. Простым примером подобной ситуации может служить автомат Мили, задаваемый

входным алфавитом $\{1\}$,
выходным алфавитом $\{1, 2\}$,
пространством состояний $\{1, 2\}$.

Переходы состояний этого автомата и его выходная функция представлены на диаграмме перехода состояний (рис. 2.1).

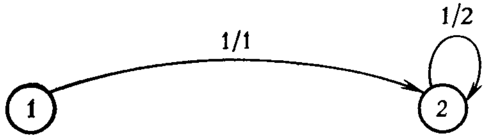


Рис. 2.1.

На протяжении всей нашей книги мы будем, используя для описания системы пространство состояний, называть согласованностью реакций системы условие (i) из определения 2.9, а не условие (i) из определения 2.7. То, что линейная инвариантная во времени система является полной динамической системой, весьма важно для этого класса систем и предопределяет многие его практически важные свойства (см. гл. VIII).

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ КЛАССЫ СИСТЕМ

(а) Вспомогательные функции

Определение системы как отношения, $S \subset X \times Y$, или временной системы как отношения между временными объектами, $S \subset A^T \times B^T$, служит отправной точкой для всего последующего развития общей теории систем. Однако для того, чтобы получить возможность изучать поведение и свойства данной системы или исследовать более конкретные характеристики различных систем, необходимо вводить дополнительные понятия.

В общем случае система действительно является именно отношением, и определить выход системы по одному входному воздействию нельзя. Чтобы получить такую возможность, приходится вводить понятие объекта начальных состояний, что позволяет определять выход каждый раз, когда задается пара «вход—начальное состояние». Другими словами, мы представляем систему с помощью функции ρ_0, получившей название начальной реакции системы. Однако для эффективного описания выхода системы этого еще недостаточно. Например, если S — временная система, а ρ_0 — некоторая заданная начальная реакция, то для любого заданного $x \in X$ выходная величина системы определяется уравнением $y = \rho_0(c_0, x)$, где x: $T \to A$ и y: $T \to B$. Функция ρ_0 чаще всего представляет собой функцию большой мощности, и в тех случаях, скажем, когда множество T бесконечно, она определяет выход системы лишь формально. Для эффективного способа описания выхода системы необходимо найти более простые функции, по возможности меньшей мощности, с помощью которых тем не менее можно охарактеризовать поведение системы, например определяя ρ_0 рекуррентным образом. Для некоторых классов временных систем эти функции построить довольно просто, если рассмотреть сужения системы на различные подмножества множества T. Существует целая «когорта» таких функций, которые мы будем называть *вспомогательными*. Рассмотрим теперь несколько таких функций, которые по традиции используются при определении различных типов систем. С двумя такими вспомогательными функциями мы уже сталкивались — это реакция ρ_t: $C_t \times X_t \to Y_t$ и функция перехода состояний $\varphi_{tt'}$: $C_t \times X_{tt'} \to C_t$. В этом параграфе мы введем несколько новых вспомогательных функций, с помощью которых впоследствии сможем охарактеризовать свойства систем разных типов и более эффективно описать реакцию системы.

(i) *Производящая функция выхода*

Один из методов более эффективного описания реакции системы состоит в построении «процедуры», позволяющей с помощью некоторой функции определять значения выходной величины системы для любого момента времени, т. е. для любых заданных x^t и c_0 определять $y(t)$. Если такая функция задана, то выходную величину y: $T \to B$ для любой заданной пары (x, c_0) можно считать известной в том смысле, что она позволяет узнавать ее значение в любой момент времени $t \in T$. Это подводит нас к следующему определению:

Определение 3.1. Для заданного семейства реакций $\bar{\rho}$ некоторой временной системы определим отношение

$$\mu_{tt'} \subset C_t \times \overline{X}_{tt'} \times Y(t'),$$

удовлетворяющее условию

$$(c_t, \bar{x}_{tt'}, y(t')) \in \mu_{tt'} \Leftrightarrow (\exists x_t)(\exists y_t)\,[y_t(t') = y(t') \,\&\, y_t = \rho_t(c_t, x_t) \,\&\, \bar{x}_{tt} = x_t \mid \overline{T}_{tt'}].$$

Если μ_{tt} — функция

$$\mu_{tt'}\; C_t \times \overline{X}_{tt'} \to Y(t'),$$

то ее называют *производящей функцией выхода* на $\overline{T}_{tt'}$, а множество $\bar{\mu} = \{\mu_{tt'}\colon t, t' \in T \,\&\, t' \geqslant t\}$ — *производящим семейством выхода* (рис. 3.1).

Заметим, что сужение входного воздействия, принадлежащего области определения функции $\mu_{tt'}$, должно быть определено на $\overline{T}_{tt'} = T_{tt'} \cup \{t'\}$, а не на $T_{tt'}$.

Очевидно, отношение $\mu_{tt'}$ существует и вполне определено для любой общей временной системы. Однако для существования производящей функции выхода, т. е. для того чтобы $\mu_{tt'}$ было

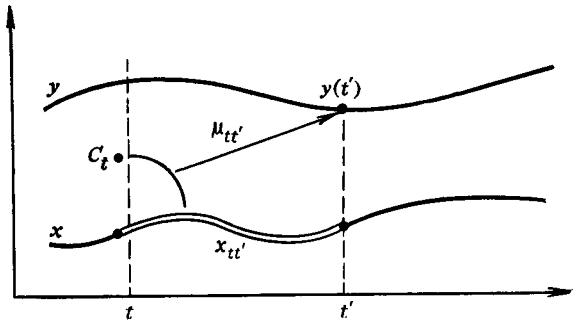


Рис. 3.1.

функцией, требуется выполнение некоторых определенных условий.

(ii) *Выходная функция*

Эволюцию динамической системы во времени обычно описывают с помощью переходов в пространстве состояний, и было бы интересно связать изменение состояний с изменением выхода системы.

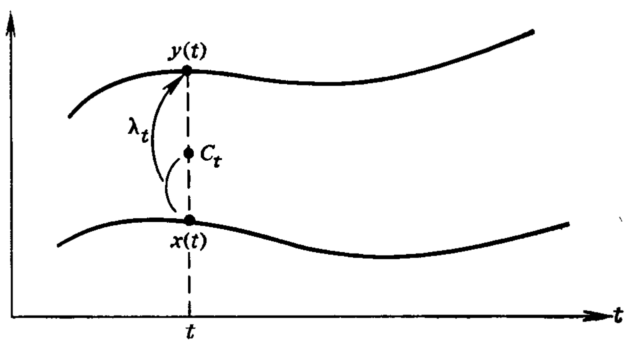


Рис. 3.2.

Точнее говоря, состояние системы в любой момент времени $t \in T$ следует как-то связать с значением выхода в этот же момент времени. В результате мы приходим к следующему определению:

Определение 3.2. Пусть S — некоторая временная система с семейством реакций $\bar{\rho}$ и отношением

$$\lambda_t \subset C_t \times X(t) \times Y(t),$$

таким, что

$$(c_t, x(t), y(t)) \in \lambda_t \Leftrightarrow (\exists x_t)(\exists y_t)[y_t = \rho_t(c_t, x_t) \& \\ \& x(t) = x_t(t) \& y(t) = y_t(t)].$$

Если отношение λ_t является функцией,

$$\lambda_t: C_t \times X(t) \to Y(t),$$

то ее называют *выходной функцией* для момента времени t, а $\bar{\lambda} = \{\lambda_t: t \in T\}$ — *выходным семейством* системы (рис. 3.2).

Очевидно, отношение λ_t определено корректно и существует для любой общей временной системы. Условия же существования выходной функции будут сформулированы в следующем параграфе.

(iii) *Производящая функция состояния*

Для любой динамической системы ее состояние в любой момент времени t определяется начальным состоянием c_0 и начальным сужением входного воздействия x^t. Однако для определенных

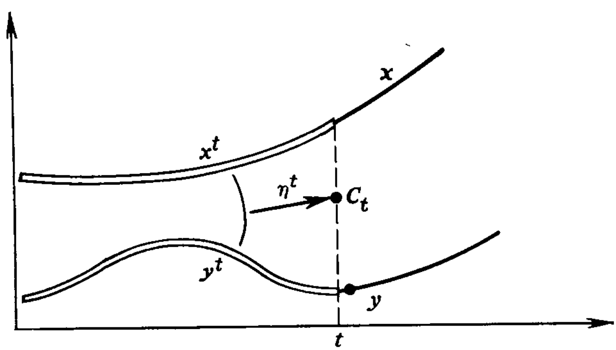


Рис. 3.3.

классов систем существует некоторый момент времени $\hat{t} \in T$, такой, что состояние в любой последующий момент времени определяется исключительно предыдущими входными воздействиями и сужениями выходной величины, т. е. здесь не требуется никакого обращения к состояниям системы. Это приводит нас к следующему определению:

Определение 3.3. Пусть $\bar{\rho}$ — семейство реакций временной системы S, а η^t — отношение,

$$\eta^t \subset X^t \times Y^t \times C_t,$$

такое, что

$$(x^t, y^t, c_t) \in \eta^t \Longleftrightarrow (\forall x_t)(\forall y_t)\,[(x^t \cdot x_t, y^t \cdot y_t) \in S \Rightarrow y_t = \rho_t(c_t, x_t)].$$

Если отношение η^t является функцией:

$$\eta^t\colon X^t \times Y^t \to C_t,$$

то ее называют *производящей функцией состояния* для момента времени t, а $\bar\eta = \{\eta^t\colon X^t \times Y^t \to C_t \,\&\, t \in T\}$ — *производящим семейством состояний* (рис. 3.3).

И снова, хотя η^t определено всегда, существование производящего семейства состояний требует выполнения определенных условий, которые в этом случае имеют более специальный вид.

(b) Некоторые классы временных систем

В общем случае вспомогательные функции для различных $t \in T$ различны. Однако в тех случаях, когда некоторые из них оказываются одинаковыми для всех $t \in T$ или получаются из одной функции за счет соответствующих сужений, можно ввести разные типы инвариантности во времени.

(i) *Статические системы и системы без памяти*

Первый тип инвариантности во времени характеризует взаимосвязь между объектами системы в произвольный момент времени и непосредственно связан с реакцией системы.

Определение 3.4. Система S называется *статической* (безынерционной) тогда и только тогда, когда существует начальная реакция $\rho_0\colon C_0 \times X \to Y$ системы S, такая, что для всех $t \in T$

$$(\forall c_0)(\forall x)(\forall \hat{x})\,[x(t) = \hat{x}(t) \Rightarrow \rho_0(c_0, x)(t) = \rho_0(c_0, \hat{x})(t)].$$

Другими словами, система называется статической тогда и только тогда, когда для любого $t \in T$ найдется такое отображение $K_t\colon C_0 \times X(t) \to Y(t)$, что

$$(x, y) \in S \Longleftrightarrow (\exists c_0 \in C_0)(\forall t)\,(y(t) = K_t(c_0, x(t))).$$

Любая временная система, не являющаяся статической, называется *инерционной*.

С интуитивной точки зрения система является статической, если значения ее выходной величины в любой момент времени t зависят исключительно от текущего значения входного воздействия и состояния, с которого началась ее эволюция. Поэтому, если функция $x(t)$ на какой-то период времени становится постоянной, постоянной становится и $y(t)$. Напротив, выходная величина инерционной системы зависит не только от текущего значения входного воздействия, но и от «предыстории» этого воздействия. Заметьте, что и в том, и в другом случае нельзя обойтись без упоминания начального состояния системы (рис. 3.4).

Следует отметить, что мы различаем динамические и инерционные системы. Для первой из них требуется, чтобы существовало

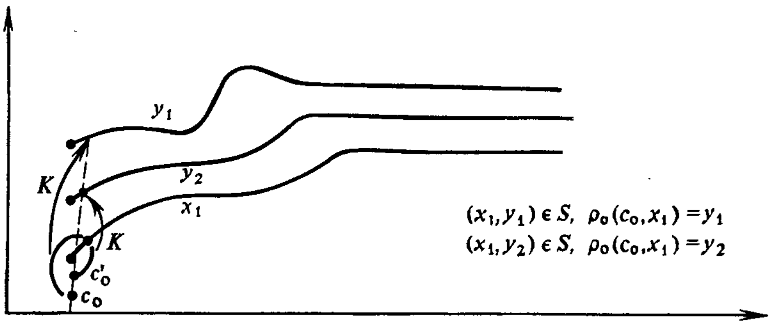


Рис. 3.4.

семейство переходов состояний, а для второй — всего лишь, чтобы система не было статической. Такая терминология, возможно, не слишком удачна. Однако мы будем придерживаться ее, поскольку она согласуется с терминологией, принятой в уже сложившихся частных теориях [1]).

Еще одно понятие, родственное понятию статической системы, определяется следующим образом:

Определение 3.5. Временная система S называется *системой без памяти* тогда и только тогда, когда она является статической и такой, что

$$(\forall x)(\forall \hat{x})(\forall c_0)(\forall \hat{c}_0)\,[x(t) = \hat{x}(t) \Rightarrow \rho_0(c_0, x)(t) = \rho_0(\hat{c}_0, \hat{x})(t)],$$

или в терминах отображения K_t: $C_0 \times X(t) \to Y(t)$, такой, что

$$(\forall c_0)(\forall \hat{c}_0)(\forall x)(\forall \hat{x})\,[x(t) = \hat{x}(t) \Rightarrow K_t(c_0, x(t)) = K_t(\hat{c}_0, \hat{x}(t))],$$

т. е. когда существует отображение $K_t^*: X(t) \to Y(t)$, такое, что $K_t^*(x(t)) = K_t(c_0, x(t))$ (рис. 3.5).

[1]) В русской литературе эти два класса систем называют разными терминами, которые по-английски звучат весьма схоже: «dynamic» и «dynamical». Именно в этом автор и видит неудачность терминологии. — *Прим. перев.*

Легко видеть, что система без памяти полностью характеризуется отображением K_t^*: $A \to B$. Система, не удовлетворяющая определению 3.5, называется *системой с памятью*.

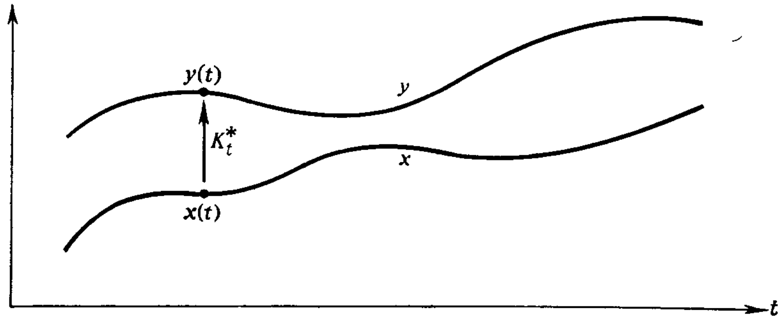


Рис. 3.5.

(ii) *Стационарные динамические системы*

Понятие инвариантности во времени второго типа связано с тем, в каком отношении друг к другу находятся реакции системы для двух различных моментов времени. Чтобы ввести соответствующие понятия, нам придется предположить, что множество моментов времени T является правым интервалом некоторой линейно упорядоченной абелевой группы $\bar{T}$, групповая операция (сложение) в которой будет обозначаться символом $+$. Точнее говоря, мы будем считать, что $T = \{t\colon t \geqslant 0\}$, где через 0 обозначен нейтральный элемент группы $\bar{T}$, а сложение согласовано с линейным порядком так, что

$$t \leqslant t' \Leftrightarrow t' - t \geqslant 0.$$

Определенное выше множество моментов времени T будет в дальнейшем называться *множеством моментов времени для стационарных систем*.

Для каждого $t \in \bar{T}$ обозначим через F^t: $\bar{X} \to \bar{X}$ оператор, такой, что

$$(\forall t')\ [F^t(x)\ (t') = x\ (t' - t)].$$

Заметим, что оператор F^t определен как для $t < 0$, так и для $t \geqslant 0$, но допускает ли действие этого оператора содержательную интерпретацию, зависит от значения его аргумента. В общем случае каждый раз, когда определено $F^t(x_{t't''})$, имеет место включение $F^t\ (x_{t't''}) \in X_{(t'+t)(t''+t)}$.

Оператор F^t называют *оператором сдвига*. Его действие состоит в том, что он просто сдвигает заданную функцию времени на временной интервал, указанный в верхнем индексе оператора, и не изменяет ее в других отношениях (рис. 3.6). Этот же символ F^t будет

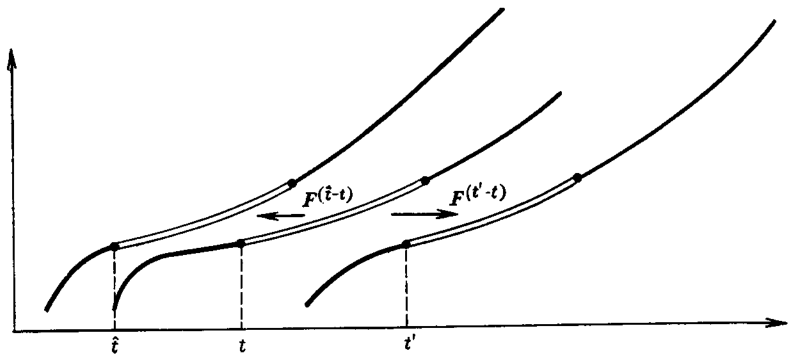


Рис. 3.6.

использоваться и для обозначения оператора сдвига в $\overline{Y}$. Мы определим также оператор сдвига F^t и для $\overline{S}$, полагая

$$F^t (x, y) = (F^t(x), F^t(y)).$$

Теперь мы можем ввести следующее

Определение 3.6. Временная система, определенная на множестве моментов времени для стационарных систем, называется *вполне*

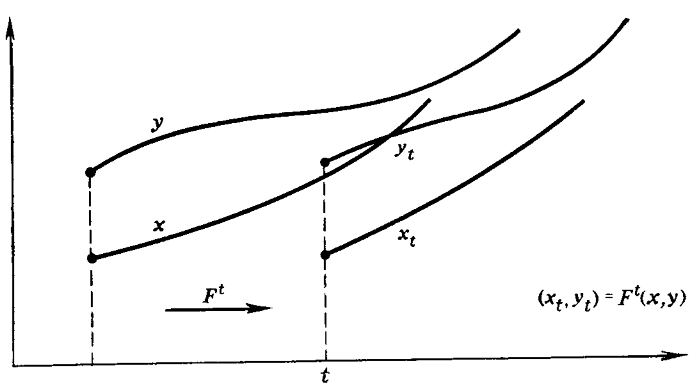


Рис. 3.7.

стационарной тогда и только тогда, когда (рис. 3.7)

$$(\forall t)\ [t \in T \Rightarrow F^t(S) = S_t],$$

и *стационарной* тогда и только тогда, когда

$$(\forall t)\ (\forall t' \geqslant t)\ (t,\ t' \in T \Rightarrow S_{t'} \subset F^{t'-t}\ (S_t)).$$

Очевидно, что если система вполне стационарна, то $F^{-t}\ (S_{t'} \mid T_t) = F^{-t'}(S_{t'})$ для любого $t \geqslant t' \in T$, т. е. начиная с любого заданного момента времени эволюция системы в будущем оказывается одинаковой с точностью до сдвига на соответствующий промежуток времени.

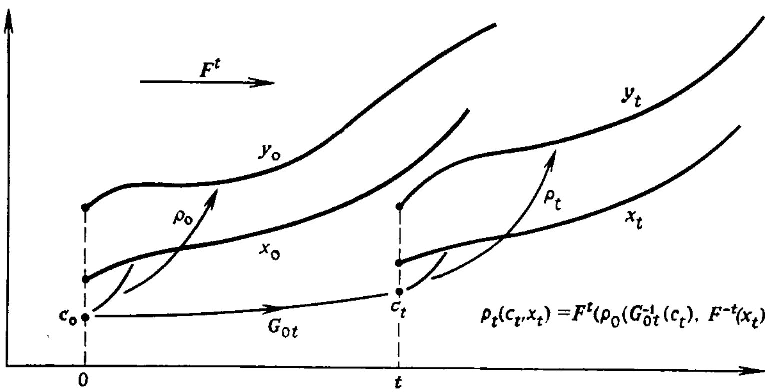


Рис. 3.8.

Если некоторые заданные входной и выходной объекты X и Y системы удовлетворяют условию

$$(\forall t)\ (X_t = F^t(X)) \text{ и } (\forall t)\ (Y_t = F^t(Y)),$$

мы будем называть их *объектами стационарной системы.*

Если для временной системы известны ее реакции, то можно дать следующее

Определение 3.7. *Семейство реакций* (системы) *инвариантно во времени* тогда и только тогда, когда для любого $t \in T$ найдется такое взаимно однозначное соответствие G_{0t}: $C_0 \rightarrow C_t$, что

$$(\forall t)\ (\forall c_t)\ (\forall x_t)\ [\rho_t\ (c_t,\ x_t) = F^t(\rho_0\ (G_{0t}^{-1}(c_t),\ F^{-t}(x_t)))].$$

Очевидно, что реакция системы инвариантна во времени тогда и только тогда, когда для любого состояния в любой момент времени выход системы можно получить из начальных реакций системы с помощью подходящего сдвига во времени (рис. 3.8).

Совершенно аналогично вводится и следующее

Определение 3.8. Динамическая система называется *инвариантной во времени* тогда и только тогда, когда

(i) инвариантно во времени ее семейство реакций;
(ii) для любых $t, t' \in T$, $t' > t$,

$$(\forall t)\,(\forall t')\,(\forall c_t)\,(\forall x_{tt'})\,[\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}) = G_{\hat{t}t'}(\varphi_{0\hat{t}}(G_{0t}^{-1}(c_t), F^{-t}(x_{tt'})))],$$

где $t' = \hat{t} + t$ и $G_{tt'} = G_{0t'} \circ G_{0t}^{-1}$.

Очевидно, что для инвариантных во времени систем функцию перехода состояний для любого момента времени можно получить как результат применения оператора сдвига к начальной реакции системы.

Что же касается взаимосвязи между стационарными и инвариантными во времени системами, то следующий результат получается непосредственно из определений.

Предложение 3.1. Всякая система с инвариантной во времени реакцией (а следовательно, и всякая инвариантная во времени динамическая система) является стационарной.

4. ПРИЧИННОСТЬ

Причинность по сути дела означает возможность предсказывать исход или последствия некоторых событий в будущем. Другими словами, причинно-следственным объяснением явления мы располагаем тогда, когда в состоянии выявить относящиеся к нему причины и их последствия и умеем объяснить, какие последствия вытекают из каких причин.

Если задана некоторая общая система $S \subset V_1 \times \ldots \times V_n$, причинность вводится в ее описание в три этапа:

(i) Устанавливается, какие из ее объектов относятся к входам, а какие — к выходам.

(ii) Выясняется, какие из выходных объектов в явном виде зависят от других выходов и только неявно от входных воздействий на систему.

(iii) Предлагается такое описание эволюции системы во времени, при котором значения выходных величин в любой момент времени зависят исключительно от предыстории, т. е. от предшествующей пары «вход — выход».

В настоящем параграфе мы будем иметь дело лишь с третьим аспектом причинности, который можно было назвать причинностью во времени. Именно этот аспект причинности представляет основной интерес при изучении временных систем.

(а) Понятия, связанные с причинностью во времени

С причинностью связано два понятия. Первое из них, *неупреждаемость*, использует заданный объект начальных состояний или, точнее, начальную реакцию системы, второе же определяется исключительно в терминах входов и выходов системы, и мы будем называть его *предопределенностью*. Термин «причинность» будет употребляться как родовой, охватывающий оба эти случая.

(i) *Неупреждаемость*

Пусть ρ_0 — начальная реакция временной системы S. Введем следующее

Определение 4.1. Начальная реакция ρ_0: $C_0 \times X \to Y$ системы $S \subset X \times Y$ называется *неупреждающей* тогда и только тогда, когда

$$(\forall t)\,(\forall c_0)\,(\forall x)\,(\forall \hat{x})\,[x \mid \bar{T}^t \quad \hat{x} \mid \bar{T}^t \Rightarrow \rho_0\,(c_0,\, x) \mid \bar{T}^t = \rho_0\,(c_0,\, \hat{x}) \mid \bar{T}^t].$$

В неупреждающей системе изменения выходной величины не могут упреждать, предугадывать изменения входного воздей-

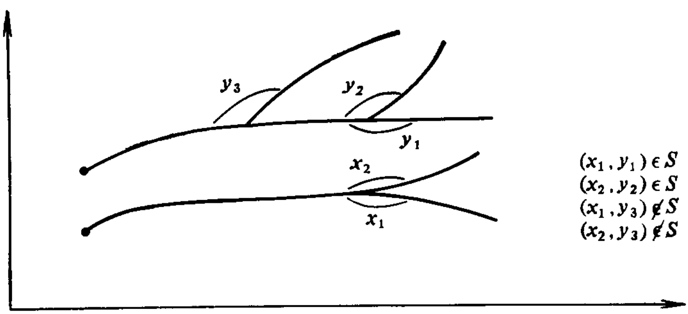


Рис. 4.1.

ствия (рис. 4.1). Для определенного класса систем понятие неупреждаемости можно несколько усилить:

Определение 4.2. Начальная реакция системы ρ_0: $C_0 \times X \to Y$ называется *сильно неупреждающей* тогда и только тогда, когда

$$(\forall t)\,(\forall c_0)\,(\forall x)\,(\forall \hat{x})\,[x \mid T^t = \hat{x} \mid T^t \Rightarrow \rho_0\,(c_0,\, x) \mid \bar{T}^t =$$
$$= \rho_0\,(c_0,\, \hat{x}) \mid \bar{T}^t].$$

Отметим, что и определение 4.1, и определение 4.2 относятся к временным системам, а не обязательно к динамическим.

Разница между неупреждающей и сильно неупреждающей реакциями системы состоит в том, что во втором случае текущее значение $y(t)$ выходной величины не может зависеть от текущего значения $x(t)$ входного воздействия, поскольку в определении 4.2 в посылке используются сужения на T^t, а не на $\overline{T}^t = T^t \cup \{t\}$, как в определении 4.1, но в заключениях обоих определений фигурируют сужения на $\overline{T}^t$.

Необходимо также отметить, что ρ_0 считается выше полной функцией. Для исследования неупреждаемости это очень важное ограничение, поскольку оно не позволяет нам относить реакцию некоторых систем к числу неупреждающих. В связи с этим мы предлагаем следующее

Определение 4.3. Пусть $R = C_0 \times X$ и $\rho_0\colon (R) \to Y$. Реакция ρ_0 называется *неполной неупреждающей начальной реакцией системы* S тогда и только тогда, когда

(i) ρ_0 согласуется с S, т. е.

$$(x, y) \in S \Longleftrightarrow (\exists c_0)\,[\rho_0(c_0, x) = y \,\&\, (c_0, x) \in R];$$

(ii) $(\forall t)\,(\forall c_0)\,(\forall x)\,(\forall \hat{x})\,[(c_0, x) \in R \,\&\, (c_0, \hat{x}) \in R \,\&\, x \mid \overline{T}^t =$
$$= \hat{x} \mid \overline{T}^t \Rightarrow \rho_0(c_0, x) \mid \overline{T}^t = \rho_0(c_0, \hat{x}) \mid \overline{T}^t].$$

Определение 4.4. Мы будем называть систему S *(сильно) неупреждающей* тогда и только тогда, когда ее начальная реакция является полной и (сильно) неупреждающей.

(ii) *Предопределенность*

Определение 4.5. Временная система $S \subset A^T \times B^T$ называется *предопределенной* начиная с момента времени $\hat{t}$ тогда и только тогда, когда найдется такое $\hat{t} \in T$, что (рис. 4.2)

$$\text{(i)}\quad (\forall (x, y) \in S)\,(\forall (x', y') \in S)\,(\forall t \geqslant \hat{t})([(x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}) =$$
$$= (x'^{\hat{t}}, y'^{\hat{t}}) \,\&\, x_{\hat{t}t} = x'_{\hat{t}t}] \Rightarrow \overline{y}_{\hat{t}t} = \overline{y}'_{\hat{t}t});$$

$$\text{(ii)}\quad (\forall (x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}))\,(\forall x_{\hat{t}})\,(\exists y_{\hat{t}})\,((x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}) \in S^{\hat{t}} \Rightarrow (x^{\hat{t}} \cdot x_{\hat{t}}, y^{\hat{t}} \cdot y_{\hat{t}}) \in S).$$

Предопределенность означает существование такого $\hat{t} \in T$, что для любых $t \geqslant \hat{t}$ будущая эволюция системы определяется исключительно прошлыми наблюдениями, и нет никакой необходимости обращаться к каким-либо вспомогательным множествам вроде объекта начальных состояний.

Условие (ii), которое мы будем называть *условием полноты*, вводится единственно из соображений математического удобства.

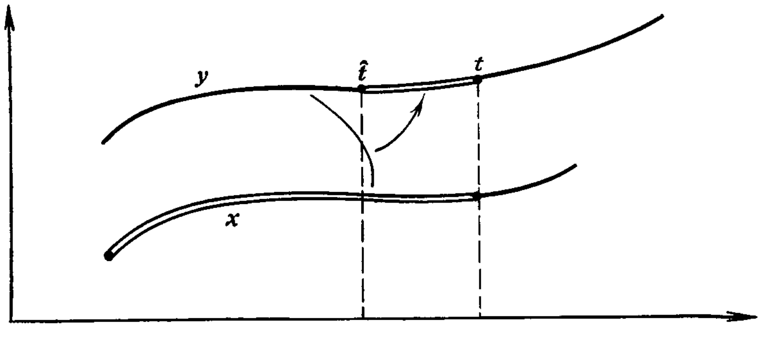


Рис. 4.2.

(b) Существование причинных реакций

Теорема 4.1. Для каждой временной системы найдется неполная неупреждающая начальная реакция.

Доказательство. Пусть через $\equiv \subseteq S \times S$ обозначено такое отношение, что $(x, y) \equiv (x', y')$ тогда и только тогда, когда $y = y'$. Тогда очевидно, что $\equiv$ есть отношение эквивалентности. Пусть $S/\equiv = \{[s]\} = C_0$, где $[s] = \{s^* \mid s^* \equiv s \,\&\, s^* \in S\}$[1]. Пусть $\rho_0\colon C_0 \times X \to Y$ такова, что

$$\rho_0([s], x) = \begin{cases} y, & \text{если } (x, y) \in [s], \\ \text{не определена в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что ρ_0 определена корректно, поскольку если $(x, y) \in [s]$ и $(x, y') \in [s]$, то $y = y'$. В общем случае функция ρ_0 является частичной. Покажем прежде всего, что

$$S = \{(x, y)\colon (\exists c)\,(c \in C_0 \,\&\, y = \rho_0(c, x))\} \equiv S'.$$

Если $(x, y) \in S$, то $\rho_0([(x, y)], x) = y$ по определению. Следовательно, $(x, y) \in S'$, или $S \subseteq S'$. Обратно, если $(x, y) \in S'$, то для некоторого $[s] \in C_0$ справедливо равенство $y = \rho_0([s], x)$. А тогда

[1] В нашей книге мы договоримся использовать для фактормножеств следующие обозначения. Пусть E — некоторое отношение эквивалентности на множестве X. Тогда фактормножество X/E состоит из всех элементов типа $[x]$, $X/E = \{[x]\}$, где через $[x]$ обозначен класс эквивалентности (смежности) элемента x, т. е.

$$[x] = \{x^*\colon (x, x^*) \in E \,\&\, x^* \in X\},$$

а $[\cdot]$ соответствует каноническому отображению $[\cdot]\colon X \to X/E$.

из определения ρ_0 следует, что $(x, y) \in [s]$, а потому $S' \subseteq S$. Более того, если значения $\rho_0([s], x)$ и $\rho_0([s], x')$ определены, то $\rho_0([s], x) = \rho_0([s], x')$ для любых x и x' и, значит, условие (ii) из определения 4.3 выполняется очевидным образом, ч. т. д.

Теорему 4.1 нельзя обобщить на случай полных начальных реакций, т. е. обеспечить полноту функции ρ_0. Существуют временные системы, для которых нет (полных) неупреждающих начальных реакций в том виде, как этого требует определение 4.1.

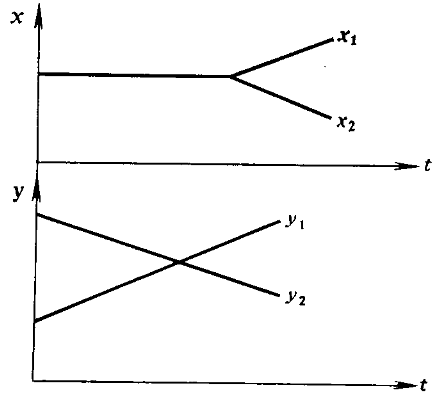


Рис. 4.3.

Другими словами, требование, чтобы начальная реакция была полной функцией, может лишить нас возможности причинного описания поведения системы в смысле ее неупреждаемости. Такие системы можно рассматривать либо как существенно непричинные, либо как такие, для которых известно лишь неполное их описание, так что в них нарушение причинности объясняется лишь нехваткой информации. Все это легче всего проиллюстрировать с помощью рис. 4.3.

Рассмотрим систему, которая имеет всего два элемента: $S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ (рис. 4.3). Поскольку начальные интервалы у x_1 и x_2 совпадают, а соответствующие им интервалы выходных величин y_1 и y_2 разные, объект начальных состояний системы должен содержать по крайней мере два элемента, если мы хотим получить неупреждаемость начальной реакции. Пусть $C_0 = \{c, c'\}$ и $\rho_0(c, x_1) = y_1$, $\rho_0(c', x_2) = y_2$. Если ρ_0 — полная функция, то (c, x_2) тоже принадлежит области определения ρ_0. Поэтому $\rho_0(c, x_2)$ должна равняться либо y_1, либо y_2. Но из равенства $\rho_0(c, x_2) = y_1$ следует, что $(x_2, y_1) \in S$, т. е. ρ_0 не согласуется с S. В то же время условие $\rho_0(c, x_2) = y_2$ противоречит условию неупреждаемости из определения 4.1, поскольку начальные отрезки функций x_1 и x_2 одинаковы, а для функций y_1 и y_2—нет. Таким образом, система S не может иметь полной неупреждающей реакции.

Определение 4.6. Семейство реакций $\bar{\rho} = \{\rho_t : t \in T\}$ называется *неупреждающим* тогда и только тогда, когда каждая функция ρ_t является неупреждающей начальной реакцией системы S_t.

Теорема 4.2. Временная система имеет неупреждающее семейство реакций тогда и только тогда, когда ее начальная реакция неупреждающая.

Доказательство. Доказательство необходимости очевидно. Обратимся поэтому к доказательству достаточности. Пусть $\rho_0 : C_0 \times X \to Y$ — неупреждающая начальная реакция, и пусть $C_t = C_0 \times X^t$, а $\rho_t : C_t \times X_t \to Y_t$ удовлетворяют следующему условию: если $c_t = (c_0, \hat{x}^t)$, то для $t \in T$

$$\rho_t(c_t, x_t) = \rho_0(c_0, \hat{x}^t \cdot x_t) \mid T_t.$$

Но тогда условие согласованности теоремы 2.1 выполняется очевидным образом, т. е. $\bar{\rho} = \{\rho_t : t \in T\}$ образует семейство реакций. Более того, пусть $x_t \mid \bar{T}_{tt'} = x_t' \mid \bar{T}_{tt'}$, где $t' \geqslant t$. Тогда если $c_t = (c_0, \hat{x}^t)$, то

$$\rho_t(c_t, x_t) \mid \bar{T}_{tt'} = \rho_0(c_0, \hat{x}^t \cdot x_t) \mid \bar{T}_{tt'}$$

и

$$\rho_t(c_t, x_t') \mid \bar{T}_{tt'} = \rho_0(c_0, \hat{x}^t \cdot x_t') \mid \bar{T}_{tt'}.$$

Но так как реакция ρ_0 неупреждающая и $\hat{x}^{t'} \cdot x_t \mid \bar{T}^{t'} = \hat{x}^t \cdot x_t' \mid \bar{T}^{t'}$, то

$$\begin{aligned}\rho_t(c_t, x_t) \mid \bar{T}_{tt'} &= (\rho_0(c_0, \hat{x}^t \cdot x_t) \mid \bar{T}^{t'}) \mid \bar{T}_{tt'} = \\ &= (\rho_0(c_0, \hat{x}^t \cdot x_t') \mid \bar{T}^{t'}) \mid \bar{T}_{tt'} = \\ &= \rho_0(c_0, \hat{x}^t \cdot x_t') \mid \bar{T}_{tt'} = \\ &= \rho_t(c_t, x_t') \mid \bar{T}_{tt'}.\end{aligned}$$

Следовательно, ρ_t является неупреждающей реакцией, ч. т. д.

(c) Причинность и выходные функции

Условия существования выходной функции и производящей функции выхода можно сформулировать непосредственно в терминах неупреждаемости реакции системы.

Зависимость между существованием выходной функции и неупреждаемостью системы устанавливается в следующем предложении:

Предложение 4.1. Если временная система является неупреждающей, то для нее существует семейство выходных функций

$$\bar{\lambda} = \{\lambda_t : C_t \times X(t) \to Y(t)\}.$$

Доказательство. Поскольку система неупреждающая, то, согласно теореме 4.2, для нее существует неупреждающее семейство реакций $\bar{\rho} = \{\rho_t\colon t \in T\}$. Предположим теперь, что для этого неупреждающего семейства реакций определено семейство функций λ_t. Предположим, кроме того, что $(c_t, x(t), y(t)) \in \lambda_t$ и $(c_t, x'(t), y'(t)) \in \lambda_t$, где $x(t) = x'(t)$. Но так как

$$x_t \mid \bar{T}_{tt} = x(t) = x'(t) = x_t' \mid \bar{T}_{tt},$$

а реакция ρ_t неупреждающая, то

$$\rho_t(c_t, x_t) \mid \bar{T}_{tt} = \rho_t(c_t, x_t') \mid \bar{T}_{tt},$$

или $y(t) = y'(t)$. Следовательно, λ_t есть отображение $\lambda_t\colon C_t \times X(t)$ в $Y(t)$, ч. т. д.

Понятие выходной функции проясняет одну из важных сторон понятия состояния: если состояние системы известно и система является неупреждающей, то вся информация о предыстории системы, необходимая для определения текущего значения выхода, содержится в самом этом состоянии.

Зависимость существования производящей функции выхода от неупреждаемости системы совершенно аналогична описанной зависимости для выходной функции. Она устанавливается в следующем предложении:

Предложение 4.2. Если временная система является неупреждающей, то для нее существует семейство производящих функций выхода

$$\bar{\mu} = \{\mu_{tt'}\colon C_t \times X_{tt'} \to Y_t(t')\}.$$

Доказательство этого предложения совершенно аналогично доказательству предложения 4.1.

Из предложения 4.1 следует, что выход неупреждающей временной системы можно определить, зная лишь текущее состояние системы и текущее значение входного воздействия. Однако для некоторых систем текущее значение выхода зависит исключительно от текущего состояния системы и не зависит от текущего значения входа. Для анализа поведения таких систем требуется несколько более сильное понятие, а именно понятие сильной неупреждаемости.

Предложение 4.3. Если временная система является сильно неупреждающей, то для нее существует выходная функция, которая при любых $t \in T$ удовлетворяет условию

$$(\forall x(t))\,(\forall \hat{x}(t))\,[c_t = \hat{c}_t \Rightarrow \lambda_t(c_t, x(t)) = \lambda_t(\hat{c}_t, \hat{x}(t))].$$

Доказательство. Поскольку наша система сильно неупреждающая, для нее существует сильно неупреждающая начальная реакция ρ_0. Но тогда требуемое утверждение можно доказать точно так же, как и предложение 4.1, ч. т. д.

Если система является сильно неупреждающей, то для каждого $t \in T$, очевидно, существует отображение

$$K_t\colon C_t \to B,$$

такое, что

$$(\forall x(t))\,[\lambda_t(c_t, x(t)) = K_t(c_t)].$$

(d) Существование предопределенных систем

Прежде всего необходимо отметить различие между предопределенностью поведения системы и ее функциональностью. Система может быть функциональной (скажем, $S\colon X \to Y$) и тем не менее не быть предопределенной, и наоборот. Отметим также, что для функциональной системы (т. е. системы с единственным начальным состоянием) понятия сильной неупреждаемости и предопределенности начиная с момента 0 совпадают.

Для любой пары $(x, y) \in S$ обозначим через $S(x^t, y^t)$ множество

$$\{(x_t, y_t)\colon (x^t\cdot x_t,\ y^t\cdot y_t) \in S\}$$

и будем называть $S(x^t, y^t)$ семейством «продолжений» для (x^t, y^t). Это позволит нам сформулировать следующее

Предложение 4.4. Система является предопределенной начиная с момента $\hat{t}$ тогда и только тогда, когда для всех $t \geqslant \hat{t}$ семейство $S(x^t, y^t)$ определяет сильно неупреждающую функцию

$$S(x^t, y^t)\colon X_t \to Y_t.$$

Доказательство. Прежде всего докажем необходимость. Предположим, что $(x_t, y_t) \in S(x^t, y^t)$ и $(\hat{x}_t, \hat{y}_t) \in S(x^t, y^t)$. Пусть, кроме того, $x_t \mid T_{tt'} = \hat{x}_t \mid T_{tt'}$ для некоторого $t' > t$. Тогда

$$x^t\cdot x_t \mid T^{\hat{t}} = x^t\cdot \hat{x}_t \mid T^{\hat{t}}$$

и

$$y^t\cdot y_t \mid T^{\hat{t}} = y^t\cdot \hat{y}_t \mid T^{\hat{t}}\ \&\ x^t\cdot x_t \mid T_{\hat{t}t'} = x^t\cdot \hat{x}_t \mid T_{\hat{t}t'}.$$

Но так как поведение рассматриваемой системы предопределено, то $y^t\cdot y_t \mid \overline{T}_{\hat{t}t'} = y^t\cdot \hat{y}_t \mid \overline{T}_{\hat{t}t'}$, откуда следует, что $y_t \mid \overline{T}_{tt'} = \hat{y}_t \mid \overline{T}_{tt'}$. Поскольку значение $t' > t$ могло быть произвольным, мы получаем, если $x_t = \hat{x}_t$, равенство $y_t = \hat{y}_t$, а это значит, что $S(x^t, y^t)$ — функция и, следовательно, $S(x^t, y^t)$ — сильно неупреждающая функция. Обратно, предположим, что $(x, y) \in S$ и $(\hat{x}, \hat{y}) \in S$. Более того, пусть $(x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}) = (\hat{x}^{\hat{t}}, \hat{y}^{\hat{t}})$ и $x_{\hat{t}t} = \hat{x}_{\hat{t}t}$. Но тогда в силу того, что $S(x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}})$ — сильно неупреждающая функция, $\bar{y}_{\hat{t}t} = \bar{\hat{y}}_{\hat{t}t}$, ч. т. д.

Предопределенность системы связана с существованием семейства производящих функций состояния $\bar{\eta}$. Эту связь отражает следующее предложение.:

Предложение 4.5. Система является предопределенной с момента времени $\hat{t}$ тогда и только тогда, когда для любого $t \geqslant t$ для нее существует производящая функция состояний η^t, такая, что соответствующая реакция ρ_t сильно неупреждающая.

Доказательство. Мы снова начнем с доказательства необходимости. Предположим, что система S является предопределенной. Пусть $C_t = S^t$ для $t \geqslant \hat{t}$. Тогда требуемый результат сразу получается из предложения 4.4, причем роль производящей функции состояния η^t: $S^t \to C_t$ играет тождественная функция, а ρ_t: $C_t \times X_t \to Y_t$ имеет вид $\rho_t(c_t, x_t) = S(c_t)(x_t)$. Обратно, предположим, что для системы S и $t \geqslant \hat{t}$ имеется производящая функция состояния η^t: $S^t \to C_t$. Кроме того, пусть $(x^t, y^t) = (\hat{x}^t, \hat{y}^t) \in S^t$ и $x_{tt'} = \hat{x}_{tt''}$, где $t' \geqslant t \geqslant \hat{t}$, и пусть $c_{\hat{t}} = \eta^{\hat{t}}(x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}) = \eta^{\hat{t}}(\hat{x}^{\hat{t}}, \hat{y}^{\hat{t}})$. Но так как $x^t \cdot x_{tt'} = \hat{x}^t \cdot \hat{x}_{tt'}$ и, по предположению, $\rho_{\hat{t}}$ — сильно неупреждающая функция, то

$$\rho_{\hat{t}}(c_{\hat{t}}, x_{\hat{t}}) \mid \bar{T}_{\hat{t}t'} = \rho_{\hat{t}}(c_{\hat{t}}, \hat{x}_{\hat{t}}) \mid \bar{T}_{\hat{t}t'},$$

где

$$x^t \cdot x_{tt'} \mid T_{\hat{t}t'} = x_{\hat{t}} \mid T_{\hat{t}t'} \quad \text{и} \quad \hat{x}^t \cdot \hat{x}_{tt'} \mid T_{\hat{t}t'} = \hat{x}_{\hat{t}} \mid T_{\hat{t}t'},$$

а это значит, что рассматриваемая система предопределена, ч. т. д.

Глава III

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РЕАЛИЗАЦИИ

В теории реализации для класса динамических систем изучаются вопросы существования динамического представления для надлежащим образом определенной временной системы. При этом обычно временная система задается своим семейством реакций $\bar{\rho}$, и задача теории реализации состоит в том, чтобы выяснить, существуют ли такое семейство функций перехода состояний $\bar{\varphi}$ и временная система S, что пара $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ служит для нее динамической реализацией. Задачи такого типа и рассматриваются в настоящей главе.

Некоторые фундаментальные положения теории реализации можно доказывать для систем, динамика которых описывается исключительно в терминах семейства объектов состояний, а не в едином пространстве состояний. Поэтому мы начинаем строить теорию реализации именно в этих рамках. Такой подход полностью согласуется с выдвинутыми нами в гл. I принципами формализации, согласно которым каждую задачу следует решать для системы с минимальной структурой.

В § 1 приводятся условия согласованности и реализуемости семейства реакций, и эти условия оказываются нетривиальными только тогда, когда семейство реакций содержит лишь полные функции, т. е. тогда, когда частичная функция не может стать элементом семейства $\bar{\rho}$. В § 2 будет показано, что неупреждаемость системы необходима и достаточна для того, чтобы любую временную систему можно было представить двумя семействами функций — функций перехода состояний и выходных функций. Более того, если система является неупреждающей, то ее выходную функцию можно определить исключительно на объектах состояний. А так как выходная функция всегда статическая, то в подобном случае вся динамика системы описывается одним семейством функций перехода состояний. Это весьма важное и удобное свойство, а поэтому представление системы парой $(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$ мы будем называть каноническим. К тому же мы покажем, как состояния системы можно охарактеризовать некоторым отношением эквивалентности на парах «вход — начальное состояние».

В § 3 выясняется, что взаимосвязи между различными вспомогательными функциями (а также и различными представлениями системы) образуют коммутативную диаграмму. Это позволит глубже проникнуть в природу пространства состояний, понять причины его возникновения и оценить важность этого понятия. Весьма часто пространство состояний фигурирует в качестве первичного понятия в самих определениях динамической системы. Устанавливая тот факт, что пространство состояний можно построить по заданному множеству пар «вход — выход», мы лишний раз подтверждаем правоту нашей точки зрения относительно того, что пространство состояний — это вторичное, производное понятие. Мы покажем, как подходящее отношение эквивалентности (рис. 3.9) порождает соответствующее пространство состояний, а затем (базируясь на результатах предыдущих глав) наметим процедуру построения представления заданной (своими парами «вход—выход») временной системы в пространстве состояний (рис. 3.10).

1. РЕАЛИЗУЕМОСТЬ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Пара семейств $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ задает динамическое представление общей временной системы S,

$$S \subset A^T \times B^T, \tag{3.1}$$

если выполнены некоторые условия (приведенные в гл. II), так что семейство $\bar{\rho}$ согласовано с системой S, а $\bar{\varphi}$ есть семейство функций перехода состояний.

Временная система определяется отношением (3.1) как некоторое множество, и как таковое оно должно задаваться некоторой функцией. Чаще всего это делается с помощью семейства реакций $\bar{\rho} = \{\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t \& t \in T\}$ или непосредственно в терминах производящей функции выхода. В подобных случаях возникает ситуация, в которой задано семейство функций $\bar{\rho}$, а требуется выяснить, действительно ли существует такая динамическая система, для которой $\bar{\rho}$ является семейством реакций. Ответ на этот вопрос можно получить в два этапа:

(i) Если задано семейство $\bar{\rho}$, существует ли система S, для которой $\bar{\rho}$ согласуется с S?

(ii) Если задано семейство $\bar{\rho}$, являющееся семейством реакций для некоторой системы S, то существует ли такое семейство функций перехода $\bar{\varphi}$, что $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ образуют динамическое представление системы S?

Именно эти две проблемы и рассматриваются в этом параграфе.

Определение 1.1. Если задано некоторое семейство функций $\bar{\rho} = \{\rho_t: C_t \times X_t \to Y_t \& t \in T\}$, то мы будем говорить, что $\bar{\rho}$ допускает *динамическую реализацию* или, проще, *реализуемо* тогда и только тогда, когда найдутся такая временная система S и такое семейство функций $\bar{\varphi} = \{\varphi_{tt'}: C_t \times X_{tt'} \to C_{t'}\}$, что $\bar{\rho}$ согласуется с S, а пара $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ является динамическим представлением системы S.

Реализуемость семейства отображений $\bar{\rho} = \{\rho_t: C_t \times X_t \to Y_t\}$ зависит от свойств этих отображений и множеств, которые они связывают. Напомним, что, говоря о $\bar{\rho}$, мы предполагали следующее:

(i) множества C_t произвольны;

(ii) $X_t \subset A^{T_t}$, $Y_t \subset B^{T_t}$ и, более того,

$$(\forall x^t)\,(\forall x_t)\,[x^t \cdot x_t \in X];$$

(iii) все функции ρ_t полные, т. е. они определены на всем произведении $C_t \times X_t$.

(а) Согласованность семейства $\bar{\rho}$

Первая проблема теории реализации о согласованности заданного семейства отображений $\bar{\rho}$ с некоторой временной системой S уже нашла свое решение в теореме 2.1 гл. II. В этой теореме доказывается, что если семейство произвольных отображений $\bar{\rho}$ удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii), то для существования временной системы S, согласующейся с $\bar{\rho}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $t \in T$ выполнялись условия

(P1) $\quad (\forall c_0)\,(\forall x^t)\,(\forall x_t)\,(\exists c_t)\,[\rho_t\,(c_t,\ x_t) = \rho_0\,(c_0,\ x^t \cdot x_t) \mid T_t]$,

(P2) $\quad (\forall c_t)\,(\forall x_t)\,(\exists c_0)\,(\exists x^t)\,[\rho_t\,(c_t,\ x_t) = \rho_0\,(c_0,\ x^t \cdot x_t) \mid T_t]$.

Остановимся вкратце на содержательном смысле условий (P1) и (P2). Прежде всего заметим, что условие

$$\rho_t\,(c_t,\ x_t) = \rho_0\,(c_0,\ x^t \cdot x_t) \mid T_t$$

можно воспринимать как утверждение о том, что состояние c_t «должным образом» связывает предысторию системы, представленную парой (c_0, x^t), с ее будущей реакцией на x_t в том смысле, что выход системы начиная с состояния c_t, т. е. $y_t = \rho_t\,(c_t,\ x_t)$, в точности совпадает с «хвостом» выхода $y_0 = \rho_0\,(c_0,\ x^t \cdot x_t)$, т. е. $y_0 \mid T_t = \rho_0\,(c_0,\ x^t \cdot x_t) \mid T_t = y_t$. Но тогда условие (P1), которое можно переписать в виде

$$(\forall (c_0,\ x^t))\,(\forall x_t)\,(\exists c_t)\,[\rho_t\,(c_t,\ x_t) = \rho_0\,(c_0,\ x^t \cdot x_t) \mid T_t],$$

означает, что для любой предыстории системы (c_0, x^t) и для любого ее будущего входа x_t всегда найдется состояние c_t в момент времени t, которое должным образом свяжет прошлое и будущее. А условие (P2), которое тоже можно переписать в виде

$$(\forall(c_t, x_t))\,(\exists(c_0, x^t))\,[\rho_t(c_t, x_t) = \rho_0(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t],$$

означает тогда, что для любых $(c_{t'}, x_t)$, т. е. для любого поведения системы в будущем, найдется такая ее предыстория, т. е. такое ее начальное состояние c_0 и начальный отрезок входного воздействия x^t, что эта предыстория приведет систему в состояние c_t, а последнее должным образом свяжет эту предысторию (c_0, x^t) с будущим входным воздействием x_t.

(b) Реализуемость семейства $\bar{\rho}$

Теорема 1.1 Пусть ρ — некоторое семейство отображений, удовлетворяющее условиям (i) — (iii). Семейство $\bar{\rho}$ реализуемо (т. е. для него найдется такое семейство функций перехода состояний $\bar{\varphi}$, что пара $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ будет динамическим представлением некоторой временной системы S) в том и только в том случае, когда для любых $t, t' \in T$, $t' \geqslant t$, оно удовлетворяет следующим условиям:

(P3) $(\forall c_t)\,(\forall x_{tt'})\,(\exists c_{t'})\,(\forall x_{t'})\,[\rho_{t'}(c_{t'}, x_{t'}) = \rho_t(c_t, x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'}]$,

(P4) $(\forall c_t)\,(\forall x_t)\,(\exists c_0)\,(\exists x^t)\,[\rho_t(c_t, x_t) = \rho_0(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t]$.

Доказательство. Начнем с доказательства необходимости. Предположим, что $\bar{\rho}$ реализуемо, а c_t и $x_{tt'}$ произвольны. В силу согласованности семейства $\bar{\varphi}$ для любых $x_{t'}$

$$\rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t'}) = \rho_t(c_t, x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'},$$

а поскольку существует такое $c_{t'}$, что $c_{t'} = \varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'})$, мы сразу убеждаемся в справедливости условия (P3). Заметим теперь, что (P4) совпадает с условием (P2) из теоремы 2.1 гл. II, а так как семейство $\bar{\rho}$ согласовано с временной системой S, т. е. $S_t^\rho = S_0^\rho \mid T_t$, то отсюда сразу вытекает справедливость свойства (P4).

Перейдем поэтому к доказательству достаточности. Предположим, что условия (P3) и (P4) выполнены. Но так как условия (P3) и (P4) влекут за собой выполнение условий (P1) и (P2) теоремы 2.1 гл. II, то согласованность с семейством $\bar{\rho}$ выполняется автоматически. Пусть теперь для каждого $t \in T$ отношение $E_t \subset C_t \times C_t$ определяется следующим образом:

$$(c_t, c_t') \in E_t \Leftrightarrow (\forall x_t)\,(\rho_t(c_t, x_t) = \rho_t(c_t', x_t)).$$

Ясно, что E_t для каждого t есть отношение эквивалентности. Определим теперь $\hat{\rho}_t$: $(C_t/E_t) \times X_t \to Y_t$ с помощью условия

$$\hat{\rho}_t([c_t], x_t) = \rho_t(c_t, x_t).$$

Это определение, очевидно, корректно. Но теперь мы можем утверждать, что существует семейство отображений $\{f_{tt'}\}$,

$$f_{tt'} : (C_t/E_t) \times X_{tt'} \to C_{t'}/E_{t'},$$

такое, что

$$\hat{\rho}_{t'} (f_{tt'} ([c_t], x_{tt'}), x_{t'}) = \hat{\rho}_t ([c_t], x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'} \tag{3.2}$$

при любых $[c_t]$, $x_{tt'}$ и $x_{t'}$. Действительно, пусть отображение

$$f_{tt'} \subset (C_t/E_t \times X_{tt'}) \times (C_{t'}/E_{t'})$$

таково, что

$$(([c_t], x_{tt'}), [c_{t'}]) \in f_{tt'} \Longleftrightarrow (\forall x_{t'}) (\hat{\rho}_{t'} ([c_{t'}], x_{t'}) =$$
$$= \hat{\rho}_t ([c_t], x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'}).$$

Но тогда условие (Р3) гарантирует, что $f_{tt'} \neq \varnothing$. Предположим теперь, что $(([c_t], x_{tt'}), [c_{t'}]) \in f_{tt'}$ и $(([c_t], x_{tt'}), [\hat{c}_{t'}]) \in f_{tt'}$. Но тогда для любого $x_{t'}$

$$\hat{\rho}_{t'} ([c_{t'}], x_{t'}) = \hat{\rho}_{t'} ([\hat{c}_{t'}], x_{t'}),$$

а это означает, что $[c_{t'}] = [\hat{c}_{t'}]$. Более того, из условия (Р3) вытекает, что $\mathscr{D}(f_{tt'}) = (C_t/E_t \times X_{tt'})$. Следовательно, $f_{tt'}$ есть отображение

$$(C_t/E_t \times X_{tt'}) \to C_{t'}/E_{t'},$$

такое, что для любых $x_{t'}$

$$\hat{\rho}_{t'} (f_{tt'} ([c_t], x_{tt'}), x_{t'}) = \hat{\rho}_t ([c_t], x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'}.$$

Но тогда справедливо равенство

$$f_{t't''} (f_{tt'} ([c_t], x_{tt'}), x_{t't''}) = f_{tt''} ([c_t], x_{tt'} \cdot x_{t't''}), \tag{3.3}$$

а поскольку $\{f_{tt'}\}$ образует семейство функций перехода состояний, согласованное с приведенным семейством реакций $\{\hat{\rho}_t\}$, теорема 2.2 гл. II должна быть применима и к семейству $\{f_{tt'}\}$. Наконец, пусть функция μ_t: $C_t/E_t \to C_t$ такова, что $\mu_t ([c_t]) \in [c_t]$. В качестве μ_t можно взять любую функцию, удовлетворяющую этому условию. Потребуем тогда, чтобы

$$\varphi_{tt'}: C_t \times X_{tt'} \to C_{t'}$$

удовлетворяла условию

$$\varphi_{tt'} (c_t, x_{tt'}) = \mu_{t'} (f_{tt'} ([c_t], x_{tt'})). \tag{3.4}$$

Но теперь несложно показать, что

$$\rho_{t'} (\varphi_{tt'} (c_t, x_{tt'}), x_{t'}) = \rho_t (c_t, x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'}$$

и

$$\varphi_{t't''} (\varphi_{tt'} (c_t, x_{tt'}), x_{t't''}) = \varphi_{tt''} (c_t, x_{tt'} \cdot x_{t't''}),$$

поскольку

$$\begin{aligned}\rho_{t''}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt''}), x_{t'}) &= \rho_{t'}(\mu_{t'}(f_{tt'}([c_t], x_{tt'})), x_{t'}) \quad \text{(в силу (3.4))}\\ &= \hat{\rho}_{t'}(f_{tt'}([c_t], x_{tt'}), x_{t'}) \quad \text{ибо } \mu_t([c_t]) \in [c_t])\\ &= \hat{\rho}_t([c_t], x_{tt'}\cdot x_{t'}) \mid T_{t'} = \quad \text{(в силу (3.2))}\\ &= \rho_t(c_t, x_{tt'}\cdot x_{t'}) \mid T_{t'},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{t't''}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t't''}) &= \varphi_{t't''}(\mu_{t'}(f_{tt'}([c_t], x_{tt'})), x_{t't''}) =\\ &= \mu_{t''}(f_{t't''}(f_{tt'}([c_t], x_{tt'}), x_{t't''})) =\\ &= \mu_{t''}(f_{tt''}([c_t], x_{tt'}\cdot x_{t't''})) \quad \text{(в силу 3.3))}\\ &= \varphi_{tt''}(c_t, x_{tt'}\cdot x_{t't''}), \text{ ч. т. д.}\end{aligned}$$

Рассмотрим вкратце содержательный смысл условия (P3). Это условие может быть представлено в следующем эквивалентном виде: для любых $t \in T$

$$\text{(P}'3\text{)} \quad (\forall(c_t, x_{tt'}))\,(\exists c_{t'})\,(\forall x_{t'})\,[\rho_{t'}(c_{t'}, x_{t'}) = \rho_t(c_t, x_{tt'}\cdot x_{t'}) \mid T_{t'}].$$

Условие (P′3) можно теперь интерпретировать следующим образом. Для любой пары «состояние — вход» $(c_t, x_{tt'})$ найдется такое состояние $c_{t'}$ в момент времени t', что будущая эволюция системы во времени под воздействием произвольного отрезка входного воздействия окажется согласованной с заданной парой «состояние — вход».

Условие (P′3) требует, таким образом, чтобы объект состояний $C_{t'}$ в любой момент времени t' надлежащим образом объединял предшествующий и последующий отрезки $x_{tt'}$ и $x_{t'}$, обеспечивая согласованность с ρ_t. В частности, для любой начальной эволюции системы, представленной парой $(c_t, x_{tt'})$, всегда найдется состояние $c_{t'}$, обеспечивающее правильное продолжение этой эволюции.

(c) Динамическое представление временной системы

В § 2 гл. II уже было показано, что если на ρ не налагать никаких ограничений, то для любой временной системы найдется соответствующее семейство реакций $\bar{\rho} = \{\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t\}$ (предложение 2.1 гл. II). Аналогичный факт имеет место и для динамического представления любой временной системы, т. е. в том случае, когда для системы требуется лишь существование некоторого семейства функций перехода состояний $\bar{\varphi}$, согласующегося с $\bar{\rho}$ и S.

Теорема 1.2. Для каждой временной системы S существует динамическое представление, т. е. всегда найдутся два семейства отображений $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$, согласующихся с S.

Доказательство. Пусть $\rho_0: C_0 \times X \to Y$ есть начальная реакция системы S. Положим $C_t = C_0 \times X^t$ и определим ρ_t: $C_t \times X_t \to Y_t$ так, что если $c_t = (c_0, x^t)$, то

$$\rho_t(c_t, x_t) = \rho_0(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t.$$

Но тогда $\bar{\rho} = \{\rho_t\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1, и, следовательно, $\bar{\rho}$ реализуемо, ч. т. д.

Посмотрим теперь, как изменится этот результат, если дополнительно наложить на динамическое представление системы условие причинности. Теорема 4.2 гл. II показывает, что для временной системы существует неупреждающее семейство реакций тогда и только тогда, когда неупреждающей является ее начальная реакция. Этот результат легко распространить на динамические системы.

Теорема 1.3. Пусть $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ — динамическая система, для которой при любом $t \in T$ отображение φ_{0t} является сюръективным. Семейство реакций $\bar{\rho}$ является неупреждающим в том и только в том случае, когда начальная реакция ρ_0 оказывается неупреждающей.

Доказательство. Начнем с доказательства достаточности. Предположим для этого, что реакция ρ_0 неупреждающая. Выберем тогда произвольные x_t, x_t' и c_t. Поскольку отображение φ_{0t} сюръективно, для некоторого $(\hat{c}_0, \hat{x}^t)$

$$\rho_t(c_t, x_t) = \rho_t(\varphi_{0t}(\hat{c}_0, \hat{x}^t), x_t) = \rho_0(\hat{c}_0, \hat{x}^t \cdot x_t) \mid T_t$$

и, аналогично,

$$\rho_t(c_t, x_t') = \rho_0(\hat{c}_0, \hat{x}^t \cdot x_t') \mid T_t.$$

Но так как

$$(\hat{x}^t \cdot x_t) \mid \bar{T}^{t'} = (\hat{x}^t \cdot x_t') \mid \bar{T}^{t'},$$

если $x_t \mid \bar{T}_{tt'} = x_t' \mid \bar{T}_{tt'}$, то мы имеем

$$\rho_0(\hat{c}_0, \hat{x}^t \cdot x_t) \mid \bar{T}^{t'} = \rho_0(\hat{c}_0, \hat{x}^t \cdot x_t') \mid \bar{T}^{t'}.$$

Следовательно, если $x_t \mid \bar{T}_{tt'} = x_t' \mid \bar{T}_{tt'}$, то

$$\rho_t(c_t, x_t) \mid \bar{T}_{tt'} = \rho_0(\hat{c}_0, \hat{x}^t \cdot x_t) \mid \bar{T}_{tt'} =$$
$$= \rho_0(\hat{c}_0, \hat{x}^t \cdot x_t') \mid \bar{T}_{tt'} = \rho_t(c_t, x_t') \mid \bar{T}_{tt'}.$$

Необходимость же условия теоремы вытекает непосредственно из определения, ч. т. д.

Доказанная теорема сразу приводит нас к следующему утверждению относительно динамических представлений систем:

Теорема 1.4. Для временной системы существует неупреждающее динамическое представление тогда и только тогда, когда она неупреждающая.

Доказательство. Если для временной системы найдется неупреждающее динамическое представление, то она неупреждающая по определению. Обратно, если система неупреждающая, то для нее существует неупреждающая начальная реакция, с помощью которой (как это следует из доказательства теоремы 1.2) можно построить динамическое представление. Конечно, при этом некоторые функции перехода состояний φ_{0t} могут оказаться не сюръективными, но в этом случае, как показывает доказательство теоремы 1.1, мы всегда можем сузить объект состояний для t до области значений функции φ_{0t}, так что все φ_{0t} окажутся сюръективными. Но тогда, согласно теореме 1.3, получившееся динамическое представление является неупреждающим, ч. т. д.

Следующий результат, имеющий определенное принципиальное значение, вытекает из теоремы 4.1 гл. II.

Теорема 1.5. Если допустить, что реакцией системы, а значит, и ее функцией перехода состояний могут быть частичные функции, то для любой временной системы существует неупреждающее динамическое представление.

Доказательство получается непосредственно из теоремы 4.1 гл. II, если применить ее к теореме 1.4. Метод построения семейства $\bar{\varphi}$ при этом должен быть точно таким же, как в доказательстве теоремы 1.2, ч. т. д.

Неупреждаемость временной системы определяется относительно ее начальной реакции. Однако не вызывает сомнений, что, даже если система является неупреждающей, ее конкретная начальная реакция, которая, вообще говоря, определяется достаточно произвольно, может не удовлетворять условиям неупреждаемости. Общие условия, гарантирующие неупреждаемость временной системы, пока еще неизвестны. В то же время предопределенная система является по своей сути неупреждающей, и, более того, ее «естественная» начальная реакция также является неупреждающей. Это счастливое обстоятельство играет в теории систем в целом очень важную роль, поскольку предопределенные системы встречаются весьма и весьма часто. Предопределенные системы рассматриваются с этой точки зрения в гл. V.

2. КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ (ДЕКОМПОЗИЦИЯ) ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СОСТОЯНИЙ

(а) Каноническое представление динамической системы

Пусть $\bar{\rho}$ — произвольное семейство реакций некоторой системы S, а $\bar{C} = \{C_t: t \in T\}$ — соответствующее семейство использованных в нем объектов состояний. Поскольку C_t произвольно, в нем может быть больше состояний, чем требуется для согласованности реакций с системой S. Очевидный способ устранения некоторых из таких избыточных состояний состоит в том, чтобы считать два состояния c_t и $\hat{c}_t$ одинаковыми всякий раз, когда одинаковым оказывается будущее поведение системы с начальными состояниями c_t и $\hat{c}_t$. Точнее говоря, определим отношение $E_t \subset C_t \times C_t$ с помощью условия

$$(c_t, \hat{c}_t) \in E_t \Leftrightarrow (\forall x_t) [\rho_t (c_t, x_t) = \rho_t (\hat{c}_t, x_t)].$$

Очевидно, что E_t есть отношение эквивалентности. Поэтому начиная с произвольного C_t мы можем перейти к приведенному объекту состояний $\hat{C}_t = C_t/E_t$, элементами которого будут служить классы эквивалентности. *Приведенным* мы будем называть и соответствующее семейство реакций $\bar{\hat{\rho}} = \{\hat{\rho}_t \colon \hat{C}_t \times X_t \to Y_t\}$, такое, что

$$\hat{\rho} ([c_t], x_t) = y_t \Leftrightarrow \rho_t (c_t, x_t) = y_t.$$

В последующем нам пригодится следующий простой факт:

Предложение 2.1. Пусть $\bar{\rho}$ — произвольное семейство реакций, а $\bar{\hat{\rho}}$ — соответствующее приведенное семейство. Семейство $\bar{\hat{\rho}}$ согласуется с системой S тогда и только тогда, когда с ней согласуется $\bar{\rho}$.

Доказательство. Поскольку справедливо соотношение $\rho_t(c_t, x_t) = \rho_0 (c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t \Leftrightarrow \hat{\rho}_t ([c_t], x_t) = \hat{\rho}_0 ([c_0], x^t \cdot x_t) \mid T_t$, из теоремы 2.1 гл. II мы сразу получаем требуемое утверждение, ч. т. д.

Определение 2.1. Пусть S есть некоторая временная система с заданным семейством производящих функций выхода $\bar{\mu} = \{\mu_{tt'} \colon t, t' \in T\}$. Пару $(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$, где $\bar{\varphi}$ — семейство функций перехода состояний, а $\bar{\lambda}$ — семейство выходных функций, мы будем называть *каноническим* (*динамическим*) *представлением* системы S тогда и только тогда, когда для любых $t, t' \in T$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
C_t \times \bar{X}_{tt'} \arrow[rr, "\mu_{tt'}"] \arrow[dr, "(\varphi_{tt'}, R_{t'})"'] & & Y(t') \\
& C_{t'} \times X(t') \arrow[ur, "\lambda_{t'}"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, если $(\varphi_{tt'}, R_{t'}) (c_t, x_{tt'}) = (\varphi_{tt'} (c_t, x_{tt'}), \bar{x}_{tt'} (t'))$.

Теперь мы можем доказать следующую теорему:

Теорема 2.1. Для существования канонического представления произвольной временной системы необходимо и достаточно, чтобы она была неупреждающей.

Доказательство. Докажем сначала достаточность. Если временная система неупреждающая, то, согласно теореме 1.4, у нее есть неупреждающее динамическое представление $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$. Но тогда можно корректно определить выходную функцию λ_t: $C_t \times X(t) \to Y(t)$ системы, потребовав, чтобы $\lambda_t(c_t, x_t(t)) = \rho_t(c_t, x_t)(t)$, и производящую функцию выхода $\mu_{tt'}$: $C_t \times \bar{X}_{tt'} \to Y(t')$ с помощью условия

$$\mu_{tt'}(c_t, \bar{x}_{tt'}) = \rho_t(c_t, x_{tt'} \cdot \hat{x}_{t'})(t'),$$

где $\hat{x}_{t'}$ произвольно и лишь требуется, чтобы $\hat{x}_{t'}(t') = \bar{x}_{tt'}(t')$. Более того, поскольку

$$\begin{aligned} \rho_t(c_t, x_{tt'} \cdot \hat{x}_{t'})(t') &= \rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), \hat{x}_{t'})(t') = \\ &= \lambda_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), \hat{x}_{t'}(t')) = \\ &= \mu_{tt}(c_t, \bar{x}_{tt'}), \end{aligned}$$

приведенная выше диаграмма оказывается коммутативной. Следовательно, система имеет каноническое представление. Обратно, предположим, что для системы существует каноническое представление. Предположим, что ρ_t: $C_t \times X_t \to Y_t$ таково, что при $\tau \geqslant t$ и $x_{t\tau} = x_t \mid T^\tau$

$$\rho_t(c_t, x_t) = y_t \Leftrightarrow y_t(\tau) = \lambda_\tau(\varphi_{t\tau}(c_t, x_{t\tau}), x_t(\tau)).$$

Покажем теперь, что

$$x \mid \bar{T}^t = x' \mid \bar{T}^t \Rightarrow \rho_0(c_0, x) \mid \bar{T}^t = \rho_0(c_0, x') \mid \bar{T}^t$$

при любом $c_0 \in C_0$. Выберем произвольное $\tau \in \bar{T}^t$. Тогда

$$\rho_0(c_0, x)(\tau) = \lambda_\tau(\varphi_{0\tau}(c_0, x^\tau), x(\tau))$$

и

$$\rho_0(c_0, x')(\tau) = \lambda_\tau(\varphi_{0\tau}(c_0, x'^\tau), x'(\tau)),$$

а так как $x^\tau = x'^\tau$ и $x(\tau) = x'(\tau)$ при $\tau \in \bar{T}^t$, то при $\tau \in \bar{T}^t$ мы получаем

$$\rho_0(c_0, x)(\tau) = \rho_0(c_0, x')(\tau).$$

Следовательно, реакция ρ_0 неупреждающая, ч. т. д.

Существование канонического представления по сути дела означает возможность провести декомпозицию системы на подсистемы так, как это показано на рис. 2.1. Первая из этих подсистем, обозначенная на рис. 2.1 через $\varphi_{tt'}$, полностью отражает динамику поведения системы, в то время как две остальные подсистемы, $\lambda_{t'}$ и $R_{t'}$, являются статическими и определяют лишь, как текущее состояние системы и текущее значение ее входного воздействия преобразуются в значение выходной величины. Первая из этих подсистем определяется исключительно в терминах $\bar{\varphi}$, и потому динамика системы вполне отражается этим единственным

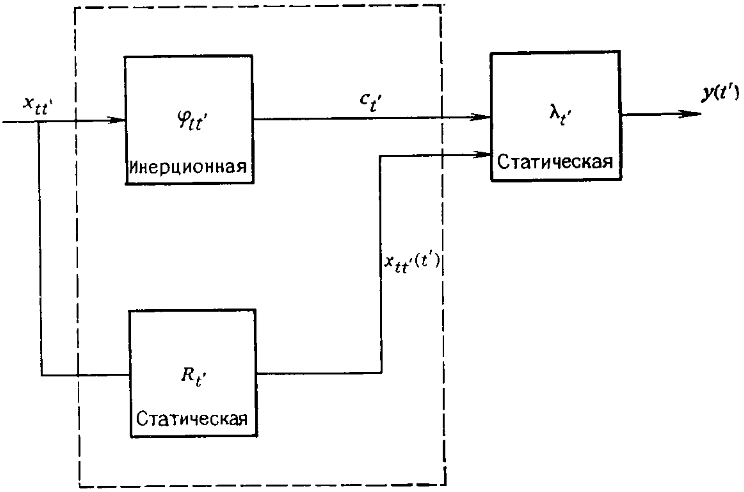


Рис. 2.1.

семейством функций. Если нас интересует одна лишь динамика системы, мы можем все свое внимание сосредоточить лишь на семействе $\bar{\varphi}$.

Несколько более сильный результат получается в случае, когда система удовлетворяет условиям сильной неупреждаемости:

Теорема 2.2. Система является сильно неупреждающей тогда и только тогда, когда существуют такие семейство функций перехода состояний $\bar{\varphi}$, семейство выходных функций $\bar{\lambda} = \{\lambda_t \colon C_t \to Y(t)\}$ и семейство производящих функций выхода $\bar{\mu} = \{\mu_{tt'} \colon C_t \times X_{tt'} \to Y(t')\}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} C_t \times X_{tt'} \arrow[rr, "\mu_{tt'}"] \arrow[dr, "\varphi_{tt'}"'] & & Y(t') \\ & C_{t'} \arrow[ur, "\lambda_{t'}"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 2.1.

Этому результату соответствует каноническая декомпозиция системы, представленная на рис. 2.2. Здесь значения выходной

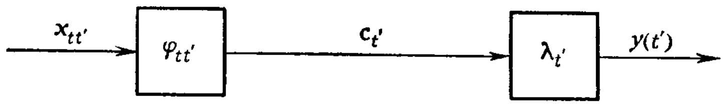


Рис. 2.2.

величины зависят исключительно от текущего состояния и не зависят в явном виде от входного воздействия.

(b) Характеризация состояний как классов эквивалентности

Одно из назначений понятия состояния состоит в том, чтобы сфокусировать в себе всю предысторию поведения системы. Если две различные предыстории системы приводят ее к одному и тому же состоянию, то с позиций настоящего и будущего поведения системы они, очевидно, эквивалентны. Поэтому состояния системы в любой момент времени можно отождествлять с классами смежности, порожденными отношением эквивалентности на предысториях системы. Отношение эквивалентности, характеризующее состояния, зависит от используемых объектов состояний, и, обратно, если задано подходящее отношение эквивалентности, то можно определить или сконструировать соответствующее семейство объектов состояний и даже само пространство состояний.

Необходимо отметить, что здесь мы говорим об отношениях эквивалентности, определяемых исключительно *в терминах предыстории системы*. Их следует отличать от отношений эквивалентности, определяемых для будущего поведения системы и используемых для устранения избыточных состояний.

(α) Пусть ρ_0 — некоторая начальная реакция временной системы S, т. е. $\rho_0\colon C_0 \times X \to Y$. Текущее и будущие значения выходной величины y_t системы однозначно определяются здесь парой «начальное состояние — начальный отрезок входного воздействия» (c_0, x^t) и задаются сужением $y_t = \rho_0(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t$.

Это соображение подсказывает нам использовать пару «начальное состояние — начальный отрезок входного воздействия» (c_0, x^t) в качестве состояния системы в момент времени t, при этом допустимость подобного выбора подтверждается теоремой 1.1. Иными словами, само произведение $C_0 \times X^t$ можно использовать в качестве объекта состояний в момент времени t. Однако при этом не исключена возможность, что двум различным элементам (c_0, x^t) и $(\hat{c}_0, \hat{x}^t)$ будут отвечать одинаковые выходные величины системы в будущем. Но тогда в том, что касается поведения системы, нам не следует различать состояния (c_0, x^t) и $(\hat{c}_0, \hat{x}^t)$. Это соображение приводит нас к определению на $C_0 \times X^t$ отношения эквивалентности E^t, известного в литературе под названием *отношения эквивалентности Нероде* [2].

Предложение 2.2. Пусть ρ_0 — начальная реакция временной системы S, и пусть, для каждого $t \in T$, $E^t \subset (C_0 \times X^t) \times (C_0 \times X^t)$ есть отношение эквивалентности, такое, что

$$((c_0, x^t), (\hat{c}_0, \hat{x}^t)) \in E^t \Leftrightarrow (\forall x_t) [\rho_0 (c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t = \\ = \rho_0 (\hat{c}_0, \hat{x}^t \cdot x_t) \mid T_t].$$

Тогда найдется такое семейство функций $\bar{\rho} = \{\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t\}$, что $C_t = (C_0 \times X^t)/E^t$, причем $\bar{\rho}$ согласовано с S и реализуемо.

Доказательство. То, что E^t — отношение эквивалентности, очевидно. Пусть тогда $C_t = (C_0 \times X^t)/E^t = \{[c_0, x^t]\}$, а $\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t$ удовлетворяет условию

$$\rho_t ([c_0, x^t], x_t) = \rho_0 (c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t.$$

Но так как включение $((c_0, x^t), (\hat{c}_0, \hat{x}^t)) \in E^t$ влечет за собой равенство

$$\rho_0 (c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t = \rho_0 (\hat{c}_0, \hat{x}^t \cdot x_t) \mid T_t$$

при любых x_t, функции ρ_t определены корректно. Заметим теперь, что условия согласованности (P1) и (P2) теоремы 2.1 гл. II выполняются очевидным образом и, значит, $\bar{\rho}$ согласовано с S. Аналогичным образом доказывается, что выполнены и условия теоремы 1.1, ч. т. д.

Предложение 2.3. Пусть $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ — некоторая динамическая система, а $E_t \subset C_t \times C_t$ — такое отношение, что

$$(c_t, \hat{c}_t) \in E_t \Leftrightarrow (\forall x_t) [\rho_t (c_t, x_t) = \rho_t (\hat{c}_t, x_t)].$$

Тогда найдется такое взаимно однозначное отображение

$$F\colon (C_0 \times X^t)/E^t \to C_t/E_t,$$

что

$$F ([c_0, x^t]) = [\varphi_{0t} (c_0, x^t)].$$

Доказательство. Поскольку

$$[c_0, x^t] = [c_0', x'^t] \Longleftrightarrow (c_0, x^t)\, E^t\, (c_0', x'^t) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\forall x_t)\,(\rho_0(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t = \rho_0(c_0', x'^t \cdot x_t) \mid T_t) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\forall x_t)\,(\rho_t(\varphi_{0t}(c_0, x^t), x_t) = \rho_t(\varphi_{0t}(c_0', x'^t), x_t)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \varphi_{0t}(c_0, x^t)\, E_t \varphi_{0t}(c_0', x'^t) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow [\varphi_{0t}(c_0, x^t)] = [\varphi_{0t}(c_0', x_0'^t)],$$

функция F определена корректно и является взаимо однозначным отображением, ч. т. д.

Два последних предложения подсказывают процедуру, с помощью которой можно сконструировать приведенные (т. е. с исключенными избыточными состояниями) объекты состояний системы по заданной ее начальной реакции ρ_0. Для этого нужно прежде всего ввести отношение эквивалентности $\{E^t\colon t \in T\}$ и определить объекты состояний как $C_t = (C_0 \times X^t)/E^t$. Тогда реакции системы $\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t$ удовлетворяют условиям

$$\rho_t(c_t, x_t) = \rho_0(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t,$$

где $c_t = [c_0, x^t]$. Нетрудно видеть, что все ρ_t вполне определяются этим условием, а в силу теоремы 1.1 семейство $\bar\rho = \{\rho_t\}$ реализуемо. Более того, предложение 2.3 означает, что $\bar C = \{C_t\colon t \in T\}$ представляет собой множество наименьших объектов состояний в том смысле, что, исходя из какого-то другого множества объектов состояний $\tilde C_t$ и начальной реакции ρ_0, мы после приведения этих объектов с помощью подходящего отношения эквивалентности E_t (т. е. после исключения избыточных состояний) можем установить между $\tilde C_t/E_t$ и $\bar C_t$ взаимно однозначное соответствие.

(β) Определенное выше отношение эквивалентности E^t вводится в том случае, если задана начальная реакция системы ρ_0, т. е. через посредство некоторого заданного объекта начальных состояний C_0. Если же система является предопределенной, то ее приведенные состояния можно охарактеризовать с помощью отношения эквивалентности, определенного исключительно в терминах входных и выходных объектов, т. е. *без введения в рассмотрение начальных состояний.* В этом случае состояния определяются лишь через первичные понятия X и Y, которые используются и для определения самой системы S. Но на этом вопросе мы остановимся в гл. V.

3. КОНСТРУКТИВНЫЕ ОСНОВЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

(а) Конструирование пространства состояний и канонического представления

Пространство состояний можно ввести в описание системы непосредственно, предположив, что его роль будет играть некоторое абстрактное множество, удовлетворяющее необходимым требованиям, или же построить из ранее введенных объектов состояний. Общая процедура такого построения разбивается на следующие этапы:

(1) Все объекты состояний агрегируются, например, с помощью операции объединения $\tilde{C} = \bigcup \{C_t\colon t \in T\}$ или с помощью декартова умножения $\tilde{C} = \times_{t \in T} C_t$.

(2) В соответствии с перечисленными ниже условиями вводится отношение эквивалентности $E_c \subset \tilde{C} \times \tilde{C}$, которое должно удовлетворять некоторым требованиям.

(3) В качестве пространства состояний используется либо само фактормножество $\tilde{C}/E_c$, либо любое другое изоморфное ему множество C:

$$C \cong \tilde{C}/E_c.$$

Требования, упомянутые в п. (2), имеют следующий вид:

$$\text{(i)}\qquad (\forall [c])\,(\forall x_{tt'})\,(\exists [c'])\,(\forall c_t)\,(c_t \in [c] \Rightarrow \varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}) \in [c']),$$

$$\text{(ii)}\qquad (\forall [c])\,(\forall c_t)\,(\forall c'_t)\,(\forall x_t)\,(c_t \in [c]\ \&\ c'_t \in [c] \Rightarrow \rho_t(c_t, x_t) = \rho_t(c'_t, x_t))$$

или

$$\text{(ii)}'\qquad (\forall [c])\,(\forall c_t)\,(\forall c_{t'})\,(\forall a)\,(c_t \in [c]\ \&\ c_{t'} \in [c] \Rightarrow \lambda_t(c_t, a) = \lambda_t(c_{t'}, a)).$$

Условие (i) просто означает, что эволюция системы во времени при представлении в пространстве состояний должна выглядеть столь же «бесперебойной», как при представлении с помощью объектов состояний. Условие (ii) используется, когда система определяется своим динамическим представлением [т. е. парой $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$], в то время как условие (ii)′ применяется для канонического представления системы [т. е. при заданной паре $(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$]. Если на объектах состояний задана какая-либо дополнительная алгебраическая структура (например, они являются линейными алгебрами, как это необходимо в случае линейных систем), то отношение эквивалентности, порождающее пространство состояний, должно сохранять эти структуры и на фактормножестве.

Результаты, полученные выше с использованием объектов состояний, имеют очевидные аналоги и для случая представления систем в пространстве состояний. Особенно интересны в этом случае канонические представления.

Прежде чем говорить о том, как будет выглядеть каноническое представление в пространстве состояний, введем следующую систему обозначений.

Пусть $T_{\hat{t}\hat{t}'} \subset T_{tt'}$ и $X_{tt'}$ есть множество входных воздействий. Тогда можно определить отображение

$$R_{T_{\hat{t}\hat{t}'}}: X_{tt'} \to X_{\hat{t}\hat{t}'},$$

потребовав, чтобы

$$(\forall x_{tt'})\,[R_{T_{\hat{t}\hat{t}'}}(x_{tt'}) = x_{tt'} \mid T_{\hat{t}\hat{t}'}].$$

Отображение $R_{\hat{t}\hat{t}'}$ мы будем называть оператором сужения. Для упрощения обозначений договоримся, что индекс этого оператора указывает на его кообласть, в то время как его область определения (т. е. множество моментов времени, на которое мы сужаем исходные функции) будет ясна из контекста. Этот же символ R мы будем использовать и для обозначения аналогичных операторов, действующих над другими объектами, например над Y, $Y_{tt'}$, и т. п. Это значит, например, что отображение

$$R_{T_t}: Y \to Y_t$$

представляет собой еще один оператор сужения, т. е. что

$$(\forall y)\,[R_{T_t}(y) = y \mid T_t].$$

Условимся также использовать обозначение $R_{\{t\}}: X \to X(t)$ для оператора

$$(\forall x)\,[R_{\{t\}}(x) = x(t)].$$

Пусть теперь $\varphi_{tt'}$ и $\mu_{tt'}$ — функция перехода состояний и производящая функция выхода соответственно, определенные на пространстве состояний, а $\hat{\varphi}_{tt'}$ и $\hat{\mu}_{tt'}$ — аналогичные функции, определенные на семействе объектов состояний. (Как определять $\varphi_{tt'}$ и $\mu_{tt'}$ через $\hat{\varphi}_{tt'}$ и $\hat{\mu}_{tt'}$, будет показано далее для каждого конкретного типа отношений эквивалентности.) Каноническое представление теперь определяется в терминах емейства функций перехода состояний $\bar{\varphi} = \{\varphi_{tt'}: C \times X_{tt'} \to C\}$ и отображений $\bar{\lambda} = \{\lambda_t: C \times A \to B\}$. Диаграммы соответствующих декомпозиций приведены на рис. 3.1 и 3.2. Пара отображений $(\varphi_{tt'}, R^*_{\{t'\}})$, фигурирующая на рис. 3.1, действует на соответствующие объекты следующим образом:

$$(\varphi_{tt'}, R^*_{\{t'\}})(c, \bar{x}_{tt'}) = (\varphi_{tt'}(c, x_{tt'}), \bar{x}_{tt'}(t'))$$

$$\begin{tikzcd}
C \times \bar{X}_{tt'} \arrow[rr, "\mu_{tt'}"] \arrow[dr, "(\varphi_{tt'}, R^*_{\{t'\}})"'] & & B \\
& C \times A \arrow[ur, "\lambda_{t'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 3.1.

$$\begin{tikzcd}
C \times X_{tt'} \arrow[rr, "\mu_{tt'}"] \arrow[dr, "\varphi_{tt'}"'] & & B \\
& C \arrow[ur, "\lambda_{t'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 3.2.

Теперь мы в состоянии полностью оценить важнейшую роль канонических представлений. В этом случае динамика системы описывается семейством преобразований множества C и множества соответствующих сужений входных воздействий $X_{tt'}$ в само C. И в области определения, и в области значений отображений $\varphi_{tt'}$ фигурирует одно и то же множество C независимо от значений t, $t' \in T$; единственная разница между функциями перехода состояний $\varphi_{tt'}$ и $\varphi_{\hat{t}\hat{t}'}$ для разных временных отрезков состоит в соответствующих сужениях входных воздействий.

Теперь мы можем установить связь и с классическим понятием динамической системы, используемым, например, в топологической динамике.

Любому входному воздействию $x \in X$ общей динамической системы соответствует некоторое множество преобразований

$$\bar{\varphi}^x = \{\varphi^x_{tt'}\colon C \to C\},$$

таких, что

$$\varphi^x_{tt'} = \varphi_{tt'} \mid \{x \mid T_{tt'}\} \times C.$$

Если пространство состояний удовлетворяет всем необходимым дополнительным требованиям, скажем оно является подходящим топологическим пространством, то семейство $\bar{\varphi}^x$ называют динамической системой, поскольку оно полностью определяет эволюцию системы во времени при заданном входном воздействии x. Легко показать, что $\bar{\varphi}^x$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к подобным преобразованиям в классической литературе; в частности, оно обладает (полугрупповым) свойством композиции и свойством согласованности (см. [3]).

В заключение отметим, что полезность представления динамических систем в пространстве состояний для изучения свойств временных систем определяется в основном следующими фактами:

(1) Эволюция системы во времени, ее динамика, *при заданном входном воздействии* полностью характеризуется отображениями пространства состояний C в себя.

(2) Значение выходной величины в любой момент времени получается с помощью статической функции, определенной на пространстве состояний, если система является сильно неупреждающей, или еще и на множестве текущих значений входного воздействия, если система является просто неупреждающей.

(b) Отношения эквивалентности, порождающие пространство состояний, и динамические системы в пространстве состояний

Существует много отношений эквивалентности, удовлетворяющих условиям (i) и (ii) из разд. (a) § 3, и, следовательно, для каждого из них соответствующее фактормножество может быть использовано в качестве пространства состояний. В этом параграфе мы познакомимся с двумя типичными отношениями эквивалентности, порождающими пространство состояний.

(α) Первый подход к определению отношения эквивалентности на множестве $\tilde{C}$ опирается на использование выходной функции. Грубо говоря, мы собираемся считать эквивалентными любые два состояния, даже если они относятся к различным моментам времени, но при одних и тех же входных воздействиях приводят к одним и тем же выходным величинам. Более того, в этом случае функция перехода состояний будет определять всегда эквивалентные состояния, если входные воздействия одинаковы. Точнее говоря, мы собираемся ввести отношение

$$E_\alpha^\lambda \subset \tilde{C} \times \tilde{C}, \quad \text{где} \quad \tilde{C} = \bigcup_{t \in T} C_t,$$

такое, что

$$(c_t, \hat{c}_{t'}) \in E_\alpha^\lambda \Longleftrightarrow (\forall a)\,[\lambda_t(c_t, a) = \lambda_{t'}(\hat{c}_{t'}, a)]\,\&\,\{t = t' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall x_{tt''})\,[(\varphi_{tt''}(c_t, x_{tt''}),\ \varphi_{tt''}(\hat{c}_{t'}, x_{tt''})) \in E_\alpha^\lambda]\}. \quad (3.5)$$

Обозначим через $\bar{E}$ семейство всех отношений эквивалентности, удовлетворяющих условию (3.5), $\bar{E} = \{E_\alpha^\lambda\colon \alpha \in A\}$. Тривиальное отношение эквивалентности $I = \{(c_t, c_t)\colon c_t \in \tilde{C}\}$ принадлежит этому множеству, и, значит, $\bar{E}$ непусто. В общем случае условию (3.5) удовлетворяет много отношений эквивалентности. Семейство $\bar{E}$ можно упорядочить с помощью теоретико-множественного отношения включения $\subseteq$. Для такого упорядоченного множества справедлива следующая лемма:

Лемма 3.1 [1]. В множестве $\bar{E}$ существует максимальный относительно $\subseteq$ элемент E_m^λ.

Доказательство. Пусть P — произвольная непустая цепь из $\bar{E}$, т. е. пусть P есть некоторое линейно упорядоченное подмножество из $\bar{E}$, причем P мы заиндексируем с помощью некоторого множества B, а его элементы будем обозначать через E_λ^β, $\beta \in B$. Пусть

$$E_0 = \bigcup_{\beta \in B} E_\beta^\lambda.$$

Покажем, что E_0 принадлежит $\bar{E}$, $E_0 \in \bar{E}$. Поскольку для любых c_t, $c_{t'}$ и $c_{t''}$ отношение E_0 обладает свойствами

рефлексивности:	$(c_t, c_t) \in \widetilde{C} \times \widetilde{C} \Rightarrow (c_t, c_t) \in E_\beta^\lambda$ для всех $\beta \in B \Rightarrow (c_t, c_t) \in E_0$;
симметричности:	$(c_t, c_{t''}) \in E_0 \Rightarrow (c_t, c_{t'}) \in E_\lambda^\beta$ для некоторого $\beta \in B \Rightarrow (c_{t''}, c_t) \in E_\beta^\lambda \Rightarrow (c_{t''}, c_t) \in E_0$;
транзитивности:	$(c_t, c_{t'}) \in E_0 \& (c_t, c_{t''}) \in E_0 \Rightarrow (c_t, c_{t'}) \in E_\beta^\lambda$ и $(c_{t'}, c_{t''}) \in E_\beta^{\lambda'}$ при некоторых β, $\beta' \in B$. Но так как P линейно упорядочено, то $(c_t, c_{t'}) \in E_\beta^{\lambda''}$ и $(c_{t'}, c_{t''}) \in E_\beta^{\lambda''}$, где $\beta'' = \beta$ или $\beta'' = \beta' \Rightarrow (c_t, c_{t''}) \in E_\beta^{\lambda''} \Rightarrow (c_t, c_{t''}) \in E_0$.

Отношение E_0 есть отношение эквивалентности. Более того, для любых $(c_t, c_{t'})$

$$\begin{aligned}(c_t, c_{t'}) \in E_0 \Rightarrow (c_t, c_{t'}) \in E_\beta^\lambda \text{ для некоторого } \beta \in B \Rightarrow \\ \Rightarrow (\forall a)\, (\lambda_t (c_t, a) = \lambda_{t'} (c_{t'}, a))\, \& \\ \{t = t' \Rightarrow (\forall x_{t''})\, [(\varphi_{tt''} (c_t, x_{tt''}), \varphi_{tt''} (c_{t'}, x_{tt''})) \in E_\beta^\lambda]\} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\forall a)\, (\lambda_t (c_t, a) = \lambda_{t'} (c_{t'}, a))\, \& \\ \{t = t' \Rightarrow (\forall x_{tt''})\, [(\varphi_{tt''} (c_t, x_{tt''}), \varphi_{tt''} (c_{t'}, x_{tt''})) \in E_0]\},\end{aligned}$$

а значит, E_0 принадлежит $\bar{E}$. Но если любое линейно упорядоченное подмножество $\bar{E}$, как было показано, обладает мажорантой, то,

---

[1] Аналогичный результат справедлив и при более общих условиях. Пусть $E\alpha \subset \widetilde{C} \times \widetilde{C}$ таково, что

$$\begin{aligned}(c_t, \hat{c}_{t'}) \in E^\alpha \Rightarrow P (c_t, \hat{c}_{t'})\, \& \,(t = t' \Rightarrow (\forall a)\, [\lambda_t (c_t, a) = \\ = \lambda_{t'} (\hat{c}_t, a)]\, \& \,(\forall x_{tt''})\, [(\varphi_{tt''}(c_t, x_{tt''}), \varphi_{t't''}(c_{t'}, x_{tt''})) \in E\alpha]),\end{aligned}$$

где $P (c_t, c_{t'})$ — произвольный предикат, такой, что $P (c_t, c_t)$ истинно при любом c_t. Если $\bar{E}$ есть семейство всех таких отношений эквивалентности, то для него справедлива лемма 3.1.

согласно лемме Цорна, в $\bar{E}$ существует по крайней мере один максимальный элемент E_m^λ, ч. т. д.

По-видимому, имеет смысл использовать максимальное отношение эквивалентности E_m^λ и определить пространство состояний как

$$C = \widetilde{C}/E_m^\lambda,$$

поскольку E_m^λ определяет «самое приведенное» пространство состояний.

Посмотрим теперь, как можно определить вспомогательные функции для пространства состояний C и обеспечить их согласованность с соответствующими функциями, определенными для семейства объектов состояний. Обозначим через I_t: $\widetilde{C}/E_m^\lambda \to C_t$ отображение

$$I_t([c]) = \begin{cases} c_t, & \text{если} \quad c_t \in [c] \cap C_t, \\ c_t^* \in C_t, & \text{если} \quad [c] \cap C_t = \varnothing, \end{cases}$$

где c_t^* — произвольный элемент из C_t, в общем случае различный для различных $[c]$. Теперь мы можем определить функцию перехода состояний в пространстве C:

$$\hat{\varphi}_{tt'}\colon (\widetilde{C}/E_m^\lambda) \times X_{tt'} \to \widetilde{C}/E_m^\lambda,$$

потребовав, чтобы

$$\hat{\varphi}_{tt}\ ([c],\ x_{tt'}) = [\varphi_{tt}\ (I_t\ ([c]),\ x_{tt}\ )].$$

Нетрудно видеть, что функция $\hat{\varphi}_{tt'}$ определена корректно. Что же касается справедливости для нее свойства композиции, то заметим, что

(i) $I_t([c_t]) \in [c_t] \Rightarrow c_t \equiv I_t([c_t])$;

(ii) $c_t \equiv c_t' \Rightarrow \varphi_{tt'}(c_t,\ x_{tt'}) \equiv \varphi_{tt'}(c_t' x_{tt'})$,

согласно отношению (3.5), причем $c_t \equiv c_t$ означает, что $(c_t,\ c_{t'}) \in \in E_m^\lambda$;

(iii) $$I_t\ ([c_t]) \equiv c_t \Rightarrow \varphi_{tt'}\ (c_t,\ x_{tt}\ ) \equiv \varphi_{tt}\ (I_t\ ([c_t]),\ x_{tt'}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\varphi_{tt'}\ (c_t,\ x_{tt}\ )] = [\varphi_{tt}\ (I_t\ ([c_t]),\ x_{tt'})] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\varphi_{tt'}(c_t,\ x_{tt'})] = \hat{\varphi}_{tt'}\ ([c_t],\ x_{tt'}). \qquad (3.6)$$

Теперь мы готовы доказывать свойство композиции семейства $\bar{\bar{\varphi}}$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{tt''}([c],\ x_{tt''}) &= [\varphi_{tt''}(I_t([c]),\ x_{tt''})] = && \text{(по определению)}\\
&= [\varphi_{t't''}(\varphi_{tt'}(I_t([c]),\ x_{tt'}),\ x_{t't''})] = && \text{(в силу свойства композиции } \varphi_{tt'}\text{)}\\
&= \hat{\varphi}_{t't''}([\varphi_{tt'}(I_t([c]),\ x_{tt'})],\ x_{t't''}) = && \text{(согласно (3.6))}\\
&= \hat{\varphi}_{t't''}(\hat{\varphi}_{tt'}([c],\ x_{tt'}),\ x_{t't''}),
\end{aligned}$$

а это значит, что $\bar{\bar{\varphi}}$ обладает требуемым свойством композиции.

Определим теперь для пространства состояний выходную функцию

$$\hat{\lambda}_t\colon (\widetilde{C}/E^{\lambda}_m) \times A \to B,$$

потребовав, что

$$\hat{\lambda}_t([c],\ a) = \lambda_t(I_t([c]),\ a).$$

Поскольку $c_t \equiv I_t[c_t]$, то

$$\lambda_t(c_t,\ a) = \lambda_t(I_t([c_t]),\ a) = \hat{\lambda}_t([c_t],\ a), \tag{3.7}$$

как и требуется.

Подводя итог, мы видим, что, согласно (3.6) и (3.7) соответственно,

$$\hat{\varphi}_{tt'}([c_t],\ x_{tt'}) = [\varphi_{tt'}(c_t,\ x_{tt'})],$$
$$\hat{\lambda}_t([c_t],\ a) = \lambda_t(c_t,\ a),$$

а значит, диаграмма на рис. 3.3 является коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
C \times \bar{X}_{tt'} \arrow[d, "(\hat{\varphi}_{tt'},\ R_{(t')})"'] & C_t \times \bar{X}_{tt'} \arrow[l, "{[\ ] \times I}"'] \arrow[d, "(\varphi_{tt'},\ R^*_{(t')})"] \\
C \times A \arrow[dr, "\hat{\lambda}_{t'}"'] \arrow[ur, phantom, "\text{Каноническое отображение}"] & C_{t'} \times A \arrow[l, "{[\ ] \times I}"'] \arrow[d, "\lambda_{t'}"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

Рис. 3.3.

Таким образом, $C = \widetilde{C}/E_m^\lambda$ действительно может служить пространством состояний системы, а отображения

$$\hat{\varphi}_{tt'}\colon C \times X_{tt'} \to C,$$
$$\hat{\lambda}_t\colon C \times A \to B$$

являются для него функцией перехода состояний и выходной функцией соответственно.

(β) Другой способ построения пространства состояний опирается на использование отношения эквивалентности, определяемого с помощью оператора сдвига. По сути дела в этом случае эквивалентными (независимо от момента времени, к которому они относятся) считаются состояния, для которых поведение системы (т. е. соответствующие функции «вход — выход») отличается лишь сдвигом во времени.

Для того чтобы ввести это отношение эквивалентности, нам придется добавить несколько предположений:

(iii) множество моментов времени T стационарно;

(iv) объект X стационарен, т. е. для каждого $t \in T$

$$F^t(X) = X_t,$$

где F^t — оператор сдвига, определенный в § 3 гл. II.

Пусть $\widetilde{C} = \bigcup_{t \in T} C_t$. Определим тогда отношение $E_\alpha^\rho \subset \widetilde{C} \times \widetilde{C}$, потребовав, чтобы для $t' \geqslant t$

$$(c_t, \hat{c}_{t'}) \in E_\alpha^\rho \Rightarrow (\forall x_t)\,[F^{t'-t}(\rho_t(c_t, x_t)) = \rho_{t'}(\hat{c}_{t'}, F^{t'-t}(x_t))]$$

и

$$\{(t = t') \Rightarrow (\forall x_{tt''})\,[(\varphi_{tt''}(c_t, x_{tt''}), \varphi_{tt''}(c_{t'}, x_{tt''})) \in E_\alpha^\rho]\}. \quad (3.8)$$

Обозначим через $\overline{E}^\rho$ семейство отношений эквивалентности, удовлетворяющих условию (3.8). Тривиальное отношение эквивалентности $\{(c_t, c_t)\colon c_t \in \widetilde{C}\}$ удовлетворяет этому условию, и следовательно, множество $\overline{E}^\rho = \{\overline{E}_\alpha^\rho\colon \alpha \in A\}$ непусто. Более того, условию (3.8) могут удовлетворять многие отношения эквивалентности. Существование в $\overline{E}^\rho$ некоторого максимального отношения эквивалентности E_m^ρ доказывается точно таким же образом, как и существование E_m^λ.

Для максимального отношения эквивалентности пространство состояний отождествляется с соответствующим фактормножеством

$$C = \widetilde{C}/E_m^\rho.$$

Реакция системы в момент времени

$$\hat{\rho}_t\colon C \times X_t \to Y_t$$

должна удовлетворять условию

$$\hat{\rho}_t([c], x_t) = \begin{cases} \rho_t(c_t, x_t), & \text{если } (\exists c_t)(c_t \in [c]), \\ \text{не определена в противном случае,} \end{cases}$$

а функция перехода состояний

$$\hat{\varphi}_{tt'}\colon C \times X_{tt'} \to C$$

определяется следующим образом:

$$\hat{\varphi}_{tt'}([c], x_{tt'}) = \begin{cases} \varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), & \text{если } (\exists c_t)(c_t \in [c]), \\ \text{не определена в противном случае.} \end{cases}$$

Если мы хотим, чтобы $\hat{\rho}_t$ и $\hat{\varphi}_{tt'}$ были полными функциями, их следует подходящим образом продолжить. При этом продолженная система должна сохранить основные свойства исходной системы, скажем ее линейность.

Каким из введенных выше отношений эквивалентности E_α^λ или E_α^ρ следует пользоваться для построения пространства состояний, определяется в конечном счете особенностями конкретной ситуации. Однако если оба отношения кажутся нам в равной степени пригодными, сравнение соответствующих подходов позволяет подметить следующее различие между ними:

(1) подход (β) требует введения дополнительных предположений, а именно предположений (iii) и (iv);

(2) пространство состояний, сконструированное с помощью E_m^ρ, в общем случае больше пространства, порожденного отношением E_m^λ.

Пространства состояний можно строить и с помощью других отношений эквивалентности. Замечательный пример мы получаем тогда, когда T — метрическое пространство [1]). Однако он оказывается частным случаем подхода (β).

В заключение хотелось бы еще раз подчеркнуть, что мы рассматриваем пространство состояний как вторичное понятие, а потому необходимо следить за его согласованностью с той первичной информацией, которая содержится в парах «вход — выход», или его нужно конструировать так, как показано выше в этом параграфе. Часто понятие пространства состояний вводится априори в само определение системы. Материал этого параграфа должен выяснить истоки этого понятия и условия, которым оно должно удовлетворять, даже если оно вводится a priori.

---

[1]) На самом деле здесь естественнее потребовать, чтобы T было абелевой группой. Это предположение приводит к тем же результатам. — *Прим. перев.*

(c) Коммутативная диаграмма вспомогательных функций

Взаимосвязи между различными вспомогательными функциями удобно представить в виде диаграммы, изображенной на рис. 3.4. Здесь стрелками обозначены отображения, а каждый замкнутый контур соответствует условию коммутативности соответствующих отображений.

На рассматриваемой диаграмме фигурируют вспомогательные функции ρ_0, ρ_t, $\mu_{tt'}$, λ_t и $\hat{\lambda}_t$, операторы сужения R_{T_t}, $R_{\{t\}}$ и неко-

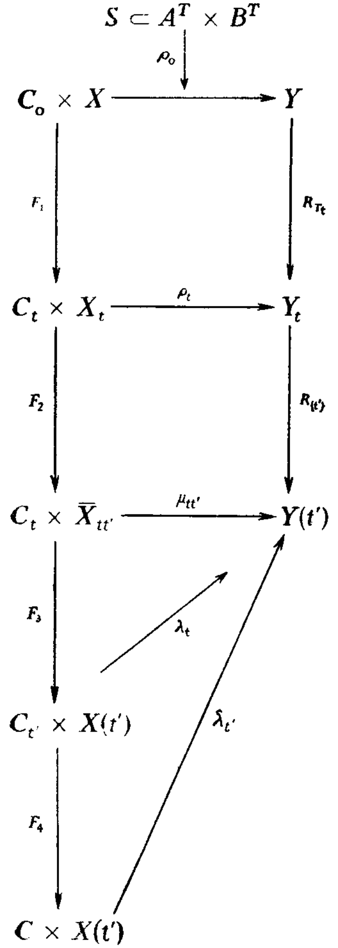


Рис. 3.4.

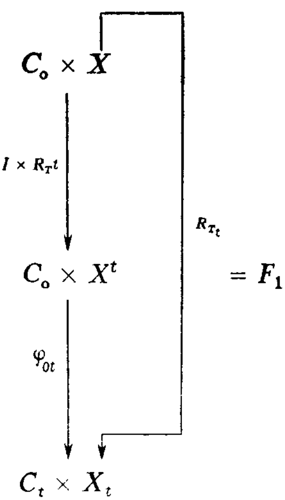


Рис. 3.5.

$$
\begin{tikzcd}
C_t \times X_t \arrow[d, "I \times R_{\bar{\gamma}_{tt'}}"'] \\
C_t \times \bar{X}_{tt'}
\end{tikzcd}
= F_2
$$

Рис. 3.6

$$
\begin{tikzcd}
C_t \times \bar{X}_{tt'} \arrow[d, "I \times R_{\gamma_{tt'}}"'] \arrow[dd, bend left=60, "R_{(t')}"] \\
C_t \times X_{tt'} \arrow[d, "\varphi_{tt'}"'] \\
C_{t'} \times X(t')
\end{tikzcd}
= F_3
$$

Рис. 3.7.

$$
\begin{tikzcd}
C_{t'} \times X(t') \arrow[d, "\mathrm{nat}\, E_m^{\lambda} \times I"] \\
C \times X(t')
\end{tikzcd}
= F_4
$$

Рис. 3.8.

торые композиции этих отображений F_1, F_2, F_3 и F_4, которые определяются ниже.

Отображение F_1 определяется алгебраической диаграммой, приведенной на рис. 3.5, где I — тождественное отображение, а символ $I \times R_{Tt}$ должен указывать на то, что отображение осуществляется покомпонентно, т. е. его первая компонента отображается просто в себя, а вторая преобразуется оператором сужения.

Второе сложное отображение F_2 определяется диаграммой на рис. 3.6. И снова $I \times R_{\overline{T}_{tt'}}$ означает, что первая компонента отображается в себя, а вторая сужается на $\overline{T}_{tt'}$.

Третье отображение F_3 задается диаграммой на рис. 3.7, на котором $\varphi_{tt'}$ — функция перехода состояний, а $I \times R_{T_{tt'}}$ интерпретируется так же, как и на диграммах для F_1 и F_2.

Наконец, отображение F_4 определяется диаграммой на рис. 3.8. Здесь nat E_m^λ — каноническое отображение для отношения эквивалентности E_m^λ.

(d) Конструирование представления в пространстве состояний

Покажем теперь, как полученные ранее результаты связать между собой, чтобы получить условия существования различных вспомогательных функций и соответствующих представлений систем, а также как их можно использовать в рамках некоторой упорядоченной процедуры конструирования всего того необходимого аппарата, который позволяет описывать общую временную систему в пространстве состояний.

На рис. 3.9 показана взаимосвязь между различными доказанными ранее теоремами и условиями существования различных представлений системы. На каждом шаге вводится новая вспомогательная функция, которая приводит к новому типу представления. Здесь же указывается и некоторая стандартная терминология, обычно связываемая с условиями соответствующих теорем.

Процедура построения пространства состояний намечена на рис. 3.10. Если мы исходим из заданного объекта начальных состояний C_0, то она разбивается на три этапа:

(i) Прежде всего для каждого $t \in T$ в качестве объекта состояний принимается $C_0 \times X^t$, т. е. $C_t = C_0 \times X^t$.

(ii) Затем образуется объединение всех построенных таким образом объектов состояний:

$$\widetilde{C} = \bigcup_{t \in T} C_t.$$

(iii) Наконец, в $\widetilde{C}$ определяется отношение эквивалентности E_m^λ и пространство состояний отождествляется с фактормножеством $\widetilde{C}/E_m^\lambda$: $C = \widetilde{C}/F_m^\lambda$.

Покажем теперь, как определять вспомогательные функции, соответствующие представлению, процедура построения которого приведена на рис. 3.10.

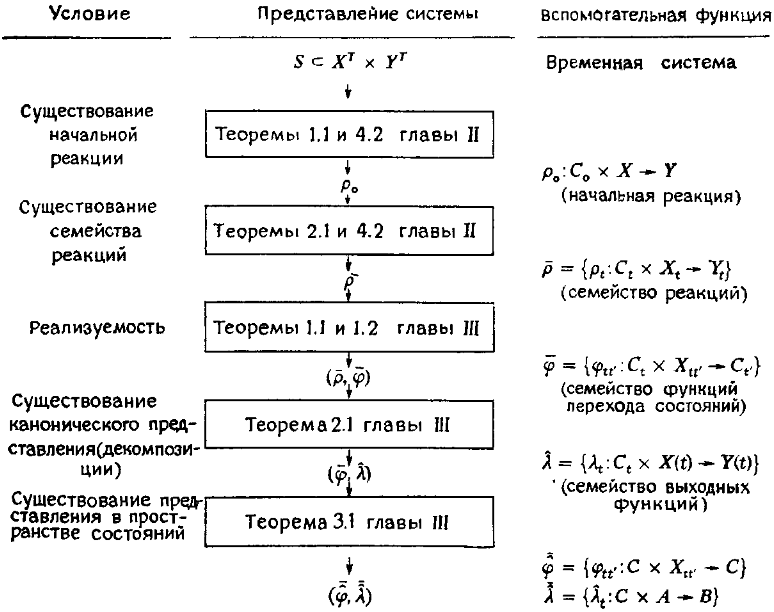


Рис. 3.9.

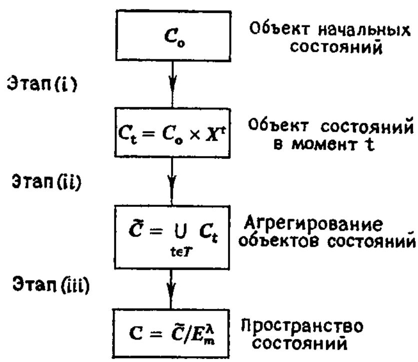


Рис. 3.10.

По заданной начальной реакции ρ_0: $C_0 \times X \to Y$ реакция для момента времени t

$$\rho_t: C_t \times X_t \to Y_t,$$

отвечающая объекту состояний $C_t = C_0 \times X^t$, определяется через ρ_0 следующим образом:

$$\rho_t(c_t, x_t) = \rho_0(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t. \qquad (3.9)$$

Функция перехода состояний для $T_{tt'}$ и для объектов состояний $C_t = C_0 \times X^t$ и $C_{t'} = C_0 \times X^{t'}$

$$\varphi_{tt'}\colon C_t \times X_{tt'} \to C_{t'}$$

определяется равенством

$$\varphi_{tt'}((c_0, x^t), x_{tt'}) = (c_0, x^t \cdot x_{tt'}). \qquad (3.10)$$

Для того чтобы убедиться в согласованности семейства $\bar{\varphi}$, определенного равенством (3.10), с заданным семейством реакций $\bar{\rho}$, заметим, что при заданном состоянии $c_t = (c_0, x^t)$

$$\begin{aligned}
\rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t'}) &= \rho_{t'}((c_0, x^t \cdot x_{tt'}), x_{t'}) = \\
&= \rho_0(c_0, x^t \cdot x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'} = \\
&= (\rho_0(c_0, x^t \cdot x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_t) \mid T_{t'} = \\
&\cdot \rho_t(\varphi_{0t}(c_0, x^t), x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'} = \rho_t(c_t, x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'}.
\end{aligned}$$

Семейство $\bar{\varphi}$ обладает и необходимым свойством композиции. Действительно, при заданном $c_t = (c_0, x^t)$

$$\begin{aligned}
\varphi_{t't''}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t't''}) &= \varphi_{t't''}((c_0, x^t \cdot x_{tt'}), x_{t't''}) = \\
&= (c_0, x^t \cdot x_{tt'} \cdot x_{t't''}) = \\
&= \varphi_{tt''}((c_0, x^t), x_{tt'} \cdot x_{t't''}).
\end{aligned}$$

Поэтому пара $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$, как она определена уравнениями (3.9) и (3.10), является динамическим представлением системы S, согласующимся с заданной начальной реакцией ρ_0.

Выходная функция системы λ_t определяется снова в терминах семейства $\bar{\rho}$:

$$\lambda_t(c_t, x_t(t)) = \rho_t(c_t, x_t)(t).$$

Наконец, выходная функция и функция перехода состояний для пространства состояний $C = \tilde{C}/E_m^\lambda$ строятся так, как описано в п. (b) § 3. А именно

$$\hat{\varphi}_{tt'}\colon C \times X_{tt'} \to E$$

должна удовлетворять условию

$$\hat{\varphi}_{tt'}([c], x_{tt'}) = [\varphi_{tt'}(I_t([c]), x_{tt'})],$$

а

$$\hat{\lambda}_t\colon C \times A \to B$$

определяется равенством

$$\hat{\lambda}_t([c],\ a) = \lambda_t(I_t([c]),\ a),$$

где отображение I_t: $C \to C_t$ таково, что

$$I_t([c]) = \begin{cases} c_t, & \text{если } c_t \in [c] \cap C_t \neq \varnothing, \\ c_t^* \in C_t & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а c_t^* — произвольный элемент из C_t. Как уже было показано в п. (b) § 3, определенная подобным образом пара $(\hat{\varphi},\ \hat{\lambda})$ удовлетворяет необходимым требованиям согласованности и обладает свойством композиции, так что $(\hat{\varphi},\ \hat{\lambda})$ может служить каноническим представлением системы S в пространстве состояний.

В процедуре построения, намеченной на рис. 3.9 и 3.10, предполагается заданной начальная реакция системы, т. е. объект начальных состояний. Различный выбор объектов начальных состояний может привести к различным пространствам состояний. Однако в случае предопределенных систем получается одно естественное пространство состояний и одно единственное представление в этом пространстве. К этому вопросу мы еще вернемся в гл. V.

Глава IV

ЛИНЕЙНОСТЬ

Задача настоящей главы — выяснить, какое влияние на уже рассмотренные нами задачи оказывает предположение о линейности. Результаты этой главы выявят некоторые свойства систем, связанные с линейностью, и мы будем использовать их в последующих главах, когда речь зайдет о линейных системах.

Так, мы установим здесь возможность разделить реакцию линейной системы $\bar{\rho}$ на две составляющие — реакцию на входное воздействие $\bar{\rho}_2$ и реакцию на состояние $\bar{\rho}_1$. Затем мы разовьем для линейных систем теорию реализации, опирающуюся на возможность такого разделения. При этом особый интерес для нас будет представлять реализуемость семейства реакций на входные воздействия $\bar{\rho}_2$. Оказывается, что если линейная система является сильно неупреждающей, то $\bar{\rho}_2$ реализуемо тогда и только тогда, когда оно эквивалентно семейству композиций двух отображений — первого, отображающего входные воздействия в состояния, и второго, отображающего состояния в значения выходных величин. Если же линейная система еще и стационарна, то представление $\bar{\rho}_2$ в виде композиции двух отображений принимает форму, удобную для непосредственного практического применения (например, для систем, заданных дифференциальными уравнениями). В самом деле, один из результатов (теорема 3.3 гл. IV), в котором сформулированы минимальные предположения, необходимые для того, чтобы $\bar{\rho}_2$ можно было представить в виде композиции двух отображений, обладающих требуемыми свойствами, свидетельствует о том, что ключевую роль здесь играют предположения о линейности, а не о том, что система может быть задана дифференциальными уравнениями.

Опираясь на все эти результаты, мы получаем возможность предложить некую упорядоченную процедуру построения пространства состояний для линейных систем. В отличие от случая общей временной системы эта процедура не предполагает существования заданного объекта начальных состояний, а использует некоторое надлежащим образом выбранное подмножество множества всевозможных пар «вход — выход», которое мы будем называть алгебраическим ядром системы. Для любой линейной системы пространство состояний, построенное с помощью такого алгебраического ядра, является единственным. Более того, в определенном смысле такое пространство состояний оказывается и минимальным.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Линейность — весьма важное свойство системы, поскольку оно позволяет делать выводы относительного поведения системы для всего класса входных воздействий, основываясь на том, как она реагирует лишь на некоторые из них. Для того чтобы систему можно было считать линейной, необходимо, во-первых, чтобы на всех входных объектах была задана подходящая структура и, во-вторых, чтобы преобразования, осуществляемые этой системой, в определенном смысле сохраняли эту структуру, так что аналогичной структурой будет наделено и выходное множество.

Вспомним определение (полной) линейной системы, приведенное в гл. II. Система $S \subset X \times Y$ называется линейной тогда и только тогда, когда X и Y — линейные алгебры над одним и тем же полем скаляров $\mathcal{A}$, а S удовлетворяет следующим условиям:

$$(\forall s)\ (\forall s')\ [s \in S \,\&\, s' \in S \Rightarrow s + s' \in S],$$
$$(\forall s)\ (\forall \alpha)\ [\alpha \in \mathcal{A} \,\&\, s \in S \Rightarrow \alpha \cdot s \in S].$$

Если X и Y — временные объекты, то обычно алгебраические операции определяются в X и Y через линейные структуры алфавитов A и B. Например, для X

$$\begin{aligned} x'' &= x + x' \Leftrightarrow (\forall t)\ [x''(t) = x(t) + x'(t)], \\ x' &= \alpha x \Leftrightarrow (\forall t)\ [x'(t) = \alpha x(t)]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Аналогичным образом задается операция в алгебре Y. Далее мы всегда будем предполагать, что операции в X и Y заданы именно в смысле определения (4.1).

В связи с этим мы можем уточнить определение линейной системы.

Определение 1.1. Пусть S — некоторая временная система, и пусть, кроме того,

(i) A и B — линейные алгебры над одним и тем же полем скаляров $\mathcal{A}$;

(ii) X — линейная алгебра относительно операций $+$ и $\cdot$, причем

$$(\forall t)\ [(x + x')(t) = x(t) + x'(t)],$$
$$(\forall \alpha)\ [(\alpha \cdot x)(t) = \alpha \cdot x(t)].$$

Аналогичными свойствами обладает и линейная алгебра Y.

Система S называется (*полной*) *линейной системой* тогда и только тогда, когда

(iii) $(x, y) \in S \;\&\; (\hat{x}, \hat{y}) \in S \Rightarrow (x + \hat{x}, y + \hat{y}) \in S$,
(iv) $(x, y) \in S \;\&\; \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow (\alpha x, \alpha y) \in S$.

Мы будем предполагать также, что объект X замкнут относительно операции сочленения (определение 2.3 гл. II), а это условие благодаря линейности X можно выразить в следующем виде:

$$(\forall x)\,(x \in X \Rightarrow x^t \cdot 0 \in X).$$

В самом деле, предположим, что X удовлетворяет этому условию, и пусть x и $\hat{x}$ — два произвольных элемента из X. Тогда $x^t \cdot 0 \in X$ и $\hat{x}^t \cdot 0 \in X$, по определению. Но так как X — линейная алгебра, то $\hat{x} - \hat{x}^t \cdot 0 = 0 \cdot \hat{x}_t \in X$ и, следовательно, $x^t \cdot 0 + 0 \cdot \hat{x}_t = x^t \cdot \hat{x}_t \in X$, что совпадает с условием полноты объекта X в том виде, как оно сформулировано в определении 2.3 гл. II.

Для линейных систем удается получить некоторые более глубокие и более конкретные результаты. Это объясняется, естественно, тем, что мы наделили объекты системы дополнительной линейной структурой. В этой главе мы будем придерживаться того же плана, которому мы уже следовали при изучении общих временных систем в предыдущих главах. Однако результаты, которые устанавливаются для линейных систем, нельзя рассматривать как непосредственную конкретизацию более общих результатов, поскольку теперь должны выполняться некоторые дополнительные условия (например, требование линейности объектов состояний или пространства состояний). Более того, нам придется установить некоторые специальные факты, верные лишь для линейных систем (скажем, реализуемость сильно неупреждающих систем).

2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ РЕАКЦИЙ СИСТЕМЫ: РЕАКЦИЯ НА ВХОДНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ И РЕАКЦИЯ НА СОСТОЯНИЕ

Как уже было показано в гл. II, реакцию линейной системы можно представить как результат композиции (относительно алгебраической операции в Y) двух функций, описывающих по отдельности реакцию системы на состояние и на входное воздействие. Другими словами, общая реакция системы является суммой двух таких отдельных реакций. Такое разделение реакций возможно, естественно, и для линейных временных систем.

Определение 2.1. Пусть $S \subset X \times Y$ — линейная временная система, а ρ_0 — отображение $C_0 \times X \to Y$. Это отображение называется *линейной начальной реакцией системы* S тогда и только тогда, когда

(i) ρ_0 согласовано с S, т. е.

$$(x, y) \in S \Longleftrightarrow (\exists c)\,[y = \rho_0(c, x)];$$

(ii) C_0 — линейная алгебра над полем $\mathscr{A}$;

(iii) найдутся два линейных отображения $\rho_{10}\colon C_0 \to Y$ и $\rho_{20}\colon X \to Y$, такие, что для всех $(c, x) \in C_0 \times X$

$$\rho_0(c, x) = \rho_{10}(c) + \rho_{20}(x).$$

В этом случае C_0 называют *линейным объектом начальных состояний*, отображение $\rho_{10}\colon C_0 \to Y$ — *реакцией на начальное состояние*, а $\rho_{20}\colon X \to Y$ — *начальной реакцией на входное воздействие*.

Обратите внимание на разницу между начальной реакцией общей временной системы и линейной начальной реакцией. В первом случае мы требовали лишь выполнения условия (i), а во втором добавили еще и условия (ii) и (iii).

Из теоремы 1.2 гл. II мы получаем сразу же следующее предложение:

Предложение 2.1. Временная система является линейной тогда и только тогда, когда для нее существует линейная начальная реакция.

Семейство реакций линейной системы определяется очевидным образом:

Определение 2.2. Пусть S — некоторая линейная временная система. Семейство линейных отображений $\bar{\rho} = \{\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t\}$ называется *семейством линейных реакций* системы S в том и только в том случае, когда $\bar{\rho}$ согласуется с S, т. е. при любом $t \in T$ отображение ρ_t является линейной начальной реакцией для S_t.

Определение 2.2 показывает, что любую линейную начальную реакцию системы можно разложить на два таких отображения $\rho_{1t}\colon C_t \to Y_t$ и $\rho_{2t}\colon X_t \to Y_t$, что

$$\rho_t(c_t, x_t) = \rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_t).$$

Отображения ρ_{1t} и ρ_{2t} будут называться соответственно *реакцией в момент времени t на состояние системы и ее реакцией на входное воздействие.*

Теперь из теоремы 1.2 гл. II мы получаем следующее предложение:

Предложение 2.2. Для каждой линейной временной системы существует семейство линейных реакций.

Наконец, можно определить что мы будем называть линейной динамической системой.

Определение 2.3. Пусть S — некоторая линейная система, а $\bar{\rho}$ — ее семейство линейных реакций. Система S называется *линейной динамической системой* (т. е. для нее существует линейное динамическое представление) в том и только в том случае, когда для любых t, $t' \in T$ существует такая пара линейных отображений $\varphi_{1tt'}\colon C_t \to C_{t'}$ и $\varphi_{2tt'}\colon X_{tt'} \to C_{t'}$, что $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ является динамическим представлением системы S, где $\bar{\varphi}$ — семейство отображений $\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}) = \varphi_{1tt'}(c_t) + \varphi_{2tt'}(x_{tt'})$, т. е.

$$\rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t'}) = \rho_t(c_t, x_t) \mid T_{t'},$$

$$\varphi_{t't'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t't'}) = \varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}),$$

$$\varphi_{tt}(c_t, x_{tt}) = c_t.$$

3. ТЕОРИЯ РЕАЛИЗАЦИИ

Проблема реализуемости для линейных систем совершенно аналогична проблеме реализуемости для общих временных систем и отличается от последней лишь тем, что первоначально заданная реакция системы (динамической реализуемостью которой мы интересуемся) является теперь линейной и на самом деле определяется парой своих компонент $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$. Кроме того, для реализуемости линейной динамической системы необходимо, конечно, чтобы линейными были и отображения из семейства $\bar{\varphi}$, т. е. чтобы выполнялись условия определения 2.3.

Условия согласованности и условия реализуемости для $\bar{\rho}$ приведены в теореме 2.1 гл. II и теореме 1.1 гл. III, где они сформулированы для случая общей временной системы. Но, как уже отмечалось выше, эти теоремы нельзя распространить непосредственно на случай линейных временных систем. Тем не менее некоторую полезную информацию из них можно извлечь и для линейного случая

Что касается реакции на состояние, т. е. $\bar{\rho}_1$, то особый интерес представляет случай, когда входное воздействие тождественно равно нулю, т. е. $x_t = 0$. В этом случае условия (Р2) и (Р3) принимают следующий вид:

$$(\forall c_t)(\forall x_{tt'})(\exists c_{t'})(\rho_{1t'}(c_{t'}) = \rho_t(c_t, x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'}), \tag{4.2}$$

$$(\forall c_{t'})(\exists c_t)(\exists x_{tt'})(\rho_{1t'}(c_{t'}) = \rho_t(c_t, x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'}). \tag{4.3}$$

Условия (4.2) и (4.3) мы будем называть *условиями согласованности реакций на состояние.* С содержательной точки зрения эти условия означают следующее. По определению, для любых $(c_t, x_{tt'})$ система реагирует на пару «вход — состояние» $(c_t, x_{tt'} \cdot 0)$

так, что начиная с момента времени t' ее выходная величина $y_{t'}$ совпадает с $\rho_t(c_t, x_{tt'}\cdot 0) \mid T_{t'}$. Поэтому условие (4.2) означает, что для любой такой пары всегда найдется такое состояние $c_{t'}$, что реакция системы на пару $(c_{t'}, 0)$ совпадет с $y_{t'}$. Условие же (4.3) требует дополнительно, чтобы $C_{t'}$ содержало только такие состояния.

Переходя к реакции системы на входное воздействие, т. е. к $\bar\rho_2$, заметим, что здесь особый интерес представляет поведение системы при $c_t = 0$ и $x_{tt'} = 0$, а тогда условие (Р3) выражается следующим образом:

$$(\exists \hat{c}_{t'})(\forall x_{t'})(\rho_{t'}(\hat{c}_{t'}, x_{t'}) = \rho_t(0, 0\cdot x_{t'}) \mid T_{t'}).$$

Поскольку ρ_t линейна, справедливы равенства $\rho_{t'}(\hat{c}_{t'}, 0) = \rho_t(0, 0) \mid T_{t'} = 0$, так как $x_{t'} = 0$. Следовательно,

$$(\forall x_{t'})(\rho_{2t'}(x_{t'}) = \rho_{2t}(0\cdot x_{t'}) \mid T_{t'}). \tag{4.4}$$

Условие (4.4) мы назовем *условием согласованности реакций на входное воздействие*. Оно требует, чтобы входное воздействие, тождественно равное нулю на некотором отрезке времени, никак не сказывалось на будущем поведении системы, что и отражается в свойствах ее реакции на входное воздействие. Другими словами, если входное воздействие на систему таково, что вплоть до некоторого момента времени t' оно тождественно равно 0, т. е. $x_t = 0\cdot x_{t'}$, то сужение соответствующей выходной величины на отрезок времени, следующий за t', $\rho_{2t}(0\cdot x_{t'}) \mid T_{t'}$, должно совпадать с реакцией системы для момента времени t' на входное воздействие $x_{t'}$. Заметим, что в общем случае

$$\rho_{2t'}(x_{t'}) \neq \rho_{2t}(x_{tt'}\cdot x_{t'}) \mid T_{t'}.$$

Согласованность семейства $\bar\rho$ для случая линейных временных систем можно теперь охарактеризовать с помощью только что введенных условий согласованности.

Теорема 3.1. Пусть X и Y — линейные временные объекты, $X \subset A^T$, $Y \subseteq B^T$; $\bar C = \{C_t\colon t \in T\}$ — семейство линейных пространств, $\bar\rho_1, \bar\rho_2$ — два семейства линейных отображений, $\bar\rho_1 = \{\rho_{1t}\colon C_t \to Y_t\}$ и $\bar\rho_2 = \{\rho_{2t}\colon X_t \to Y_t\}$, и

$$\bar\rho = \{\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t \;\&\; (\forall (c_t, x_t))\,[\rho_t(c_t, x_t) = \rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_t)]\}.$$

Предположим, что $\bar\rho_2$ удовлетворяет условию согласованности реакций на входное воздействие, т. е. для любых $t \leqslant t'$

$$[(\forall x_{t'})\,[\rho_{2t'}(x_{t'}) = \rho_{2t}(0\cdot x_{t'}) \mid T_{t'}].$$

Тогда для существования линейной системы $S \subset X \times Y$, такой, что $\bar{\rho}$ является для нее семейством линейных реакций, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{\rho}$ удовлетворяло условиям согласованности реакций на состояние, т. е. чтобы при любых $t \leqslant t'$

$$\text{(i)} \quad (\forall (c_t, x_{tt'}))(\exists c_{t'})(\rho_{1t'}(c_{t'}) = \rho_t(c_t, x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'})$$

и

$$\text{(ii)} \quad (\forall c_{t'})(\exists (c_t, x_{tt'}))(\rho_{1t'}(c_{t'}) = \rho_t(c_t, x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'}).$$

Доказательство. Пусть $S = S_0^\rho$. Докажем сначала достаточность. Предположим, что $(x_t, y_t) \mid T_{t'} \in S_t^\rho \mid T_{t'}$ при $t \leqslant t'$. Тогда, согласно определению S_t^ρ, $y_t = \rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_t)$ при некотором $c_t \in C_t$. Следовательно,

$$\begin{aligned} y_t \mid T_{t'} &= (\rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_t)) \mid T_{t'} = \\ &= (\rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0) + \rho_{2t}(0 \cdot x_{t'})) \mid T_{t'} = \\ &= (\rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0)) \mid T_{t'} + \rho_{2t}(0 \cdot x_{t'}) \mid T_{t'}. \end{aligned}$$

Из условия (i) следует, что $y_t \mid T_{t'} = \rho_{1t'}(c_{t'}) + \rho_{2t'}(x_{t'})$ для некоторого $c_{t'} \in C_{t'}$ и, значит, $(x_t, y_t) \mid T_{t'} \in S_{t'}^\rho$, или $S_t^\rho \mid T_{t'} \subseteq S_{t'}^\rho$. Предположим, что $(x_{t'}, y_{t'}) \in S_{t'}^\rho$. Тогда $y_{t'} = \rho_{1t'}(c_{t'}) + \rho_{2t'}(x_{t'})$ для некоторого $c_{t'} \in C_{t'}$. Из условия (ii) вытекает, что при некоторых $c_t \in C_t$ и $x_{tt'} \in X_{tt'}$

$$\rho_{1t'}(c_{t'}) = (\rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0)) \mid T_{t'}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} y_{t'} &= (\rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0)) \mid T_{t'} + \rho_{2t}(0 \cdot x_{t'}) \mid T_{t'} = \\ &= (\rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot x_{t'})) \mid T_{t'}. \end{aligned}$$

Следовательно, $(x_{t'}, y_{t'}) \in S_t^\rho \mid T_{t'}$ или $S_{t'}^\rho \subseteq S_t^\rho \mid T_{t'}$. Объединяя выводы первой и второй частей доказательства, убеждаемся, что $S_{t'}^\rho = S_t^\rho \mid T_{t'}$ для любых $t \leqslant t'$ и, значит, $S_t^\rho = S_0^\rho \mid T_t$.

Докажем теперь необходимость. Заметим, что если при любых $t \in T$ справедливо равенство $S_t^\rho = S_0^\rho \mid T_t$, то $S_{t'}^\rho = S_t^\rho \mid T_{t'}$ при любых $t \leqslant t'$; верна и обратная импликация. Действительно, из равенств $S_t^\rho = S_0^\rho \mid T_t$ и $S_{t'}^\rho = S_0^\rho \mid T_{t'}$ вытекает, что

$$S_t^\rho \mid T_{t'} = (S_0^\rho \mid T_t) \mid T_{t'} = S_0^\rho \mid T_{t'} = S_{t'}^\rho.$$

Предположим, что $S_{t'}^\rho = S_t^\rho \mid T_{t'}$ справедливо для любых $t \leqslant t'$. Тогда

$$(\forall x_t)(\forall c_t)(\exists c_{t'})(\rho_{1t'}(c_{t'}) + \rho_{2t'}(x_{t'}) = (\rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_t)) \mid T_{t'}),$$

где $x_{t'} = x_t \mid T_{t'}$. Значит,

$$(\forall x_{tt'})(\forall c_t)(\exists c_{t'})(\rho_{1t'}(c_{t'}) = (\rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0)) \mid T_{t'}).$$

Более того, в силу того, что $S_{t'}^{\rho}=S_t^{\rho}\mid T_{t'}$, мы имеем

$$(\forall x_{t'})(\forall c_{t'})(\exists x_{tt'})(\exists c_t)(\rho_{1t'}(c_{t'})+\rho_{2t'}(x_{t'})=$$
$$=(\rho_{1t}(c_t)+\rho_{2t}(x_{tt'}\cdot x_{t'}))\mid T_{t'}),$$

и потому

$$(\forall c_{t'})(\exists x_{tt'})(\exists c_t)(\rho_{1t'}(c_{t'})=(\rho_{1t}(c_t)+\rho_{2t}(x_{tt'}\cdot 0))\mid T_{t'}),$$ ч. т. д.

Сформулируем теперь основной результат теории реализации для линейных систем:

Теорема 3.2. Пусть X и Y — линейные временные объекты, $X\subset A^T$ и $Y\subset B^T$, $\bar{C}=\{C_t\colon t\in T\}$ — семейство линейных пространств, $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$ — два семейства линейных отображений, $\bar{\rho}_1=\{\rho_{1t}\colon C_t\to Y_t\}$ и $\bar{\rho}_2=\{\rho_{2t}\colon X_t\to Y_t\}$, и

$$\bar{\rho}=\{\rho_t\colon C_t\times X_t\to Y_t\,\&\,(\forall(c_t,\ x_t))\,[\rho(c_t,x_t)=\rho_{1t}(c_t)+\rho_{2t}(x_t)]\}.$$

Семейство $\bar{\rho}$ реализуется линейной динамической системой (т. е. существует такое семейство линейных функций перехода состояний $\bar{\varphi}$, что пара $(\bar{\rho},\bar{\varphi})$ представляет линейную динамическую систему) в том и только в том случае, когда $\bar{\rho}$ удовлетворяет одновременно условию согласованности реакций на состояние и условию согласованности реакций на входное воздействие, т. е. когда для любых $t,\ t'\in T$

(i) $\{(\forall(c_t,\ x_{tt'}))(\exists c_{t'})\,[\rho_{1t'}(c_{t'})=\rho_t(c_t,\ x_{tt'}\cdot 0)\mid T_{t'}]$
$\&\,(\forall c_{t'})(\exists(c_t,\ x_{tt'}))\,[\rho_{1t}(c_{t'})=\rho_t(c_t,\ x_{tt'}\ 0)\mid T_{t'}]\}$,

(ii) $(\forall x_{t'})\,[\rho_{2t'}(x_{t'})=\rho_{2t}(0\cdot x_{t'})\mid T_{t'}]$.

Доказательство. Начнем с необходимости. Пусть $(\bar{\rho},\bar{\varphi})$ — линейная динамическая система и $\bar{\rho}=\{\rho_t\}$ — ее семейство линейных отображений, описанное в теореме 3.2. Тогда

$$\rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t,x_{tt'}),\ x_{t'})=\rho_{1t'}(\varphi_{tt'}(c_t,\ x_{tt'}))+\rho_{2t'}(x_{t'})=$$
$$=\rho_{1t'}(\varphi_{1tt'}(c_t))+\rho_{1t'}(\varphi_{2tt'}(x_{tt'}))+\rho_{2t'}(x_{t'})$$

и

$$\rho_t(c_t\ x_t)\mid T_{t'}=\rho_{1t}(c_t)\mid T_{t'}+\rho_{2t}(x_t)\mid T_{t'}=$$
$$=\rho_{1t}(c_t)\mid T_{t'}+\rho_{2t}(x_{tt'}\cdot 0)\mid T_{t'}+\rho_{2t}(0\cdot x_{t'})\mid T_{t'}.$$

Но так как равенство $\rho_t(c_t,\ x_t)\mid T_{t'}=\rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t,\ x_{tt'}),\ x_{t'})$ выполняется при любых c_t, $x_{tt'}$ и $x_{t'}$, то

$$\rho_{2t'}(x_{t'})=\rho_{2t}(0\cdot x_{t'})\mid T_{t'},\ \text{если}\ c_t=0\ \text{и}\ x_{tt'}=0.$$

А это значит, что $\{\rho_t\}$ удовлетворяет условию согласованности реакций на входное воздействие. Но тогда из теоремы 3.1 следует, что выполняется и условие согласованности реакций на состояние.

Перейдем теперь к доказательству достаточности. Прежде всего рассмотрим случай, когда ρ_{1t} при каждом $t \in T$ является взаимно однозначным отображением и, следовательно, для $\rho_{1t}\colon C_t \to \rho_{1t}(C_t)$ существует обратное отображение ρ_{1t}^{-1}. Для доказательства реализуемости нам нужно показать, что (i) $\bar{\rho} = \{\rho_t\}$ действительно является семейством реакций системы; (ii) построить семейство линейных функций перехода состояний $\{\varphi_{tt'}\}$; показать, что (iii) $\{\varphi_{tt'}\}$ согласуется с $\{\rho_t\}$ и обладает свойством композиции.

(i) Поскольку $\{\rho_t\}$ удовлетворяет условию согласованности реакций на состояние и условию согласованности реакций на входное воздействие, согласно утверждению теоремы 3.1, оно является семейством реакций.

(ii) Пусть $\varphi_{1tt'}\colon C_t \to C_{t'}$ таково, что

$$\varphi_{1tt'}(c_t) = \rho_{1t'}^{-1}\ (\rho_{1t}(c_t) \mid T_{t'}).$$

Отображение $\varphi_{1tt'}$ определено корректно, поскольку из условия согласованности реакций на состояние вытекает, что $\rho_{1t}(c_t) \mid T_{t'} = \rho_{1t'}(c_{t'})$ для некоторого $c_{t'}$ или $\rho_{1t}(c_t) \mid T_{t'} \in \rho_{1t'}(C_{t'})$ для любых c_t, а $\rho_{1t'}$ взаимно однозначно.

Определим $\varphi_{2tt'}\colon X_{tt'} \to C_{t'}$ с помощью условия

$$\varphi_{2tt'}(x_{tt'}) = \rho_{1t'}^{-1}(\rho_{2t}(x_{tt'}\cdot 0) \mid T_{t'}).$$

Отображение $\varphi_{2tt'}$ также определено корректно, поскольку из условия согласованности реакций на входное воздействие вытекает, что $\rho_{2t}(x_{tt'}\cdot 0) \mid T_{t'} \in \rho_{1t'}(C_{t'})$. А так как оператор сужения линеен и оператор, обратный к линейному, также линеен, то линейны функции $\varphi_{1tt'}$ и $\varphi_{2tt'}$, а потому и $\varphi_{tt'}$, где

$$\varphi_{tt'}(c_t,\ x_{tt'}) = \varphi_{1tt'}(c_t) + \varphi_{2tt'}(x_{tt'}).$$

(iii) По построению семейств $\{\rho_t\}$ и $\{\varphi_{tt'}\}$, а также в силу согласованности реакций на входное воздействие

$$\begin{aligned}\rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t,\ x_{tt'}),\ x_{t'}) &= \rho_{1t'}(\varphi_{tt'}(c_t,\ x_{tt'})) + \rho_{2t'}(x_{t'}) = \\ &= \rho_{1t'}(\varphi_{1tt'}(c_t)) + \rho_{1t'}(\varphi_{2tt'}(x_{tt'})) + \rho_{2t'}(x_{t'}) = \\ &= \rho_{1t}(c_t) \mid T_{t'} + \rho_{2t}(x_{tt'}\cdot 0) \mid T_{t'} + \rho_{2t}(0\cdot x_{t'}) \mid T_{t'} = \\ &= \rho_t(c_t,\ x_t) \mid T_{t'}.\end{aligned}$$

Значит, семейство $\{\varphi_{tt'}\}$ согласовано с $\{\rho_t\}$.

Поскольку семейство $\bar{\rho}$ приведено (или ρ_{1t} — взаимно однозначное отображение), теорема 2.2 гл. II применима к данному случаю. Но тогда $\{\varphi_{tt'}\}$ заведомо обладает свойством композиции, и потому $\{\varphi_{tt'}\}$ — искомое семейство функций перехода состояний.

Вернемся теперь к рассмотрению общего случая, когда ρ_{1t} не обязательно должно быть взаимно однозначным отображением.

Определим на объектах состояний отношения $E_t \subset C_t \times C_t$, потребовав, чтобы

$$(c_t,\ c_t') \in E_t \Longleftrightarrow \rho_{1t}(c_t) = \rho_{1t}(c_t').$$

Нетрудно убедиться в том, что отношение E_t есть отношение конгруэнтности [1]). Обозначим через $C_t/E_t = \{[c_t]\}$ фактормножества относительно этих отношений и заметим, что они являются линейными пространствами в очевидном смысле. Теперь для любого $t \in T$ линейные отображения $\tilde{\rho}_{1t}$: $C_t/E_t \to Y_t$ вполне определяются условиями $\tilde{\rho}_{1t}([c_t]) = \rho_{1t}(c_t)$, поскольку E_t — отношение конгруэнтности. Легко показать, что $\{\tilde{\rho}_t = \langle\tilde{\rho}_{1t},\ \rho_{2t}\rangle\}$ удовлетворяет условиям согласованности реакций на состояние и на входное воздействие, если этим условиям удовлетворяет семейство $\{\rho_t = \langle\rho_{1t},\ \rho_{2t}\rangle\}$. Поэтому мы можем построить семейство функций перехода состояний $\{\tilde{\varphi}_{tt'}\}$, согласующееся с $\{\tilde{\rho}_t\}$. Но теперь нам останется сделать всего два дополнительных шага:

(i) построить семейство функций перехода состояний $\{\varphi_{tt'}\}$, соответствующих $\{\rho_t\}$;

(ii) показать, что $\{\langle\rho_t,\ \varphi_{tt'}\rangle\}$ — линейная динамическая система.

Первый шаг. Пусть μ_t: $C_t/E_t \to C_t$ — такое линейное отображение, что $\mu_t([c_t]) \in [c_t]$; его можно построить тем же методом, которым мы пользовались в процессе доказательства теоремы 1.2 гл. II. Будем писать μ вместо μ_t всякий раз, когда смысл этого обозначения ясен из контекста. Теперь семейство функций перехода состояний можно определить с помощью условий

$$\varphi_{1tt'}(c_t) = \mu(\tilde{\varphi}_{1tt'}([c_t])) \quad \text{для } \varphi_{1tt'}\colon C_t \to C_{t'},$$

$$\varphi_{2tt'}(x_{tt'}) = \mu(\tilde{\varphi}_{2tt'}(x_{tt'})) \quad \text{для } \varphi_{2tt'}\colon X_{tt'} \to C_{t'}.$$

Второй шаг. Для этого нам достаточно показать, что определенное выше семейство $\{\varphi_{tt'}\}$ обладает свойством композиции и согласуется с $\{\rho_t\}$. Заметим прежде всего, что, согласно определению $\tilde{\rho}_{1t}$ и $[c_t]$,

$$\rho_{1t}(\mu([c_t])) = \tilde{\rho}_{1t}([c_t]) \tag{4.5}$$

и

$$[\mu([c_t])] = [c_t]. \tag{4.6}$$

---

[1]) Отношение эквивалентности E называется отношением конгруэнтности относительно структуры, задаваемой множеством отношений $\bar{R} = \{R_1, \ldots, R_n\}$, если $(\forall R_i \in \bar{R})\,[(x_1, \ldots, x_m) \in R_i\ \&\ (\forall i \leqslant m)\ x_i E y_i \Rightarrow (y_1, \ldots, y_m) \in R_i]$. —*Прим. перев.*

Теперь нетрудно показать, что

$$\rho_t(c_t, x_t) = \tilde{\rho}_t([c_t], x_t) \tag{4.7}$$

и

$$\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}) = \mu(\tilde{\varphi}_{tt'}([c_t], x_{tt'})). \tag{4.8}$$

Теперь мы приступим к доказательству согласованности:

$$\begin{aligned} \rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t'}) &= \rho_{t'}(\mu(\tilde{\varphi}_{tt'}([c_t], x_{tt'})), x_{t'}) = && \text{(в силу (4.8))} \\ &= \rho_{1t'}(\mu(\tilde{\varphi}_{tt'}([c_t], x_{tt'}))) + \rho_{2t'}(x_{t'}) = \\ &= \tilde{\rho}_{1t'}(\tilde{\varphi}_{tt'}([c_t], x_{tt'})) + \rho_{2t'}(x_{t'}) = && \text{(в силу (4.5))} \\ &= \tilde{\rho}_t([c_t[, x_t) \mid T_{t'} = \\ &= \rho_t(c_t, x_t) \mid T_{t'} && \text{(в силу (4.7)).} \end{aligned}$$

Аналогично доказывается и свойство композиции:

$$\begin{aligned} \varphi_{t't''}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t't''}) &= \varphi_{t't''}(\mu(\tilde{\varphi}_{tt'}([c_t], x_{tt'})), x_{t't''}) = \\ & && \text{(в силу (4.8))} \\ &= \mu(\tilde{\varphi}_{t't''}([\mu(\tilde{\varphi}_{tt'}([c_t], x_{tt'}))], x_{t't''})) = && \text{(в силу (4.8)} \\ &= \mu(\tilde{\varphi}_{t't''}(\tilde{\varphi}_{tt'}([c_t], x_{tt'}), x_{t't''})) = && \text{(в силу (4.6))} \\ &= \mu(\tilde{\varphi}_{tt'}([c_t], x_{tt''})) = \varphi_{tt''}(c_t, x_{tt''}) && \text{(в силу (4.8)),} \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Давайте теперь кратко сравним условия реализуемости для общей временной системы и для линейной временной системы.

Говоря об условиях согласованности $\bar{\rho}$ с временной системой S, мы должны сравнить между собой теорему 2.1 гл. II и теорему 3.1. Предположим, что выполняется условие (i) теоремы 3.1, т. е. что

$$(\forall c_0)(\forall x^t)(\exists c_t)(\rho_{1t}(c_t) = (\rho_{10}(c_0) + \rho_{20}(x^t \cdot 0)) \mid T_t. \tag{4.9}$$

Объединяя тогда условие (4.9) с условием согласованности реакций на входное воздействие, мы получим, что

$$\begin{aligned} (\forall c_0)(\forall x^t)(\forall x_t)(\exists c_t)(\rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_t) = \\ = (\rho_{10}(c_0) + \rho_{20}(x^t \cdot x_t)) \mid T_t), \end{aligned}$$

а это равенство в точности совпадает с условием (P1), сформулированным в теореме 2.1 гл. II. Аналогично можно получить и свойство (P2) из условия согласованности реакций на состояние.

Переходя к условиям реализуемости семейства $\bar{\rho}$, мы должны сравнить теорему 1.1 гл. III и теорему 3.2. Если $\bar{\rho}$ удовлетворяет условию согласованности реакций на входное воздействие, то из условия (i) теоремы 3.2 следует (Р3). В действительности из условия (i) теоремы 3.2 вытекает, что

$$(\forall c_t)\,(\forall x_{tt'})\,(\exists c_{t'})\,(\rho_{t'}\,(c_{t'},\,0) = \rho_t\,(c_t,\,x_{tt'}\cdot 0)\mid T_{t'}).$$

Но так как $(\forall x_{t'})\,(\rho_{2t'}\,(x_{t'}) = \rho_{2t}\,(0\cdot x_t)\mid T_{t'})$, то

$$(\forall c_t)\,(\forall x_{tt'})\,(\exists c_{t'})\,(\forall x_{t'})\,(\rho_{t'}\,(c_{t'},\,x_{t'}) = \rho_t\,(c_t,\,x_{tt'}\cdot x_{t'})\mid T_{t'}),$$

а это и есть условие (Р3).

Все это позволяет нам заключить, что условия реализуемости для линейных систем почти ничем не отличаются от аналогичных условий для систем общего вида. Однако в том виде, в каком они были сформулированы в настоящей главе, они более удобны для применения в линейном случае, поскольку теперь они сформулированы по отдельности для двух важнейших с точки зрения линейной теории составляющих реакций, в результате чего одна группа условий относится к ρ_{1t}, а другая — к ρ_{2t}. Этим фактом мы еще воспользуемся далее, рассматривая вопрос о естественной реализации линейных временных систем.

Предыдущая теорема может быть использована также и для решения вопроса о реализуемости компонент реакции $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$. Например, предположим, что задано семейство реакций на входное воздействие. Тогда $\bar{\rho}_2$ можно считать реализуемым в том и только в том случае, когда найдется такая реакция на состояние $\bar{\rho}_1$, что реализуемо $(\bar{\rho}_1,\,\bar{\rho}_2)$. Из теоремы 3.2 тогда вытекает, что $\bar{\rho}_2$ реализуемо тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию согласованности (ii) и, более того, существует такое отображение $\bar{\rho}_1$, что выполнено условие (i) (в котором фигурируют обе компоненты $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$).

Если система удовлетворяет условиям сильной неупреждаемости, мы можем получить более сильные и специфические условия реализуемости:

Теорема 3.3. Пусть $\bar{\rho}_2 = \{\rho_{2t}\colon X_t \to Y_t\}$ — семейство линейных отображений. Семейство $\bar{\rho}_2$ реализуемо сильно неупреждающей линейной системой (т. е. оно является семейством реакций на входное воздействие некоторой сильно неупреждающей линейной динамической системы) тогда и только тогда, когда

(i) $\rho_{2t}\,(x_t)\,(\tau) = \rho_{2t}\,(x_{t\tau}\cdot 0)\,(\tau)$ при любых $\tau \geqslant t$ (условие сильной неупреждаемости),

(ii) существуют два таких семейства линейных отображений $\{F_{tt'}\colon \widetilde{C}_t \to B\}$ и $\{G_{tt'}\colon X_{tt'} \to \widetilde{C}_{t'}\}$, что при любых $\hat{t} \in T$, $\hat{t} \geqslant t' \geqslant t$

$$\rho_{2t}\,(x_{tt'}\cdot 0)\,(\hat{t}) = F_{t'\hat{t}}\,[G_{tt'}\,(x_{tt'})],$$

где $G_{tt''}$ удовлетворяет условию

(iii) $G_{tt''}(0\cdot x_{t't''}) = G_{t't''}(x_{t't''})$ для $t \leqslant t' \leqslant t''$.

Доказательство. Начнем с доказательства достаточности. Для этого проверим выполнение условий согласованности реакций на состояние и на входное воздействие. Заметим, что из условий (i) и (ii) следует, что $\rho_{2t}(x_t)(\tau) = \rho_{2t}(x_{t\tau}\cdot 0)(\tau) = F_{\tau\tau}\cdot G_{t\tau}(x_{t\tau})$. Но тогда для всех $\tau \geqslant t'$

$$(\rho_{2t}(0\cdot x_{t'}) \mid T_{t'})(\tau) = \rho_{2t}(0\cdot x_{t'})(\tau) = F_{\tau\tau}\cdot G_{t\tau}(0\cdot x_{t'\tau}) =$$
$$= F_{\tau\tau}\cdot G_{t'\tau}(x_{t'\tau}) = \rho_{2t'}(x_{t'})(\tau),$$

и, следовательно, условие согласованности реакций на входное воздействие выполнено.

Определим теперь $\rho_{20} \mid T_t\colon X_{0t} \to Y_t$ так, чтобы

$$(\rho_{20} \mid T_t)(x_{0t}) = \rho_{20}(x_{0t}\cdot 0) \mid T_t.$$

Тогда мы получаем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
X_{0t} \arrow[r, "G_{0t}", "\text{на}"'] \arrow[d, "\rho_{20}\mid T_t"'] & C_t \arrow[dl, dashed, "\rho_{1t}"] \\
Y_t &
\end{tikzcd}$$

где $C_t = G_{0t}(X_{0t})$. Покажем теперь, что существует такое линейное отображение $\rho_{1t}\colon C_t \to Y_t$, которое делает эту диаграмму коммутативной. В самом деле, для любых $\tau \geqslant t$

$$G_{0t}(x_{0t}) = G_{0t}(x'_{0t}) \Rightarrow F_{t\tau}\cdot G_{0t}(x_{0t}) = F_{t\tau}\cdot G_{0t}(x'_{0t}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho_{20}(x_{0t}\cdot 0)(\tau) = \rho_{20}(x'_{0t}\cdot 0)(\tau),$$

и, значит,

$$G_{0t}(x_{0t}) = G_{0t}(x'_{0t}) \Rightarrow \rho_{20}(x_{0t}\cdot 0) \mid T_t = \rho_{20}(x'_{0t}\cdot 0) \mid T_t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\rho_{20} \mid T_t)(x_{0t}) = (\rho_{20} \mid T_t)(x'_{0t}).$$

Более того, по предположению отображение G_0 сюръективно. Поэтому $\rho_{1t}\colon C_t \to Y_t$ можно определить условием

$$\rho_{1t}(c_t) = (\rho_{20} \mid T_t)(x_{0t}),$$

где $c_t = G_{0t}(x_{0t})$. Пусть теперь $c_t \in C_t$ и $x_{tt'} \in X_{tt'}$ произвольны. Тогда

$$(\rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0)) \mid T_{t'} = (\rho_{20}(x_{0t} \cdot 0) \mid T_t + \rho_{20}(0 \cdot x_{tt'} \cdot 0) \mid T_t) \mid T_{t'} =$$
$$= \rho_{20}(x_{0t} \cdot x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'} = \rho_{1t'}(c_{t'}),$$

где $c_{t'} = G_{0t'}(x_{0t} \cdot x_{tt'})$. Если же $c_{t'}$ — произвольный элемент из $C_{t'}$, то

$$\rho_{1t'}(c_{t'}) = \rho_{20}(x_{0t'} \cdot 0) \mid T_{t'} = \qquad (\text{где } c_{t'} = G_{0t'}(x_{0t'}))$$
$$= ((\rho_{20}(x_{0t} \cdot 0) + \rho_{20}(0 \cdot x_{tt'} \cdot 0)) \mid T_t) \mid T_{t'} =$$
$$= (\rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0)) \mid T_{t'},$$

где $c_t = G_{0t}(x_{0t})$, и, значит, выполнено и условие согласованности реакций на входное воздействие, а сильная неупреждаемость является прямым следствием условия (i) теоремы 3.3.

Перейдем к доказательству необходимости. Предположим, что $\{\langle\rho_t, \varphi_{tt'}\rangle\}$ — сильно неупреждающая динамическая система, семейство реакций которой на входное воздействие совпадает с семейством $\{\rho_{2t}\}$, заданным в формулировке теоремы.

Тогда условия реализуемости означают, чтобы для каждого $x_{tt'} \in X_{tt'}$

$$\rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'} = \rho_{1t'}(\varphi_{2tt'}(x_{tt'})).$$

Положим теперь $G_{tt'}(x_{tt'}) = \varphi_{2tt'}(x_{tt'})$ и $F_{t\tau}(c_t) = \rho_{1t}(c_t)(\tau)$. Тогда при $\tau \geqslant t'$

$$\rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0)(\tau) = F_{t'\tau} \cdot G_{tt'}(x_{tt'}).$$

Из свойства композиции семейства $\varphi_{tt'}$ вытекает, что

$$\varphi_{2tt''}(0 \cdot x_{t't''}) = \varphi_{t't''}(\varphi_{2tt'}(0), x_{t't''}) = \varphi_{2t't''}(x_{t't''}),$$

или $G_{tt''}(0 \cdot x_{t't''}) = G_{t't''}(x_{t't''})$. Наконец, из условия сильной неупреждаемости следует, что для $\tau \geqslant t$

$$\rho_{2t}(x_t)(\tau) = \rho_{2t}(x_{t\tau} \cdot 0)(\tau), \quad \text{ч. т. д.}$$

Условие (ii) предыдущей теоремы показывает, что эффект входного воздействия на систему на промежутке $[t, t')$ всегда может быть разложен на две составляющие: (1) изменение состояния системы на протяжении этого промежутка времени $[t, t')$ под непосредственным влиянием входного воздействия $x_{tt'}$; (2) свободная эволюция состояния, следующая за этим промежутком времени, и ее преобразование в значение выходных величин.

В частном случае, когда система описывается системой линейных дифференциальных уравнений, нетрудно видеть, что условия (i) и (ii) всегда выполнены. Например, предположим, что $G_{tt'}$ описывается уравнением

$$c_{t''} = G_{tt''}(x_{tt''}) = \int_t^{t''} w(t'', \sigma)\, x(\sigma)\, d\sigma.$$

Если $x(\sigma) = 0$ на промежутке $t \leqslant \sigma \leqslant t'$, то

$$G_{tt''}(0 \cdot x_{t't''}) = \int_{t'}^{t''} w(t'', \sigma)\, x(\sigma)\, d\sigma = G_{t't''}(x_{t't''}),$$

а это есть не что иное, как условие (iii).

Если семейство линейных реакций $\bar{\rho}$ реализуемо, то можно указать удобный способ построения семейства функций перехода состояний. Напомним, что семейство реакций $\bar{\rho}$ считается приведенным тогда и только тогда, когда

$$(\forall x_t)\,[\rho_t(c_t, x_t) = \rho_t(c'_t, x_t)] \Rightarrow c_t = c'_t.$$

В линейном случае семейство реакций $\bar{\rho}$ приведено тогда и только тогда, когда ρ_{1t} — взаимно однозначное отображение. Все это позволяет нам сформулировать следующую теорему:

Теорема 3.4. Пусть $\bar{\rho}$ есть некоторое семейство приведенных линейных реакций системы и это семейство реализуемо. Тогда соответствующее ему семейство линейных функций перехода состояний однозначно определяется условиями

$$\varphi_{1tt'}(c_t) = \rho_{1t'}^{-1}(\rho_{1t}(c_t) \mid T_{t'}),$$
$$\varphi_{2tt'}(x_{tt'}) = \rho_{1t'}^{-1}(\rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'}),$$

где функция ρ_{1t}^{-1}: $\rho_{1t}(C_t) \to C_t$ такова, что $\rho_{1t}^{-1}(\rho_{1t}(c_t)) = c_t$.

Доказательство. Пусть $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ — линейная динамическая система. Тогда из условия декомпозиции ее реакции мы получаем

$$\rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t'}) = \rho_{1t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'})) + \rho_{2t'}(x_{t'}) =$$
$$= \rho_{1t'}(\varphi_{1tt'}(c_t)) + \rho_{1t'}(\varphi_{2tt'}(x_{tt'})) + \rho_{2t'}(x_{t'}) \qquad (4.10)$$

и

$$\rho_t(c_t, x_t) \mid T_{t'} = \rho_{1t}(c_t) \mid T_{t'} + \rho_{2t}(x_t) \mid T_{t'} =$$
$$= \rho_{1t}(c_t) \mid T_{t'} + \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'} + \rho_{2t}(0 \cdot x_{t'}) \mid T_{t'}. \qquad (4.11)$$

Но, согласно определению 2.3, левые части уравнений (4.10) и (4.11) равны, так что, приравнивая соответствующие слагаемые в правых частях, мы получим

$$\rho_{1t'}(\varphi_{1tt'}(c_t)) = \rho_{1t}(c_t) \mid T_{t'} \qquad (4.12)$$

и

$$\rho_{1t'}(\varphi_{2tt'}(x_{tt'})) = \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'}. \qquad (4.13)$$

А так как $\bar{\rho}$ приведено, из равенств (4.12) и (4.13) следует, что

$$\varphi_{1tt'}(c_t) = \rho_{1t'}^{-1}(\rho_{1t}(c_t) \mid T_{t'})$$

и

$$\varphi_{2tt'}(x_{tt'}) = \rho_{1t}^{-1}(\rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'}),$$

т. е. $\varphi_{1tt'}$ и $\varphi_{2tt'}$ однозначно определяются семейством $\bar{\rho}$, ч. т. д.

Только что доказанная теорема определяет способ построения семейства функций перехода состояний линейной системы по заданному семейству реакций $\bar{\rho}$.

4. КОНСТРУИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Коммутативная диаграмма для вспомогательных функций выглядит так же, как и для общей временной системы. Однако специальные свойства систем, обусловленные их линейностью, дают возможность конструировать объекты состояний и соответствующие вспомогательные функции более эффективным образом.

Для заданной (полной) линейной временной системы $S \subset X \times Y$ и любого $t \in T$ договоримся обозначать через $S_t^0 \subset S_t$ множество

$$S_t^0 = \{(0, y_t)\colon (0, y_t) \in S_t\}.$$

Заметим, что при любом $t \in T$ множество S_t^0 является линейным пространством.

Это приводит нас к следующей теореме:

Теорема 4.1. Пусть S — некоторая линейная временная система. Пусть $C_t = S_t^0$ при любом $t \in T$. Тогда для S существует такая начальная линейная реакция

$$\rho_0\colon C_0 \times X \to Y,$$

что

$$\rho_0(c_0, x) = \rho_{10}(c_0) + \rho_{20}(x),$$

где $\rho_{10}((0, y)) = y$, а реакция ρ_{20} линейна. Более того, если $\bar{\rho} = \{\rho_t\}$ определяется условиями

$$\rho_{1t}((0, y_t)) = y_t, \quad \text{где} \quad \rho_{1t}\colon C_t \to Y_t,$$

$$\rho_{2t}(x_t) = \rho_{20}(0 \cdot x_t) \mid T_t, \quad \text{где} \quad \rho_{2t}\colon X_t \to Y_t,$$

и

$$\rho_t(c_t, x_t) = \rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_t),$$

то $\bar{\rho}$ реализуемо и, поскольку $\bar{\rho}$ приведено, динамическая реализация $\bar{\rho}$ определяется однозначно.

Доказательство. Первая часть предложения вытекает непосредственно из утверждения теоремы 1.2 гл. II. Поэтому остается только проверить, удовлетворяет ли $\{\rho_t\}$ условиям согласованности реакций на состояние и на входное воздействие.

(i) *Согласованность реакций на входное воздействие.* Непосредственно из определения следует, что

$$\rho_{2t'}(x_{t'}) = \rho_{20}(0 \cdot x_{t'}) \mid T_{t'}$$

и для $t \leqslant t'$

$$\rho_{2t}(0 \cdot x_{t'}) = \rho_{20}(0 \cdot x_{t'}) \mid T_t.$$

Следовательно,

$$\rho_{2t}(0 \cdot x_{t'}) \mid T_{t'} = \rho_{20}(0 \cdot x_{t'}) \mid T_{t'} = \rho_{2t'}(x_{t'}),$$

и потому условия согласованности реакций на входное воздействие выполнены.

(ii) *Согласованность реакций на состояние.* Пусть $c_t = (0, y_t) \in S_t$ и $x_{tt'}$ произвольны. Поскольку $(0 \cdot x_{tt'} \cdot 0, \rho_{20}(0 \cdot x_{tt'} \cdot 0)) \in S$, имеем

$$(x_{tt'} \cdot 0, \rho_{20}(0 \cdot x_{tt'} \cdot 0) \mid T_t) \in S_t,$$

а так как система S_t линейна, то

$$(x_{tt'} \cdot 0, y_t + \rho_{20}(0 \cdot x_{tt'} \cdot 0) \mid T_t) \in S_t.$$

Следовательно,

$$(0, y_t \mid T_{t'} + \rho_{20}(0 \cdot x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'}) \in S_{t'},$$

или

$$\rho_{1t'}(c_{t'}) = \rho_{1t}(c_t) \mid T_{t'} + \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'}$$

при некоторых $c_{t'} \in C_{t'}$. (Заметим, что мы воспользовались здесь согласованностью реакций на входное воздействие.) Пусть теперь $c_{t'} = (0, y_{t'}) \in S_{t'}$ произвольно. Тогда найдется такая пара $(x^{t'}, y^{t'})$, что $(x^{t'} \cdot 0, y^{t'} \cdot y_{t'}) \in S$, и, следовательно, для некоторого $c_0 \in C_0$

$$y^{t'} \cdot y_{t'} = \rho_{10}(c_0) + \rho_{20}(x^{t'} \cdot 0).$$

Поэтому при некотором $c_t \in C_t$

$$\begin{aligned} y_{t'} &= (\rho_{10}(c_0) + \rho_{20}(x^{t'} \cdot 0)) \mid T_{t'} = \\ &= ((\rho_{10}(c_0) + \rho_{20}(x^t \cdot 0) + \rho_{20}(0 \cdot x_{tt'} \cdot 0)) \mid T_t) \mid T_{t'} = \\ &= (\rho_{1t}(c_t) + \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0)) \mid T_{t'}. \end{aligned}$$

Отметим, что существование такого c_t гарантируется первой частью доказательства согласованности реакций на состояние и что семейство $\bar{\rho}$, очевидно, приведено. Окончательный результат получается теперь из утверждения теоремы 3.4, ч. т. д.

Определение 4.1. Пусть S — некоторая линейная система. Множество $S^0 = \{(0, y): (0, y) \in S\}$ будем называть (алгебраическим) *ядром* системы S.

Опираясь теперь на теорему 4.1, мы можем предложить конкретную процедуру построения вспомогательных функций и соответствующего пространства состояний для линейной системы, основанную на использовании в качестве множества состояний алгебраического ядра системы. Последовательность этапов этого процесса отражена на рис. 4.1.

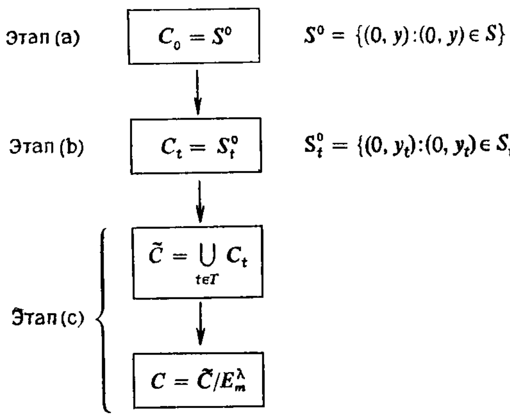


Рис. 4.1.

(a) Прежде всего в качестве объекта начальных состояний выбирается алгебраическое ядро S^0.

(b) На втором этапе в качестве объектов состояний в любой момент времени t выбирается ядро соответствующего сужения системы, т. е. $C_t = S_t^0$.

(c) На третьем этапе вводится подходящее отношение эквивалентности и пространство состояний определяется как соответствующее фактормножество.

Условия, гарантирующие возможность использования такой процедуры, приведены на рис. 4.2.

Основное различие между процедурами построения пространств состояний для временной системы общего вида и для линейной системы заключается в выборе объектов состояний. В общем случае объект начальных состояний выбирается априори и отражает необходимую начальную информацию. Для линейных же систем объект начальных состояний однозначно определяется самой системой. Аналогичные утверждения справедливы и относительно выбора объектов состояний для других моментов времени. Еще одно различие между общим и линейным случаями состоит в том, что в первом случае состояния определяются по отношению

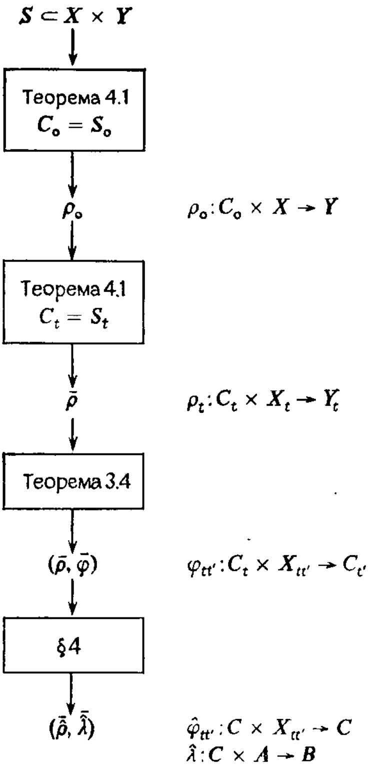


Рис. 4.2.

к прошлому, а во втором — по отношению к будущему. Предлагаемая нами конструктивная процедура окажется особенно удобной для стационарных линейных временных систем (которыми мы займемся в гл. VI), поскольку пространство состояний в этом случае определяется наиболее естественным образом.

Теорема 4.1 указывает также на то, какие ограничения налагаются на выбор реакций системы. В принципе, если не требовать, чтобы система была неупреждаемой, в качестве ρ_{20} можно выбрать любую функцию f: $X \to Y$, удовлетворяющую условию $(x, f(x)) \in S$ при любом x и требованию линейности, и делать это независимо от выбора ρ_{10}. В этом и заключена по сути дела вся свобода выбора в конструктивной процедуре, намеченной в теореме 4.1; все же остальное предопределено самой системой S. Заметьте, что семейство $\bar{\rho}$, фигурирующее в теореме 4.1, — это уже приведенное реализуемое семейство реакций, и, следовательно, согласно теореме 3.4, семейство функций перехода состояний $\bar{\varphi}$, соответствующее $\bar{\rho}$, определяется однозначно, т. е.

$$\varphi_{1tt'}(c_t) = \rho_{t'}^{-1}(\rho_{1t}(c_t) \mid T_{t'})$$

и

$$\varphi_{2tt'}(x_{tt'}) = \rho_{t'}^{-1}(\rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'}).$$

Более того, если система удовлетворяет требованиям неупреждаемости, ее можно представить с помощью $\bar{\varphi}$ и $\bar{\lambda}$. Эта часть процедуры совершенно такая же, как и для общей временной системы. Только в линейном случае функции из $\bar{\lambda}$ автоматически получаются линейными.

Обратимся теперь к вопросу о выборе отношения эквивалентности, порождающего пространство состояний, и к процедуре построения вспомогательных функций.

Пусть $C = \bigcup_{t \in T} C_t$. Отношение эквивалентности E_m^λ, которое использовалось для общих временных систем, непригодно для линейного случая, поскольку фактормножество $\tilde{C}/E_m^\lambda$ может оказаться нелинейным пространством, в то время как пространство состояний линейной системы заведомо линейно. Чтобы преодолеть это затруднение, мы с самого начала потребуем, чтобы выбираемое отношение эквивалентности было и отношением конгруэнтности. Напомним, что отношение эквивалентности $E_\alpha^\lambda \subset \tilde{C} \times \tilde{C}$ является отношением конгруэнтности тогда и только тогда, когда

$$(c_t, c_{t'}) \in E_\alpha^\lambda \ \&\ (c'_t, c'_{t'}) \in E_\alpha^\lambda \Rightarrow (c_t + c'_t,\ c_{t'} + c'_{t'}) \in E_\alpha^\lambda$$

и

$$(c_t, c'_t) \in E_\alpha^\lambda \ \&\ \beta \in \mathcal{A} \Rightarrow (\beta c_t,\ \beta c'_t) \in E_\alpha^\lambda$$

Пусть теперь отношение конгруэнтности $E_\alpha^\lambda \subset \tilde{C} \times \tilde{C}$ удовлетворяет условию

$$(c_t, c_{t'}) \in E_\alpha^\lambda \Rightarrow (\forall a)\,(\lambda_t(c_t, a) = \lambda_{t'}(c_{t'}, a))\ \&\ (t = t' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall x_{tt''})\,((\varphi_{tt''}(c_t, x_{tt''}), \varphi_{tt''}(c_{t'}, x_{tt''})) \in E_\alpha^\lambda)).$$

В качестве примера такого отношения конгруэнтности может служить тривиальное отношение эквивалентности $I = \{(c_t, c_t): c_t \in C_t\} \subset \tilde{C} \times \tilde{C}$. Используя ту же процедуру, что и в § 3 гл. III, можно доказать существование максимального отношения конгруэнтности E_m^λ, с помощью которого затем сконструировать пространство состояний. Легко показать, что подобное пространство состояний $C = \tilde{C}/E_m^\lambda = \{[c]\}$ должно быть линейным. Действительно, предположим, что наша система является *полной* в том смысле, что

$$(\forall t)\,(\forall [c])\,[C_t \cap [c] \neq \varnothing],$$

т. е. что в любой момент времени t найдется по крайней мере одно состояние из каждого класса эквивалентности по E_m^λ. Тогда пространство C является линейным в том смысле, что

$$[c] + [\hat{c}] = [c_0 + \hat{c}_0], \quad \text{где} \quad c_0 \in [c] \quad \text{и} \quad \hat{c}_0 \in [\hat{c}],$$

и

$$\alpha [c] = [\alpha c_0], \quad \text{где} \quad c_0 \in [c].$$

Поскольку E_m^λ— отношение конгруэнтности, приведенные выше определения операций сложения и умножения на скаляр корректны, и, более того, для любого $t \in T$ из $c_t \in [c]$ и $\hat{c}_t \in [\hat{c}]$ следует, что

$$[c] + [\hat{c}] = [c_t + \hat{c}_t] \quad \text{и} \quad \alpha [c] = [\alpha c_t].$$

В связи с этим функцию перехода состояний

$$\hat{\varphi}_{tt'}\colon C \times X_{tt'} \to C$$

и выходную функцию

$$\hat{\lambda}\colon C \times A \to B$$

можно определить, потребовав, чтобы

$$\hat{\varphi}_{tt'} ([c_t], x_{tt'}) = [\varphi_{tt'} (c_t, x_{tt'})],$$

а

$$\hat{\lambda} ([c], a) = \lambda_t (c_t, a),$$

где $c_t \in [c]$. Заметим, что $\hat{\lambda}$ при этом инвариантна во времени (поскольку система считается полной).

Построенные выше объекты состояний определялись непосредственно в терминах первичных системных понятий (т. е. входов и выходов системы). Поэтому динамическое представление *линейной системы*, основанное на процедурах построения, отраженных на рис. 4.1 и 4.2, мы будем называть ее *естественной реализацией*.

Глава V

ПРЕДОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

В этой главе мы займемся более подробным исследованием класса предопределенных систем. В иллюстративных целях будет приведено несколько примеров конкретных предопределенных систем, что позволит нам показать, насколько широко распространены эти системы. Затем мы покажем, как для таких систем непосредственно по их парам «вход — выход» можно получить «хорошие» реакции системы, не привлекая явно понятия объекта начальных состояний. При этом построенные реакции окажутся неупреждающими, реализуемыми, а соответствующие им объекты состояний можно будет построить на основе предыстории пар «вход — выход». Подобные семейства реакций системы и объекты состояний мы будем называть естественными, поскольку их построение полностью определяется лишь заданием пар «вход — выход», т. е. самой системой. По этим реакциям можно затем построить и пространство состояний, которое по тем же причинам также называется естественным.

Для того чтобы охарактеризовать некоторые предопределенные системы, нам придется ввести понятие системы с конечной памятью. При этом мы покажем, что предопределенные и стационарные системы являются системами с конечной памятью и, обратно, что если множество моментов времени стационарной системы с конечной памятью вполне упорядочено, то эта система является предопределенной.

1. О КЛАССЕ ПРЕДОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Основная идея нашего формального подхода состоит в следующем: вырабатывая объяснение некоторого явления, следует оставаться как можно ближе к результатам непосредственных наблюдений и вводить дополнительные структуры лишь тогда, когда это абсолютно необходимо и с минимумом новых предположений. Поэтому особый интерес для нас представляют системы, в которых дополнительные структуры можно вводить, не делая новых предположений, а основываясь лишь непосредственно на наблюдениях, т. е. на парах «вход — выход». И если нас особо интересует вопрос о представлении систем в пространстве состояний, то к классу систем, допускающих подобный естественный подход, должны быть отнесены предопределенные системы.

Понятие предопределенности уже было введено в гл. II среди других понятий причинного ряда. По сути дела если вы наблюдаете пару «вход — выход» предопределенной системы достаточно долго, то из этих наблюдений можно извлечь все, что требуется для конструирования аппарата описания переходов состояний системы, а значит, и получить возможность исследовать динамику поведения системы. Точнее говоря, мы будем пользоваться в этой главе следующим понятием:

Определение 1.1. Временная система $S \subset A^T \times B^T$ называется *предопределенной* тогда и только тогда, когда существует такое $\hat{t} \in T$, что

(i) $(x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}) = (x'^{\hat{t}}, y'^{\hat{t}})$ и $x^t = x'^t \Rightarrow \bar{y}^t = \bar{y}'^t$

для всех x', $x \in X$ и $t \geqslant \hat{t}$;

(ii) $(\forall (x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}) \in S^{\hat{t}})(\forall x_{\hat{t}})$

$$(\exists y_{\hat{t}})\,(x^{\hat{t}} \cdot x_{\hat{t}}, y^{\hat{t}} \cdot y_{\hat{t}}) \in S.$$

Напомним, что условие (ii) называется условием полноты. Это условие делает возможным определение семейства естественных реакций системы.

Важность понятия предопределенной системы для проблемы ее представления в пространстве состояний определяется между прочим и следующими факторами:

(i) Предопределенные системы, как будет показано далее, заведомо являются неупреждающими.

(ii) Для таких систем удается «естественным» образом построить семейство реакций, сохраняющих такие существенные свойства системы, как ее линейность, неупреждаемость, стационарность и т. п. Большинство результатов теории представления общих систем зависит от существования «хороших» реакций системы. Однако, к сожалению, в общем случае неизвестно, как строить такие функции, а для предопределенных систем, как будет показано в настоящей главе, такая процедура существует.

(iii) Класс предопределенных систем довольно широк и содержит системы различных типов, представляющие как теоретический, так и практический интерес.

(iv) Можно привести систему доводов, показывающих, что любая корректно определенная система должна быть, вообще говоря, предопределенной и что отсутствие предопределенности проистекает из недостатка информации о самой системе.

Чтобы проиллюстрировать положение (iii), обратимся к некоторым примерам.

(a) Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему, описываемую следующими дифференциальными уравнениями:

$$d\mathbf{z}/dt = F\mathbf{z} + G\mathbf{x}, \tag{5.1}$$

$$\mathbf{y} = H\mathbf{z}, \tag{5.2}$$

где F, G и H — матрицы с постоянными элементами, а $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ — векторы. Пусть размерность $\mathbf{z}$ равна n, а $T = [0, \infty)$. Тогда имеет место следующее предложение:

Предложение 1.1. Линейные инвариантные во времени системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями (5.1) и (5.2), являются предопределенными для любого сколь угодно малого $\hat{t} > 0$.

Доказательство. Из уравнений (5.1) и (5.2) следует, что

$$\mathbf{y}(t) = He^{Ft}\mathbf{z}(0) + H\int_0^t e^{F(t-\tau)}G\mathbf{x}(\tau)\,d\tau. \tag{5.3}$$

Пусть теперь $\hat{t}$ — произвольное положительное число, а $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ связаны уравнением

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = He^{Ft}\,\hat{\mathbf{z}}(0) + H\int_0^t e^{F(t-\tau)}G\hat{\mathbf{x}}(\tau)\,d\tau. \tag{5.4}$$

Тогда из равенства $(\mathbf{x}^{\hat{t}}, \mathbf{y}^{\hat{t}}) = (\hat{\mathbf{x}}^{\hat{t}}, \hat{\mathbf{y}}^{\hat{t}})$ следует, что равенство $He^{F\sigma}\mathbf{z}(0) = He^{F\sigma}\hat{\mathbf{z}}(0)$ справедливо на отрезке $0 \leqslant \sigma \leqslant \hat{t}$. Отсюда с помощью элементарных выкладок получаем, что $H\mathbf{z}(0) = H\hat{\mathbf{z}}(0)$, $HF\mathbf{z}(0) = HF\hat{\mathbf{z}}(0)$, ..., $HF^{n-1}\mathbf{z}(0) = HF^{n-1}\hat{\mathbf{z}}(0)$. Следовательно, равенство

$$He^{F\sigma}\mathbf{z}(0) = He^{F\sigma}\hat{\mathbf{z}}(0)$$

справедливо для любого $\sigma \geqslant 0$, откуда следует, что если $\mathbf{x}^t = \hat{\mathbf{x}}^t$ $(t \geqslant \hat{t})$, то $\overline{\mathbf{y}} = \overline{\hat{\mathbf{y}}}^t$. Таким образом требование полноты, очевидно, выполнено, ч. т. д.

(b) Система линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующие конечно-разностные уравнения:

$$\mathbf{z}_{k+1} = F\mathbf{z}_k + G\mathbf{x}_k, \tag{5.5}$$

$$\mathbf{y}_k = H\mathbf{z}_k, \tag{5.6}$$

где F, G и H — матрицы с постоянными элементами, а $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{y}_k$ и $\mathbf{z}_k$ — векторы. Как и раньше, вектор $\mathbf{z}_k$ будем считать n-мерным. Пусть $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Для этой системы имеет место следующее предложение:

Предложение 1.2. Линейные системы, описываемые конечно-разностными уравнениями с постоянными коэффициентами (5.5) и (5.6), являются предопределенными с момента времени $\hat{t} = n$, где n — размерность их пространства состояний.

Доказательство. Из уравнений (5.5) и (5.6) имеем

$$\mathbf{y}_k = HF^k\mathbf{z}_0 + H\sum_{i=0}^{k-1} F^{k-1-i}G\mathbf{x}_i.$$

Пусть

$$\hat{\mathbf{y}}_k = HF^k\hat{\mathbf{z}}_0 + H\sum_{i=0}^{k-1} F^{k-1-i}G\hat{\mathbf{x}}_i.$$

Предположим, что $(\mathbf{x}^{\hat{t}}, \mathbf{y}^{\hat{t}}) = (\hat{\mathbf{x}}^{\hat{t}}, \hat{\mathbf{y}}^{\hat{t}})$ для $\hat{t} = n$. Тогда очевидно, что $H\mathbf{z}_0 = H\hat{\mathbf{z}}_0$, $HF\mathbf{z}_0 = HF\hat{\mathbf{z}}_0$, ..., $HF^{n-1}\mathbf{z}_0 = HF^{n-1}\hat{\mathbf{z}}_0$, и, следовательно, равенство $HF^k\mathbf{z}_0 = HF^k\hat{\mathbf{z}}_0$ справедливо при любых $k \geqslant 0$. Отсюда следует, что если $\mathbf{x}^t = \hat{\mathbf{x}}^t$, то $\bar{\mathbf{y}}^t = \bar{\hat{\mathbf{y}}}^t$ при любых $t \geqslant \hat{t} = n$, и условие полноты, очевидно, выполнено, ч. т. д.

Доказательство предложения 1.2 показывает, что в общем случае $\hat{t}$ может быть меньше, чем n.

(с) Автоматы

Далее мы покажем, что автомат общего вида не обязательно оказывается предопределенной системой. Однако каждый конечный автомат содержит некоторую подсистему, которая предопределена. Пусть $S = \langle A, B, C, \delta, \lambda \rangle$ — конечный автомат, для которого A — конечный входной алфавит, B — конечный выходной алфавит, C — конечное пространство состояний, δ — функция перехода в следующее состояние, $\delta\colon C \times A \to C$, и λ — выходная функция, $\lambda\colon C \times A \to B$. Пусть мощность множества C равна n. Обозначим через A^* и B^* свободные моноиды, порожденные A и B соответственно. Определим также обычным образом продолжения $\delta\colon C \times A^* \to C$ и $\lambda\colon C \times A^* \to B^*$ функций δ и λ. Обозначим через $\bar{a}$ бесконечную цепочку элементов a, т. е. пусть $\bar{a} = a \cdot a \ldots$, и определим подсистему $\bar{S}$ системы S следующим образом. Пусть S — система с дискретным временем и множеством моментов времени $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, и пусть $\bar{S}$ — такое подмножество $\bar{S}$, что

$$\bar{S} = \{(\bar{a},\ \lambda(c, \bar{a})):\ c \in C\}, \tag{5.7}$$

где $a \in A$. Тогда справедливо следующее предложение:

Предложение 1.3. Пусть $S = \langle A,\ B,\ C,\ \delta,\ \lambda \rangle$ — конечный автомат и n — мощность множества C. Тогда имеется подсистема $\bar{S}$, описываемая соотношением (5.7), и эта подсистема является предопределенной начиная с момента времени n.

Доказательство. Рассмотрим конечный автомат

$$S_a = \langle \{a\},\ B,\ C,\ \delta \mid C \times \{a\},\ \lambda \mid C \times \{a\} \rangle.$$

Заметим, что S_a допускает входные цепочки лишь типа a^k (т. е. цепочки, состоящие из k элементов a), где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда, согласно одному хорошо известному свойству конечных автоматов, из $\lambda(c, a^n) = \lambda(\hat{c}, a^n)$ следует, что $\lambda(c, a^k) = \lambda(\hat{c}, a^k)$ при любом k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Но это значит, что $\bar{S}$ предопределена начиная с момента $\hat{t} = n$ и условие полноты, очевидно, выполнено, ч. т. д.

(d) Конечные автоматы, не являющиеся предопределенными

Выше уже отмечалось, что в общем случае автомат не обязательно является предопределенной системой. Приведем теперь

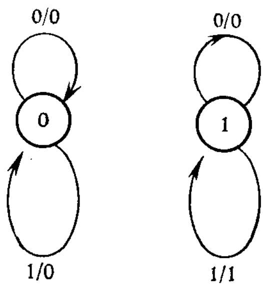


Рис. 1.1.

простой пример, подтверждающий это утверждение. Пусть конечный автомат $S = \langle A,\ B,\ C,\ \delta,\ \lambda \rangle$ определен следующим образом:

$$A = B = C = \{0,\ 1\},$$

$$\delta(0,\ 0) = \delta(0,\ 1) = 0, \qquad \delta(1,\ 0) = \delta(1,\ 1) = 1,$$

$$\lambda(0,\ 0) = \lambda(0,\ 1) = 0, \qquad \lambda(1,\ 0) = 0,\ \lambda(1,\ 1) = 1.$$

Его диаграмма перехода состояний приведена на рис. 1.1.

Из определения этого автомата ясно, что для сколь угодно большого n имеет место равенство $\lambda(0, 0^n) = \lambda(1, 0^n)$. Но в то же время $\lambda(0, 0^n\cdot 1) \neq \lambda(1, 0^n\cdot 1)$. Следовательно, этот автомат не является предопределенным.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

В предыдущих двух главах мы рассматривали вопрос о представлении в пространстве состояний временных и общих динамических систем. И по сути дела все полученные там результаты зависели от возможности доказать существование неупреждающей реакции системы.

В настоящее время неизвестна общая процедура отыскания подобной реакции для системы общего вида, за исключением того случая, когда система предопределена.

(a) Предопределенные общие временные системы

Большинство результатов, полученных для предопределенных систем, базируется на следующем предложении:

Предложение 2.1. Пусть система S предопределена начиная с момента времени $\hat{t}$. Тогда

(i) для этой системы существует сильно неупреждающая начальная реакция $\rho_{\hat{t}}$ в момент времени $\hat{t}$, которой соответствует объект состояний $S^{\hat{t}} = S \mid T^{\hat{t}}$;

(ii) между S^t $(t \geqslant \hat{t})$ и произведением $S^{\hat{t}} \times X_{\hat{t}t}$ существует взаимно однозначное соответствие, $S^t \leftrightarrow S^{\hat{t}} \times X_{\hat{t}t}$, и, следовательно, S^t можно использовать в качестве объекта состояний для реализуемого сильно неупреждающего семейства реакций $S_{\hat{t}}$.

Доказательство. Из предложения 4.4 гл. II следует, что функция

$$S(x^t, y^t) = \{(x_t, y_t): (x^t\cdot x_t, y^t\cdot y_t) \in S\}$$

является сильно неупреждающей. Поэтому положим $C_{\hat{t}} = S^{\hat{t}}$, а $\rho_{\hat{t}}: C_{\hat{t}} \times X_{\hat{t}} \to Y_{\hat{t}}$ определим, потребовав, чтобы $\rho_{\hat{t}}(c_{\hat{t}}, x_{\hat{t}}) = S(c_{\hat{t}})(x_{\hat{t}})$. Но тогда $\rho_{\hat{t}}$ — сильно неупреждающая начальная реакция системы $S_{\hat{t}}$.

Пусть отображение $F: S^{\hat{t}} \times X_{\hat{t}t} \to S^t$ таково, что при $c_{\hat{t}} = (x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}})$ и $x_{\hat{t}} \mid T_{\hat{t}t} = x_{\hat{t}t}$

$$F((x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}), x_{\hat{t}t}) = (x^{\hat{t}}\cdot x_{\hat{t}t}, y^{\hat{t}}\cdot \rho_{\hat{t}}(c_{\hat{t}}, x_{\hat{t}}) \mid T_{\hat{t}t}) \in S^t.$$

Это условие корректно определяет F, поскольку реакция $\rho_{\hat{t}}$ является неупреждающей. Если $F((x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}), x_{\hat{t}t}) = F((\hat{x}^{\hat{t}}, \hat{y}^{\hat{t}}), \hat{x}_{\hat{t}t})$, то

$$(x^{\hat{t}} \cdot x_{\hat{t}t}, y^{\hat{t}} \cdot \rho_{\hat{t}}(c_{\hat{t}}, x_{\hat{t}}) \mid T_{\hat{t}t}) = (\hat{x}^{\hat{t}} \cdot \hat{x}_{\hat{t}t}, \hat{y}^{\hat{t}} \cdot \rho_{\hat{t}}(\hat{c}_{\hat{t}}, \hat{x}_{\hat{t}}) \mid T_{\hat{t}t}),$$

где $c_{\hat{t}} = (x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}})$ и $\hat{c}_{\hat{t}} = (\hat{x}^{\hat{t}}, \hat{y}^{\hat{t}})$. Значит, $x^t \cdot x_{\hat{t}t} = \hat{x}^{\hat{t}} \cdot \hat{x}_{\hat{t}t}$ и $y^{\hat{t}} = \hat{y}^{\hat{t}}$, а потому отображение F взаимно однозначно. Предположим теперь, что $(x^t \cdot x_{\hat{t}t}, y^t \cdot y_{\hat{t}t}) \in S^t$. Тогда

$$F((x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}), x_{\hat{t}t}) = (x^{\hat{t}} \cdot x_{\hat{t}t}, y^{\hat{t}} \cdot \rho_{\hat{t}}(c_{\hat{t}}, x_{\hat{t}}) \mid T_{\hat{t}t}) \in S^t,$$

где $x_{\hat{t}} \mid T_{\hat{t}t} = x_{\hat{t}t}$. Но так как S является предопределенной, то $\rho_{\hat{t}}(c_{\hat{t}}, x_{\hat{t}}) \mid T_{\hat{t}t} = y_{\hat{t}t}$ и, следовательно,

$$F((x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}), x_{\hat{t}t}) = (x^{\hat{t}} \cdot x_{\hat{t}t}, y^{\hat{t}} \cdot y_{\hat{t}t}).$$

Но это означает, что соответствие F взаимно однозначно.

Положим, наконец, $C_t = S^t$, и пусть ρ_t: $C_t \times X_t \to Y_t$ таково, что при $F^{-1}(c_t) = (c_{\hat{t}}, x_{\hat{t}t})$

$$\rho_t(c_t, x_t) = \rho_{\hat{t}}(c_{\hat{t}}, x_{\hat{t}t} \cdot x_t) \mid T_t.$$

Тогда теорема 1.1 гл. III утверждает, что семейство реакций $\{\rho_t\colon t \geqslant \hat{t}\}$ согласуется с $S_{\hat{t}}$ и является реализуемым, ч. т. д.

Предложение 2.1 явно показывает, что для любой предопределенной системы всегда существует неупреждающее реализуемое семейство реакций вместе с соответствующими объектами состояний, причем последние определяются через пары «вход — выход» системы и не требуют введения каких-либо вспомогательных объектов, например объекта начальных состояний (как для производящей функции состояний из предложения 4.5 гл. II). Поэтому эти реакции и эти объекты состояний будут называться *естественными.*

Естественные объекты состояний в общем случае не являются приведенными. В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение (5.1) и предположим, что $\mathbf{z}(0) \neq \hat{\mathbf{z}}(0)$, $\mathbf{x}^t \neq \hat{\mathbf{x}}^t$ и $\mathbf{y}^t \neq \hat{\mathbf{y}}^t$, но

$$e^{Ft}\mathbf{z}(0) + \int_0^t e^{F(t-\sigma)}G\mathbf{x}^t(\sigma)\,d\sigma = e^{Ft}\hat{\mathbf{z}}(0) + \int_0^t e^{F(t-\sigma)}G\hat{\mathbf{x}}^t(\sigma)\,d\sigma, \quad (5.8)$$

а

$$\mathbf{y}^t = \rho_0(\mathbf{z}(0), \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{x}_t) \mid T^t$$

и

$$\hat{\mathbf{y}}^t = \rho_0(\hat{\mathbf{z}}(0), \hat{\mathbf{x}}^t \cdot \hat{\mathbf{x}}_t) \mid T^t.$$

Очевидно, что $(\mathrm{x}^t, \mathrm{y}^t) \neq (\hat{\mathrm{x}}^t, \hat{\mathrm{y}}^t)$, но из уравнения (5.8) следует, что $\rho_t((\mathrm{x}^t, \mathrm{y}^t), \mathrm{x}_t) = \rho_t((\hat{\mathrm{x}}^t, \hat{\mathrm{y}}^t), \mathrm{x}_t)$ для любого x_t, где ρ_t — естественная реакция системы.

Как только неупреждающее семейство реакций определено, построить пространство состояний и необходимые вспомогательные функции можно примерно так же, как мы уже это делали для случая общих временных систем. Соответствующая процедура намечена на рис. 2.1 и 2.2.

Сравнение этой процедуры построения с описанной в гл. III позволяет сделать следующие выводы:

(i) Метод, намеченный на рис. 3.9 гл. III, является более общим, поскольку система не должна быть предопределенной.

(ii) Метод, представленный на рис. 2.2 этой главы, приводит к однозначному представлению в пространстве состояний, для определения которого используется лишь исходная информация (сужения пар «вход — выход») и не требуется введения вторичных понятий, вроде объекта начальных состояний, являющегося отправной точкой процедуры построения, приведенной на рис. 3.10 гл. III.

(iii) Метод, описанный на рис. 2.1 этой главы, позволяет представить $S_{\hat{t}}$, а не саму систему S. Это может показаться недостатком, но, как следует из предложения 1.1, для определенного класса систем $\hat{t}$ можно взять сколь угодно малым.

(b) Предопределенные линейные временные системы

Процедура определения представления в пространстве состояний для линейных предопределенных систем совершенно аналогична процедуре для общего нелинейного случая.

Предложение 2.2. Пусть $\rho_{\hat{t}}: S^{\hat{t}} \times X_{\hat{t}} \to Y_{\hat{t}}$ — естественная реакция предопределенной линейной системы $S \subset X \times Y$ начиная с момента времени $\hat{t}$. Тогда

(i) $S^{\hat{t}}$ — линейная алгебра;

(ii) $\rho_{\hat{t}}$ — неупреждающее линейное отображение;

(iii) реакция на состояние $\rho_{1\hat{t}}: S^{\hat{t}} \to Y^{\hat{t}}$ и реакция на входное воздействие $\rho_{2\hat{t}}: X_{\hat{t}} \to Y_{\hat{t}}$ задаются с помощью условий:

$$\rho_{1\hat{t}}(x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}) = y_{\hat{t}} \iff (x^{\hat{t}} \cdot 0, y^{\hat{t}} \cdot y_{\hat{t}}) \in S,$$

$$\rho_{2\hat{t}}(x_{\hat{t}}) = y_{\hat{t}} \iff (0 \cdot x_{\hat{t}}, 0 \cdot y_{\hat{t}}) \in S.$$

Доказательство. Заметим лишь, что

$$\rho_{\hat{t}}((x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}), x_{\hat{t}}) = y_{\hat{t}} \iff (x^{\hat{t}} \cdot x_{\hat{t}}, y^{\hat{t}} \cdot y_{\hat{t}}) \in S.$$

Рис. 2.1. Система, предопределенная с момента времени $\hat{t}$.

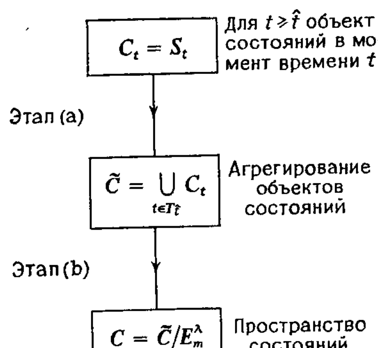


Рис. 2.2.

Требуемый результат получается теперь с помощью простых выкладок, ч. т. д.

Для естественной реализации линейной системы объект состояний $C_{\hat{t}}$ задается следующим образом: $C_{\hat{t}} = S^0_{\hat{t}} = \{y_{\hat{t}} : (0, y_{\hat{t}}) \in S\}$. Предложение 2.2 показывает, что естественная реакция на состояние $\rho_{1\hat{t}}$ задается отношением

$$\rho_{1\hat{t}}(x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}) = y_{\hat{t}} \Leftrightarrow (x^{\hat{t}} \cdot 0, y^{\hat{t}} \cdot y_{\hat{t}}) \in S.$$

Поэтому если $\rho_{1\hat{t}}$ рассматривать как отображение $S^{\hat{t}}$ в $S^0_{\hat{t}}$, то оно оказывается сюръективным и, более того, приведенный объект естественных состояний будет изоморфным $S^0_{\hat{t}}$.

Поскольку процедура естественной реализации годится и в настоящем случае, пространство состояний и вспомогательные функции строятся точно так же, как в предыдущей главе.

3. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРЕДОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Характеризация предопределенных систем для общего случая в настоящее время пока еще неизвестна. Однако любую линейную предопределенную систему можно охарактеризовать свойством ее неупреждаемости и некоторым свойством непрерывности. Для этого нам понадобится новое понятие.

Определение 3.1. Пусть ρ_0: $C \times X \to Y$ — линейная реакция некоторой линейной временной системы. Тогда, если для некоторого $\hat{t}$ функция ρ_0 удовлетворяет условию

$$(\forall c)(\rho_{10}(c) \mid T^{\hat{t}} = 0 \mid T^{\hat{t}} \Rightarrow \rho_{10}(c) = 0),$$

реакция ρ_0 называется *аналитической слева от* $\hat{t}$.

Предложение 3.1. Если реакция ρ_0: $C_0 \times X \to Y$ некоторой линейной временной системы $S \subset X \times Y$ является сильно неупреждающей и аналитической слева от $\hat{t}$, то система S является предопределенной начиная с момента времени $\hat{t}$.

Доказательство. Предположим, что ρ_0: $C_0 \times X \to Y$ является линейной сильно неупреждающей и аналитической слева от $\hat{t}$ реакцией некоторой системы. Пусть $(x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}) = (\hat{x}^{\hat{t}}, \hat{y}^{\hat{t}})$, где $y = \rho_{10}(c) + \rho_{20}(x)$ и $\hat{y} = \rho_{10}(\hat{c}) + \rho_{20}(\hat{x})$. Поскольку реакция ρ_0 сильно неупреждающая, из $x^{\hat{t}} = \hat{x}^{\hat{t}}$ следует, что $\rho_{20}(x) \mid \overline{T}^{\hat{t}} = \rho_{20}(\hat{x}) \mid \overline{T}^{\hat{t}}$. Следовательно, $\rho_{10}(c) \mid T^{\hat{t}} = \rho_{10}(\hat{c}) \mid T^{\hat{t}}$, поскольку $y \mid T^{\hat{t}} = \hat{y} \mid T^{\hat{t}}$. Более того, поскольку ρ_0 аналитична слева, мы имеем

$$\rho_{10}(c - \hat{c}) \mid T^{\hat{t}} = 0 \mid T^{\hat{t}} \Rightarrow \rho_{10}(c - \hat{c}) = 0 \Rightarrow \rho_{10}(c) = \rho_{10}(\hat{c}).$$

Поэтому из $x \mid T^t = \hat{x} \mid T^t$ следует, что $y \mid \overline{T}^t = \hat{y} \mid \overline{T}^t$, где $t \geqslant \hat{t}$. Но это значит, что S предопределена начиная с момента $\hat{t}$ и свойство полноты, очевидно, выполнено, ч. т. д.

Заметим, что система, описываемая уравнениями (1.1) и (1.2), сильно неупреждающая, а реакция ρ_{10} является аналитической слева как интеграл от $(dz/dt) = Fz$. Поэтому предложение 1.1 можно рассматривать как непосредственное следствие из последнего предложения.

Утверждение, обратное к предложению 3.1, доказывается в следующем предложении:

Предложение 3.2. Предположим, что временная система $S \subset X \times Y$ является предопределенной начиная с момента времени $\hat{t}$. Тогда система $S_{\hat{t}}$ сильно неупреждающая и, более того, если S линейна, то любая ее линейная реакция S аналитична слева от $\hat{t}$

Доказательство. Первая часть этого предложения уже доказана в предложении 2.1. Пусть теперь ρ_0: $C_0 \times X \to Y$ — линейная реакция системы, а $c \in C_0$ произвольно и таково, что $\rho_0(c) \mid T^{\hat{t}} = 0 \mid T^{\hat{t}}$. Будем считать, что произвольно и $x \in X$. Тогда $(x, \rho_{20}(x)) \in S$ и $(x, \rho_{10}(c) + \rho_{20}(x)) \in S$. Значит, из $\rho_{10}(c) \mid T^{\hat{t}} = 0 \mid T^{\hat{t}}$ следует, что

$$(x \mid T^{\hat{t}}, \rho_{20}(x) \mid T^{\hat{t}}) = (x \mid T^{\hat{t}}, (\rho_{10}(c) + \rho_{20}(x)) \mid T^{\hat{t}}).$$

Поэтому, в силу предопределенности, $\rho_{20}(x) = \rho_{10}(c) + \rho_{20}(x)$, т. е. $\rho_{10}(c) = 0$, ч. т. д.

Понятие автомата с конечной памятью, введенное в рамках теории конечных автоматов [4], оказывается внутренне связанным с понятием предопределенности. Выясним эту взаимосвязь.

Определение 3.2. Пусть $S \subset A^T \times B^T$ есть некоторая временная система с стационарным множеством моментов времени T. Предположим, что $\hat{t} \in T$ фиксировано и существует такое отображение h: $X^{\hat{t}} \times Y^{\hat{t}} \to B$, что $y(t') = (F^{-t}(x_{tt'}, y_{tt'})$ при любых $(x, y) \in S$ и $t' = t + \hat{t}$. Тогда система S называется *системой с конечной памятью глубины* $\hat{t}$.

Предложение 3.3. Предположим, что временная система $S \subset A^T \times B^T$ является предопределенной начиная с момента времени $\hat{t}$ и, кроме того, стационарной. Тогда S — система с конечной памятью глубины $\hat{t}$.

Доказательство. Пусть $\rho\colon S^{\hat t}\times X_{\hat t}\to Y_{\hat t}$ — естественная реакция системы S. Определим отображение $h\colon X_{tt'}\times\times Y_{tt'}\to B$ $(t'=t+\hat t)$ так, чтобы

$$h(x_{tt'},\ y_{tt'})=\rho\,(F^{-t}(x_{tt'},\ y_{tt'}),\ x_{\hat t})\,(\hat t).$$

Поскольку $\rho\,(F^{-t}(x_{tt'},\ y_{tt'}),\ x_{\hat t})\,(\hat t)$ не зависит от $x_{\hat t}$ в силу предопределенности системы, в этом условии $x_{\hat t}$ может быть произвольным. Покажем теперь, что S является системой с конечной памятью относительно этого h. Пусть $(x,\ y)\in S$ произвольно. Из $(x_t,\ y_t)\in S_t$ и $S_t'\subset F^t(S)$ следует, что $F^{-t}(x_t,\ y_t)\in S$. Следовательно,

$$\rho\,(F^{-t}(x_t,\ y_t)\mid T^{\hat t},\ F^{-t}(x_t)\mid T_{\hat t})=F^{-t}(y_t)\mid T_{\hat t}.$$

Пусть $t'=t+\hat t$. Тогда

$$\begin{aligned}(F^{-t}(y_t)\mid T_{\hat t})(\hat t)=y(t')=&\\ &=\rho\,(F^{-t}(x_t,\ y_t)\mid T^{\hat t},\ F^{-t}(x_t)\mid T_{\hat t})(\hat t)=\\ &=\rho\,(F^{-t}(x_{tt'},\ y_{tt'}),\ F^{-t}(x_{t'}))(\hat t)=\\ &=h(x_{tt'},\ y_{tt'}).\end{aligned}$$

Но это значит, что S — система с конечной памятью глубины $\hat t$, ч. т. д.

Только что доказанное предложение показывает, что система, описываемая дифференциальными уравнениями (5.1) и (5.2), относится к категории систем с конечной памятью.

Утверждение, обратное к предложению 3.3, доказывается в следующем предложении:

Предложение 3.4. Пусть $S\subset A^T\times B^T$ — некоторая временная система с множеством моментов времени T для стационарных систем, которое к тому же еще и вполне упорядочено. Если S — система с конечной памятью глубины $\hat t$, то S является предопределенной начиная с момента $\hat t$.

Доказательство. Пусть $(x,\ y)\in S$ и $(\hat x,\ \hat y)\in S$ произвольны. Поскольку система S с конечной памятью, то равенства $y(t')=h(x_{tt'},\ y_{tt'})$ и $\hat y(t')=h(\hat x_{tt'},\ \hat y_{tt'})$ справедливы для любых $t\in T$ и $t'=t+\hat t$. Нам нужно теперь показать, что из $(x^{\hat t},\ y^{\hat t})=(\hat x^{\hat t},\ \hat y^{\hat t})$ и $x^t=\hat x^t$ следует равенство $\bar y^t=\bar{\hat y}^t$, где $t\geqslant\hat t$. Положим $T_n=\{\tau\colon \bar y^t(\tau)\neq\hat y^t(\tau)\}$. Если $T_n=\varnothing$, то $\bar y^t=\bar{\hat y}^t$. Предположим поэтому, что $T_n\neq\varnothing$. Поскольку T вполне упорядочено, существует $\min\limits_{\tau\in T_n}\tau=\tau_0$. А так как из $(x^{\hat t},\ y^{\hat t})=(\hat x^{\hat t},\ \hat y^{\hat t})$ следует, что

$$y(\hat{t}) = h(x^{\hat{t}}, y^{\hat{t}}) = h(\hat{x}^{\hat{t}}, \hat{y}^{\hat{t}}) = \hat{y}(\hat{t}),$$

то $\hat{t} < \tau_0$. Но поскольку τ_0 — минимальный элемент множества T_n, то справедливо равенство $(x^{\tau_0}, y^{\tau_0}) = (\hat{x}^{\tau_0}, \hat{y}^{\tau_0})$. Предположим теперь, что разность $\sigma = \tau_0 - \hat{t}$ положительна. Тогда

$$y(\tau_0) = h(x_{\sigma\tau_0}, y_{\sigma\tau_0}) = h(\hat{x}_{\sigma\tau_0}, \hat{y}_{\sigma\tau_0}) = \hat{y}(\tau_0)$$

и, значит, $\tau_0 \notin T_n$, а это противоречит определению τ_0 как минимального элемента из T_n. Поэтому T_n пусто, ч. т. д.

Глава VI

СТАЦИОНАРНОСТЬ И ИНВАРИАНТНОСТЬ ВО ВРЕМЕНИ

Класс стационарных систем является очень важным, поскольку в приложениях многие системы с достаточной степенью точности могут считаться стационарными, а дополнительное свойство стационарности открывает новые теоретические возможности для более глубокого исследования подобных систем, а следовательно, и для более глубокого проникновения в закономерности их поведения. С понятием стационарности тесно связано другое понятие — понятие инвариантности во времени. При этом, если понятие стационарности системы определяется непосредственно в терминах исходного описания системы и ее сужений на подходящие подмножества моментов времени, то понятие инвариантности во времени определяется в терминах ее вспомогательных функций.

Относительно рассматриваемых в этой главе систем мы всегда будем предполагать, что для них существует представление в пространстве состояний. Это упростит все наши рассуждения, но в то же время потребует некоторых изменений всех введенных ранее определений. В частности, динамические системы мы будем определять, в основном, используя заданное пространство состояний.

Теория реализации стационарных и инвариантных во времени систем развивается в этой главе как для общего случая, так и в предположении о линейности рассматриваемых систем. Будут приведены условия существования сильно неупреждающей реализации и доказана возможность декомпозиции реализуемой линейной реакции на две составляющие: 1) отображающую входные воздействия в состояния и 2) отображающую состояния в значения выходной величины.

После того как мы рассмотрим, к чему приводит предположение о предопределенности системы, будет показано, как на аксиоматической основе можно построить теорию, непосредственно связанную с классической теорией линейных систем.

1. СТАЦИОНАРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ И ИНВАРИАНТНОСТЬ ВО ВРЕМЕНИ

Относительно систем, рассматриваемых в этой главе, мы будем предполагать, что их множество моментов времени стационарно, а их входной и выходной объекты удовлетворяют условиям $X_t =$

$= F^t(X)$ и $Y_t = F^t(Y)$ при любом $t \in T$. Мы будем также с самого начала предполагать, что для каждой рассматриваемой системы определено ее пространство состояний. Введем поэтому следующие определения:

Определение 1.1. Временная система $S \subset X \times Y$ называется *стационарной* тогда и только тогда, когда

$$(\forall t)\,(S_t \subset F^t(S)).$$

Если же $S_t = F^t(S)$, то такую систему мы будем называть *вполне стационарной*.

Определение 1.2. Временная система S называется *инвариантной во времени* тогда и только тогда, когда для нее существует семейство реакций $\bar{\rho}$, определенное на пространстве состояний C,

$$\bar{\rho} = \{\rho_t\colon C \times X_t \to Y_t\},$$

удовлетворяющее условию

$$(\forall t)\,(\forall c)\,(\forall x_t)\,(\rho_t(c, x_t) = F^t(\rho_0(c, F^{-t}(x_t)))).$$

Заметим, что, поскольку понятие пространства состояний используется непосредственно в определении, объект состояний S_t оказывается в общем случае собственным подмножеством множества S_t^ρ:

$$S_t \subset S_t^\rho = \{(x_t, y_t)\colon (\exists c)\,(y_t = \rho_t(c, x_t))\}.$$

Определение 1.3. Динамическая система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ называется *инвариантной во времени* тогда и только тогда, когда

(i) ее семейство реакций $\bar{\rho}$ инвариантно во времени;

(ii) ее семейство функции перехода состояний $\bar{\varphi}$ удовлетворяет условию

$$(\forall t)\,(\forall t')\,(\forall c)\,(\forall x_{tt'})\,(\varphi_{tt'}(c, x_{tt'}) = \varphi_{0\tau}(c, F^{-t}(x_{tt'}))),$$

где $\tau = t' - t$.

Предположение о линейности, очевидно, никак не сказывается на понятиях стационарности или инвариантности во времени. Однако для линейных систем инвариантность во времени можно определить специальным образом.

Определение 1.4. Динамическая линейная система называется *инвариантной во времени* тогда и только тогда, когда

(i) $(\forall t)\,(\forall c)\,[\rho_{1t}(c) = F^t(\rho_{10}(c))]$,

(ii) $(\forall t)\,(\forall x_t)\,[\rho_{2t}(x_t) = F^t(\rho_{20}(F^{-t}(x_t)))]$,

(iii) $(\forall t)\,(\forall t')\,(\forall c)\,[t' \geqslant t \Rightarrow \varphi_{1tt'}(c) = \varphi_{10\tau}(c)]$, где $\tau = t' - t$,

(iv) $(\forall t)\,(\forall t')\,(\forall x_{tt'})\,[t' \geqslant t \Rightarrow \varphi_{2tt'}(x_{tt'}) = \varphi_{20\tau}(F^{-t}(x_{tt'}))]$.

Если $\bar{\rho}$ удовлетворяет условиям (i) и (ii), $\bar{\rho}$ называют *инвариантным во времени семейством линейных реакций.*

2. ТЕОРИЯ РЕАЛИЗАЦИИ СИСТЕМ, ИНВАРИАНТНЫХ ВО ВРЕМЕНИ

(а) Общая временная система

Теорема 2.1. Пусть $\bar{\rho} = \{\rho_t\colon (\rho_t\colon C \times X_t \to Y_t) \,\&\, t \in T\}$ есть семейство отображений, инвариантных во времени. Семейство $\bar{\rho}$ реализуемо инвариантной во времени динамической системой в том и только в том случае, когда при всех $t \in T$ оно удовлетворяет условию

$$(\forall c)\,(\forall x^t)\,(\exists c')\,(\forall x_t)\,[\rho_t(c',\, x_t) = \rho_0(c,\, x^t \cdot x_t) \mid T_t].$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1 гл. III, за тем лишь исключением, что нам нужно еще доказать и инвариантность во времени функций перехода состояний. Доказательство необходимости очевидно. Поэтому рассмотрим доказательство достаточности. Определим $E \subset C \times C$ так, чтобы

$$(c,\, c') \in E \Leftrightarrow (\forall x)\,(\rho_0(c,\, x) = \rho_0(c',\, x')).$$

Поскольку $\bar{\rho}$ инвариантно во времени, мы можем определить $\hat{\rho}_t\colon (C/E) \times X_t \to Y_t$ с помощью условия $\hat{\rho}_t([c],\, x_t) = \rho_t(c,\, x_t)$. Пусть $f_{tt'} \subset (C/E \times X_{tt'}) \times (C/E)$ таково, что

$$(([c],\, x_{tt'}),\, [c']) \in f_{tt'} \Leftrightarrow (\forall x_{t'})\,(\hat{\rho}_{t'}([c'],\, x_{t'}) = \\ = \hat{\rho}_t([c],\, x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'}).$$

Тогда $f_{tt'}$ является отображением $f_{tt'}\colon C/E \times X_{tt'} \to C/E$ и для каждого $x_{t'}$

$$\hat{\rho}_{t'}(f_{tt'}([c],\, x_{tt'}),\, x_{t'}) = \hat{\rho}_t([c],\, x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'}.$$

Покажем теперь, что $\bar{f} = \{f_{tt'}\}$ инвариантно во времени. Поскольку инвариантно во времени $\bar{\rho}$, то

$$F^{-t}(\rho_{t'}(c',\, x_{t'})) = \rho_\tau(c',\, F^{-t}(x_{t'}))$$

и

$$F^{-t}(\rho_t(c,\, x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'}) = \rho_0(c,\, F^{-t}(x_{tt'}) \cdot F^{-t}(x_{t'})) \mid T_\tau,$$

где $\tau = t' - t$. Следовательно,

$$(\forall x_{t'})\,(\rho_{t'}(c',\, x_{t'}) = \rho_t(c,\, x_{tt} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\forall x_\tau)\,(\rho_\tau(c',\, x_\tau) = \rho_0(c,\, F^{-t}(x_{tt'}) \cdot x_\tau) \mid T_\tau),$$

т. е.

$$f_{tt'}([c], x_{tt'}) = f_{0\tau}([c], F^{-t}(x_{tt'})).$$

Семейство $\bar{f}$ обладает и свойством композиции. Действительно, пусть отображение μ: $C/E \to C$ таково, что $\mu([c]) \in [c]$. Определим $\varphi_{tt'}$: $C \times X_{tt'} \to C$ с помощью условия

$$\varphi_{tt'}(c, x_{tt'}) = \mu(f_{tt'}([c], x_{tt'})).$$

Тогда $\bar{\varphi} = \{\varphi_{tt'}\}$ обладает свойством композиции и согласуется с $\bar{\rho}$. Более того, поскольку $\bar{f}$ инвариантно во времени, мы имеем

$$\begin{aligned}\varphi_{tt'}(c, x_{tt'}) &= \mu(f_{tt'}([c], x_{tt'})) = \\ &= \mu(f_{0\tau}([c], F^{-1}(x_{tt'}))) = \\ &= \varphi_{0\tau}(c, F^{-t}(x_{tt'}));\end{aligned}$$

а значит, инвариантно во времени и семейство $\bar{\varphi}$, ч. т. д.

Теорема 2.2. Временная система S стационарна тогда и только тогда, когда она имеет инвариантное во времени динамическое представление $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$.

Доказательство. Начнем с доказательства достаточности. Пусть $(x_t, y_t) \in S_t$. Поскольку $S_t \subset S_t^{\rho}$, существует такое $c \in C$, что $y_t = \rho_t(c, x_t)$. А так как семейство $\bar{\rho}$ инвариантно во времени, то $y_t = F^t(\rho_0(c, F^{-t}(x_t)))$, т. е. $F^{-t}(x_t, y_t) \in S$. Следовательно, система S стационарна. Обратно, предположим, что S стационарна. Если мы сможем найти для S реакцию ρ_0: $C \times X \to Y$, удовлетворяющую условию

$$(\forall c)(\forall x^t)(\exists c')(\forall x)[\rho_0(c, x^t \cdot F^t(x)) \mid T_t = F^t(\rho_0(c', x))],$$

то с помощью этой реакции ρ_0 мы сможем получить все семейство $\bar{\rho}$, удовлетворяющее предположениям теоремы 2.1, определив ρ_t: $C \times X_t \to Y_t$ условием

$$\rho_t(c, x_t) = F^t(\rho_0(c, F^{-t}(x_t))).$$

Но тогда искомый результат получится сразу из теоремы 2.1. Покажем, что для стационарной системы всегда существует реакция, удовлетворяющая приведенному выше условию. Пусть

$$C = \{c: c: X \to Y \;\&\; c \subseteq S\},$$

и пусть реакция ρ_0: $C \times X \to Y$ такова, что $\rho_0(c, x) = c(x)$. Предположим, что $c \in C$ и x^t произвольны. Пусть

$$f = F^{-t}[c(x^t \cdot F^t(-)) \mid T_t]: X \to Y.$$

Покажем, что $f \subseteq S$. Пусть $x \in X$ произвольно. Тогда из

$$(x^t \cdot F^t(x),\ c(x^t \cdot F^t(x))) \in S$$

следует, что

$$(F^t(x),\ c(x^t \cdot F^t(x)) \mid T_t) \in S_t.$$

Поскольку $S_t \subset F^t(S)$, мы имеем

$$(x,\ F^{-t}(c(x^t \cdot F^t(x)) \mid T_t)) \in S,$$

а значит, $f \subseteq S$. Но тогда из определения C вытекает существование такого $c' \in C$, что $c' = f$. Поэтому сформулированное выше условие выполнено, ч. т. д.

Заметим, что в теореме 2.2 мы не принимали во внимание условия неупреждаемости. Этот случай мы еще рассмотрим позже.

(b) Линейные временные системы

Предложение 2.1. Пусть семейство инвариантных во времени линейных отображений

$$\bar{\rho} = \{\rho_t \colon \rho_t \colon C \times X_t \to Y_t \ \&\ t \in T\}$$

приведено и реализуемо. Тогда семейство линейных функций перехода состояний $\bar{\varphi}$, соответствующих $\bar{\rho}$, однозначно определяется условиями

$$\varphi_{1tt'}(c) = \rho_{1t'}^{-1}(\rho_{1t}(c) \mid T_{t'}),$$
$$\varphi_{2tt'}(x_{tt'}) = \rho_{1t'}^{-1}(\rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'}).$$

Более того, система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ инвариантна во времени.

Доказательство. Первая часть доказательства содержится в доказательстве теоремы 3.4 гл. IV. Покажем теперь, что система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ инвариантна во времени. Пусть $\varphi_{1tt'}(c) = c'$. Тогда

$$\varphi_{1tt'}(c) = c' \Rightarrow \rho_{1t'}(c') = \rho_{1t}(c) \mid T_{t'} \Rightarrow F^{t'}(\rho_{10}(c')) =$$
$$= (F^t(\rho_{10}(c))) \mid T_{t'} = F^t(\rho_{10}(c) \mid T_\tau), \quad \text{где} \quad \tau = t' - t,$$
$$F^\tau(\rho_{10}(c')) = \rho_{10}(c) \mid T_\tau \Rightarrow \rho_{1\tau}(c') = \rho_{10}(c) \mid T_\tau \Rightarrow c' = \varphi_{10\tau}(c).$$

Аналогично, если $c' = \varphi_{2tt'}(x_{tt'})$, то

$$c' = \varphi_{2tt'}(x_{tt'}) \Rightarrow \rho_{1t'}(c') = \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'} \Rightarrow F^{t'}(\rho_{10}(c')) =$$
$$= F^t(\rho_{20}(F^{-t}(x_{tt'} \cdot 0))) \mid T_{t'} \Rightarrow F^{t'}(\rho_{10}(c')) = F^t(\rho_{20}(F^{-t}(x_{tt'} \cdot 0)) \mid T_\tau) =$$
$$(\text{где } \tau = t' - t)$$
$$\Rightarrow \rho_{1\tau}(c') = \rho_{20}(F^{-t}(x_{tt'}) \cdot 0) \mid T_\tau \Rightarrow c' = \varphi_{20\tau}(F^{-t}(x_{tt'})),$$

и значит, динамическое представление системы инвариантно во времени, ч. т. д.

Теорема 2.3. Пусть

$$\bar{\rho} = \{\rho_t \colon \rho_t \colon C \times X_t \to Y_t \ \&\ t \in T\}$$

— семейство линейных и инвариантных во времени отображений. Семейство $\bar{\rho}$ реализуемо линейной инвариантной во времени динамической системой тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию согласованности реакций на входное воздействие и условию

$$(\forall (c, x^t))\,(\exists c')\,(\rho_{1t}(c') = \rho_0(c, x^t \cdot 0) \mid T_t), \tag{6.1}$$

являющемуся одним из условий согласованности реакций на состояние.

Доказательство. Поскольку доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.2 гл. IV, мы только наметим его план. В случае инвариантных во времени систем $S_t = S_0^\rho \mid T_t$ может быть собственным подмножеством множества S_t^ρ. Поэтому выполнение всех условий согласованности реакций на состояние здесь не требуется. Более того, в связи с инвариантностью во времени

$$S_t \subset S_t^\rho \Leftrightarrow \text{условие (6.1)} \Leftrightarrow (\forall (c, x_{tt'}))\,(\exists c')\,(\rho_{1t'}(c') = \\ = \rho_t(c, x_{tt'} \cdot 0) \mid T_{t'}).$$

Что же касается доказательства достаточности, то здесь план доказательства выглядит следующим образом. Прежде всего нужно перейти к приведенному семейству реакций и воспользоваться предложением 2.1. Затем в соответствии с процедурой теоремы 3.2 гл. IV определяется семейство функций перехода состояний, после чего остается доказать, что это семейство инвариантно во времени. Детали этого доказательства мы предоставляем читателю.

Классическая теория реализации занимается в основном реализацией реакции на входное воздействие [5]. Аналогичную роль в нашей более общей теории играет следующий результат:

Теорема 2.4. Пусть

$$\bar{\rho}_2 = \{\rho_{2t} \colon \rho_{2t} \colon X_t \to Y_t \ \&\ t \in T\}$$

— некоторое семейство линейных отображений. Оно реализуется некоторой инвариантной во времени сильно неупреждающей линейной динамической системой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) $\bar{\rho}_2$ удовлетворяет условию согласованности реакций на входное воздействие;

(ii) $\bar{\rho}_2$ удовлетворяет условию сильной неупреждаемости, т. е.

$$(\forall x_t)\ (\rho_{20}\ (0 \cdot x_t) \mid \bar{T}^t = 0);$$

(iii) $\bar{\rho}_2$ инвариантно во времени, т. е.

$$(\forall x_t)\ (\rho_{2t}\ (x_t) = F^t\ (\rho_{20}\ (F^{-t}\ (x_t)))).$$

Если $\bar{\rho}_2$ реализуемо, то пространство состояний C соответствующей системы и ее реакция на состояние ρ_{1t}: $C \to Y_t$ задаются соотношениями

$$C = \{F^{-t}\ (\rho_{20}\ (x^t \cdot 0) \mid T_t):\ x^t \in X^t\ \&\ t \in T\},$$
$$\rho_{1t}\ (c) = F^t\ (c).$$

Доказательство. Доказательство необходимости очевидно. Поэтому мы докажем лишь достаточность. Покажем прежде всего, что пространство состояний C, определенное в нашей теореме, является линейной алгеброй. Предположим, что $c = F^{-t}\ (\rho_{20}\ (x^t \cdot 0) \mid T_t)$ и $\alpha \in \mathscr{A}$ произвольны. Тогда

$$\alpha c = F^{-t}\ (\rho_{20}\ (\alpha x^t \cdot 0) \mid T_t) \in C.$$

Выберем произвольное $\hat{c} = F^{-\hat{t}}\,(\rho_{20}\ (\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0) \mid T_{\hat{t}})$ и предположим, что $t \geqslant \hat{t}$, причем $t = \hat{t} + \tau$ $(\tau \geqslant 0)$. Из условий (i) и (iii) следует, что

$$\rho_{20}\ (0 \cdot F^{\tau}\ (\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0) \mid T_{\tau} = \rho_{2\tau}\ (F^{\tau}\ (\hat{x}^{\hat{t}}\ ) \cdot 0) = F^{\tau}\ (\rho_{20}\ (\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0)).$$

Но тогда

$$\begin{aligned}\rho_{20}\,(\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0) \mid T_{\hat{t}} &= F^{-\tau}\,(\rho_{20}\ (0 \cdot F^{\tau}\ (\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0) \mid T_{\tau}) \mid T_{\hat{t}} = \\ &= F^{-\tau}\,((\rho_{20}\,(0 \cdot F^{\tau}\ (\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0) \mid T_{\tau}) \mid T_t) = \\ &= F^{-\tau}\,(\rho_{20}\,(0 \cdot F^{\tau}\ (\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0) \mid T_t).\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}c + \hat{c} &= F^{-t}\ (\rho_{20}\ (x^t \cdot 0) \mid T_t) + F^{-t}\ (\rho_{20}\ (0 \cdot F^{\tau}\ (\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0) \mid T_t) = \\ &= F^{-t}\ (\rho_{20}\ ((x^t + 0 \cdot F^{\tau}\ (\hat{x}^{\hat{t}})) \cdot 0) \mid T_t) \in C.\end{aligned}$$

Следовательно, C — линейная алгебра. Пусть теперь ρ_{1t}: $C \to Y_t$ таково, что $\rho_{1t}\ (c) = F^t\ (c)$. Докажем теперь, что выполнены все условия теоремы 2.3. Для этого зададимся произвольными

$$c = F^{-\hat{t}}\ (\rho_{20}\ (x^{\hat{t}} \cdot 0) \mid T_{\hat{t}}) \in C$$

и x^t. Пусть, кроме того, $t + \hat{t} = \tau$. Но тогда

$$\rho_{20}(x^t \cdot 0) = F^{-\hat{t}}(\rho_{20}(0 \cdot F^{\hat{t}}(x^t) \cdot 0) \mid T_{\hat{t}})$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}(\rho_{10}(c) + \rho_{20}(x^t \cdot 0)) \mid T_t &= (c + \rho_{20}(x^t \cdot 0)) \mid T_t = \\ &= (F^{-\hat{t}}(\rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot 0) \mid T_{\hat{t}}) + F^{-\hat{t}}(\rho_{20}(0 \cdot F^{\hat{t}}(x^t) \cdot 0) \mid T_{\hat{t}})) \mid T_t = \\ &= F^{-\hat{t}}(\rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot F^{\hat{t}}(x^t) \cdot 0) \mid T_{\hat{t}}) \mid T_t = \\ &= F^{-\hat{t}}(\rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot F^{\hat{t}}(x^t) \cdot 0) \mid T_\tau).\end{aligned}$$

Поэтому для

$$c' = F^{-\tau}(\rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot F^{\hat{t}}(x^t) \cdot 0) \mid T_\tau) \in C$$

мы имеем $\rho_{1t}(c') = \rho_0(c, x^t \cdot 0) \mid T_t$, ч. т. д.

Определение 2.1. Отображение $\hat{F}^t$: $X \to X$ (или $\hat{F}^t$: $Y \to Y$), задаваемое соотношением

$$\hat{F}^t(x) = 0^t \cdot F^t(x) \qquad (\text{или } \hat{F}^t(y) = 0^t \cdot F^t(y)),$$

где $0^t = 0 \mid T^t$, называется *расширенным оператором сдвига.*

Следствие 2.1. Линейное отображение ρ_{20}: $X \to Y$ реализуемо инвариантной во времени сильно неупреждающей линейной динамической системой тогда и только тогда, когда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho_{20}} & Y \\ {\scriptstyle \hat{F}^t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{F}^t} \\ X & \xrightarrow{\rho_{20}} & Y \end{array}$$

т. е. когда ρ_{20} является гомоморфизмом по отношению к расширенному оператору сдвига $\hat{F}^t$, т. е.

$$(\forall t)(\forall x)(\hat{F}^t(\rho_{20}(x)) = \rho_{20}(\hat{F}^t(x))).$$

Доказательство. По любому заданному ρ_{20}: $X \to Y$ можно построить все семейство $\bar{\rho}_2$ инвариантных во времени отображений:

$$\rho_{2t}(x_t) = F^t(\rho_{20}(F^{-t}(x_t))).$$

Согласно теореме 2.4, семейство $\bar{\rho}_2$ реализуемо инвариантной во времени сильно неупреждающей линейно динамической системой в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:

(a) согласованность реакций на входное воздействие:

$$(\forall x_t)(F^t(\rho_{20}(F^{-t}(x_t))) = \rho_{20}(0 \cdot x_t) \mid T_t);$$

(b) сильная неупреждаемость:

$$(\forall x_t)\,(\rho_{20}\,(0\cdot x_t)\mid \overline{T}^t = 0).$$

Но из этих двух условий вытекает, что $(\forall x)\,(\hat{F}^t\,(\rho_{20}\,(x)) = \rho_{20}\,(\hat{F}^t\,(x)))$, и обратно, ч. т. д.

Следующее следствие переводит основной результат классической теории реализации (см. [5]) на язык общей теории систем.

Следствие 2.2. Линейное отображение ρ_{20}: $X \to Y$ реализуемо инвариантной во времени сильно неупреждающей линейной динамической системой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) ρ_{20} — сильно неупреждающая реакция;

(ii) существуют такая линейная алгебра C над полем скаляров $\mathcal{A}$ и два таких линейных отображения $F\,(t)$: $C \to B$ и $G\,(t)$: $X^t \to C$, что при любых t и τ $(\geqslant t)$

$$\rho_{20}\,(x^t\cdot 0)\,(\tau) = F\,(\tau - t)\,[G\,(t)\,x^t],$$

причем $G\,(t)$ обладает следующим свойством:

$$G\,(t') = (0\cdot x_{tt'}) = G\,(t' - t)\,(F^{-t}\,(x_{tt'})).$$

Доказательство. Если ρ_{20} реализуемо, то пространство состояний и ρ_{1t} можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли условиям теоремы 2.4. Пусть $F\,(t)$: $C \to B$ и $G\,(t)$: $X^t \to C$ определяются условиями

$$F\,(t)\,(c) = \rho_{10}\,(c)\,(t) = c\,(t),$$
$$G\,(t)\,(x^t) = F^{-t}\,(\rho_{20}\,(x^t\cdot 0)\mid T_t).$$

Тогда для $\tau \geqslant t$

$$\begin{aligned}\rho_{20}\,(x^t\cdot 0)\,(\tau) &= (\rho_{20}\,(x^t\cdot 0)\mid T_t)\,(\tau) = \\ &= F^{-t}\,(\rho_{20}\,(x^t\cdot 0)\mid T_t)\,(\tau - t) = \\ &= F\,(\tau - t)\,[G\,(t)\,(x^t)].\end{aligned}$$

Более того, из условия согласованности реакций на входное воздействие следует, что

$$\begin{aligned}G\,(t')\,(0\cdot x_{tt'}) &= F^{-t'}\,(\rho_{20}\,(0\cdot x_{tt'}\cdot 0)\mid T_{t'}) = \\ &= F^{-t'}\,(\rho_{2t}\,(x_{tt'}\cdot 0)\mid T_{t'}) = \\ &= F^{-t'}\,(F^t\,(\rho_{20}\,(F^{-t}\,(x_{tt'})\cdot 0))\mid T_{t'}) = \\ &= F^{-\tau}\,(\rho_{20}\,(F^{-t}\,(x_{tt}')\cdot 0)\mid T_\tau) = \\ &= G\,(\tau)\,(F^{-t}\,(x_{tt'})),\end{aligned}$$

где $\tau = t' - t$.

Доказательство достаточности очевидно, ч. т. д.

Следующая теорема представляет собой основной результат теории линейных стационарных систем.

Теорема 2.5. Пусть S — линейная стационарная система. Тогда для существования линейного динамического инвариантного во времени представления системы S необходимо и достаточно, чтобы существовало такое линейное отображение ρ_{20}: $X \to Y$, что

(i) $(\forall x)\,[(x,\ \rho_{20}(x)) \in S]$,

(ii) $(\forall t)\,(\forall x_t)\,[F^t(\rho_{20}(F^{-t}(x_t))) = \rho_{20}(0 \cdot x_t) \mid T_t]$.

Доказательство. Предположим, что нам удалось найти линейное отображение ρ_{20}: $X \to Y$, удовлетворяющее обоим приведенным выше условиям. Построим тогда естественную реализацию системы S, у которой реакцией на входное воздействие будет ρ_{20}. В соответствии с процедурой построения естественной реализации реакция системы ρ_{2t}: $X_t \to Y_t$ должна удовлетворять соотношению $\rho_{2t}(x_t) = \rho_{20}(0 \cdot x_t) \mid T_t$. Следовательно, $\rho_{2t}(x_t) = F^t(\rho_{20}(F^{-t}(x_t)))$. Пусть $C = \{y\colon (0,\ y) \in S\}$, а ρ_{10}: $C \to Y$ удовлетворяет соотношению $\rho_{10}(c) = c$. Определим тогда ρ_{1t}: $C \to Y$, потребовав, чтобы $\rho_{1t}(c) = F^t(\rho_{10}(c))$. Тогда семейство $\bar{\rho} = \{\rho_t = \langle \rho_{1t},\ \rho_{2t} \rangle\}$, очевидно, удовлетворяет условию согласованности реакций на входное воздействие. Выберем затем произвольно $c \in C$ и x^t, и пусть $y_t = \rho_0(c,\ x^t \cdot 0) \mid T_t$. Поскольку $(0,\ y_t) \in S_t \subset F^t(S)$, мы заключаем, что $(0,\ F^{-t}(y_t)) \in S$, т. е. существует такое $c' \in C$, что $F^{-t}(y_t) = \rho_{10}(c')$. Но тогда $\rho_{1t}(c') = \rho_0(c,\ x^t \cdot 0) \mid T_t$. Поэтому из теоремы 2.3 вытекает, что семейство $\bar{\rho}$ реализуемо линейной инвариантной во времени динамической системой, причем очевидно, что $S_0^{\rho} = S$.

Обратно, предположим, что S допускает инвариантное во времени линейное динамическое представление $(\bar{\rho},\ \bar{\varphi})$. Тогда, по определению инвариантности во времени, $\rho_{2t}(x_t) = F^t(\rho_{20}(F^{-t}(x_t)))$. Так как реакция $\{\langle \rho_{1t},\ \rho_{2t} \rangle\}$ реализуема, то $\rho_{2t}(x_t) = \rho_{20}(0 \cdot x_t) \mid T_t$ для любого x_t. Следовательно,

$$F^t(\rho_{20}(F^{-t}(x_t))) = \rho_{20}(0 \cdot x_t) \mid T_t$$

для каждого x_t, ч. т. д.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ПРЕДОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Представление стационарной системы с помощью некоторой инвариантной во времени динамической системы зависит от существования семейства реакций, обладающего некоторыми необходимыми свойствами. И хотя существование такого семейства реакций можно предполагать уже на основании самого факта стационарности системы, предложить какую-либо общую процедуру его построения пока не удалось. Цель настоящего параграфа — доказать, что для класса предопределенных систем их естественные реакции (как они определялись для этого класса систем в гл. V) удовлетворяют всем необходимым условиям и могут использоваться для построения инвариантного во времени динамического представления рассматриваемой стационарной системы.

Теорема 3.1. Предположим, что стационарная временная система $S \subset X \times Y$ является предопределенной начиная с момента времени $\hat{t}$. Тогда $S_{\hat{t}}$ может быть представлена инвариантной во времени сильно неупреждающей динамической системой.

Доказательство. Пусть $\rho_{\hat{t}}\colon S^{\hat{t}} \times X_{\hat{t}} \to Y_{\hat{t}}$ есть естественная реакция нашей системы. Обозначим $S^{\hat{t}}$ через C. Для любого $t \geqslant \hat{t}$ определим $\rho_t\colon C \times X_t \to Y_t$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\rho_t(c,\ x_t) = F^{t-\hat{t}}(\rho_{\hat{t}}(c,\ F^{\hat{t}-t}(x_t))).$$

Тогда семейство $\bar{\rho}_{\hat{t}} = \{\rho_t\colon t \geqslant \hat{t}\}$ инвариантно во времени. Если нам удастся показать, что

$$(\forall c)\,(\forall x_{\hat{t}t})\,(\exists c')\,(\forall x_t)\,[\rho_t(c',\ x_t) = \rho_{\hat{t}}(c,\ x_{\hat{t}t}\cdot x_t) \mid T_t],$$

то требуемый результат будет следовать из теоремы 2.1. Зафиксируем произвольные x_t и $c = (x^{\hat{t}},\ y^{\hat{t}}) \in C$. Поскольку наша система является предопределенной, найдется единственное $y_{\hat{t}t}$, такое, что $(x^{\hat{t}}\cdot x_{\hat{t}t},\ y^{\hat{t}}\cdot y_{\hat{t}t}) \in S^t$. Пусть $t - \hat{t} = \sigma \geqslant 0$. Обозначим $x^{\hat{t}}\cdot x_{\hat{t}t}$ через x^t, а $y^{\hat{t}}\cdot y_{\hat{t}t}$ через y^t. Поскольку S стационарна, мы имеем

$$(x^t,\ y^t) \mid T_{\sigma t} \in S^t \mid T_{\sigma t} = S_\sigma \mid T_{\sigma t} \subset F^\sigma(S) \mid T_{\sigma t} = F^\sigma(S \mid T^{\hat{t}}).$$

Следовательно, $F^{-\sigma}((x^t,\ y^t) \mid T_{\sigma t}) \in S^{\hat{t}}$. Пусть $(x^t,\ y^t) \mid T_{\sigma t} = (x_{\sigma t},\ y_{\sigma t})$ и $c' = F^{-\sigma}(x_{\sigma t},\ y_{\sigma t}) \in C$. Зафиксируем произвольное x_t. Тогда $\rho_{\hat{t}}(c,\ x_{\hat{t}t}\cdot x_t) = y_{\hat{t}t}\cdot \hat{y}_t$ для некоторого $\hat{y}_t$. Но из определения $\rho_{\hat{t}}$ вытекает, что $(x^t\cdot x_t,\ y^t\cdot \hat{y}_t) \in S$, а из условия стационарности системы — что $(x^t\cdot x_t,\ y^t\cdot \hat{y}_t) \mid T_\sigma \in S_\sigma \subset F^\sigma(S)$, т. е.

$$F^{-\sigma}[(x^t\cdot x_t,\ y^t\cdot \hat{y}_t) \mid T_\sigma] = F^{-\sigma}(x_{\sigma t}\cdot x_t,\ y_{\sigma t}\cdot \hat{y}_t) \in S.$$

С другой стороны, если $y_{\hat{t}} = \rho_{\hat{t}}(c',\ F^{-\sigma}(x_t))$, то $(F^{-\sigma}(x_{\sigma t}\cdot x_t),\ F^{-\sigma}(y_{\sigma t})\cdot y_{\hat{t}}) \in S$. Значит, поскольку система S является предопределенной начиная с момента $\hat{t}$, $F^{-\sigma}(\hat{y}_{\hat{t}}) = y_{\hat{t}}$, т. е.

$$\rho_t(c',\ x_t) = F^\sigma(y_{\hat{t}}) = \hat{y}_t = \rho_{\hat{t}}(c,\ x_{\hat{t}t}\cdot x_t) \mid T_t,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.2. Пусть стационарная линейная система $S \subset X \times Y$ является предопределенной начиная с момента $\hat{t}$. Тогда $S_{\hat{t}}$ может быть представлена инвариантной во времени сильно неупреждающей линейной динамической системой.

Доказательство. Пусть ρ_t: $S^{\hat{t}} \times X_{\hat{t}} \to Y_{\hat{t}}$ есть естественная реакция системы S. Тогда $\rho_{2\hat{t}}$: $X_{\hat{t}} \to Y_{\hat{t}}$ удовлетворяет соотношению

$$\rho_{2\hat{t}}(x_{\hat{t}}) = y_{\hat{t}} \Leftrightarrow (0 \cdot x_{\hat{t}},\ 0 \cdot y_{\hat{t}}) \in S.$$

Если нам удастся показать, что

$$(\forall t)\,(\forall x_t)\,[F^{t-\hat{t}}(\rho_{2\hat{t}}(F^{\hat{t}-t}(x_t))) = \rho_{2\hat{t}}(0 \cdot x_t) \mid T_t],$$

то требуемый результат получится сразу из теоремы 2.5. Зафиксируем произвольное x_t. Пусть $y_{\hat{t}} = \rho_{2\hat{t}}(F^{-\sigma}(x_t))$, где $\sigma = t - \hat{t} \geqslant 0$. Тогда $(0 \cdot F^{-\sigma}(x_t),\ 0 \cdot y_{\hat{t}}) \in S$. Заметим теперь, что S является предопределенной начиная с момента $\hat{t}$ и что $(0,\ 0) \in S$. Тогда $\rho_{2\hat{t}}(0 \cdot x_t) = 0 \cdot \hat{y}_t$ для некоторого $\hat{y}_t$, т. е. $(0 \cdot x_t,\ 0 \cdot \hat{y}_t) \in S$. Поскольку S стационарна,

$$(0 \cdot x_t,\ 0 \cdot \hat{y}_t) \mid T_\sigma \in S_\sigma \subset F^\sigma(S),$$

т. е.

$$(0 \cdot F^{-\sigma}(x_t),\ 0 \cdot F^{-\sigma}(\hat{y}_t)) \in S.$$

Следовательно, $y_{\hat{t}} = F^{-\sigma}(\hat{y}_t)$, и потому

$$F^\sigma(\rho_{2\hat{t}}(F^{-\sigma}(x_t))) = F^\sigma(y_{\hat{t}}) = \hat{y}_t = \rho_{2\hat{t}}(0 \cdot x_t) \mid T_t,$$

что и требовалось доказать.

4. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Общая теория систем, которую мы развиваем в этой книге, очевидно, охватывает широкий спектр частных теорий, посвященных различным классам систем с более глубокой и более конкретной математической структурой. Однако большой интерес представляет строгое и формальное наведение мостов между нашей и классической теориями. Задача эта требует тщательного изучения, а ее решение представляется весьма важным, поскольку только это позволит строго установить, какие из результатов общей теории систем являются закономерными обобщениями конкретных и более узких результатов, полученных ранее, и благодаря этому выяснить, какими общеструктурными свойствами должны обладать эти системы для того, чтобы вести себя тем или иным образом.

В этом параграфе мы собираемся исследовать взаимосвязи между общими системами и динамическими системами, описываемыми линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Не говоря уже о важности этого класса систем для практических приложений, отметим, что именно этим системам отводится основная роль в классической теории линейных систем, которую вполне можно рассматривать как теорию одного класса систем линейных дифференциальных уравнений.

Динамические системы того класса, который мы собираемся рассматривать в этом параграфе, описываются системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$d\mathbf{c}/dt = F\mathbf{c} + G\mathbf{x}, \tag{6.2}$$

$$y = H\mathbf{c}, \tag{6.3}$$

где F, G и H — матрицы постоянных коэффициентов, а $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{c}$ — вектор-функции.

Такое описание этих систем мы получим на аксиоматической основе, исходя из понятия общей линейной временной системы $S \subset A^T \times B^T$.

Аксиома 4.1. Входной и выходной алфавиты A и B системы, ее множество моментов времени T и поле $\mathcal{A}$, необходимые для определения линейной системы, имеют следующий вид: $A = E^m$, $B = E^r$, $T = R^+$ (т. е. множество неотрицательных вещественных чисел), $\mathcal{A} = R$ и $X = L_2(0, \infty)$.

Аксиома 4.2. Система S стационарна и является предопределенной начиная с некоторого момента $\hat{t}$.

Аксиома 4.3. $S_{\hat{t}} = \{y_{\hat{t}} \colon (0, y_{\hat{t}}) \in S_{\hat{t}}\} = C$ есть конечномерное векторное пространство размерности n.

Пусть $\rho_{2\hat{t}} \colon C \times X_{\hat{t}} \to Y_{\hat{t}}$ есть реакция на входное воздействие, соответствующая естественной реакции системы. Пусть, кроме того, $\{c_1, \ldots, c_n\}$ — базис пространства C, а φ: $C \to E^n$ удовлетворяет условию

$$\varphi(c) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \Leftrightarrow c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i.$$

Заметим, что φ линейно. Потребуем затем, что $\rho_{1\hat{t}}(c) = c$. Поскольку инвариантное во времени семейство реакций, порождаемое реакциями $\rho_{2\hat{t}}$ и $\rho_{1\hat{t}}$, реализуемо, для него выполняются следующие условия (согласованности реакций на состояние):

$$(\forall x_{\hat{t}t})(\exists c)(\rho_{1t}(c) = F^{t-\hat{t}}(\rho_{1\hat{t}}(c)) = \rho_{2\hat{t}}(x_{\hat{t}t}\cdot 0)|T_t),$$

т. е.

$$\{F^{\hat{t}-t}(\rho_{2\hat{t}}(x_{\hat{t}t}\cdot 0)\,|\,T_t)\colon x_{\hat{t}t}\in X_{\hat{t}t}\ \&\ t\in T\}$$

является линейным подпространством в C. Этот факт мы будем использовать в наших последующих рассуждениях.

Следующая аксиома гарантирует нам определенного типа непрерывность:

Аксиома 4.4.

(i) Для каждого $x \in X$ отображение $\rho_{2\hat{t}}(x_{\hat{t}})\colon T_{\hat{t}} \to B\,(=E^r)$ дифференцируемо.

(ii) Для каждого $t \in T_{\hat{t}}$ отображение $\rho_{2\hat{t}}\,(-)\,(t)\colon X_{\hat{t}} \to B$ непрерывно.

(iii) Отображение $\rho_{1\hat{t}}(-)\colon C \to E^n$ непрерывно.

(iv) Функции $c \in C$ являются аналитическими.

Заметим, что, как уже было установлено в гл. V, система, описываемая уравнениями (6.2) и (6.3), является предопределенной начиная с момента $\hat{t}$, где $\hat{t}$ — произвольное положительное число.

Легко видеть, что для систем, описываемых уравнениями (6.2) и (6.3), все четыре аксиомы справедливы. Покажем теперь, как эти уравнения могут быть выведены из этих аксиом.

Для упрощения обозначений заменим $\hat{t}$ на 0; это эквивалентно смещению оси времени влево на $\hat{t}$. Другими словами, договоримся писать ρ_{20} и ρ_{10} вместо $\rho_{2\hat{t}}$ и $\rho_{2\hat{t}}$. Соответствующим образом будут заменены $T_{\hat{t}}$, $X_{\hat{t}}$ и другие сужения. Естественно, что это не приведет ни к какой потере общности.

Поскольку отображение $\rho_{20}\,(-)\,(t)\colon X \to E^r$ непрерывно и $X = L_2\,(0,\ \infty)$, из теоремы о представлении линейных функционалов в гильбертовых пространствах вытекает существование такого $w\,(t) \in L_2\,(0,\ \infty)$, что

$$\rho_{20}\,(x)\,(t) = \int_0^\infty w\,(t,\ \tau)\,x\,(\tau)\,d\tau,$$

где $w\,(t,\ \tau) = w\,(t)\,(\tau)\colon E^m \to E^r$ есть некоторая матрица. Но согласно аксиоме 4.2, семейство $\bar{\rho}_2$ инвариантно во времени и удовлетворяет условию согласованности реакций на входное воздействие, т. е. $\rho_{20}\,(0\cdot F^t(x))\,|\,T_t = F^t(\rho_{20}'\,(x))$. Следовательно, для любых $\tau \geqslant t$

$$[\rho_{20}(0\cdot F^t(x))|T_t](\tau) = \rho_{20}(0\cdot F^t(x))(\tau) = \int\limits_0^\infty w(\tau, \sigma)(0\cdot F^t(x))(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_t^\infty w(\tau, \sigma)[F^t(x)](\sigma)\,d\sigma = \int\limits_t^\infty w(\tau, \sigma)\,x(\sigma - t)\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^\infty w(\tau, \sigma + t)\,x(\sigma)\,d\sigma.$$

С другой стороны,

$$F^t(\rho_{20}(x))(\tau) = \rho_{20}(x)(\tau - t) = \int\limits_0^\infty w(\tau - t, \sigma)\,x(\sigma)\,d\sigma,$$

и потому

$$\int\limits_0^\infty w(\tau, \sigma + t)\,x(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_0^\infty w(\tau - t, \sigma)\,x(\sigma)\,d\sigma.$$

Но так как это равенство выполняется при любых $x \in X$, справедливо равенство $w(\tau, \sigma + t) = w(\tau - t, \sigma)$ $(\tau - t \geqslant 0)$. Значит, для $\sigma = 0$ мы имеем $w(\tau, t) = w(\tau - t, 0)$. Обозначим $w(\tau - t, 0)$ через $w_0(\tau - t)$. Тогда

$$\rho_{20}(x)(t) = \int\limits_0^\infty w_0(t - \sigma)\,x(\sigma)\,d\sigma. \tag{6.4}$$

Более того, поскольку ρ_{20} удовлетворяет условиям сильной неупреждаемости, для каждого $x_t \in X_t$

$$\rho_{20}(0\cdot x_t)(t) = \int\limits_t^\infty w_0(t - \tau)\,x_t(\tau)\,d\tau = 0,$$

т. е. из $t < 0$ следует, что $w_0(t) = 0$. Именно так определяется обычно условие неупреждаемости для весовых функций. В итоге мы получаем, что

$$\rho_{20}(x)(t) = \int\limits_0^t w_0(t - \tau)\,x(\tau)\,d\tau.$$

Используя теперь следствие 2.2 теоремы 2.4, определим $F(t)\colon E^n \to E^r$ так, чтобы

$$F(t)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i(t).$$

Но так как отображение

$$\varphi F^{-t}(\rho_{20}(-\cdot 0) \mid T_t)\colon X^t \to E^n$$

непрерывно, найдется такая матрица $G(t, \sigma)\colon E^m \to E^n$, что

$$\varphi F^{-t}(\rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t) = \int_0^t G(t, \sigma)\, x^t(\sigma)\, d\sigma.$$

Следствие 2.2 из теоремы 2.4 утверждает, что матрица G инвариантна во времени, а так как наша система является к тому же и сильно неупреждающей, то, рассуждая точно так же, как мы это делали для w, мы получаем, что $G(t, \sigma) = G(t - \sigma, 0) \equiv G_0(t - \sigma)$ и $G_0(t) = 0$ для $t < 0$. Поэтому

$$\rho_{20}(x^t \cdot 0)(\tau) = F(\tau - t) \int_0^t G_0(t - \sigma)\, x^t(\sigma)\, d\sigma.$$

С другой стороны, из уравнения (6.4) мы получаем

$$\rho_{20}(x^t \cdot 0)(\tau) = \int_0^t w_0(\tau - \sigma)\, x^t(\sigma)\, d\sigma.$$

Положим $\tau - t = \tau'$ и $t - \sigma = -\sigma'$. Тогда $w(\tau', \sigma') = F(\tau') \cdot G_0(-\sigma')$, а так как функция c_t является аналитической, то отображение $F(t)$ должно быть непрерывно дифференцируемым. Поэтому применима классическая теория реализации и система S может быть описана уравнениями (6.2) и (6.3).

5. АБСТРАКТНЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ [1]

Если динамическая система описывается линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами или линейными конечно-разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, то одним из наиболее мощных инструментов их анализа оказывается аппарат передаточных функций. В связи с этим представляется важным понять, как передаточную функцию можно определить в столь общем контексте, который характерен для настоящей книги.

Для того чтобы справиться с этой задачей, нам придется ввести для входного объекта X и выходного объекта Y более богатые математические структуры. Пусть V — некоторая линейная алгебра, $A = V^m$, а $B = V^r$, где m и r — некоторые положительные

[1] См. Микусинский [6].

целые числа. Обозначим через $U \subset V^T$ временной объект, для которого выполнены следующие условия:

(i) U есть линейная алгебра над $\mathcal{A}$.

(ii) U есть коммутативное кольцо, операция умножения $*$ в котором удовлетворяет следующему условию: для u и $u' \in U$, $u * u' = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ или $u' = 0$.

(iii) Входной объект X и выходной объект Y могут быть выражены через U следующим образом: $X = U^m$ и $Y = U^r$.

Временной объект U мы будем называть *базовым*.

Рассмотрим один пример. Положим $T = [0, \infty)$, $V = R$ и $U = C\ (0, \infty)$. Для каждого $t \in T$ определим

$$(u * \hat{u})(t) = \int_0^t u(t-\sigma) \cdot \hat{u}(\sigma)\, d\sigma.$$

Как легко показать, операция $*$ коммутативна. Более того, $u * \hat{u} = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ или $\hat{u} = 0$, так что $C\ (0, \infty)$ действительно может служить базовым временным объектом для таких X и Y, которые использовались в предыдущем параграфе.

Предположим теперь, что линейная реакция на входное воздействие ρ_{20}: $X \to Y$ может быть представлена в виде

$$\rho_{20}(x) = y \Longleftrightarrow y_i = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} * x_j \text{ для всех } i\ (= 1, \ldots, r), \tag{6.5}$$

где $w_{ij} \in U$. Правая часть этого соотношения представляет динамическую систему в терминах ее абстрактной весовой функции. Введем теперь отношение эквивалентности $E \subset U^2 \times U^2$, полагая

$$((u, u'), (\hat{u}, \hat{u}')) \in E \Longleftrightarrow (u * \hat{u}' = \hat{u} * u').$$

Как хорошо известно (см. [7]),

(i) U^2/E является полем, называемым обычно факторполем, операции в котором определяются следующим образом:

$$\text{нулевой элемент } 0 = [0, u], \text{ где } u \neq 0 \text{ произвольно,}$$
$$\text{единица} = [u, u], \text{ где } u \neq 0 \text{ произвольно,}$$
$$[u, u'] + [\hat{u}, \hat{u}'] = [u * \hat{u}' + \hat{u} * u', u' * \hat{u}'],$$
$$[u, u'] \times [\hat{u}, \hat{u}'] = [u * \hat{u}, u' * \hat{u}'].$$

(ii) Пусть u_0 — некоторый отличный от нуля фиксированный элемент из U, а h: $U \to U^2/E$ удовлетворяет условию $h(u) = [u * u_0, u_0]$. Тогда h является гомоморфизмом в том смысле, что

$$h(u + u') = h(u) + h(u') \quad \text{и} \quad h(u * u') = h(u) \times h(u').$$

Но теперь абстрактная передаточная функция получается в результате применения преобразования h к уравнению (6.5), т. е.

$$h(y_i) = h\left(\sum_{j=1}^{m} w_{ij} * x_j\right) = \sum_{j=1}^{m} h(w_{ij}) \times h(x_j).$$

Таким образом, абстрактная передаточная функция $\mathrm{TF}(\rho_{20})$ для ρ_{20} может быть представлена матрицей следующего вида:

$$\mathrm{TF}(\rho_{20}) = \begin{bmatrix} h(w_{11}) & \dots & h(w_{1m}) \\ \vdots & & \vdots \\ h(w_{r1}) & \dots & h(w_{rm}) \end{bmatrix}.$$

В частности, если $r = m = 1$, то

$$h(w_{11}) = h(y_1)/h(x_1).$$

Чтобы показать, что такая абстрактная передаточная функция действительно является законным обобщением обычного понятия передаточной функции, нам придется выяснить, как можно представлять дифференциальные и интегральные операторы в фактор-поле U^2/E.

Пусть $D\colon U \to U$ — линейный оператор, такой, что

$$D(u) = u' \Leftrightarrow u = 1 * u' + \alpha(u), \tag{6.6}$$

где $1 \in U$ — некоторый фиксированный элемент, а $\alpha\colon U \to U$ — линейный оператор. В обычном операционном исчислении D — это дифференциальный оператор, а отношение (6.6) означает, что

$$du/dt = u' \Leftrightarrow u(t) = \int_0^t 1 \times u'(\tau)\,d\tau + u(0),$$

где 1 — постоянная функция, такая, что $1(t) = 1$ при любых t. Если гомоморфизм h применить к отношению (6.6), то получим, что

$$h(D(u)) = h(u') \Leftrightarrow h(u) = h(1) \times h(u') + h(\alpha(u)),$$

и значит,

$$h(D(u)) = h(u') = (1/h(1)) \times (h(u) - h(\alpha(u))).$$

Если теперь $1/h(1)$ заменить на s, то последнее соотношение примет следующий вид:

$$h(D(u)) = s(h(u) - h(\alpha(u))). \tag{6.7}$$

Рассматривая теперь h как преобразование Лапласа, мы видим, что уравнение (6.7) в точности совпадает с одной из основных формул теории преобразования Лапласа, если оператор D интерпретировать как дифференциальный.

Аналогично, если интегральный оператор I: $U \to U$ представить соотношением

$$I(u) = u' \Leftrightarrow u' = 1 * u,$$

то оператор I можно записать в следующем виде:

$$h\,(I(u)) = h\,(u)/s. \tag{6.8}$$

Уравнение (6.8) совпадает еще с другой основной формулой теории преобразований Лапласа. К тому же нетрудно показать, что отображение h инъективно, и значит, для h существует «обратное преобразование».

Глава VII

УПРАВЛЯЕМОСТЬ

В этой главе мы определим в самом общем контексте некоторые фундаментальные понятия того же типа, что и управляемость. Для этого нам придется рассматривать не только характеристики соответствующих систем, но и оценки качества их поведения. При этом классические понятия этого ряда, такие, как управляемость по состояниям, функциональная управляемость или воспроизводимость, окажутся частными случаями этих более общих понятий.

Приводятся также необходимые условия общей управляемости многокритериальных систем, т. е. систем, оценка качества поведения которых выражается не каким-то одним числом, а вектором, например, систем с несколькими параметрами состояния, если речь идет об управляемости по состояниям. При этом для класса линейных систем удается получить как необходимые, так и достаточные условия общей управляемости. К тому же устанавливается, что классические условия управляемости по состояниям и функциональной управляемости для систем, описываемых дифференциальными уравнениями, могут быть получены в результате конкретизации этих общих условий.

Глава VII завершается исследованием взаимосвязей между различными свойствами временных систем по отношению к их свойствам управляемости и реализуемости.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Для того чтобы обобщить понятия типа управляемости, сделав их пригодными для более общего контекста, представляется целесообразным сделать два следующих замечания:

(i) Способность системы функционировать определенным образом обычно оценивается по характеру ее выходной величины, но в конечном счете она зависит лишь от поступающих на нее входных воздействий. Поэтому условия, определяющие, обладает система некоторыми свойствами или нет, будут выражены в терминах существования соответствующих входных воздействий.

(ii) Для того чтобы определять понятия в этой категории, необходимо, вообще говоря, вводить некоторую оценочную функцию, или показатель качества, позволяющую уточнить, что же считается желаемым поведением системы. Мы специально обращаем внимание на это потому, что в классической теории (например, в теории управляемости систем, описываемых дифференциальными уравнениями в пространстве состояний) эти функции в явном виде не фигурируют. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что, кроме системы $S \subset X \times Y$, задано некоторое отображение

$$G\colon X \times Y \to V,$$

которое мы называем оценочной функцией (или критерием качества) системы.

В этой главе система описывается с помощью отображения, определенного на двух объектах M и U:

$$S\colon M \times U \to Y.$$

Такое определение допускает несколько интерпретаций. Например, можно рассматривать S как какую-то начальную реакцию общей системы, являющейся на самом деле отношением, можно рассматривать ее как функциональную систему или как объединение семейства реакций и т. п. Каждый раз, когда речь пойдет о какой-то конкретной интерпретации отображения S, мы будем это специально оговаривать.

Оценочная функция G имеет для такого представления системы S вид $G\colon M \times U \times Y \to V$, а композицию отображений S и G мы условимся обозначать через $g\colon M \times U \to V$, причем для любых $(m, u) \in M \times U$

$$g(m, u) = G(m, u, S(m, u)).$$

В рассматриваемой категории имеется три основополагающих понятия.

Определение 1.1. Множество $V' \subset V$ называется *воспроизводимым* (*достижимым*, *доступным*) *относительно* g тогда и только тогда, когда

$$(\forall v)\,[v \in V' \Rightarrow (\exists\,(m, u))\,(g(m, u) = v)].$$

В тех случаях, когда характер отображения g ясен из контекста, его можно явно не упоминать.

Точка $v \in V$ называется *воспроизводимой* тогда и только тогда, когда существует воспроизводимое множество V', такое, что $v \in V'$.

Определение 1.2. Множество $V' \subset V$ называется *вполне управляемым относительно* g (или G и S) тогда и только тогда, когда

$$(\forall v)\,(\forall u)\,[v \in V' \;\&\; u \in U \Rightarrow (\exists m)\,(g(m, u) = v)].$$

В тех случаях, когда характер отображения g ясен из контекста, его можно явно не упоминать.

Заслуживает упоминания еще один вариант определения 1.2, хотя мы и не собираемся исследовать его подробно. Дело в том, что требования определения 1.2 могут оказаться слишком ограничительными для некоторых практических приложений, в которых было бы достаточно обеспечить качество, принадлежащее некоторому подмножеству V' при любом $u \in U$, а не требовать, чтобы это качество принимало некоторое фиксированное значение. В этом случае условие полной управляемости должно выглядеть следующим образом:

$$(\forall u)\ [u \in U \Rightarrow (\exists m)\ (g\ (m,\ u) \in V')].$$

Третье понятие мы определим для случая, когда оценочный объект V имеет более одной компоненты, т. е.

$$V = V_1 \times \ldots \times V_k = \times\ \{V_j\colon\ j \in I_k\},$$

где $I_k = \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$. Для удобства условимся пользоваться в этом случае символом V^k вместо V, причем верхний индекс указывает на число компонент в объекте V. Если V имеет более одной компоненты, то соответствующую систему мы договоримся называть *многокритериальной*.

Для каждого $i \in I_k$ обозначим через p_i отображение проектирования $p_i\colon V^k \to V_i$, т. е. будем обозначать через $p_i(v)$ i-ю компоненту оценки v.

Договоримся также называть подмножество $V' \subseteq V^k$ *декартовым* тогда и только тогда, когда

$$V' = p_1\ (V') \times \ldots \times p_k\ (V'),$$

т. е. когда V' совпадает с декартовым произведением своих проекций. Для любого заданного подмножества $V' \subset V^k$ определим декартово множество $\hat{V}'$, порожденное множеством V', как $\hat{V}' = p_1\ (V') \times \ldots \times p_k\ (V')$. Очевидно, что некоторое множество V' является декартовым тогда и только тогда, когда $\hat{V}' = V'$.

Теперь мы готовы ввести следующее понятие:

Определение 1.3. Множество $V' \subset V^k$ называется *склеенным* (при заданных S и G) тогда и только тогда, когда декартово множество $\hat{V}'$, порожденное V', не воспроизводимо. Другими словами, V' называется склеенным тогда и только тогда, когда истинно следующее предложение:

$$(\exists v)\ [v \in \hat{V}'\ \&\ (\forall\ (m,\ u))\ (g\ (m,\ u) \neq v)].$$

Множество V' называется *несклеенным* тогда и только тогда, когда

$$(\forall v)\ [v \in \hat{V}' \Rightarrow (\exists\ (m,\ u))\ (g\ (m,\ u) = v)].$$

Содержательный смысл понятия воспроизводимости очевиден. Любой элемент воспроизводимого множества можно получить, если возникнет такая необходимость. Управляемость — это более сильное свойство, которое гарантирует возможность достижения любой заданной оценки $v \in V'$ при любых внешних условиях, т. е. при любых $u \in U$. Наконец, склеенность — это специальное понятие, относящееся лишь к системам, оцениваемым по векторному критерию. Система называется *склеивающей* относительно декартова множества $V' = V'_1 \times \ldots \times V'_k$, если не все возможные комбинации компонент ее оценки возможно реализовать одновременно, т. е. если некоторое заданное значение одной из компонент, скажем $\hat{v}_i \in p_i(V')$, может быть достигнуто лишь в сочетании с некоторыми (а не всеми) значениями остальных компонент. Создается впечатление, что между различными компонентами оценочного объекта как бы существует внутренняя взаимосвязь, чем и объясняется термин «склеивающая». Если множество V' является склеенным, то существует нетривиальное отношение

$$\Psi \subset p_1(V') \times \ldots \times p_k(V'),$$

такое, что

$$v = (v_1, \ldots, v_k) \in \Psi \Longleftrightarrow (\exists (m, u)) [g(m, u) = v].$$

Это отношение Ψ мы будем называть *отношением склейки*. Если Ψ — функция, т. е. если

$$\Psi\colon V_1 \times \ldots \times V_i \to V_{i+1} \times \ldots \times V_k,$$

мы будем называть ее *функцией склейки*, а соответствующее множество — *функционально склеенным*.

В этой главе мы примем еще несколько дополнительных соглашений.

(i) Если выбор m и/или u ограничен, скажем, множеством $M' \times U' \subset M \times U$, то мы условимся говорить о воспроизводимости или управляемости относительно $M' \times U'$, а множество V' будем обозначать через $V'[M' \times U']$.

(ii) Если $V' = \mathscr{R}(g)$, то мы будем называть склеивающей или управляемой (в зависимости от того, о каком свойстве идет речь) саму систему. Поэтому система называется несклеивающей тогда и только тогда, когда область определения ее характеристики g, т. е. $\mathscr{R}(g)$, является декартовым множеством.

(iii) Если $V' \subseteq g(M \times \{\hat{u}\})$, где $\hat{u}$ — некоторый заданный элемент из U, то мы будем говорить, что система *управляема для* $\hat{u}$ или, короче, $\hat{u}$*-управляема* в V'. Аналогично, если V' содержит всего один элемент, т. е. $V' = \{\hat{v}\}$, то мы будем говорить, что система *управляема в* $\hat{v}$ или, короче, $\hat{v}$*-управляема*.

(а) Взаимосвязь между основными понятиями теории управляемости

Взаимосвязь между различными введенными выше понятиями легко установить, исходя из самих определений.

Предложение 1.1. Если множество V' вполне управляемо, то оно воспроизводимо.

Однако обратное утверждение неверно.

Предложение 1.2. Если множество V' несклеенное, то оно воспроизводимо.

Несколько более тонкой является взаимосвязь между понятиями полной управляемости и склеенности. Несклеенность не влечет за собой полную управляемость, а полная управляемость не влечет за собой несклеенность, как это можно было бы ожидать из интуитивных соображений. Чтобы доказать справедливость этого утверждения, предположим, что множество V' несклеенное и, более того, существуют такие $\hat{u} \in U$ и $\hat{v} \in V$, что $g(m, \hat{u}) = \hat{v}$ при любых $m \in M$. Последнее предположение не мешает несклеенности множества V', но в то же время противоречит предположению о полной управляемости, поскольку в этих условиях добиться произвольного $v^* \neq \hat{v}$ с помощью соответствующего выбора $m \in M$ нельзя, если только $u = \hat{u}$. В свою очередь предположим, что множество V' вполне управляемо. Но это еще не означает, что V' можно считать воспроизводимым. Конечно, если $V' = \hat{V}'$, то полная управляемость влечет за собой, по определению, несклеенность V'. Этот вывод к тому же позволяет получить и некоторые достаточные условия срыва управляемости в терминах склеенности.

Предложение 1.3. Пусть $V' \subset V^k$ — некоторое декартово множество, т. е. $V' = \hat{V}'$. Если V' склеено, то оно не может быть вполне управляемым.

Только что сформулированное предложение играет важную роль в различных практических приложениях. *Если интересующее нас множество является декартовым, то для того, чтобы показать, что оно не может быть вполне управляемым, достаточно установить его склеенность.*

Предложение 1.4. Пусть $V' \subset V^k$ — некоторое декартово множество. Множество V' вполне управляемо относительно U' тогда и только тогда, когда множество $V'\,[M \times \{u\}]$ является несклеенным для любого $u \in U'$.

Доказательство. Пусть множество V' является несклеенным для $M \times \{u\}$ при любом $u \in U'$. Тогда $V' \subseteq g(M \times \{u\})$ при любом $u \in U'$ и, значит, V' вполне управляемо по определению. В свою очередь если V' вполне управляемо относительно U', то $V' \subset g(M \times \{u\})$ для любого $u \in U'$. А это значит (по определению), что V' воспроизводимо, а поскольку множество V' декартово, оно должно быть склеенным, ч. т. д.

2. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ УСЛОВИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Управляемость системы зависит от характера отображения g и от ограничений, действующих в области $M \times U$, в то время как различные условия управляемости зависят от более конкретных определений этих отображений и множеств. Однако когда речь идет о многокритериальных системах, т. е. когда оценочный объект содержит более одной составляющей, оказывается возможным получить довольно общие условия управляемости, отражающие взаимосвязь между различными компонентами оценки. Понятно, что этот подход самым тесным образом связан с понятием склеенности. И, в самом деле, в качестве типовой мы рассмотрим сейчас следующую задачу:

Пусть дана некоторая многокритериальная система g. Каковы условия несклеенности системы g? Другими словами, воспроизводимо ли множество $\hat{g}(M \times U)$? Решение этой задачи позволяет сразу перейти к условиям управляемости. Ведь в этом случае управляемость существенно зависит от взаимосвязей между различными компонентами оценки, а это позволяет говорить о ней как об *алгебраической* (или *структурной*) *управляемости*. Важность этого случая можно увидеть хотя бы из того, что почти все условия, относящиеся к проблеме управляемости и полученные на сегодняшний день для различных классов систем, относятся именно к этому типу.

Итак, начнем с одного достаточного условия склеенности.

Теорема 2.1. Пусть $g\colon M \times U \to V^k$ есть некоторая многокритериальная система. Если существуют некоторое положительное целое $j < k$ и некоторая функция $F\colon V^j \to V^k$, такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \times U \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p^j \cdot g"'] & & V^k \\ & V^j \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, а множество $p^{k-j}g\,(M \times U)$ непусто и содержит более одного элемента, то рассматриваемая система является склеивающей [т. е. множество $g\,(M \times U)$ не является декартовым], где $V^j = V_1 \times \ldots \times V_j$, а p^j и p^{k-j} — операторы проектирования V^k в V^j и $V_{j+1} \times \ldots \times V_k$ соответственно.

Доказательство. Пусть $q = k - j$. Поскольку множество $p^q \cdot g\,(M \times U)$ содержит более одного элемента, обозначим через v^q и $\hat{v}^q$ два различных элемента из $p^q \cdot g\,(M \times U)$, причем $v^q = p^q \cdot g\,(m, u)$, а $\hat{v}^q = p^q \cdot g\,(\hat{m}, \hat{u})$. Предположим, что рассматриваемая система несклеивающая. Тогда, поскольку $(p^j \cdot g\,(m, u), p^q \cdot g\,(\hat{m}, \hat{u})) \in \hat{g}\,(M \times U)$, найдется такое $(m', u') \in M \times U$, что $g\,(m', u') = (p^j \cdot g\,(m, u), p^q \cdot g\,(\hat{m}, \hat{u}))$. Так как приведенная выше диаграмма коммутативна, отсюда следует, что

$$F \cdot p^j \cdot g\,(m, u) = g\,(m', u') \neq g\,(m, u) = F \cdot p^j \cdot g\,(m, u).$$

Мы получили противоречие, ч. т. д.

Чтобы вывести необходимые и достаточные условия склеенности, в определение системы нужно ввести дополнительные структуры. В частности, этого можно добиться, задав на оценочном объекте V линейную структуру. Однако V по-прежнему должен оставаться многомерным объектом, что необходимо для склеенности и алгебраической управляемости. Для этого существует два пути.

(i) Пусть V—линейное пространство, а $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_k)$—семейство соответствующих операторов проектирования, $p_i\colon V \to V_i$, таких, что V_i — некоторое линейное подпространство, а V — их прямая сумма, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$. Теперь в качестве компонент оценочного объекта V мы будем рассматривать составляющие этой прямой суммы. Заметим, что если исходить из некоторого заданного линейного пространства оценок V, то и сами составляющие этой прямой суммы, и их число определяются семейством операторов проектирования $\bar{p}$, которое в общем случае для заданного пространства определяется не единственным образом, поскольку разложить линейное пространство на подпространства можно многими способами. *Склеенность в V поэтому приходится определять относительно некоторого заданного семейства операторов проектирования.*

(ii) Пусть $V = V_1 \times \ldots \times V_k = V^k$ и каждая составляющая V_i этого произведения является линейным пространством. Тогда линейным пространством является и само множество V.

Теперь мы готовы сформулировать некоторые необходимые и достаточные условия склеенности.

Теорема 2.2. Пусть V — линейное пространство над полем $\mathcal{A}$ и $g(M \times U)$ — отличное от нулевого линейное подпространство в пространстве V. Тогда для существования семейства проекций, относительно которых рассматриваемая система оказывается склеивающей, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие собственное линейное подпространство $V_1 \subset V$ и функция $F\colon V_1 \to \to V$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \times U \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p_1 \cdot g"'] & & V \\ & V_1 \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, если p_1 есть проекция V в V_1.

Доказательство. Начнем с доказательства достаточности. Если $(I - p_1)\cdot g(M \times U)$ содержит хоть один отличный от нуля элемент, в нем имеется более двух элементов. Но тогда свойство склеенности системы следует из теоремы 2.1. Предположим поэтому, что $(I - p_1)\cdot g(M \times U) = \{0\}$, т. е. что $g(M \times U) \subset \subset V_1$. Пусть $\hat{V}_1 = g(M \times U)$, и пусть V_2 — такое линейное подпространство, что $V = \hat{V}_1 \oplus V_2$. Тогда, используя тот же метод, что и при доказательстве теоремы 1.2 гл. II, мы можем построить такое другое линейное подпространство $\hat{V}_1'$, что $V = = \hat{V}_1' \oplus V_2$ и $\hat{V}_1 \notin \hat{V}_1'$. Следовательно, существует такое $\hat{v} \neq 0$, что $\hat{v} \in \hat{V}_1$ и $\hat{v} \notin \hat{V}_1'$. Обозначим семейство операторов проектирования, соответствующих $\{\hat{V}_1', V_2\}$, через $\{p_1, p_2\}$. Очевидно, что $p_2\hat{v} \neq 0$. Предположим, что рассматриваемая система является несклеивающей относительно $\{p_1, p_2\}$. Но тогда, поскольку для любых $\alpha \in \mathcal{A}$ и $\alpha' \in \mathcal{A}$ имеют место включения $p_1\alpha\hat{v} \in \hat{V}_1'$ и $p_2\alpha'\hat{v} \in \in V_2$, то

$$\alpha p_1\hat{v} + \alpha' p_2\hat{v} = \alpha\hat{v} + (\alpha' - \alpha)\, p_2\hat{v} \in \hat{V}_1.$$

Но так как $(\alpha' - \alpha)\, p_2\hat{v} \in V_2$, то это противоречит предположению о том, что $V = \hat{V}_1 \oplus V_2$.

Перейдем теперь к доказательству необходимости. Для этого заметим, что соотношения $V \supset \hat{g}(M \times U) \supset g(M \times U)$ верны для любых систем. Если система склеивающая, то найдется такой отличный от нуля элемент $\hat{v} \in V$, что $\hat{v} \notin g(M \times U)$. Пусть $V_2 = = \{\alpha\hat{v}\colon \alpha \in \mathcal{A}\}$. Тогда, поскольку $g(M \times U)$ есть некоторое линейное подпространство и, значит, $V_2 \cap g(M \times U) = \{0\}$, подпространство V_2 является собственным подпространством пространства V. Но это значит, что существует другое такое подпространство V_1, что $V = V_1 \oplus V_2$ и $g(M \times U) \subset V_1$. Определим $F\colon V_1 \to V$, потребовав, чтобы $F(v_1) = v_1$. Если $v = g(m, u)$, то $v \in V_1$ и, следовательно, $p_1 \cdot g(m, u) = g(m, u)$. Следовательно, $F \cdot p_1 \cdot g(m, u) = g(m, u)$, ч. т. д.

Теорема 2.3. Пусть V^k — некоторое конечномерное линейное пространство над полем $\mathscr{A}$, причем каждое V_i порождено $\hat{v}_i \neq 0$, т. е. $V_i = \{\alpha\hat{v}_i\colon \alpha \in \mathscr{A}\}$. Предположим, что $g(M \times U)$ есть некоторое линейное подпространство пространства V^k. Тогда для склеенности системы необходимо и достаточно, чтобы нашлись такое собственное линейное подпространство $V^j \subset V^k$ и функция $F\colon V^j \to V^k$, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \times U \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p_1 \cdot g"'] & & V \\ & V_1 \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, а $p^{k-j} \cdot g(M \times U)$ содержит хотя бы один отличный от нуля элемент.

Доказательство достаточности повторяет доказательство теоремы 2.1. Установим поэтому лишь необходимость. Пусть $V' = g(M \times U)$ и $V_i' = p_i g(M \times U)$. Поскольку V' склеено, V' представляет собой собственное подмножество в $V_1' \oplus \ldots \oplus V_k'$. А это значит, что существует одна компонента V_i', такая, что $V_i' \not\subset V'$ или, что то же самое, $V_1' \oplus \ldots \oplus V_k' \subset V'$. Поэтому предположим, что, например $V_k' \not\subset V'$. Тогда найдется один такой элемент v_k', что $0 \neq v_k' \in V_k'$ и $v_k' \notin V'$. Но так как V_k порождено некоторым $\hat{v}_k$, то без какой-либо потери общности мы можем предположить, что $v_k' = \hat{v}_k$. Определим теперь отношение $\lambda \subset V^{k-1} \times V^k$, потребовав, чтобы

$$(v^{k-1}, v_k) \in \lambda \Leftrightarrow (\exists (m, u))(v^{k-1} = p^{k-1} \cdot g(m, u) \;\&\; v_k = p_k g(m, u)).$$

Покажем, что λ на самом деле есть функция, $\lambda\colon \mathscr{D}(\lambda) \to V_k$. Поскольку V' является собственным линейным подпространством, существует такая линейная функция $f\colon V \to \mathscr{A}$, что $f(\hat{v}_k) = 1$

и $f(v') = 0$, если $v' \in V'$. Предположим, что $(v^{k-1}, v_k) \in \lambda$ и $(v^{k-1}, v'_k) \in \lambda$, где $v_k = \alpha\hat{v}_k$, а $v'_k = \alpha' \cdot \hat{v}_k$. Но тогда $f(v^{k-1} + v_k) = 0 = f(v^{k-1} + v'_k)$ и, следовательно, $\alpha f(\hat{v}_k) = \alpha' f(\hat{v}_k)$, или $\alpha = \alpha'$. А это значит, что $v_k = v'_k$, т. е. λ — функция. Определим тогда $F\colon V^{k-1} \to V_k$ так, чтобы $F(v^{k-1}) = v^{k-1} + \lambda(v^{k-1})$. Тогда

$$\begin{aligned} F \cdot p^{k-1} \cdot g(m, u) &= p^{k-1} \cdot g(m, u) + \lambda(p^{k-1} \cdot g(m, u)) = \\ &= p^{k-1} \cdot g(m, u) + p_k \cdot g(m, u) = g(m, u), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что при доказательстве этих теорем никаких предположений относительно линейности g мы не делали. Конечно, самый простой способ удовлетворить как условиям теоремы 2.2, так и условиям теоремы 2.3,— это потребовать, чтобы M и U были линейными пространствами, а g — линейной функцией.

Поскольку, согласно предложению 1.3, склеенность исключает любую возможность управляемости, мы сразу получаем несколько следствий.

Следствие 2.1. Если выполнены условия теоремы 2.1, то множество $\hat{g}(M \times U)$ не может быть вполне управляемым.

Следствие 2.2. Предположим, что $g(M \times U)$ есть линейное подпространство некоторого линейного пространства V. Тогда, если выполнены условия теоремы 2.2, то всегда существует такое семейство проекций, что множество $\hat{g}(M \times U)$ не может быть вполне управляемым относительно этого семейства.

Следствие 2.3. Предположим, что $g(M \times U)$ есть некоторое линейное подпространство конечномерного линейного пространства V^k. Тогда, если выполнены условия теоремы 2.3, множество $\hat{g}(M \times U)$ не может быть вполне управляемым.

Следствие 2.4. Предположим, что $g(M \times \{0\})$ есть некоторое линейное подпространство линейного пространства V, а $U = \{0\}$. Множество V не может быть вполне управляемым в том и только в том случае, когда выполнены условия теоремы 2.2.

Доказательство достаточности сводится к применению следствия 2.2. Поэтому докажем лишь необходимость. Поскольку V в этом случае не управляемо, $g(M \times \{0\})$ должно быть собственным подмножеством в V. Обозначим $g(M \times \{0\})$ через V_1. Но тогда найдется такое другое подпространство V_2, что $V = V_1 \oplus V_2$. Определим $F\colon V_1 \to V$ так, чтобы $F(v_1) = v_1$. Но тогда мы сразу получаем требуемый результат, ч. т. д.

Чтобы вполне оценить содержательный смысл этих следствий, необходимо отметить, что функция F: $V^j \to V^k$ должна удовлетворять отношению

$$
\begin{aligned}
&p^{k-j} \cdot F\,((v_1, \ldots, v_j)) = \\
&= (v_{j+1}, \ldots, v_k)\,\&\,(\exists\,(m, u))\,(p^j g\,(m, u) = (V_1, \ldots, V_j)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\exists\,(m, u))\,[g\,(m, u) = (v_1, \ldots, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k)],
\end{aligned} \tag{7.1}
$$

т. е. функция $p^{k-j} \cdot F$ должна быть склеивающей. Заметим теперь, что функция g является векторнозначной, а существование F означает существование между различными компонентами ее значений определенных взаимосвязей. Точнее говоря, если зафиксировать значения j компонент, то значения остальных $k - j$ компонент будут определены функцией F. Поэтому утверждение (7.1) подсказывает такую проверку на управляемость. Начнем с системы уравнений

$$
\begin{aligned}
v_1 &= g_1\,(m, u), \\
&\vdots \\
v_k &= g_k\,(m, u),
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

где $g_i\,(m, u) = p_i \cdot g\,(m, u)$. Если из системы (7.2) удается вывести систему уравнений вида

$$
\begin{aligned}
v_1 &= F_1\,(v^j), \\
&\vdots \\
v_k &= F_k\,(v^j),
\end{aligned}
$$

где $v^j \in V^j$ и $j < k$, то множество $\hat{g}\,(M \times U)$ не может быть управляемым. Другими словами, достаточным условием неуправляемости является возможность исключения из системы уравнений (7.2) (описывающих исследуемую систему в терминах g) входных воздействий m и u и получения в результате некоторой функциональной зависимости между различными компонентами оценки, и только между ними.

В связи с этой процедурой уместно сделать следующие замечания:

(i) Для того чтобы доказать неуправляемость, требуется доказать лишь существование функций $F_1, \ldots, F_k$, а конкретный вид этих функций является несущественным. *В этом смысле отображение F играет в теории управляемости ту же роль, что и функции Ляпунова в теории устойчивости.*

(ii) Если система S задана, характер функции F определяется функцией G. Например, если система S описывается дифференциальными уравнениями, функция F может устанавливать какие-то отношения между значениями траекторий системы в некоторый (или любой) момент времени, т. е. $F\,(y^r\,(\hat{t})) = y^k(\hat{t})$, или между этими траекториями в целом, например, $y^k = F\,(y^r)$, где y^r и y^k соответствуют v^r и v^k.

Теорема 2.2 ясно указывает на роль линейности в теории управляемости. По сути дела линейность превращает достаточные условия в необходимые и достаточные. Например, при определенных условиях оказывается достаточным проверить управляемость лишь для одного элемента из U.

Теорема 2.4. Пусть M — моноид, V^k и U — абелевы группы, а g имеет следующий вид: $g(m, u) = g^1(m) + g^2(u)$, где g^2 — гомоморфизм, т. е. $g^2(u + u') = g^2(u) + g^2(u')$.

Пусть $V' = \bigcap \{g(M, \{u\}): u \in U\}$. Тогда если найдется такое $u' \in U$, что множество $\hat{V}'[M \times \{u'\}]$ вполне управляемо, то вполне управляемо и $\hat{V}'[M \times U]$.

Доказательство. Пусть $\hat{v}$ — некоторый произвольный элемент из $\hat{V}'$, а $\hat{v}' = \hat{v} + g^2(u')$. Покажем, что $\hat{v}' \in \hat{V}'$. Согласно определению $\hat{V}'$, имеем $\hat{v}_i' - g_i^2(u') = \hat{v}_i \in \bigcap_u g_i(M, u)$, где $\hat{v}_i' = p_i\hat{v}'$, $g_i^2(u') = p_i \cdot g^2(u')$, $\hat{v}_i = p_i \cdot \hat{v}$ и $g_i(m, u) = p_i \cdot g(m, u)$. Но отсюда

$$\hat{v}_i' \in \bigcap_u g_i(M, u) + g_i^2(u') = \bigcap_u g_i(M, u + u') = \bigcap_u g_i(M, u)$$

и, значит, $\hat{v}' \in \hat{V}'$. Поэтому, если множество $\hat{V}'[M \times \{u'\}]$ вполне управляемо, $\hat{v}' = \hat{v} + g^2(u')$ может быть представлено в виде $\hat{v}' = g(\hat{m}', u')$ для некоторой пары $(\hat{m}', u') \in M \times \{u'\}$, т. е. $\hat{v} = g^1(\hat{m}') + g^2(0)$. Следовательно, $\hat{V}'[M \times \{0\}]$ также вполне управляемо. Аналогичным образом можно показать, что если вполне управляемо множество $\hat{V}'[M \times \{0\}]$, то при любом $u \in U$ вполне управляемо и $\hat{v}'[M \times \{u\}]$. Поэтому, если вполне управляемо $\hat{V}'[M \times \{u'\}]$ при некотором $u' \in U$, то вполне управляемо и $\hat{V}'[M \times U]$, ч. т. д.

Хотя теорема 2.4 доказана для абелевых групп, а не для линейных алгебр, она безусловно справедлива и для линейных алгебр, поскольку любая такая алгебра является и абелевой группой.

3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ

(а) Управляемость в пространстве состояний

В этом параграфе нас будет интересовать управляемость специального вида, представляющая особый интерес для динамических систем. Точнее говоря, мы всегда будем считать выполненными следующие дополнительные предположения:

(i) S — динамическая система с каноническим представлением $(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$ и соответствующим пространством состояний C.

(ii) $U = C$ и $V = C$.

(iii) Оценочное отображение g определено в терминах семейства функций перехода состояний, а его конкретный характер указан в определениях понятий, которые вводятся ниже.

В основном нас будут интересовать следующие понятия.

Определение 3.1. Динамическая система называется *вполне управляемой* (для своего пространства состояний) тогда и только тогда, когда

$$(\forall c)\,(\forall \hat{c})\;(\exists x^t)\;[\hat{c} = \varphi_{0t}\,(c,\, x^t)].$$

Определение 3.2. Динамическая система называется *вполне управляемой (по состояниям) из состояния c_0* тогда и только тогда, когда

$$(\forall c)\;(\exists x^t)\;[\hat{c} = \varphi_{0t}\,(c_0,\, x^t)].$$

Для краткости мы будем называть систему *управляемой* (по состояниям), если она управляема из нулевого элемента своего линейного пространства состояний.

Определение 3.3. Динамическая система называется *управляемой (по состояниям) в состояние c_0* тогда и только тогда, когда

$$(\forall c)\;(\exists x^t)\;[c_0 = \varphi_{0t}\,(c,\, x^t)],$$

и нуль-управляемой, когда, кроме того, $c_0 = 0$.

Важность сформулированных выше понятий управляемости в пространстве состояний для динамических систем связана с каноническими представлениями. Ведь именно благодаря этим представлениям динамику системы можно исчерпывающим образом исследовать, изучая семейство функций перехода состояний. Выходная величина системы в этом случае определяется видом выходной функции, которая является статической и не оказывает влияния на динамику эволюции системы. Следует также отметить, что управляемость в пространстве состояний была в теории систем хронологически первым понятием такого рода, и притом она оказалась и единственным подробно исследованным понятием в классической теории систем, а также в теории линейных систем (см. [8]).

Понятия, введенные в определениях 3.1—3.3, очевидно, тесно связаны между собой, но не совпадают друг с другом даже для линейных систем. Их можно сделать эквивалентными, но для этого следует добавить некоторые новые условия, как это явствует из следующего утверждения:

Предложение 3.1. Пусть S — линейная инвариантная во времени динамическая система, для которой существует такое $\hat{t}$, что

$$(\forall c)\,(\forall x^t)\,(\exists \hat{x}^{\hat{t}})\,(c = \varphi_{0t}\,(0,\ x^t) \Rightarrow c = \varphi_{0\hat{t}}\,(0,\ \hat{x}^{\hat{t}})), \tag{7.3}$$

$$(\forall c)\,(\forall x^t)\,(\exists \hat{x}^{\hat{t}})\,(0 = \varphi_{0t}\,(c,\ x^t) \Rightarrow 0 = \varphi_{0\hat{t}}\,(c,\ \hat{x}^{\hat{t}})), \tag{7.4}$$

$$(\forall t)\,(\forall c')\,(\exists c)\,(c' = \varphi_{0t}\,(c,\ 0)). \tag{7.5}$$

Тогда все три определения управляемости в пространстве состояний эквивалентны между собой при условии, что c_0 есть нуль линейного пространства C.

Доказательство. (i) Определение 3.2 $\Rightarrow$ определение 3.3. Пусть c произвольно, и пусть $c' = \varphi_{10\hat{t}}(c)$. Поскольку наша система управляема по состояниям, $c' = \varphi_{20t'}(\hat{x}^{t'})$ для некоторого $\hat{x}^{t'}$. Однако из условия (7.3) следует, что $c' = \varphi_{20\hat{t}}\,(x^{\hat{t}})$ для некоторого $x^{\hat{t}}$ и потому

$$0 = \varphi_{10\hat{t}}(c) + \varphi_{20\hat{t}}(-(x^{\hat{t}})) = \varphi_{0\hat{t}}(c,\ -x^{\hat{t}}).$$

Но это означает, что условия определения 3.3 выполнены.

(ii) Определение 3.3 $\Rightarrow$ определение 3.2. Пусть c' произвольно. Тогда, согласно условию (7.5), $c' = \varphi_{10\hat{t}}\,(c)$ для некоторого $c \in C$. А так как наша система управляема в состояние 0, при некотором $\hat{x}^{t'}$ справедливо равенство $0 = \varphi_{0t'}\,(c,\ \hat{x}^{t'})$. Но тогда $0 = \varphi_{0\hat{t}}\,(c,\ x^{\hat{t}})$ и для некоторого $x^{\hat{t}}$, что гарантируется условием (7.4). Так как

$$0 = \varphi_{10\hat{t}}(c) + \varphi_{20\hat{t}}(x^{\hat{t}}) = c' + \varphi_{20\hat{t}}(x^{\hat{t}}),$$

то $c' = \varphi_{0\hat{t}}(0,\ -(x^{\hat{t}}))$.

(iii) Определения 3.2 и 3.3 $\Rightarrow$ определение 3.1. Пусть c и c' произвольны. Поскольку наша система одновременно управляема по состояниям и управляема в состояние 0, $0 = \varphi_{0t}\,(c,\ x^t)$ и $c' = \varphi_{0t'}\,(0,\ \hat{x}^{t'})$ для некоторых x^t и $\hat{x}^{t'}$. Однако наша система еще и инвариантна во времени и, следовательно, $c' = \varphi_{tt''}\,(0, {}^tF^t\,(\hat{x}^{t'}))$, где $t'' = t' + t$. Заметим теперь, что из свойств динамических систем следует, что $0 = \varphi_{0t}\,(c,\ x^t) = \varphi_{0t''}\,(c,\ x^t \cdot 0)$ и $c' = \varphi_{tt''}\,(0,\ F^t\,(\hat{x}^{t'})) = \varphi_{0t''}\,(0,\ 0 \cdot F^t\,(\hat{x}^{t''}))$ (см. гл. IV). Поэтому $c' = \varphi_{0t''}\,(c,\ x^t \cdot F^t\,(\hat{x}^t))$.

(iv) Определение 3.1 $\Rightarrow$ определение 3.2. Доказательство очевидно.

Теперь искомый результат получается в результате объединения утверждений (i) — (iv), ч. т. д.

Как будет показано ниже, условия (7.3), (7.4) и (7.5) вытекают из некоторых основных свойств линейных систем.

По-видимому, условия (7.3), (7.4) и (7.5) не являются единственными условиями, обеспечивающими эквивалентность трех сформулированных выше определений. Однако можно доказать, что этим условиям удовлетворяют обычные линейные инвариантные во времени системы, описываемые дифференциальными уравнениями, в то время как условие (7.5) может и не выполняться для некоторых линейных инвариантных во времени систем, описываемых конечно-разностными уравнениями. Это, между прочим, позволяет подметить существенную разницу между системами, описываемыми дифференциальными и конечно-разностными уравнениями.

Пространства состояний динамических систем чаще всего многомерны, а потому имеет смысл говорить об управляемости в пространстве состояний алгебраического типа, т. е. о взаимозависимости различных компонент вектора состояния, которая устанавливается системой.

Пусть $M = \bigcup\limits_{t \in T} X$ и $\bar{\varphi}\colon C \times M \to C$ таково, что

$$\bar{\varphi}(c, x^t) = \varphi_{0t}(c, x^t).$$

Тогда определения 3.1—3.3 можно переформулировать следующим образом:

(i) абсолютная управляемость: $(\forall c)(\forall \hat{c})(\exists m)(\hat{c} = \bar{\varphi}(c, m))$;

(ii) управляемость из c_0: $(\forall \hat{c})(\exists m)(\hat{c} = \bar{\varphi}(c_0, m))$;

(iii) управляемость в c_0: $(\forall c)(\exists m)(c_0 = \varphi(\bar{c}, m))$.

Как нетрудно видеть, $\bar{\varphi}$ играет теперь роль характеристики g из § 1.

Поэтому основные условия склеенности и алгебраической управляемости в том виде, как они были сформулированы в теоремах 2.1 и 2.2, могут быть непосредственно перенесены и на рассматриваемый теперь случай. В частности, следствия 2.1 и 2.2 принимают следующий вид:

Следствие 3.1. Пусть S — динамическая система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ с многомерным пространством состояний $C^k = C_1 \times \ldots \times C_k$. Тогда если найдутся такие положительное целое $j < k$ и функция $F\colon C^j \to C^k$, что для каждого $t \in T$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} C^k \times X^t \arrow[rr, "\varphi_{0t}"] \arrow[dr, "p^j \cdot \varphi_{0t}"'] & & C^k \\ & C^j \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, то система S не может быть абсолютно управляемой в C^k, где $C^j = C_1 \times \ldots \times C_j$, а $p^{k-j}\bar{\varphi}\,(C \times M)$ содержит более двух элементов.

Следствие 3.2. Пусть S — линейная инвариантная во времени динамическая система. Эта система не является управляемой в пространстве состояний C в том и только в том случае, когда существуют такое собственное линейное подпространство C_1 пространства состояний C и такая функция $F\colon C_1 \to C$, что при любом $t \in T$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} \{0\} \times X^t \arrow[rr, "\varphi_{0t}"] \arrow[dr, "p_1 \cdot \varphi_{0t}"'] & & C \\ & C_1 \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Покажем прежде всего, что $\bar{\varphi}\,(\{0\} \times \times M)$ представляет собой линейное подпространство пространства C. Пусть $c = \bar{\varphi}\,(0, x^t)$ и $\hat{c} = \bar{\varphi}\,(0, \hat{x}^{t'})$ выбраны произвольно. Тогда, поскольку функция φ_{0t} линейна, $\alpha c = \bar{\varphi}\,(0, \alpha x^t)$. Предположим, что $t' \geqslant t$, и пусть $t' = t + \tau$. Но так как φ_{0t} не только линейна, но и инвариантна во времени, то $c = \varphi_{0t}\,(0, x^t) = \varphi_{0t'}\,(0, 0 \cdot F^{\tau}\,(x^t))$ и, следовательно,

$$c + c' = \varphi_{0t'}\,(0, 0 \cdot F^{\tau}\,(x^t) + \hat{x}^{t'}) = \bar{\varphi}\,(0, 0 \cdot F^{\tau}\,(x^t) + \hat{x}^{t'}).$$

Но это означает, что $\overline{\varphi}(\{0\} \times M)$ является линейным подпространством. Но тогда можно непосредственно использовать следствие 2.4, и единственное, что мешает нам сделать это сразу,— это то, что $(I - p_1)\,\overline{\varphi}(\{0\} \times M)$ может не содержать отличных от нуля элементов. Однако если в $(I - p_1)\,\overline{\varphi}(\{0\} \times M)$ нет отличных от нуля элементов, то $\overline{\varphi}(\{0\} \times M)$, очевидно, содержится в некотором собственном подпространстве C_1 и, значит, наша система не является управляемой, ч. т. д.

Следствие 3.2 можно сформулировать и иначе, используя свойства линейного пространства состояний C. Если пространство состояний C является линейной алгеброй над полем $\mathscr{A}$, то линейным функционалом f^c на C мы будем называть некоторую линейную функцию $f^c\colon C \to \mathscr{A}$. Обозначим через F^c класс всевозможных линейных функционалов на C. В множестве F^c можно определить операции сложения и умножения на скаляр из $\mathscr{A}$ следующим образом:

$$(f^c + \hat{f}^c)(c) = f^c(c) + \hat{f}^c(c) \quad \text{и} \quad (\alpha f^c)(c) = \alpha \cdot f^c(c).$$

Если $f^c(c) = 0$ при любом $c \in C$, то этот линейный функционал мы будем обозначать через 0. Более того, поскольку

$$f^c(c + c') = f^c(c) + f^c(c') \quad \text{и} \quad f^c(\alpha c) = \alpha f^c(c),$$

само множество F^c можно рассматривать как линейную алгебру над полем $\mathscr{A}$, а потому F^c мы будем называть пространством, алгебраически сопряженным к C.

В наших последующих рассуждениях основную роль играет следующая лемма (см. [9]):

Лемма 3.1. Пусть C_0 является собственным подпространством линейного пространства C, и пусть $c_1 \in C \setminus C_0$. Тогда найдется такой элемент $f^c \in F^c$, что $f^c(c) = 0$, если $c \in C_0$, и $f^c(c_1) = 1$, где 1 есть единичный элемент поля $\mathscr{A}$.

Теперь мы можем привести другое необходимое и достаточное условие управляемости в пространстве состояний для линейных динамических систем.

Теорема 3.1. Пусть S — линейная инвариантная во времени динамическая система, а F^c — пространство, алгебраически сопряженное к ее пространству состояний C. Эта система управляема в пространстве состояний тогда и только тогда, когда для любого $f^c \in F^c$

$$(\forall x^t)\,[f^c(\varphi_{20t}(x^t)) = 0] \Rightarrow [f^c = 0]. \qquad (7.6)$$

Доказательство. Согласно следствию 3.2,

$$C_0 = \{c\colon c = \varphi_{20t}(x^t)\ \&\ x^t \in X^t\ \&\ t \in T\}$$

является линейным подпространством пространства состояний C. Из леммы 3.1 вытекает, что система не является управляемой тогда и только тогда, когда C_0 является собственным подпространством пространства C, т. е. тогда и только тогда, когда

$$(\exists f^c)\,(f^c \neq 0\ \&\ (\forall x^t)\,(f^c(\varphi_{20t}(x^t)) = 0)).$$

Заметим теперь, что, согласно определению, $f^c \neq 0$ влечет за собой $(\exists c_1 \in C)\,(f^c(c_1) \neq 0)$, ч. т. д.

С помощью теоремы 3.1 можно сразу же получить хорошо известные условия управляемости для линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями. Действительно, пусть семейство функций перехода состояний задается линейным дифференциальным уравнением

$$dz/dt = Fz + Gx, \qquad y = Hz, \tag{7.7}$$

где F, G и H инвариантны во времени. В этом случае условие (7.6) из предыдущей теоремы принимает следующий вид.

Система не является управляемой тогда и только тогда, когда

$$(\exists f^c \neq 0)\,(\forall x^t)\,(f^c(\varphi_{20t}(x^t)) = 0).$$

Используя явные выражения для функций перехода состояний, которые можно получить из уравнения (7.7), мы преобразуем предыдущее условие в следующее: для любого $t \in T$ и x, $\xi \neq 0$

$$(\exists \xi \in C)\left(\xi^T \cdot \int_0^t e^{F(t-\sigma)} G x(\sigma)\, d\sigma = 0\right),$$

или

$$(\forall t \in T)\,(\xi^T e^{Ft} G = 0).$$

Наконец, последнее условие верно тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\,[G,\ FG,\ \ldots,\ F^{n-1}G] < n,$$

где n — размерность матрицы F, т. е. мы получили хорошо известное условие управляемости линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями (см. [10]).

Возвращаясь к проблеме нуль-управляемости, мы можем обобщить утверждение теоремы 3.1 на случай систем, не обязательно являющихся инвариантными во времени.

Теорема 3.2. Пусть S — линейная динамическая система. Система S является нуль-управляемой тогда и только тогда, когда для любого $f^c \in F^c$

$$(\forall c_0)\,[c_0 \in C_0 \Rightarrow f^c(c_0) = 0] \Rightarrow [f^c = 0],$$

где

$$C_0 = \{c\colon (\exists x^t)(\varphi_{0t}(c, x^t) = 0)\}.$$

Доказательство. Покажем, что C_0 является линейным подпространством. Для этого предположим, что $\varphi_{0t}(c, x^t) = 0$. Но тогда $\varphi_{0t}(\alpha c, \alpha x^t) = 0$. Предположим затем, что $\varphi_{0t}(c, x^t) = 0$ и $\varphi_{0t'}(c', \hat{x}^{t'}) = 0$. Пусть для определенности $t' > t$. Тогда, так как

$$\varphi_{0t'}(c, x^t \cdot 0) = \varphi_{tt'}(\varphi_{0t}(c, x^t), 0) = \varphi_{tt'}(0, 0) = 0,$$

то

$$\varphi_{0t'}(c, x^t \cdot 0) + \varphi_{0t'}(c', \hat{x}^{t'}) = \varphi_{0t'}(c + c', x^t \cdot 0 + \hat{x}^{t'}) = 0.$$

Итак, C_0 — линейное подпространство пространства C. Но тогда требуемый результат получается с помощью тех же рассуждений, как при доказательстве теоремы 3.1, ч. т. д.

(b) Управляемость выходными величинами

В этом разделе мы снова вернемся к исследованию динамических систем, но на этот раз будем считать, что оценка системы производится по выходной величине в целом, а не по значениям ее состояний в определенный момент времени. Иначе говоря, мы уточним понятие воспроизводимости, сделав следующие дополнительные предположения:

(i) S — динамическая система;

(ii) U — объект начальных состояний, $U = C_0$, в то время как V является выходным объектом, $V = Y$, а $M = X$;

(iii) роль g играет начальная реакция системы, $\rho_0\colon C_0 \times X \to Y$.

Проиллюстрируем возможность интерпретации общих результатов, полученных в § 2, лишь на примере понятия склеенности.

Определение 3.4. Пусть S — динамическая многомерная система, $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_k = Y^k$. Система S называется *системой с функционально склеенным выходом* тогда и только тогда, когда множество $\rho_0(C_0 \times X)$ не является декартовым.

Условия склеенности вытекают теперь непосредственно из общих условий, приведенных в § 2.

Следствие 3.3. Пусть S — многомерная динамическая система и $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_k = Y^k$. Тогда, если найдутся такое положительное целое $j < k$ и такая функция F: $Y^j \to Y^k$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
C_0 \times X \arrow[rr, "\rho_0"] \arrow[dr, "p^j \cdot \rho_0"'] & & Y^k \\
& Y^j \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, а $p^{k-j}\rho_0 (C_0 \times X)$ содержит более двух элементов, то система S является системой с функционально склеенным выходом.

Следствие 3.4. Пусть S — линейная инвариантная во времени динамическая система. Эта система является системой с функционально склеенным выходом тогда и только тогда, когда существуют такое собственное линейное подпространство $Y' \subset Y$ и такая функция F: $Y' \to Y$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
C_0 \times X \arrow[rr, "\rho_0"] \arrow[dr, "p_1 \cdot \rho_0"'] & & Y \\
& Y' \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, а $(I - p_1)\, \rho_0(C \times X)$ содержит хотя бы один отличный от нуля элемент, где p_1 — оператор проектирования p_1: $Y \to Y'$.

Дальнейшая конкретизация наших общих результатов привела бы к хорошо известным результатам теории функциональной воспроизводимости для линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями (см. [11]).

4. ОБЗОР НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ ВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫХ С УПРАВЛЯЕМОСТЬЮ

Существование различных вспомогательных функций и различные свойства систем целиком зависят от выполнения определенных условий, налагаемых на семейство реакций системы. Например, реализуемость системы определяется свойствами (P1) — (P4), приведенными в § 1 гл. III, а управляемость линейной системы в пространстве состояний зависит от условий, сформулированных в теореме 3.1. В связи с этим небезынтересно свести воедино все рассмотренные до сих пор условия, касающиеся семейства реакций системы; в частности, это особенно интересно сделать для линейных инвариантных во времени систем, для которых эти условия можно сформулировать отдельно в терминах реакций на состояние и реакций на входное воздействие. Такой перечень подобных условий, встречавшихся до сих пор или представляющих потенциальный интерес при изучении некоторых дальнейших свойств систем, приведен в табл. 7.1. В ней также указывается, какое свойство системы зависит от данного условия.

Большинство приведенных свойств тесно связано с характером переходов в пространстве состояний. И, в самом деле, содержательный смысл каждого из свойств, приведенных в табл. 7.1,

Таблица 7.1

Основные свойства реакций системы

Обозначение	Условие	Название свойства
P1	$(\forall c)(\forall t)(\exists c')(\rho_{1t}(c') = \rho_{10}(c) \mid T_t)$	Существование φ_{10t}
P2	$(\forall t)(\forall x^t)(\exists c')(\rho_{1t}(c') = \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t)$	Существование φ_{20t}
P3	$(\forall c')(\exists t)(\exists x^t)(\rho_{1t}(c') = \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t)$	Управляемость
P4	$(\exists \hat{t})(\forall c')(\exists t)(\exists x^t)(t \leqslant \hat{t} \,\&\, \rho_{1t}(c') = \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t)$	Сильная управляемость
P5	$(\forall c)(\exists t)(\exists x^t)(\rho_{10}(c) \mid T_t = \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t)$	Нуль-управляемость
P6	$(\exists \hat{t})(\forall c)(\exists t)(\exists x^t)(t \leqslant \hat{t} \,\&\, \rho_{10}(c) \mid T_t = \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t)$	Сильная нуль-управляемость
P7	$(\forall t)(\forall c')(\exists c)(\rho_{1t}(c') = \rho_{10}(c) \mid T_t)$	Полнота свободной реакции
P8'	$(\exists \hat{t})(\forall c)(\forall x^t)(\exists \hat{x}^{\hat{t}})(\rho_{1t}(c) = \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t \Rightarrow \rho_{1\hat{t}}(c) = \rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}} \cdot 0) \mid T_{\hat{t}})$	Конечная связность из нуля

Продолжение

Обозначение	Условие	Название свойства
P8″	$(\exists\hat{t})(\forall c)(\forall x^t)(\exists\hat{x}^{\hat{t}})(\rho_0(c,\ x^t\cdot 0)\mid T_t = 0 \Rightarrow \rho_0(c,\ \hat{x}^{\hat{t}}\cdot 0)\mid T_{\hat{t}}=0)$	Конечная связность к нулю
P9	$(\forall c')(\forall t)(\exists c)(\exists x^t)(\rho_{1t}(c') = \rho_{10}(c)+\rho_{20}(x^t\cdot 0))\mid T_t)$	Согласованность реакций на состояние
P10	$(\exists\hat{t})(\forall c')(\forall c)(\exists t)(\exists x^t)(t\leqslant\hat{t}\ \&\ \rho_{1t}(c') = (\rho_{10}(c)+\rho_{20}(x^t\cdot 0))\mid T_t)$	Сильная абсолютная управляемость
P11	$(\exists\hat{t})(\forall c)(\forall c')(\rho_{10}(c)\mid T^{\hat{t}}=\rho_{10}(c')\mid T^{\hat{t}} \Rightarrow c=c')$	Наблюдаемость
P12	$(\exists\hat{t})(\forall c)(\forall t\geqslant\hat{t})(\forall x_t)(\rho_0(c,\ 0\cdot x_t)\mid T^{\hat{t}} = 0 \Rightarrow \rho_0(c,\ 0\cdot x_t)\mid \overline{T^t}=0)$	Предопределенность
P13	$(\forall c')(\forall c)(\exists t)(\exists x^t)(\rho_{1t}(c') = (\rho_{10}(c)+\rho_{20}(x^t\cdot 0))\mid T_t)$	Абсолютная управляемость
P14	$(\forall c)(\rho_{10}(c)=0 \Rightarrow c=0)$	Приводимость
P15′	$(\forall c)(\rho_{10}(c)\mid T^{\hat{t}}=0 \Rightarrow \rho_{10}(c)=0)$	Аналитичность слева от $\hat{t}$
P15″	$(\forall c)\ (\rho_{10}(c)\mid T_{\hat{t}}=0 \Rightarrow \rho_{10}(c)=0)$	Аналитичность справа от $\hat{t}$
P16	$\{y : (\exists c)(c\in C\ \&\ y=\rho_{10}(c))\}$ конечномерно	Конечномерность пространства состояний
P17′	$(\forall x)(\forall\hat{x})(\forall t)(x\mid\overline{T^t}=\hat{x}\mid\overline{T^t} \Rightarrow \rho_{20}(x)\mid\overline{T^t}=\rho_{20}(\hat{x})\mid\overline{T^t})$	Неупреждаемость
P17″	$(\forall x)(\forall\hat{x})(\forall t)(x\mid T^t=\hat{x}\mid T^t \Rightarrow \rho_{20}(x)\mid\overline{T^t}=\rho_{20}(\hat{x})\mid\overline{T^t})$	Сильная неупреждаемость

легче уяснить, если его выразить в терминах функций перехода состояний, а не в терминах семейства реакций. Все эти свойства особенно хорошо описываются в пространстве состояний, как это видно из табл. 7.2, если отображение ρ_{1t} обладает обратным или если ρ_{1t} приведено.

Как нетрудно видеть, свойства, сведенные в табл. 7.2, не независимы; некоторые из них являются основными, а остальные вытекают из них.

Чтобы прояснить, как они взаимосвязаны между собой, мы покажем сначала, что свойства P14 — P16 гарантируют предопределенность системы, ее конечную связность и полноту свободной реакции. Что же касается связи между предопределенностью, сильной неупреждаемостью и аналитичностью слева, то это уже было выяснено в гл. V.

Таблица 7.2

Основные свойства семейства перехода состояний

Обозначение	Условие
P1	$(\forall c)(\forall t)(\exists c')(c'=\varphi_{10t}(c))$
P2	$(\forall t)(\forall x^t)(\exists c')(c'=\varphi_{20t}(x^t))$
P3	$(\forall c')(\exists t)(\exists x^t)(c'=\varphi_{20t}(x^t))$
P4	$(\exists \hat{t})(\forall c')(\exists t)(\exists x^t)(t\leqslant \hat{t}\ \&\ c'=\varphi_{20t}(x^t))$
P5	$(\forall c)(\exists t)(\exists x^t)(\varphi_{10t}(c)=\varphi_{20t}(x^t))$
P6	$(\exists \hat{t})(\forall c)(\exists t)(\exists x^t)(t\leqslant \hat{t}\ \&\ \varphi_{10t}(c)=\varphi_{20t}(x^t))$
P7	$(\forall t)(\forall c')(\exists c)(c'=\varphi_{10t}(c))$
P8′	$(\exists \hat{t})(\forall c)(\forall x^t)(\exists \hat{x}^{\hat{t}})(c=\varphi_{20t}(x^t)\Longrightarrow c=\varphi_{20\hat{t}})(\hat{x}^{\hat{t}}))$
P8″	$(\exists \hat{t})(\forall c)(\forall x^t)(\exists \hat{x}^{\hat{t}})(0=\varphi_{0t}(c,\ x^t)\Longrightarrow 0=\varphi_{0\hat{t}}(c,\ \hat{x}^{\hat{t}}))$
P9	$(\forall c')(\forall t)(\exists c)(\exists x^t)(c'=\varphi_{10t}(c)+\varphi_{20t}(x^t))$
P10	$(\exists \hat{t})(\forall c')(\forall c)(\exists t)(\exists x^t)(t\leqslant \hat{t}\ \&\ (c'=\varphi_{10t}(c)+\varphi_{20t}(x^t)))$
P11	Соответствующее условие неизвестно
P12	Соответствующее условие неизвестно
P13	$(\forall c')(\forall c)(\exists t)(\exists x^t)(c'=\varphi_{10t}(c)+\varphi_{20t}(x^t))$
P14	Соответствующее условие неизвестно
P15′	Соответствующее условие неизвестно
P15″	Соответствующее условие неизвестно
P16	Конечномерность
P17′	Неупреждаемость
P17″	Сильная неупреждаемость

Предложение 4.1. Предположим, что инвариантная во времени линейная динамическая система $(\bar{\rho},\ \bar{\varphi})$ приведена. Тогда если пространство состояний C этой системы конечномерно (P16), то оно удовлетворяет и условию конечной связности из нуля (P8′).

Доказательство. Пусть

$$C_0=\{c\colon\ \rho_{1t}(c)=\rho_{20}(x^t\cdot 0)\mid T_t\ \&\ c\in C\ \&\ x^t\in X^t\ \&\ t\in T\},$$

где C_0 — множество состояний, достижимых из начала координат. Покажем теперь, что C_0 является линейным подпространством пространства C. Пусть $c\in C_0$ и $\alpha\in\mathcal{A}$ произвольны, где $\rho_{1t}(c)=$ $=\rho_{20}(x^t\cdot 0)\mid T_t$. Поскольку $\bar{\rho}$ линейно, $\rho_{1t}(\alpha c)=\rho_{20}(\alpha(x^t)\cdot 0)\mid T_t$ и, значит, условие $c\in C_0$ влечет за собой $\alpha c\in C_0$. Возьмем теперь произвольное $\hat{c} \in C_0$, и пусть $\rho_{1t}(\hat{c}) = \rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot 0) \mid T_{\hat{t}}$. Обозначим $t + \hat{t}$ через t'. Но тогда

$$\rho_{1t'}(c) = F^{\hat{t}}(\rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t) = F^{\hat{t}}(\rho_{20}(x^t \cdot 0)) \mid T_{t'} =$$

$$= \rho_{2\hat{t}}(F^{\hat{t}}(x^t) \cdot 0) \mid T^{t'} = \rho_{20}(0 \cdot F^{\hat{t}}(x^t) \cdot 0) \mid T_{t'}$$

(согласованность реакций на входное воздействие). Аналогично, мы имеем

$$\rho_{1t'}(\hat{c}) = \rho_{20}(0 \cdot F^t(\hat{x}^{\hat{t}}) \cdot 0) \mid T_{t'}.$$

Но тогда

$$\rho_{1t'}(c + \hat{c}) = \rho_{20}((0 \cdot F^{\hat{t}}(x^t) + 0 \cdot F^t(\hat{x}^{\hat{t}})) \cdot 0) \mid T_{t'},$$

т. е. $c + \hat{c} \in C_0$. Поскольку C конечномерно, $C_0 \subset C$ также конечномерно. Обозначим через $\{c_1, \ldots, c_n\}$ некоторый базис в C_0, который мы будем считать n-мерным, причем $\rho_{1t_i}(c_i) = \rho_{20}(x_i^{t_i} \cdot 0) \mid T_{t_i}$ для каждого i. Пусть $\hat{t} = \max\limits_i \{t_1, \ldots, t_n\}$. Тогда для каждого i

$$\rho_{1\hat{t}}(c_i) = \rho_{20}(0 \cdot F^{\hat{t}-t_i}(x_i^{t_i}) \cdot 0) \mid T_{\hat{t}}.$$

Зафиксируем произвольное $c \in C_0$. Тогда $c = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$ для некоторых $\lambda_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Поэтому

$$\rho_{1\hat{t}}(c) = \rho_{20}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (0 \cdot F^{\hat{t}-t_i}(x_i^{t_i}) \cdot 0)\right) \mid T_{\hat{t}},$$

т. е.

$$c = \varphi_{0\hat{t}}\left(0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (0 \cdot F^{\hat{t}-t_i}(x_i^{t_i}) \cdot 0)\right), \text{ ч. т. д.}$$

Предложение 4.2. Предположим, что инвариантная во времени линейная динамическая система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ приведена. Тогда если пространство состояний C этой системы конечномерно (P16), то оно обладает свойством конечной связности к нулю (P8″).

Доказательство. Пусть

$$C_0 = \{c: \rho_0(c, x^t \cdot 0) \mid T_t = 0 \;\&\; c \in C \;\&\; x^t \in X^t \;\&\; t \in T\}.$$

Покажем, что C_0 является линейным подпространством пространства C. Для этого выберем произвольные $\alpha \in \mathcal{A}$ и $c \in C_0$ и предположим, что $\rho_0(c, x^t \cdot 0) \mid T_t = 0$. Тогда $\rho_0(\alpha c, \alpha(x^t) \cdot 0) \mid T_t = 0$, т. е. из $c \in C_0$ следует, что $\alpha c \in C_0$. Зафиксируем теперь еще один произвольный элемент $\hat{c} \in C_0$, и пусть $\rho_0(\hat{c}, \hat{x}^{\hat{t}}\cdot 0) \mid T_{\hat{t}} = 0$. Обозначим $t + \hat{t}$ через t'. Но поскольку

$$[\rho_0(c, x^t\cdot 0) \mid T_t] \mid T_{t'} = \rho_0(c, x^t\cdot 0) \mid T_{t'} = 0$$

и $\rho_0(\hat{c}, \hat{x}^{\hat{t}}\ 0) \mid T_{t'} = 0$, мы имеем

$$\rho_0(c + \hat{c},\ x^t\cdot 0 + \hat{x}^{\hat{t}}\cdot 0) \mid T_{t'} = 0,$$

т. е. $\hat{c} + c \in C_0$. Обозначим, как и раньше, базис пространства C_0 через $\{c_1, \ldots, c_n\}$, причем будем считать, что $\rho_0(c_i, x_i^{t_i}\cdot 0) \mid T_{t_i} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть $\hat{t} = \max_i \{t_1, \ldots, t_n\}$. Тогда $\rho_0(c_i, x_i^{t_i}\cdot 0) \mid T_{\hat{t}} = 0$ и, следовательно, для произвольного $c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \in C_0$

$$\rho_0\left(c, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i^{t_i}\cdot 0)\right) \mid T_{\hat{t}} = 0,$$

или

$$\varphi_{0\hat{t}}\left(c, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i^{t_i}\cdot 0)\right) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Конечная связность (P8) не является прерогативой одних лишь линейных систем. Типичным примером нелинейной системы, обладающей этим свойством, может служить конечный автомат. Однако имеются примеры, свидетельствующие о том, что в общем случае даже линейные системы с бесконечномерным пространством состояний могут не обладать этим свойством. В этом смысле свойство конечной связности можно считать основным свойством систем с «конечными» состояниями.

Предложение 4.3. Предположим, что инвариантная во времени линейная динамическая система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ приведена. Если ее пространство состояний конечномерно и система аналитична справа, то она удовлетворяет условию полноты свободной реакции.

Доказательство. Пусть $\varphi_{10t}(c) = 0$. Тогда

$$\varphi_{10t}(c) = 0 \Rightarrow \rho_{1t}(\varphi_{10t}(c)) = 0 \Rightarrow \rho_{10}(c) \mid T_t = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho_{10}(c) = 0 \Rightarrow c = 0$$

и, значит, отображение $\varphi_{10t}\colon C \to C$ взаимно однозначно. Более того, поскольку C конечномерно, φ_{10t} должно быть взаимно однозначным соответствием, т. е. существует φ_{10t}^{-1}, ч. т. д.

Последний результат хорошо известен в теории линейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Однако традиционный способ доказательства опирается не на теоретико-системные, а лишь на математические соображения, в данном случае на сходимость последовательности операторов.

Предложение 3.1 позволяет получить из предложений 4.1—4.3 новые следствия.

Следствие 4.1. Предположим, что инвариантная во времени конечномерная линейная динамическая система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ приведена и удовлетворяет условию аналитичности справа. Тогда все три определения управляемости в пространстве состояний, введенные в § 3, эквивалентны.

Следствие 4.2. Все три определения управляемости в пространстве состояний эквивалентны для системы, описываемой обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$d\mathbf{c}/dt = F\mathbf{c} + G\mathbf{x},$$

где F и G — матрицы, а $\mathbf{x}$ и $\mathbf{c}$ — векторы.

Взаимосвязи между различными свойствами, упоминавшимися в табл. 7.1 и 7.2, сведены в схему, изображенную па рис. 4.1. Интерпретация графических обозначений, принятых на этой схеме, очевидна: стрелки указывают на то, какие условия можно вывести из данных предположений. Например, схема указывает, что если семейство линейных реакций $\{\rho_t\}$ удовлетворяет условиям P3 и P8, то оно удовлетворяет и условию P4, или если оно удовлетворяет условиям P9, P4 и P1, то из них следует и P10 и т. д.

Основные независимые предположения, на которых построена вся эта схема, таковы: (1) реализуемость, (2) аналитичность, (3) конечномерность пространства состояний и (4) предопределенность. Поэтому их можно рассматривать как наиболее фундаментальные свойства линейных динамических систем. Любые другие свойства, перечисленные в таблицах, могут быть получены из этих основных предположений.

Сейчас же мы докажем некоторые из приведенных на схеме отношений.

P3 + P8 $\Rightarrow$ P4. Пусть c' произвольно, а $\hat{t}$ удовлетворяет условию P8. Тогда

$$\text{P3} \Rightarrow (\exists t)\,(\exists x^t)\,(\rho_{1t}(c') = \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t)$$

и

$$\text{P8} \Rightarrow (\exists x'^{\hat{t}})\,(\rho_{1\hat{t}}(c') = \rho_{20}(x'^{\hat{t}} \cdot 0) \mid T_{\hat{t}}).$$

Поэтому

$$(\exists \hat{t})\ (\forall c')\ (\exists x'^{\hat{t}})\ (\rho_{1\hat{t}}\ (c') = \rho_{20}\ (x'^{\hat{t}} \cdot 0)\ |\ T_{\hat{t}}),$$

а это есть не что иное, как P4.

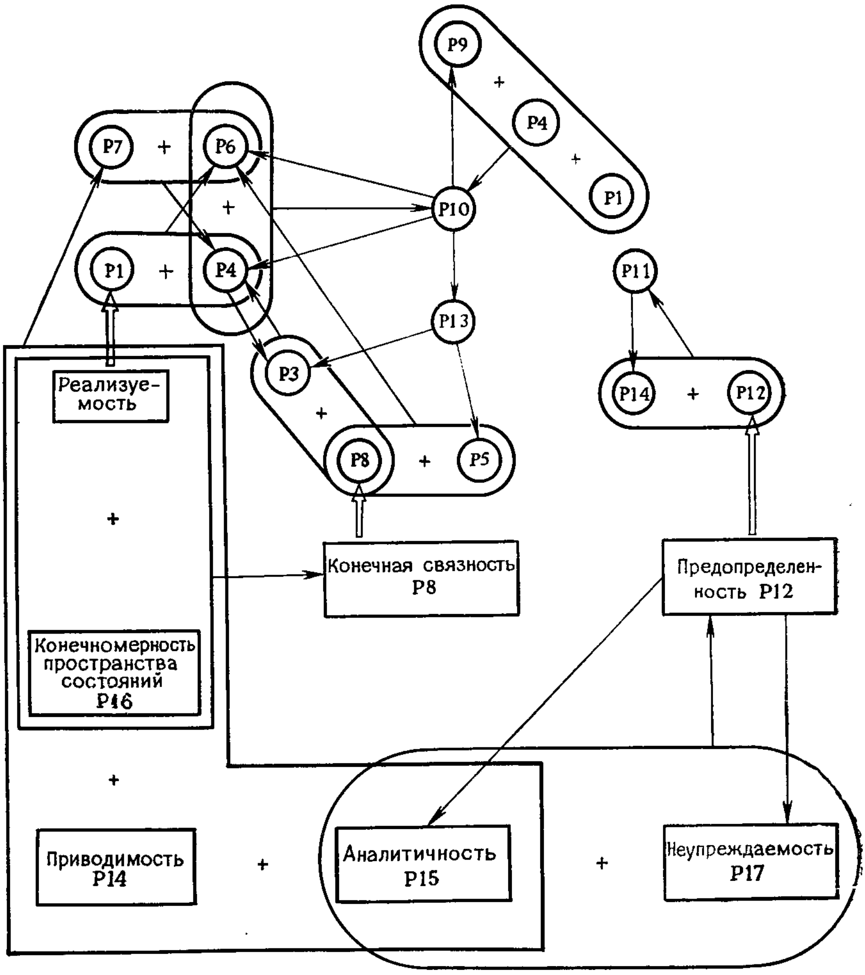


Рис. 4.1.

P4 + P1 ⇒ P6. Пусть c произвольно, а $\hat{t}$ удовлетворяет условию P4. Но тогда

$$\mathrm{P1} \Rightarrow (\exists c')\ (\rho_{1\hat{t}}\ (c') = \rho_{10}\ (c)\ |\ T_{\hat{t}}).$$

Значит,

$$\mathrm{P4} \Rightarrow (\exists x^t)\ (t \leqslant \hat{t}\ \&\ \rho_{1t}\ (c') = \rho_{20}\ (x^t \cdot 0)\ |\ T_t).$$

Но, с другой стороны, поскольку семейство $\bar{\rho}$ инвариантно во времени, для $\tau = \hat{t} - t$

$$F^{\tau}(\rho_{1t}(c')) = \rho_{1\hat{t}}(c') = F^{\tau}(\rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t) = (F^{\tau}(\rho_{20}(x^t \cdot 0))) \mid T_{\hat{t}} = \\ = (\rho_{2\tau}(F^{\tau}(x^t) \cdot 0)) \mid T_{\hat{t}} = \rho_{20}(0 \cdot F^{\tau}(x^t) \cdot 0) \mid T_{\hat{t}}.$$

Следовательно,

$$(\exists \hat{t})(\forall c)(\exists t)(\exists x^t)(t \leqslant \hat{t} \;\&\; \rho_{10}(c) \mid T_t = \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t),$$

а это как раз и есть условие P6.

P7 + P6 ⇒ P4. Пусть c' произвольно, а $\hat{t}$ определяется либо условием P6, либо условием P7. Но тогда

$$P7 \Rightarrow (\exists c)(\rho_{1\hat{t}}(c') = \rho_{10}(c) \mid T_{\hat{t}}),$$

а так как семейство $\bar{\rho}$ инвариантно во времени, то

$$P6 \Rightarrow (\exists x^{\hat{t}})(\rho_{10}(c) \mid T_{\hat{t}} = \rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot 0) \mid T_{\hat{t}}).$$

Это значит, что

$$(\exists \hat{t})(\forall c')(\exists t)(\exists x^t)(t \leqslant \hat{t} \;\&\; \rho_{1t}(c') = \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t),$$

а это есть не что иное, как условие P4.

P6 + P4 ⇒ P10. Пусть $\hat{t}$ удовлетворяет либо условию P4, либо условию P6, а c и c' произвольны. Обозначим через t' какое-нибудь t, удовлетворяющее условию P6. Тогда

$$P6 \Rightarrow (\exists x^{t'})(0 = \rho_{10}(c) \mid T_{t'} + \rho_{20}(x^{t'} \cdot 0) \mid T_{t'}).$$

Пусть теперь t'' удовлетворяет условию P4. Поскольку семейство $\bar{\rho}$ инвариантно во времени,

$$P4 \Rightarrow (\exists x^{t''})(\rho_{1t''}(c') = \rho_{20}(x^{t''} \cdot 0) \mid T_{t''}).$$

Пусть $x^{\hat{t}'} = x^{t'} \cdot F^{t'}(x^{t''})$. Но тогда

$$(\rho_{10}(c) + \rho_{20}(x^{\hat{t}} \cdot 0)) \mid T_{\hat{t}} = ((\rho_{10}(c) + \rho_{20}(x^{t'} \cdot 0)) \mid T_{t'}) \mid T_{\hat{t}} + \\ + \rho_{20}(0 \cdot F^{t'}(x^{t''}) \cdot 0) \mid T_{\hat{t}} = \\ = \rho_{2t'}(F^{t'}(x^{t''}) \cdot 0) \mid T_{\hat{t}} = \rho_{20}(x^{t''} \cdot 0) \mid T_{t''} = \rho_{1t}(c')$$

и, следовательно,

$$(\exists \hat{t})(\forall c')(\forall c)(\exists t)(\exists x^t)(t \leqslant \hat{t} \;\&\; \rho_{1t}(c') = \\ = (\rho_{10}(c) + \rho_{20}(x^t \cdot 0)) \mid T_t),$$

а это есть не что иное, как условие P10.

P9 + P1 + P4 $\Rightarrow$ P10. Пусть $\hat{t}$ удовлетворяет условию P4, а c' и c произвольны. Но тогда, поскольку $\bar{\rho}$ инвариантно во времени,

$$P9 \Rightarrow (\exists \hat{c})(\exists \hat{x}^{\hat{t}})(\rho_{1\hat{t}}(c') = (\rho_{10}(\hat{c}) + \rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}}\cdot 0)) \mid T_{\hat{t}}),$$

$$P1 \Rightarrow (\exists \tilde{c})(\rho_{1\hat{t}}(\tilde{c}) = \rho_{10}(\hat{c} - c) \mid T_{\hat{t}}),$$

$$P4 \Rightarrow (\exists \tilde{x}^{\hat{t}})(\rho_{1\hat{t}}(\tilde{c}) = \rho_{20}(\tilde{x}^{\hat{t}}\cdot 0) \mid T_{\hat{t}}),$$

откуда

$$\begin{aligned} \rho_{1\hat{t}}(c') &= (\rho_{10}(\hat{c}) + \rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}}\cdot 0)) \mid T_{\hat{t}} = \\ &= (\rho_{10}(c) + \rho_{10}(\hat{c} - c) + \rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}}\cdot 0)) \mid T_{\hat{t}} = \\ &= \rho_{10}(c) \mid T_{\hat{t}} + \rho_{1\hat{t}}(\tilde{c}) + \rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}}\cdot 0) \mid T_{\hat{t}} = \\ &= \rho_{10}(c) \mid T_{\hat{t}} + \rho_{20}(\tilde{x}^{\hat{t}}\cdot 0) \mid T_{\hat{t}} + \rho_{20}(\hat{x}^{\hat{t}}\cdot 0) \mid T_{\hat{t}} = \\ &= \rho_{10}(c) \mid T_{\hat{t}} + \rho_{20}((\tilde{x}^{\hat{t}} + \hat{x}^{\hat{t}})\cdot 0) \mid T_{\hat{t}} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(\exists \hat{t})(\forall c')(\forall c)(\exists t)(\exists x^t)(t \leqslant \hat{t} \,\&\, \rho_{1t}(c') = (\rho_{10}(c) + \rho_{20}(x^t\cdot 0)) \mid T_t),$$

т. е. мы получаем условие P10.

P5 + P8 $\Rightarrow$ P6. Пусть $\hat{t}$ удовлетворяет условию P8, а c произвольно. Тогда

$$P5 \Rightarrow (\exists t)(\exists x^t)(\rho_{10}(c) \mid T_t = \rho_{20}(x^t\cdot 0) \mid T_t)$$

и, значит, $\rho_{1t}(0) = \rho_0(c, -(x^t\cdot 0)) \mid T_t$. Поэтому

$$P8 \Rightarrow (\exists \hat{x}^{\hat{t}})(\rho_{1\hat{t}}(0) = \rho_0(c, \hat{x}^{\hat{t}}\cdot 0) \mid T_{\hat{t}}),$$

т. е.

$$\rho_{10}(c) \mid T_{\hat{t}} = \rho_{20}(-(\hat{x}^{\hat{t}}\cdot 0)) \mid T_{\hat{t}}.$$

Но отсюда

$$(\exists \hat{t})(\forall c)(\exists t)(\exists x^t)(t \leqslant \hat{t} \,\&\, \rho_{10}(c) \mid T_t = \rho_{20}(x^t\cdot 0) \mid T_t),$$

а это есть не что иное, как условие P6.

Глава VIII

МИНИМАЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ

Отталкиваясь от первичного понятия системы, определенной на ее входном и выходном объектах, мы можем прийти к различным ее динамическим реализациям и различным пространствам состояний. Поэтому большой практический интерес представляют задача отыскания «наименьшего» (в определенном смысле) пространства состояний и построение процедуры, позволяющей конструировать такое пространство на основе первоначальной информации о системе. Именно этими задачами мы и будем заниматься в этой главе.

В специализированных теориях систем используется несколько разных определений минимальной реализации системы, и мы начнем с того, что введем ряд родственных понятий, отвечающих выбранному нами уровню общности. Затем исследуем, как связаны друг с другом эти понятия, и отыщем условия, гарантирующие существование соответствующих минимальных реализаций. Попутно будет установлена единственность некоторых из этих реализаций. Мы покажем также, как минимальные реализации можно охарактеризовать с помощью некоторых свойств системы (в частности, в терминах управляемости и приводимости).

1. ПОНЯТИЯ МИНИМАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Любая заданная временная система S может иметь много различных динамических реализаций, а две различные пары семейств, $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ и $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$, могут быть динамическими реализациями одной и той же системы. Среди всех динамических реализаций каждой системы хотелось бы выделить те, которые в каком-то смысле эквивалентны друг другу, те, которые обладают некоторыми особыми свойствами, и особенно те, которые в определенном смысле являются «простейшими» или «наименьшими». Именно это и предопределяет наш интерес к минимальным реализациям.

Поскольку динамика поведения системы описывается в терминах изменения ее состояний, минимальность реализации системы должна подразумевать минимальность самого пространства состояний. И на самом деле в различных ответвлениях теории систем используются два различных понятия минимальности пространства состояний:

(i) в теории автоматов реализация автомата считается минимальной, если минимальна мощность его пространства состояний (см. [12]);

(ii) в теории динамических систем и теории управления минимальной реализации должно отвечать пространство состояний системы наименьшей размерности (см. [5]).

Оба эти понятия определяют минимальность реализации в терминах соответствующего пространства состояний и используют похожую терминологию, хотя и очевидно, что они совершенно различны. Поэтому для того, чтобы развить общую теорию минимальных реализаций (включающую в себя и оба упомянутых выше частных случая), мы должны прежде всего весьма тщательно проанализировать само понятие минимальности.

Строгая формальная процедура введения понятия минимальной реализации распадается на три этапа. Прежде всего нам нужно выделить класс интересующих нас систем $\mathscr{S}_{\mathrm{D}}$, например стационарных систем, линейных систем, конечных в некотором смысле систем и т. д. Поскольку, как правило, каждая система описывается некоторой вспомогательной функцией, мы должны будем охарактеризовать каждую группу интересующих нас систем в терминах вспомогательных функций, принадлежащих некоторому классу. Затем в выделенном классе систем мы должны будем определить некоторое отношение эквивалентности. И, наконец, нам нужно будет ввести в каждом таком классе эквивалентности некоторое отношение порядка, с помощью которого мы и определим минимальность реализации.

Мы будем рассматривать отношения эквивалентности трех типов.

Определение 1.1. Пусть $\mathscr{S}_{\mathrm{D}}$ — некоторый класс динамических реализаций. Реализации $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ и $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \in \mathscr{S}_{\mathrm{D}}$ называются *эквивалентными относительно своих пар «вход — выход»* тогда и только тогда, когда

$$S_0^{\rho} = S_0^{\hat{\rho}},$$

т. е.

$$(\forall c)\,(\forall x)\,(\exists \hat{c})\,[\rho_0(c, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}, x)]\ \& \\ (\forall \hat{c})\,(\forall x)\,(\exists c)\,[\rho_0(c, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}, x)].$$

Определение 1.2. Пусть $\mathscr{S}_{\mathrm{D}}$ — некоторый класс динамических реализаций. Реализации $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ и $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \in \mathscr{S}_{\mathrm{D}}$ называются *эквивалентными относительно своих реакций* тогда и только тогда, когда

$$(\forall c)\,(\exists \hat{c})\,(\forall x)\,[\rho_0(c, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}, x)]$$

и

$$(\forall \hat{c})\,(\exists c)\,(\forall x)\,[\rho_0(c, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}, x)].$$

Эквивалентность третьего типа затрагивает лишь ту составляющую реакции, которая описывает влияние входного воздействия. Мы уже знаем, что реакцию линейной системы можно разложить на реакцию на состояние (при нулевом входном воздействии) и реакцию на входное воздействие (при нулевом начальном состоянии). Обобщая эту идею на случай произвольного c_0, мы будем называть функцию $\rho_0(c_0, -)\colon X \to Y$ c_0-реакцией на входное воздействие. А поскольку во всех встречающихся содержательных интерпретациях c_0 будет играть, как правило, особую роль, мы, желая уточнить значение этого параметра, будем говорить о нем как об *эталонном состоянии* системы. Теперь мы готовы ввести следующее

Определение 1.3. Пусть $\mathscr{S}_{\mathrm{D}}$ — некоторый класс динамических реализаций, $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$, $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \in \mathscr{S}_{\mathrm{D}}$ и c_0, $\hat{c}_0$ — эталонные состояния систем $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$, $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$ соответственно. Реализации $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ и $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$ называются *эквивалентными относительно своих реакций на входные воздействия* тогда и только тогда, когда

$$\rho_0(c_0, -) = \hat{\rho}_0(\hat{c}_0, -),$$

т. е.

$$(\forall x)\,[\rho_0(c_0, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}_0, x)].$$

Эквивалентность первого типа, очевидно, является наиболее общей. Однако два других типа эквивалентности представляют большой интерес для практики. Например, если речь идет о классе линейных систем и нас интересуют главным образом их установившиеся режимы (т. е. переходными процессами, вызванными начальными состояниями, можно практически пренебречь), система допускает описание в терминах одной ее реакции на входное воздействие. А ведь все методы анализа, основанные на использовании преобразований Лапласа и других интегральных преобразований, опираются именно на такие предпосылки.

Мы будем рассматривать здесь также два типа отношений порядка.

Определение 1.4. Пусть $\mathscr{S}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{D}}$ — некоторый класс эквивалентности динамических систем, $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$, $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \in \mathscr{S}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{D}}$ и C, $\hat{C}$ — соответствующие пространства состояний мощности $K(C)$ и $K(\hat{C})$. Тогда *отношение порядка* $\leqslant$ на $\mathscr{S}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{D}}$ определяется следующим образом:

$$(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \leqslant (\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \Leftrightarrow K(C) \leqslant K(\hat{C}).$$

Определение 1.5. Пусть $\mathscr{S}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{E}}$ — некоторый класс эквивалентности динамических систем, $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$, $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \in \mathscr{S}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{E}}$ и C, $\hat{C}$ — соответствующие пространства состояний. Тогда *отношение порядка* $\preccurlyeq$ на $\mathscr{S}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{E}}$ определяется следующим образом:

$$(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \preccurlyeq (\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \Leftrightarrow \{\text{существует эпиморфизм } h\colon \hat{C} \to C\}.$$

Не составляет труда показать, что отношение $\preccurlyeq$ есть отношение частичного порядка, причем

$$(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) = (\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \Leftrightarrow (\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \preccurlyeq (\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \;\&\; (\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \preccurlyeq (\bar{\rho}, \bar{\varphi}),$$

$$(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \prec (\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \Leftrightarrow (\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \preccurlyeq (\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \;\&\neg\, [(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \preccurlyeq (\bar{\rho}, \bar{\varphi})].$$

Если пространство состояний не имеет никакой алгебраической структуры, то отношение порядка $\leqslant$ можно рассматривать как частный случай отношения $\preccurlyeq$, поскольку в этом случае каждое сюръективное отображение можно считать эпиморфизмом. Отношение порядка $\leqslant$ — это как раз отношение такого типа, которое используется в теории автоматов, в то время как отношение $\preccurlyeq$ используется в теории управления, где проблема минимальной реализации решается для пространства состояний, наделенного структурой евклидова пространства E^n. В последнем случае отношение порядка определяется размерностью соответствующих пространств, и так как для любых двух положительных целых m и n, таких, что $m < n$, всегда найдется линейное сюръективное отображение из E^n в E^m, но не обратно, то это есть отношение порядка как раз такого типа, который описан в определении 1.5.

Сочетая различные типы отношений эквивалентности с различными типами отношений порядка, мы придем к следующим шести понятиям минимальности:

Определение 1.6. Реализация $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ называется *реализацией с минимальным пространством состояний* тогда и только тогда, когда для любой динамической системы $(\hat{\rho}, \hat{\varphi})$ из того же класса $\mathscr{S}_{\mathrm{D}}$

$$S_0^{\rho} = S_0^{\hat{\rho}} \Rightarrow K(C) \leqslant K(\hat{C}).$$

Определение 1.7. Реализация $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ называется *реализацией минимальной размерности* тогда и только тогда, когда для любой динамической системы $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$ из того же класса $\mathscr{S}_{\mathrm{D}}$

$$S_0^{\rho} = S_0^{\hat{\rho}} \Rightarrow [(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \succcurlyeq (\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}) \Rightarrow (\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \preccurlyeq (\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})].$$

Определение 1.8. Реализация $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ называется *реализацией реакции с минимальным пространством состояний* тогда и только тогда, когда для любой динамической системы $(\hat{\bar{\rho}}, \hat{\bar{\varphi}})$ из того же класса $\mathscr{S}_D$

$$(\forall c)(\exists \hat{c})(\forall x)(\rho_0(c, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}, x)) \,\&\, (\forall \hat{c})(\exists c)(\forall x)(\rho_0(c, x) = \\ = \hat{\rho}_0(\hat{c}, x)) \Rightarrow K(C) \leqslant K(\hat{C}).$$

Определение 1.9. Реализация $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ называется *реализацией реакции наименьшей размерности* тогда и только тогда, когда для любой динамической системы $(\hat{\bar{\rho}}, \hat{\bar{\varphi}})$, принадлежащей тому же классу $\mathscr{S}_D$, из существования такого эпиморфизма $h\colon C \to \hat{C}$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C \times X_t & \xrightarrow{\rho_t} & Y_t \\ {\scriptstyle h}\downarrow \quad \downarrow{\scriptstyle I} & & \downarrow{\scriptstyle I} \\ \hat{C} \times X_t & \xrightarrow{\hat{\rho}_t} & Y_t \end{array}$$

коммутативна, вытекает существование такого эпиморфизма $\hat{h}\colon \hat{C} \to C$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{C} \times X_t & \xrightarrow{\hat{\rho}_t} & Y_t \\ {\scriptstyle \hat{h}}\downarrow \quad \downarrow{\scriptstyle I} & & \downarrow{\scriptstyle I} \\ C \times X_t & \xrightarrow{\rho_t} & Y_t \end{array}$$

Определение 1.10. Реализация $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ называется *реализацией реакции на входное воздействие с минимальным пространством состояний* тогда и только тогда, когда для любой динамической системы $(\hat{\bar{\rho}}, \hat{\bar{\varphi}})$, принадлежащей классу $\mathscr{S}_D$,

$$(\forall x)(\rho_0(c_0, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}_0, x)) \Rightarrow K(C) \leqslant K(\hat{C}),$$

где c_0 и $\hat{c}_0$ — эталонные состояния из C и $\hat{C}$ соответственно.

Определение 1.11. Реализация $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ называется *реализацией реакции на входное воздействие минимальной размерности* тогда и только тогда, когда для любой динамической системы $(\hat{\bar{\rho}}, \hat{\bar{\varphi}})$, принадлежащей тому же классу $\mathscr{S}_D$,

$$(\forall x)(\rho_0(c_0, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}_0, x)) \Rightarrow ((\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \succcurlyeq (\hat{\bar{\rho}}, \hat{\bar{\varphi}}).$$

Определение 1.8 используется в теории автоматов, а определения 1.7 и 1.11 — в теории линейных систем управления. Взаимосвязь между различными понятиями минимальности станет яснее в следующем параграфе.

2. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МИНИМАЛЬНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В этом параграфе мы собираемся рассмотреть проблему характеризации различных минимальных реализаций с помощью понятий управляемости и приводимости.

Напомним, что понятия управляемости и приводимости вводились в определении 3.1 гл. VII и определении 2.8 гл. II соответственно.

Определение 2.1. Пусть $(\overline{\rho}, \overline{\varphi})$ — некоторая инвариантная во времени динамическая система с эталонным состоянием $c_0 \in C$. Система $(\overline{\rho}, \overline{\varphi})$ называется *управляемой* в том и только в том случае, когда

$$(\forall c)\,(\exists x^t)\,(c \in C \Rightarrow c = \varphi_{0t}(c_0, x^t)).$$

В предыдущем параграфе мы уже говорили о том, что если пространство состояний C системы линейно, то обычно в качестве эталонного состояния выбирается его начало координат.

Определение 2.2. Пусть $(\overline{\rho}, \overline{\varphi})$ — некоторая инвариантная во времени динамическая система. Система $(\overline{\rho}, \overline{\varphi})$ называется *приведенной* тогда и только тогда, когда для любых c и c'

$$(\forall x)\,(\rho_0(c, x) = \rho_0(c', x)) \Rightarrow c = c'.$$

В теории минимальных реализаций важную роль играют различные формы «конечности» пространства состояний. Поэтому мы определим два типа конечных систем.

Определение 2.3. Пусть $(\overline{\rho}, \overline{\varphi})$ — некоторая динамическая система. Мы будем называть ее *конечной динамической системой* тогда и только тогда, когда пространство состояний системы $(\overline{\rho}, \overline{\varphi})$ является конечным множеством.

Определение 2.4. Пусть $(\overline{\rho}, \overline{\varphi})$ — динамическая система с линейным пространством состояний C над полем $\mathscr{A}$. Мы будем называть ее *конечномерной* тогда и только тогда, когда базис пространства C конечен, т. е. когда найдется такое множество из k элементов $\{\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_k\}$ пространства C, что любому $c \in C$ можно будет поставить в соответствие единственный набор из k элементов поля $\mathcal{A}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{A}$, такой, что

$$c = \alpha_1 \hat{c}_1 + \ldots + \alpha_k \hat{c}_k.$$

Опираясь на все введенные выше определения, мы можем теперь охарактеризовать минимальную реализацию системы.

Предложение 2.1. Пусть $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ — некоторая инвариантная во времени конечная линейная динамическая система. Система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ является минимальной реализацией в смысле определения 1.6 тогда и только тогда, когда система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ приведена.

Доказательство. Начнем с доказательства необходимости. Предположим, что $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ не приведена. Тогда отношение эквивалентности (конгруэнтности) $E \subset C \times C$, для которого

$$(c, c') \in E \Leftrightarrow (\forall x)\, (\rho_0 (c, x) = \rho_0 (c', x)),$$

нетривиально. Построим новую функцию $\hat{\rho}_t$: $(C/E) \times X_t \to Y_t$, такую, что

$$\hat{\rho}_t ([c], x_t) = \rho_t (c, x_t).$$

Но семейство $\bar{\hat{\rho}} = \{\hat{\rho}_t \colon t \in T\}$ представляет собой инвариантное во времени линейное реализуемое семейство реакций. (Поскольку C есть линейная алгебра, C/E тоже является линейной алгеброй в обычном смысле.) Поэтому мы располагаем теперь такой инвариантной во времени конечной линейной динамической системой $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$, что $S_0^{\rho} = S_0^{\hat{\rho}}$. Но так как отношение E не тривиально, $K(C/E) < K(C)$. (Напомним, что C конечно.) А это значит, что $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ не является минимальной реализацией в смысле определения 1.6.

Перейдем теперь к доказательству достаточности. Предположим, что реализация $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$ такого же типа, как и $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$, и пусть $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ приведено. Из равенства $S_0^{\rho} = S_0^{\hat{\rho}}$ следует, что

$$(\forall c)\, (\exists \hat{c})\, (\rho_{10} (c) = \hat{\rho}_{10} (\hat{c})) \quad \text{и} \quad (\forall \hat{c})\, (\exists c)\, (\rho_{10} (c) = \hat{\rho}_{10} (\hat{c})),$$

поскольку ρ_0 и $\hat{\rho}_0$ линейны. Определим отношение $\varphi \subset \hat{C} \times C$ так, что

$$(\hat{c}, c) \in \varphi \Leftrightarrow \hat{\rho}_{10} (\hat{c}) = \rho_{10} (c).$$

Но тогда если $(\hat{c}, c) \in \varphi$ и $(\hat{c}, c') \in \varphi$, то $\rho_{10} (c) = \hat{\rho}_{10} (\hat{c}) = \rho_{10} (c')$. Следовательно, $c = c'$, так как система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ приведена. Более того, поскольку

$$(\forall \hat{c})\, (\exists c)\, (\rho_{10} (c) = \hat{\rho}_{10} (\hat{c})),$$

мы имеем заведомо $\mathscr{D}(\varphi) = \hat{C}$. Поэтому φ на самом деле является отображением из $\hat{C}$ в C. А так как $(\forall c)\,(\exists \hat{c})\,(\rho_{10}(c) = \hat{\rho}_{10}(\hat{c}))$, то φ к тому же и сюръективно. Следовательно, $K(C) \leqslant K(\hat{C})$, ч. т. д.

В общем случае, если пространство состояний конечно, система является минимальной реализацией в смысле определения 1.6 только тогда, когда она приведена. Этот факт можно доказать точно так же, как и предложение 2.1. Однако если система нелинейна, обратное утверждение перестает быть верным, как об этом свидетельствует следующий пример:

Пример 2.1. Рассмотрим два конечных автомата S_1 и S_2. Автомат S_1 задается множеством моментов времени $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, входным алфавитом $A = \{a_1, a_2\}$, пространством состояний $C_1 = \{1, 2, 3\}$ и выходным алфавитом $B = \{0, 1\}$. Функция перехода состояний φ_1: $C_1 \times A \to C_1$ и выходная функция λ_1: $C_1 \times A \to B$ задаются следующей таблицей:

C_1 \ A	φ_1		λ_1	
	a_1	a_2	a_1	a_2
1	2	1	1	0
2	1	2	0	1
3	2	2	1	1

В свою очередь автомат S_2 задается множеством моментов времени $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, входным алфавитом $A = \{a_1, a_2\}$, пространством состояний $C_2 = \{1, 2\}$, выходным алфавитом $B = \{0, 1\}$.

Функция перехода состояний φ_2: $C_2 \times A \to C_2$ и выходная функция λ_2: $C_2 \times A \to B$ определяются условиями

$$\varphi_2 = \varphi_1 \mid C_2 \times A, \quad \lambda_2 = \lambda_1 \mid C_2 \times A.$$

Обозначим теперь реакции автоматов S_1 и S_2 соответственно через ρ_t^1: $C_1 \times X_t \to Y_t$ и ρ_t^2: $C_2 \times X_t \to Y_t$, где через X_t и Y_t обозначены A^{T_t} и B^{T_t} соответственно.

Непосредственно из определений S_1 и S_2 ясно, что

$$S_1 = S_2 \cup \{(x, \rho_0^1(3, x)) \colon x \in X\},$$

где $X = X_0$.

Заметим теперь, что x может быть лишь двух следующих видов [1]):

$$x = a_1 \cdot x_1 \quad \text{или} \quad x = a_2 \cdot x_1, \quad \text{где} \quad x_1 \in A^{T_1}.$$

[1]) Для упрощения обозначений мы будем писать $a_1 \cdot x_1$ вместо $(0, a_1) \cdot x_1$.

Если $x = a_1 \cdot x_1$, то

$$\rho_0^1(3,\ x) = \rho_0^1(3,\ a_1 \cdot x_1) = \lambda_1(3,\ a_1) \cdot \rho_1^1(\varphi_1(3,\ a_1),\ x_1) = \\ = \lambda_1(1,\ a_1) \cdot \rho_1^1(\varphi_1(1,\ a_1),\ x_1) = \rho_0^1(1,\ a_1 \cdot x_1).$$

Если же $x = a_2 \cdot x_1$, то

$$\rho_0^1(3,\ x) = \rho_0^1(3,\ a_2 \cdot x_1) = \lambda_1(3,\ a_2) \cdot \rho_1^1(\varphi_1(3,\ a_2),\ x_1) = \\ = \lambda_1(2,\ a_2) \cdot \rho_1^1(\varphi_1(2,\ a_2),\ x_1) = \rho_0^1(2,\ a_2 \cdot x_1).$$

Поэтому мы имеем $S_0^{\overline{\rho}^1} = S_0^{\rho^2}$. Но, как нетрудно показать, семейство $\overline{\rho}^1$ приведено. Следовательно, рассмотренный пример показывает, что приведенность не влечет за собой минимальность реализации в смысле определения 1.6, даже если система инвариантна во времени и конечна.

Характеризация минимальности реализации в смысле определения 1.7 устанавливается следующим предложением:

Предложение 2.2. Пусть $(\overline{\rho},\ \overline{\varphi})$ — некоторая инвариантная во времени конечномерная линейная динамическая система. Эта система является минимальной реализацией в смысле определения 1.7 тогда и только тогда, когда она приведена.

Доказательство. Мы начнем с доказательства необходимости. Предположим, что $(\overline{\rho},\ \overline{\varphi})$ не приведена. Тогда отношение конгруэнтности $E \subset C \times C$, которое определяется условием

$$(c,\ c') \in E \Leftrightarrow \rho_{10}(c) = \rho_{10}(c'),$$

нетривиально. Пусть $\hat{\rho}_{1t}\colon C/E \to Y_t$ таково, что

$$\hat{\rho}_{1t}([c]) = \rho_{1t}(c).$$

Такое определение функции $\rho_{1t}(c)$ корректно, поскольку $\rho_{1t}(c) = F^t(\rho_{10}(c))$. Но

$$\overline{\hat{\rho}} = \{(\hat{\rho}_{1t},\ \hat{\rho}_{2t})\colon\ t \in T\}$$

определяет некоторое реализуемое семейство реакций того же типа, что и $\overline{\rho}$. Более того, $S_0^{\overline{\rho}} = S_0^{\hat{\overline{\rho}}}$. Но каноническое отображение $h\colon C \to C/E$, где $h(c) = [c]$, является эпиморфизмом, но не изоморфизмом, поскольку отношение E нетривиально. Если $(\overline{\rho},\ \overline{\varphi})$ — минимальная реализация, то существует эпиморфизм $\hat{h}\colon C/E \to C$ и мы получаем следующее противоречие:

$$\dim(C) = \dim(\mathscr{R}(\hat{h})) \leqslant \dim(C/E) < \dim(C),$$

где через $\dim(C)$ обозначена размерность пространства C. Поэтому $(\overline{\rho},\ \overline{\varphi})$ не может быть минимальной реализацией в смысле определения 1.7.

Перейдем теперь к доказательству достаточности. Предположим, что $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ приведена, и пусть $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$ — динамическая система того же типа, что и $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$, причем $S^{\rho}_0 = S^{\hat{\rho}}_0$. Предположим также, что h: $C \to \hat{C}$ — некоторый эпиморфизм, а $E \subset C \times C$ — отношение конгруэнтности, для которого

$$(c, c') \in E \Leftrightarrow h(c) = h(c').$$

Определим для каждого $t \in T$ линейную функцию $\hat{\rho}'_{1t}$: $C/E \to Y_t$, потребовав, чтобы

$$\hat{\rho}'_{1t}([c]) = \hat{\rho}_{1t}(h(c)).$$

Но так как h — эпиморфизм, то семейство $\bar{\hat{\rho}}' = \{(\hat{\rho}'_{1t}, \hat{\rho}_{2t})$: $t \in T\}$ является реализуемым семейством линейных реакций и $S^{\hat{\rho}}_0 = S^{\hat{\rho}'}_0$.

Но поскольку $S^{\rho}_0 = \hat{S}^{\rho}_0 = \hat{S}^{\rho'}_0$, мы имеем следующие соотношения:

$$(\forall c)\ (\exists [c'])\ (\rho_{10}(c) = \hat{\rho}'_{10}([c'])) \tag{8.1}$$

и

$$(\forall [c'])\ (\exists c)\ (\rho_{10}(c) = \hat{\rho}'_{10}([c'])). \tag{8.2}$$

А так как семейство $\bar{\rho}$ приведено и из отношения (8.2) следует, что $\rho_{10}(C) \supset \hat{\rho}'_{10}(C/E)$, то мы можем построить линейную функцию $\rho_{10}^{-1} \cdot \hat{\rho}'_{10}$: $C/E \to C$, где ρ_{10}^{-1}: $\rho_{10}(C) \to C$ и $\rho_{10}^{-1}(\rho_{10}(c)) = c$ при любом $c \in C$. Более того, из соотношения (8.1) следует, что $\rho_{10}^{-1} \cdot \hat{\rho}'_{10}$ — эпиморфизм, а так как C/E изоморфно $\hat{C}$, то это значит, что существует эпиморфизм $\hat{h}$: $\hat{C} \to C$, ч. т. д.

Предложение 2.2 справедливо, когда рассматриваемая динамическая система является конечномерной, а это требование кажется слишком ограничительным. Однако, как показывает следующий пример, в общем случае предложение 2.2 неверно для бесконечномерных систем, даже если они линейны и инвариантны во времени.

Пример 2.2. Пусть $C = E^{\infty}$, а его типичным элементом является последовательность $c = (c_1, c_2, \ldots)$. Пусть, кроме того,

$$C_1 = \{(0, c_2, c_3, \ldots): (0, c_2, c_3, \ldots) \in C\}.$$

Обозначим через P: $C \to C_1$ такой оператор проектирования, что $P((c_1, c_2, \ldots)) = (0, c_2, c_3, \ldots)$, и пусть θ: $C_1 \to C$ определяется условием $\theta((0, c_2, c_3, \ldots)) = (c_2, c_3, \ldots)$. Заметим, что P и θ линейны, а θ является изоморфизмом. Определим теперь инвариантную во времени линейную динамическую систему $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ следующим образом:

множество моментов времени:	$T = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
пространство состояний:	$C = E^\infty = \{(c_1, c_2, \ldots)\}$,
входной алфавит:	$A = \{$произвольная линейная алгебра$\}$,
выходной алфавит:	$B = E^\infty$.

Функцию перехода состояний $\varphi: C \times A \to C$ этой системы и ее выходную функцию $\lambda: C \times A \to B$ зададим так, чтобы

$$\varphi(c, a) = P(c), \qquad \lambda(c, a) = P(c).$$

Но тогда начальная реакция системы $\rho_0: C \times X \to Y$ определяется следующим условием: для каждого $t \in T$

$$\rho_0(c, x)(t) = P(c).$$

Легко видеть, что система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ не приведена. Пусть $(\bar{\rho}', \bar{\varphi}')$ — результат приведения системы $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$, причем $C' = C/E$, где

$$(c, c') \in E \Leftrightarrow \rho_{10}(c) = \rho_{10}(c'),$$

а $\rho_t': C' \times X_t \to Y_t$ определяется условием $\rho_t'([c], x_t) = \rho_t(c, x_t)$.

Предположим теперь, что $(\hat{\bar{\rho}}, \hat{\bar{\varphi}})$ — произвольная инвариантная во времени линейная динамическая система, удовлетворяющая отношению $S_0^\rho = S_0^{\hat{\rho}}$. Тогда, поскольку $S_0^{\rho'} = S_0^\rho = S_0^{\hat{\rho}}$, мы можем построить эпиморфизм $h': \hat{C} \to C'$. (См. последнюю часть доказательства предложения 2.2.) Более того, поскольку $h'': C' \to C_1$ изоморфно отображает C' в C_1, существует эпиморфизм $\theta \cdot h'' \cdot h': \hat{C} \to C$. Следовательно, хотя система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ и не приведена, она минимальна в смысле определения 1.7.

Перейдем теперь к определению 1.8. При этом, так как используемое в нем отношение порядка основано на сравнении мощностей, нас снова будут главным образом интересовать системы с конечным пространством состояний.

Предложение 2.3. Пусть $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ — инвариантная во времени конечная динамическая система. Она является минимальной реализацией в смысле определения 1.8 тогда и только тогда, когда семейство $\bar{\rho}$ приведено.

Доказательство необходимости не вызывает затруднений. Поэтому мы докажем лишь достаточность. Пусть $(\hat{\bar{\rho}}, \hat{\bar{\varphi}})$ — некоторая конечная инвариантная во времени динамическая система, и пусть

$$(\forall c)(\exists \hat{c})(\forall x)(\rho_0(c, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}, x))\ \&$$
$$(\forall \hat{c})(\exists c)(\forall x)(\rho_0(c, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}, x)).$$

Определим отношение $\varphi \subset \hat{C} \times C$, потребовав, чтобы

$$(\hat{c},\ c) \in \varphi \Leftrightarrow (\forall x)\ (\rho_0(c,\ x) = \hat{\rho}_0(\hat{c},\ x)).$$

Но тогда если $(\hat{c},\ c) \in \varphi$ и $(\hat{c},\ c') \in \varphi$, то

$$(\forall x)\ (\rho_0(c,\ x) = \hat{\rho}_0(\hat{c},\ x) = \hat{\rho}_0(c',\ x)).$$

Поскольку семейство $\bar{\rho}$ приведено, справедливо равенство $c = c'$, т. е. φ — функция. Более того, если $(\bar{\rho},\ \bar{\varphi})$ и $(\bar{\hat{\rho}},\ \bar{\hat{\varphi}})$ эквивалентны в смысле определения 1.2, то $\varphi\colon \hat{C} \to C$ является отображением на (т. е. сюръекцией) и, следовательно, $K(C) \leqslant K(\hat{C})$, ч. т. д.

Как показывает пример 2.1, инвариантная во времени конечная динамическая система не обязательно должна быть минимальной реализацией в смысле определения 1.6, даже если она приведена. Но эта система оказывается минимальной в смысле определения 1.8. В определении 1.6 к системе предъявляются более сильные требования, чем в определении 1.8, так что свойство линейности является существенно необходимым для предложения 2.1.

Минимальные реализации в смысле 1.9 характеризуются следующим предложением:

Предложение 2.4. Пусть $(\bar{\rho},\ \bar{\varphi})$ — инвариантная во времени динамическая система. Предположим дополнительно, что либо $(\bar{\rho},\ \bar{\varphi})$ линейна и ее пространство состояний конечномерно, либо пространство состояний C конечно и не наделено никакой алгебраической структурой. Такая система является минимальной реализацией в смысле определения 1.9 тогда и только тогда, когда она приведена.

Доказательство. Начнем с доказательства необходимости. Предположим, что $(\bar{\rho},\ \bar{\varphi})$ не приведена. Тогда мы можем построить отношение конгруэнтности $E \subset C \times C$, потребовав, чтобы

$$(c,\ c') \in E \Leftrightarrow (\forall x)\ (\rho_0(c,\ x) = \rho_0(c',\ x)).$$

Так как E является отношением конгруэнтности, то C/E имеет такую же алгебраическую структуру, что и C. Определим затем $\hat{\rho}_t\colon (C/E) \times X_t \to Y_t$ условием:

$$\hat{\rho}_t([c],\ x_t) = \rho_t(c,\ x_t).$$

Функция $\hat{\rho}_t$ определена корректно, поскольку система $(\bar{\rho},\ \bar{\varphi})$ инвариантна во времени, а семейство $\bar{\hat{\rho}} = \{\hat{\rho}_t\colon t \in T\}$ реализуемо. Пусть теперь $h\colon C \to C/E$ — каноническое отображение, т. е. $h(c) = [c]$. Тогда h является эпиморфизмом и удовлетворяет коммутативной диаграмме из определения 1.9. Однако, поскольку отношение E нетривиально, h не является изоморфизмом, и требуемый результат получается с помощью рассуждений, аналогичных использованным в доказательстве предложения 2.2.

Обратимся теперь к доказательству достаточности. Предположим, что система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ приведена, и пусть $h\colon C \to \hat{C}$ — некоторый эпиморфизм, удовлетворяющий коммутативной диаграмме из определения 1.9. Покажем, что h — инъекция. Предположим с этой целью, что $h(c) = h(c')$ для некоторых c и c' из C. Тогда из диаграммы определения 1.9 следует, что для любого $x \in X$

$$\rho_0(c, x) = \hat{\rho}_0(h(c), x) = \rho_0(h(c'), x) = \rho_0(c', x).$$

Поэтому $(\forall x)(\rho_0(c, x) = \rho_0(c', x))$, а это в силу приведенности $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ означает, что $c = c'$, ч. т. д.

Предложение 2.4 доказано нами либо для линейных систем, либо для систем с конечным пространством состояний, не имеющих никакой алгебраической структуры. Однако, как это следует непосредственно из доказательства этого предложения, оно справедливо для любых систем, если отношение $E \subset C \times C$,

$$(c, c') \in E \Longleftrightarrow (\forall x)(\rho_0(c, x) = \rho_0(c', x)),$$

оказывается отношением конгруэнтности относительно алгебраической структуры пространства состояний.

Если отношение эквивалентности, используемое в определении минимальной реализации, требует лишь совпадения реакций на входное воздействие, то соответствующую минимальную реализацию называют минимальной реализацией реакции на входное воздействие, добавляя к этому еще слова, указывающие в каком смысле понимается здесь минимальность. Важность минимальных реализаций такого типа определяется тем фактом, что в большинстве задач синтеза линейных систем управления (или фильтров) требуется воспроизводить лишь заданную реализацию на входное воздействие, определенную в виде некоторой весовой функции. Переходя к реализациям этого типа, мы будем исходить от определений 1.10 и 1.11.

Предложение 2.5. Пусть $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ — инвариантная во времени конечная динамическая система. Эта система является минимальной реализацией в смысле определения 1.10 тогда и только тогда, когда она является управляемой и приведенной.

Доказательство. Начнем с доказательства необходимости. Если $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ не приведена, то мы можем построить отношение эквивалентности $E \subset C \times C$, такое, что

$$(c, c') \in E \Longleftrightarrow (\forall x)(\rho_0(c, x) = \rho_0(c', x)),$$

причем E нетривиально. Построим также $\hat{\rho}_t$: $(C/E) \times X_t \to Y_t$, потребовав, чтобы

$$\hat{\rho}_t([c], x_t) = \rho_t(c, x_t).$$

Так как $\bar{\rho}$ инвариантно во времени, такое определение $\bar{\hat{\rho}}_t$ корректно. Тогда $\bar{\hat{\rho}} = \{\hat{\rho}_t: t \in T\}$ является реализуемым семейством реакций. Предположим теперь, что $c_0 \in C$ является эталонным состоянием для C, и пусть $[c_0]$ — эталонное состояние для C/E. В этом случае

$$\{(x, \rho_0(c_0, x)): x \in X\} = \{(x, \hat{\rho}_0([c_0], x)): x \in X\},$$

а так как E нетривиально, а C конечно, то $K(C/E) < K(C)$. Следовательно, $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ не может быть минимальной реализацией в смысле определения 1.10.

Предположим теперь, что система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ не управляема. Определим $C_0 \subset C$ и $\hat{\rho}_t$: $C_0 \times X_t \to Y_t$ так, что

$$C_0 = \{c: (\exists x^t)(c = \varphi_{0t}(c_0, x^t))\}, \quad \hat{\rho}_t = \rho_t \mid C_0 \times X_t,$$

где $c_0 \in C$ — эталонное состояние исходной системы. Покажем прежде всего, что $\bar{\hat{\rho}} = \{\hat{\rho}_t: t \in T\}$ реализуемо некоторой инвариантной во времени конечной динамической системой. Для этого зафиксируем произвольные $c \in C_0$ и $x^t \in X^t$. Тогда $c = \varphi_{0\tau}(c_0, x^\tau)$ для некоторого x^τ и, следовательно,

$$\varphi_{0t}(c, x^t) = \varphi_{\tau t'}(c, F^\tau(x^t)) = \varphi_{0t'}(c_0, x^\tau \cdot F^\tau(x^t)) \in C_0,$$

где $t' = t + \tau$. Поэтому $\varphi_{0t}(C_0 \times X^t) \subset C_0$, т. е. $\hat{\varphi}_{tt'}$: $C_0 \times X_{tt'} \to C_0$ может определяться условием $\hat{\varphi}_{tt'} = \varphi_{tt'} \mid C_0 \times X_{tt'}$. Ясно, что $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$, где $\bar{\hat{\varphi}} = \{\hat{\varphi}_{tt'}: t, t' \in T\}$, является инвариантной во времени конечной динамической системой. Так как $c_0 = \varphi_{00}(c_0, x^0)$, то $c_0 \in C_0$ и

$$\{(x, \rho_0(c_0, x)): x \in X\} = \{(x, \hat{\rho}_0(c_0, x)): x \in X\}.$$

Будем считать c_0 эталонным состоянием множества C_0. Но тогда, поскольку $K(C_0) < K(C)$, $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ не может быть минимальной реализацией в смысле определения 1.10.

Обратимся теперь к доказательству достаточности. Предположим, что $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ приведена и управляема, но не является минимальной реализацией в смысле определения 1.10. Но тогда найдутся конечное множество $\hat{C}$ и инвариантная во времени конечная динамическая система $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$ с пространством состояний $\hat{C}$, причем

$$1.\ K(\hat{C}) < K(C), \qquad 2.\ (\forall x)(\rho_0(c_0, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}_0, x)), \tag{8.3}$$

где $c_0 \in C$ и $\hat{c}_0 \in \hat{C}$ являются эталонными состояниями обеих систем. А так как $\bar{\rho}$ и $\bar{\hat{\rho}}$ реализуемы, то

$$(\forall \hat{x}^t)(\exists c' \in C)(\forall x_t)(\rho_t(c', x_t) = \rho_0(c_0, \hat{x}^t \cdot x_t) \mid T_t),$$
$$(\forall \hat{x}^t)(\exists c' \in \hat{C})(\forall x_t)(\hat{\rho}_t(c', x_t) = \hat{\rho}_0(\hat{c}_0, \hat{x}^t \cdot x_t) \mid T_t). \tag{8.4}$$

Вспомним теперь, что $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ является управляемой и, значит,

$$(\forall c \in C)(\exists \hat{x}^t)(c = \varphi_{0t}(c_0, \hat{x}^t)),$$

т. е.

$$(\forall c \in C)(\exists \hat{x}^t)(\forall x^t)(\rho_t(c, x_t) = \rho_0(c_0, \hat{x}^t \cdot x_t) \mid T_t). \tag{8.5}$$

Но из соотношений (8.3) — (8.5) следует, что

$$(\forall c \in C)(\exists c' \in \hat{C})(\forall x_t)(\rho_t(c, x_t) = \hat{\rho}_t(c', x_t)). \tag{8.6}$$

Пусть теперь $\hat{C}_0 \subset \hat{C}$ таково, что

$$\hat{C}_0 = \{c' \colon (\exists c)(\forall x_t)(\rho_t(c, x_t) = \hat{\rho}_t(c', x_t))\}. \tag{8.7}$$

Из соотношения (8.6) вытекает, что $\hat{C}_0 \neq \varnothing$. Определим поэтому $\varphi \subset \hat{C}_0 \times C$ так, что

$$(c', c) \in \varphi \Leftrightarrow (\forall x_t)(\rho_t(c, x_t) = \hat{\rho}_t(c', x_t)).$$

Но из (8.7) следует, что $\mathscr{D}(\varphi) = \hat{C}_0$. Заметим, что если $(c', c) \in \varphi$ и $(c', \hat{c}) \in \varphi$, то

$$(\forall x_t)(\rho_t(c, x_t) = \hat{\rho}_t(c', x_t) = \rho_t(\hat{c}, x_t)).$$

Поскольку система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ приведена, справедливо равенство $c = \hat{c}$. Поэтому φ является отображением $\varphi \colon \hat{C}_0 \to C$, и, более того, согласно соотношению (8.6), это отображение сюръективно. Следовательно, $K(C) \leqslant K(\hat{C}_0) \leqslant K(\hat{C})$, а это противоречит предположению о том, что $K(\hat{C}) < K(C)$, ч.т.д.

Прежде чем переходить к характеризации реализаций, минимальных в смысле определения 1.11, докажем следующую лемму:

Лемма 2.1. Предположим, что $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ — некоторая приведенная инвариантная во времени линейная динамическая система. Пусть

$$C_0 = \{c \colon (\exists x^t)(\varphi_{20t}(x^t) = c) \;\&\; t \in T\}.$$

Тогда

$$C_0 = \{c \colon (\exists x^t)(\rho_{1t}(c) = \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t) \;\&\; t \in T\}$$

и C_0 является линейным подпространством пространства C.

Доказательство. В общем случае

$$C_0 \subset \{c \colon (\exists x^t)(\rho_{1t}(c) = \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t) \;\&\; t \in T\} \equiv C_0'.$$

Предположим, что $\rho_{1t}(c) = \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t$. Но так как семейство реакций $\{\rho_t\}$ приведено, то

$$c = \rho_{1t}^{-1}(\rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t) = \varphi_{20t}(x^t)$$

(см. § 3 гл. IV) и, значит, $C_0 = C_0'$. Оставшаяся часть доказательства вытекает из доказательства следствия 3.2 гл. VII, ч. т. д.

Теперь мы можем доказать следующее предложение:

Предложение 2.6. Пусть $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ — инвариантная во времени конечномерная линейная динамическая система. Эта система является минимальной реализацией в смысле определения 1.11 тогда и только тогда, когда она управляема и приведена.

Доказательство. Начнем с доказательства необходимости. Если система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ не приведена, то существует нетривиальное отношение конгруэнтности $E \subset C \times C$, для которого

$$(c, c') \in E \Leftrightarrow \rho_{10}(c) = \rho_{10}(c').$$

Определим $\hat{\rho}_{1t}\colon C/E \to Y_t$, потребовав, чтобы

$$\hat{\rho}_{1t}([c]) = \rho_{1t}(c).$$

Но тогда $\bar{\hat{\rho}} = \{(\hat{\rho}_{1t}, \rho_{2t})\colon t \in T\}$ реализуемо некоторой инвариантной во времени конечномерной линейной динамической системой. Обозначим через $h\colon C \to C/E$ каноническое отображение, т. е. $h(c) = [c]$. Тогда h является эпиморфизмом. Так как E нетривиально, то h не может быть изоморфизмом. Поэтому, рассуждая так же, как при доказательстве предложения 2.2, мы докажем, что $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ не является минимальной реализацией в смысле определения 1.11. Предположим теперь, что $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ приведена, но не является управляемой. Определим $C_0 \subset C$ следующим образом:

$$C_0 = \{c\colon (\exists\, x^t)\,(c = \varphi_{20t}(x^t))\}.$$

Но тогда, согласно лемме 2.1, C_0 является подпространством пространства C, а, поскольку система неуправляема, это подпространство собственное. Пусть теперь $\hat{\rho}_{1t}\colon C_0 \to Y_t$ таково, что $\hat{\rho}_{1t} = \rho_{1t} \mid C_0$. Мы покажем тогда, что семейство $\{(\hat{\rho}_{1t}, \rho_{2t})\}$ реализуемо. Прежде всего заметим, что, так как $\{(\rho_{1t}, \rho_{2t})\}$ реализуемо, новое семейство, очевидно, удовлетворяет условию согласованности реакций на входное воздействие. Нам остается лишь показать, что

$$(\forall\, t)\,(\forall\, t')\,(\forall\, c \in C_0)\,(\forall\, x_{tt'})\,(\exists\, c' \in C_0)\,(\hat{\rho}_{1t'}(c') =$$
$$= (\hat{\rho}_{1t}(c) + \rho_{2t}(x_{tt'} \cdot 0)) \mid T_{t'}).$$

Так как $\{\langle\rho_{1t}, \rho_{2t}\rangle\}$ реализуемо, то

$$(\forall t)(\forall x^t)(\forall c \in C_0)(\exists c' \in C)(\rho_{1t}(c') = \\ = \rho_{10}(c) \mid T_t + \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t).$$

Покажем теперь, что $c' \in C_0$. Поскольку $c \in C_0$, для некоторых $t' \in T$ и $\hat{x}^{t'}$ должно выполняться равенство $\rho_{1t'}(c) = \rho_{20}(\hat{x}^{t'} \cdot 0) \mid T_{t'}$. Обозначим $t + t'$ через τ. Так как семейство реакций $\{\rho_t\}$ инвариантно во времени, мы получаем, что

$$\begin{aligned}\rho_{1\tau}(c') &= \rho_{1t'}(c) \mid T_\tau + \rho_{2t'}(F^{t'}(x^t) \cdot 0) \mid T_\tau = \\ &= \rho_{20}(\hat{x}^{t'} \cdot 0) \mid T_\tau + \rho_{2t'}(F^{t'}(x^t) \cdot 0) \mid T_\tau = \\ &= \rho_{20}(\hat{x}^{t'} \cdot F^{t'}(x^t) \cdot 0) \mid T_\tau.\end{aligned}$$

Значит, $c' \in C_0$. Поэтому

$$(\forall t)(\forall x^t)(\forall c \in C_0)(\exists c' \in C_0)(\hat{\rho}_{1t}(c') = \hat{\rho}_{10}(c) \mid T_t + \rho_{20}(x^t \cdot 0) \mid T_t).$$

Так как $\{\rho_t\}$ инвариантно во времени, мы получаем требуемый результат. Поэтому $\{(\hat{\rho}_{1t}, \rho_{2t})\}$ реализуемо некоторой инвариантной во времени конечномерной линейной динамической системой. Обозначим через h: $C \to C_0$ оператор проектирования C на C_0. Тогда h является эпиморфизмом, но не является изоморфизмом, поскольку C_0 — собственное подпространство пространства C. Из рассуждений, использованных при доказательстве предложения 2.2, следует, что $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ не может быть минимальной реализацией в смысле определения 1.11.

Перейдем затем к доказательству достаточности. Предположим, что система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ приведена и управляема. Предположим, кроме того, что $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$ представляет некоторую инвариантную во времени конечномерную линейную динамическую систему, для которой $(\forall x)(\rho_0(0, x) = \hat{\rho}_0(0, x))$, и, более того, существует некоторый эпиморфизм h: $C \to \hat{C}$. Определим отношение конгруэнтности $E \subset C \times C$, потребовав, чтобы $(c, c') \in E \Leftrightarrow h(c) = h(c')$. Пусть линейная функция $\hat{\rho}'_{1t}$: $C/E \to Y_t$ удовлетворяет условию

$$\hat{\rho}'_{1t}([c]) = \hat{\rho}_{1t}(h(c)).$$

Но тогда семейство $\bar{\hat{\rho}}' = \{(\hat{\rho}'_{1t}, \rho'_{2t})\colon t \in T\}$ реализуемо некоторой инвариантной во времени конечномерной линейной динамической системой. (См. развитую выше теорию реализации.) Так как из равенства $(\forall x)(\rho_0(0, x) = \hat{\rho}_0(0, x))$ следует, что $\rho_{20}(x) = \hat{\rho}_{20}(x)$ при любом x, то, согласно условию реализуемости, мы имеем

$$(\forall t)\,(\forall x^t)\,(\exists[c])\,(\hat{\rho}'_{1t}([c]) = \rho_{20}(x^t\cdot 0)\mid T_t). \tag{8.8}$$

Поскольку система $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ управляема, то

$$C = \{c\colon (\exists x^t)\,(c = \varphi_{20t}(x^t))\},$$

или

$$(\forall c)\,(\exists t)\,(\exists x^t)\,(c \in C \Rightarrow \rho_{1t}(c) = \rho_{20}(x^t\cdot 0)\mid T_t). \tag{8.9}$$

Но из соотношений (8.8) и (8.9) следует, что

$$(\forall c)\,(\exists t)\,(\exists[c'])\,(c \in C \Rightarrow \rho_{1t}(c) = \hat{\rho}'_{1t}([c'])).$$

Так как $\bar{\hat{\rho}}' = \{(\hat{\rho}'_{1t}, \hat{\rho}_{2t})\colon t \in T\}$ инвариантно во времени, то из последнего соотношения вытекает, что

$$(\forall c)\,(\exists[c'])\,(c \in C \Rightarrow \rho_{10}(c) = \hat{\rho}'_{10}([c'])).$$

Пусть $\hat{C}' \subset C/E$ удовлетворяет условию

$$\hat{C}' = \{[c']\colon (\exists c \in C)\,(\rho_{10}(c) = \hat{\rho}'_{10}([c']))\}.$$

Очевидно, $\hat{C}'$ является линейным подпространством пространства C/E. Но тогда, в силу приведенности $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$, существует линейная сюръекция $\rho_{10}^{-1}\cdot\hat{\rho}'_{10}\colon C' \to C$, ч. т. д.

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ МИНИМАЛЬНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ РЕАКЦИЙ НА ВХОДНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

В общем случае минимальная реализация некоторой системы не обязательно должна быть единственной (это сразу видно из доказательств предложений предыдущего параграфа). Однако в этом параграфе мы покажем, что минимальные реализации реакций на входные воздействия единственны с точностью до изоморфизма. С некоторыми другими минимальными реализациями мы познакомимся еще в гл. XII.

Проблему единственности мы решим прежде всего для самого общего случая

Предложение 3.1. Пусть $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ и $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$ являются инвариантными во времени динамическими системами, и пусть обе эти системы приведены и управляемы. Эти системы являются реализациями одного и того же семейства реакций на входное воздействие, т. е. для любых x выполняется равенство $\rho_0(c_0, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}_0, x)$ тогда и только тогда, когда найдется такое взаимно однозначное соответствие $h\colon C \to \hat{C}$, что $h(c_0) = \hat{c}_0$ и при любых $x_{tt'}$, $x_{t'}$ и $0 \leqslant t \leqslant t'$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
X^t \arrow[r, "\varphi_{0t}(c_0,\, -)"] \arrow[d, "I"] & C \arrow[r, "\varphi_{tt'}(-,\, x_{tt'})"] \arrow[d, "h"] & C \arrow[r, "\rho_{t'}(-,\, x_{t'})"] \arrow[d, "h"] & Y_t \arrow[d, "I"] \\
X^t \arrow[r, "\hat{\varphi}_{0t}(\hat{c}_0,\, -)"] & \hat{C} \arrow[r, "\hat{\varphi}_{tt'}(-,\, x_{tt'})"] & \hat{C} \arrow[r, "\hat{\rho}_{t'}(-,\, x_{t'})"] & Y_t
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Мы начнем с доказательства достаточности. Предположим, что существует взаимно однозначное соответствие $h\colon C \to \hat{C}$, обеспечивающее коммутативность приведенной выше диаграммы. Тогда для любого $x \in X$ и $t' \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\rho_0(c_0, x) \mid T_{t'} &= \rho_{t'}(\varphi_{0t'}(c_0, x^{t'}), x_{t'}) = \qquad \text{(где } x = x^{t'} \cdot x_{t'}\text{)}\\
&= \hat{\rho}_{t'}(h \cdot \varphi_{0t'}(c_0, x^{t'}), x_{t'}) = \\
&= \hat{\rho}_{t'}(\hat{\varphi}_{0t'}(\hat{c}_0, x^{t'}), x_{t'}) = \\
&= \hat{\rho}_0(\hat{c}_0, x^{t'} \cdot x_{t'}) \mid T_{t'},
\end{aligned}$$

и потому $\rho_0(c_0, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}_0, x)$ при любом $x \in X$.

Обратимся теперь к доказательству необходимости. Обозначим через $h \subset C \times \hat{C}$ отношение

$$(c, \hat{c}) \in h \Longleftrightarrow (\exists x^t)\,(c = \varphi_{0t}(c_0, x^t)\ \&\ \hat{c} = \hat{\varphi}_{0t}(\hat{c}_0, x^t)).$$

Предположим, что $(c, \hat{c}) \in h$, $(c, \hat{c}') \in h$ и в то же время

$$c = \varphi_{0t}(c_0, x^t)\ \&\ \hat{c} = \hat{\varphi}_{0t}(\hat{c}_0, x^t),$$
$$c = \varphi_{0t'}(c_0, \hat{x}^{t'})\ \&\ \hat{c}' = \hat{\varphi}_{0t'}(\hat{c}_0, \hat{x}^{t'}).$$

Но тогда для любого x_t

$$\begin{aligned}
\rho_t(c, x_t) &= \rho_t(\varphi_{0t}(c_0, x^t), x_t) = \rho_0(c_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t = \\
&= \hat{\rho}_0(\hat{c}_0, x^t \cdot x_t) \mid T_t = \\
&= \hat{\rho}_t(\hat{\varphi}_{0t}(\hat{c}_0, x^t), x_t) = \hat{\rho}_t(\hat{c}, x_t).
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Аналогично, для любого $x_{t'}$

$$\rho_{t'}(c, x_{t'}) = \hat{\rho}_{t'}(\hat{c}', x_{t'}), \tag{8.11}$$

а поскольку семейства $\bar{\rho}$ и $\bar{\hat{\rho}}$ инвариантны во времени, из равенств (8.10) и (8.11) следует, что

$$(\forall x)\,(\rho_0(c, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}, x))$$

и

$$(\forall x)\,(\rho_0(c, x) = \hat{\rho}_0(\hat{c}', x)).$$

Но тогда

$$(\forall x)\,(\hat{\rho}_0\,(\hat{c},\ x) = \hat{\rho}_0\,(\hat{c}',\ x)).$$

Так как система $(\bar{\hat{\rho}},\ \bar{\hat{\varphi}})$ приведена, то $\hat{c} = \hat{c}'$. Зафиксируем теперь произвольное $c \in C$. Поскольку $(\bar{\rho},\ \bar{\varphi})$ управляема, существует такое $\hat{x}^t$, что $c = \varphi_{0t}\,(c_0,\ \hat{x}^t)$. Обозначим теперь через $\hat{c}$ состояние $\hat{\varphi}_{0t}\,(\hat{c}_0,\ \hat{x}^t)$. Но тогда $(c,\ \hat{c}) \in h$ и, следовательно, $\mathscr{D}(h) = C$. Это означает, что h является сюръекцией из C на $\hat{C}$. Более того, поскольку h определяет некоторую симметричную процедуру получения пар элементов из C и $\hat{C}$, для h должно существовать обратное соответствие h^{-1}. Следовательно, h взаимно однозначно. Что же касается соотношения $h\,(c_0) = \hat{c}_0$, то оно получается из того факта, что $c_0 = \varphi_{00}\,(c_0,\ x^0)$ и $\hat{c}_0 = \hat{\varphi}_{00}(\hat{c}_0,\ x^0)$. Итак, нам остается показать, что указанная выше диаграмма коммутативна относительно h.

Поскольку

$$(\varphi_{0t}\,(c_0,\ x^t),\ \hat{\varphi}_{0t}\,(\hat{c}_0,\ x^t)) \in h,$$

для любого x^t справедливо равенство

$$\hat{\varphi}_{0t}\,(\hat{c}_0,\ x^t) = h\cdot\varphi_{0t}\,(c_0,\ x^t).$$

Что же касается соотношения

$$\hat{\varphi}_{tt'}\,(h\,(c),\ x_{tt'}) = h\cdot\varphi_{tt'}\,(c,\ x_{tt'}),$$

которое должно выполняться при любых $c \in C$ и любых $x_{tt'}$, то его справедливость можно доказать следующим образом. Система $(\bar{\rho},\ \bar{\varphi})$ управляема, и, следовательно, существует такое x^τ, что $c = \varphi_{0\tau}\,(c_0,\ x^\tau)$. Положим $\mu = (t' - t) + \tau$. Тогда

$$\begin{aligned}
&(\varphi_{0\mu}\,(c_0,\ x^\tau\cdot F^{\tau-t}\,(x_{tt'})),\ \hat{\varphi}_{0\mu}\,(\hat{c}_0,\ x^\tau\cdot F^{\tau-t}\,(x_{tt'}))) \in h \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow (\varphi_{\tau\mu}\,(\varphi_{0\tau}\,(c_0,\ x^\tau),\ F^{\tau-t}\,(x_{tt'})),\ \hat{\varphi}_{\tau\mu}\,(\hat{\varphi}_{0\tau}\,(\hat{c}_0,\ x^\tau),\ F^{\tau-t}\,(x_{tt'}))) \in h \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow (\varphi_{\tau\mu}\,(c,\ F^{\tau-t}\,(x_{tt'})),\ \hat{\varphi}_{\tau\mu}\,(h\,(c),\ F^{\tau-t}\,(x_{tt'}))) \in h \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow (\varphi_{tt'}\,(c,\ x_{tt'}),\ \hat{\varphi}_{tt'}\,(h\,(c),\ x_{tt'})) \in h \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow \hat{\varphi}_{tt'}\,(h\,(c),\ x_{tt'}) = h\cdot\varphi_{tt'}\,(c,\ x_{tt'}).
\end{aligned}$$

Аналогичным способом доказывается, что для любого $c \in C$ и любого $x_{t'}$

$$\hat{\rho}_{t'}\,(h\,(c),\ x_{t'}) = h\cdot\rho_{t'}\,(c,\ x_{t'}).$$

Поэтому диаграмма является коммутативной относительно h, ч. т. д.

Предложение 3.1 утверждает, что если две приведенные и управляемые динамические системы $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ и $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$ являются реализациями одного и того же семейства реакций на входное воздействие, то они изоморфны в том смысле, что существует взаимно однозначное соответствие $h\colon C \to \hat{C}$, позволяющее определить $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$ через $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$:

$$\hat{\rho}_t(\hat{c}, x_t) = \rho_t(h^{-1}(\hat{c}), x_t) \tag{8.12}$$

и

$$\hat{\varphi}_{tt'}(\hat{c}, x_{tt'}) = h\varphi_{tt'}(h^{-1}(\hat{c}), x_{tt'}). \tag{8.13}$$

К тому же h должно удовлетворять условию $h(c_0) = \hat{c}_0$. Поэтому если C и $\hat{C}$ рассматривать как алгебры с определенными на них нульарными операторами c_0 и $\hat{c}_0$, то h можно считать изоморфизмом этих алгебр.

Объединяя предложение 3.1 с предложением 2.5, мы получаем важное

Следствие 3.1. Пусть даны две инвариантные во времени конечные динамические системы $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ и $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$, являющиеся минимальными реализациями в смысле определения 1.10. Эти системы являются реализациями одного и того же семейства реакций на входное воздействие тогда и только тогда, когда диаграмма из предложения 3.1 коммутативна относительно некоторого взаимно однозначного соответствия h, такого, что $h(c_0) = \hat{c}_0$.

Согласно этому следствию, минимальная реализация в смысле определения 1.10 произвольной инвариантной во времени конечной динамической системы определяется однозначно с точностью до изоморфизма [см. (8.12) и (8.13)].

Для случая линейных минимальных реализаций можно доказать предложение, аналогичное предложению 3.1. Однако чтобы связь этого результата с классической теорией стала более выпуклой, мы сформулируем этот факт в виде следующего утверждения о единственности:

Предложение 3.2. Пусть две сильно неупреждающие инвариантные во времени линейные динамические системы $S = (\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ и $\hat{S} = (\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$ приведены и управляемы. Они являются реализациями одного и того же семейства реакций на входное воздействие, т. е. для каждого x_t справедливо равенство $\rho_{2t}(\bar{x}_t) = \hat{\rho}_{2t}(x_t)$ тогда и только тогда, когда существует такое линейное взаимно однозначное соответствие h: $C \to \hat{C}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& X^t \arrow[dl, "\varphi_{20t}"'] \arrow[dr, "\hat{\varphi}_{20t}"] & \\
C \arrow[rr, "h"] \arrow[d, "\varphi_{1tt'}"'] & & \hat{C} \arrow[d, "\hat{\varphi}_{1tt'}"] \\
C \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & C \arrow[dl, "\hat{\lambda}"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

в которой λ и $\hat{\lambda}$ — выходные функции систем $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ и $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$ соответственно, оказывается коммутативной.

Доказательство. Начнем с доказательства необходимости. Заметим, что выходная функция λ: $C \to B$ любой сильно неупреждающей инвариантной во времени линейной динамической системы $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ определяется следующим условием: для любых t, x_t и c

$$\lambda(c) = \rho_t(c, x_t)(t) = \rho_{1t}(c)(t) = \rho_{10}(c)(0).$$

Но для любых t и x^t

$$\rho_{1t}(\varphi_{20t}(x^t)) = \rho_0(0, x^t \cdot 0) \mid T_t = \rho_{2t}(x^t \cdot 0) \mid T_t =$$
$$= \hat{\rho}_{2t}(x^t \cdot 0) \mid T_t = \hat{\rho}_{1t}(\hat{\varphi}_{20t}(x^t)).$$

Следовательно, для любых $t' \geqslant t$

$$\lambda(\varphi_{1tt'}(\varphi_{20t}(x^t))) = \rho_{1t'}(\varphi_{1tt'}(\varphi_{20t}(x^t)))(t') =$$
$$= (\rho_{1t}(\varphi_{20t}(x^t)) \mid T_{t'})(t') = \rho_{1t}(\varphi_{20t}(x^t))(t') =$$
$$= \hat{\rho}_{1t}(\hat{\varphi}_{20t}(x^t))(t') = \lambda(\hat{\varphi}_{1tt'}(\hat{\varphi}_{20t}(x^t))).$$

Поскольку S и $\hat{S}$ приведены, отображения ρ_{1t} и $\hat{\rho}_{1t}$ должны быть взаимно однозначными, а потому на $\rho_{1t}(C)$ и $\hat{\rho}_{1t}(\hat{C})$ определены обратные к ним отображения. Более того, так как системы S и $\hat{S}$ управляемы, справедливы равенства

$$C = \bigcup_t \varphi_{0t}(X^t) \quad \text{и} \quad \hat{C} = \bigcup_t \hat{\varphi}_{0t}(X^t).$$

Зададим теперь h_c: $C \to \hat{C}$ так, чтобы для произвольного t

$$h_c(c) = \hat{\rho}_{1t}^{-1} \cdot \rho_{1t}(c),$$

если определена правая часть этого равенства. Заметим, что, поскольку обе системы инвариантны во времени, для любых t и t'

$$\hat{\rho}_{1t}^{-1}(\rho_{1t}(c)) = \hat{\rho}_{1t'}^{-1}(\hat{\rho}_{1t'}(c)),$$

если только определены оба эти выражения. Кроме того, из равенств

$$C = \bigcup_t \varphi_{0t}(X^t),$$

$$\rho_{1t}(\varphi_{20t}(x^t)) = \hat{\rho}_{1t}(\hat{\varphi}_{20t}(x^t))$$

для любого x^t следует, что $\mathcal{D}(h_c) = C$. Поэтому h_c является взаимно однозначным соответствием (т. е. $h_c^{-1} = \rho_{1t}^{-1}\hat{\rho}_{1t}$ для некоторого t) и для каждого t и каждого $t' \geqslant t$

$$h_c(\varphi_{1tt'}(\varphi_{20t}(x^t))) = \hat{\varphi}_{1tt'}(\hat{\varphi}_{20t}(x^t));$$

в частности, если $t' = t$, то

$$h_c(\varphi_{20t}(x^t)) = \hat{\varphi}_{20t}(x^t).$$

Доказательство достаточности очевидно, ч. т. д.

Объединяя теперь предложение 3.2 с предложением 2.6, мы приходим к следующему результату:

Следствие 3.2. Две сильно неупреждающие инвариантные во времени конечномерные линейные динамические системы $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ и $(\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}})$, являющиеся минимальными реализациями в смысле определения 1.11, пространства состояний которых удовлетворяют условиям предложения 2.6, могут быть реализациями одного и того же семейства линейных реакций на входное воздействие тогда и только тогда, когда диаграмма из предложения 3.2 является коммутативной относительно некоторого линейного взаимно однозначного соответствия h.

Глава IX

УСТОЙЧИВОСТЬ

Устойчивость — это обширный и важный раздел теории систем, и в настоящей главе мы лишь наметим подход к этой теме на уровне общей теории систем. Мы покажем, как в рамках общей теории систем, развиваемой в этой книге, можно формализовать несколько понятий теории устойчивости, но подробно исследовать мы будем лишь одно из них — понятие устойчивости подмножества пространства состояний. А для того, чтобы продемонстрировать, что и общесистемный подход позволяет подойти к некоторым стандартным понятиям и проблемам, тесно связанным с математическим анализом, мы введем понятие функции типа функции Ляпунова для общей динамической системы и сформулируем необходимые и достаточные условия устойчивости в терминах этих функций.

По самой сути дела устойчивость зависит как от вида системы, так и от того, каким образом оценивать «инертность» (иными словами, устойчивость) выбранного режима ее работы. Поэтому, кроме определения системы, нам потребуется теперь еще и некоторая возможность решать, существенно ли изменяется поведение системы под действием возмущения. Такая оценка опирается на надлежащим образом определенное понятие окрестности, и система признается устойчивой относительно введенного понятия окрестности, если при достаточно малых изменениях условий работы системы достаточно малы и изменения в ее поведении.

Обратите внимание на весьма общий характер соображений и результатов, относящихся к устойчивости и рассматриваемых в этой главе. Все используемые здесь объекты систем описываются исключительно как абстрактные множества, и мы вводим лишь одно вспомогательное множество, которое приходится упорядочить для того, чтобы иметь возможность определить понятие функции Ляпунова. Вся информация о системе сконденсирована в определении некоторого предпорядка. Ограничившись только такой структурой, мы смогли тем не менее доказать основные теоремы типа теорем Ляпунова и получить необходимые и достаточные условия устойчивости. Эти результаты без изменений переносятся и на системы с более богатой структурой, например на множества с произвольной топологией, с топологией равномерной сходимости, на метрические пространства и т. п.

1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Основная идея, связанная с понятием устойчивости, вообще говоря, состоит в следующем. Пусть $\hat{d}$ и $\hat{e}$ соответствуют причине и следствию некоторого явления, т. е. пусть существует некоторое отображение F, такое, что $F(\hat{d}) = \hat{e}$. Пусть в некоторой другой ситуации другая причина, скажем d, вызовет другое следствие $e = F(d)$. Причинно-следственная пара $(\hat{e}, \hat{d})$ называется устойчивой, если незначительные отклонения от $\bar{e}$ вызываются малыми отклонениями от $\hat{d}$, т. е. если для всех d, близких к $\hat{d}$, соответствующие следствия $e = F(d)$ будут близки к $\hat{e}$[1]. Интуитивно это означает, что малые отклонения $\hat{d}$ не могут существенно изменить следствие.

Для того чтобы теперь формализовать понятие устойчивости, очевидно, необходимо уметь судить о «близости». В общем случае это можно делать с помощью заранее выбранного семейства, вообще говоря, совершенно произвольных подмножеств. Пусть V — некоторое произвольное множество, $\Pi(V)$ — семейство всевозможных подмножеств множества V, а θ_V — некоторое заданное семейство подмножеств из V, т. е. $\theta_V \subset \Pi(V)$. Тогда для произвольной точки $v \in V$ условимся называть ее системой окрестностей относительно θ_V множество $\bar{N}(v)$, такое, что

$$\bar{N}(v) = \{\alpha\colon \alpha \in \theta_V \,\&\, v \in \alpha\}.$$

Определим теперь общее понятие устойчивости.

Определение 1.1. Пусть $F\colon D \to E$ — заданное отображение, θ_D и θ_E — заданные семейства подмножеств множеств D и E соответственно, $(\hat{d}, \hat{e}) \in D \times E$ и $\hat{e} = F(\hat{d})$. Тогда пара $(\hat{d}, \hat{e})$ называется *устойчивой относительно* θ_D *и* θ_E в том и только в том случае, когда

$$(\forall \alpha \in \bar{N}(\hat{e}))\,(\exists \beta \in \bar{N}(\hat{d}))\,(\forall d)\,(d \in \beta \to F(d) \in \alpha),$$

где $\bar{N}(\hat{e}) \subset \theta_E$ и $\bar{N}(\hat{d}) \subset \theta_D$ — системы окрестностей точек $\hat{e}$ и $\hat{d}$ относительно θ_E и θ_D соответственно.

---

[1]) Заметим, что два утверждения, содержащиеся в этой фразе, не эквивалентны. Однако дальнейшее изложение устраняет возникшую возможность разночтений. — *Прим. перев.*

(а) Устойчивость реакции

Понятие устойчивости, введенное в определении 1.1, может быть использовано для получения целого ряда более конкретных понятий устойчивости систем. Например, пусть D будет начальным (или глобальным) объектом состояний C, E — выходным объектом Y, а F — начальной (глобальной) реакцией системы ρ_0 для заданного входного воздействия $\hat{x} \in X$. В этом случае мы приходим к следующему определению:

Определение 1.2. Пусть θ_C и θ_Y — некоторые заданные семейства подмножеств множеств C и Y соответственно. Реакция системы $\hat{y} = \rho_0(\hat{c}_0, \hat{x})$ называется *устойчивой* (относительно θ_C, θ_Y и заданного $\hat{x}$) тогда и только тогда, когда

$$(\forall \alpha \in \bar{N}(\hat{y}))\,(\exists \beta \in \bar{N}(\hat{c}_0))\,(\forall c_0)\,(c_0 \in \beta \Rightarrow \rho_0(c_0, \hat{x}) \in \alpha),$$

где $\bar{N}(\hat{y})$ и $\bar{N}(\hat{c}_0)$ — системы окрестностей $\hat{y}$ и $\hat{c}_0$ соответственно.

Если система S динамическая, то вопрос о ее устойчивости традиционно исследуется в терминах семейства функций перехода состояний. Если у такой системы имеется каноническое представление $(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$, то этот подход совершенно оправдан, поскольку выходная функция λ является статическим отображением и не может влиять на устойчивость системы.

В действительности при подобном подходе (см. [13]) единственная информация о системе, необходимая для выяснения вопроса об устойчивости, заключена в последовательной смене состояний. Другими словами, вся необходимая информация о системе в этом случае может быть представлена в весьма компактном виде, в форме некоторого упорядочения пространства состояний $\Psi \subset C \times C$. Займемся теперь построением такого порядка с помощью семейства функций перехода $\bar{\varphi}$.

Итак, пусть S — некоторая инвариантная во времени динамическая система $(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$ с пространством состояний C, и пусть $Z = C^T$. Для любого $x \in X$ система S задает отношение $\Psi \subset C \times C$, для которого

$$(c, c') \in \Psi \Leftrightarrow (\exists x_{tt'})\,(c' = \varphi_{tt'}(c, x_{tt'})). \qquad (9.1)$$

Это отношение Ψ обладает следующими свойствами. Для любых c, c' и c'' из C

(i) $(c, c) \in \Psi$,

(ii) $(c, c') \in \Psi \,\&\, (c', c'') \in \Psi \Rightarrow (c, c'') \in \Psi$.

Условие (i) вытекает из принятого для функций перехода состояний соглашения о том, что $\varphi_{tt}(c, x_{tt}) = c$, в то время как условие (ii) является следствием инвариантности нашей системы во времени, полноты ее входа и свойства композиции[1]).

Возьмем теперь в качестве C и $\Pi(C)$ соответственно множества D и E из определения 1.1. Пусть $F: C \to \Pi(C)$ таково, что $F(c) = \Psi(c) = \{c': (c, c') \in \Psi\}$. Пусть, наконец, $\theta_D = \theta_E = \theta \subset \Pi(C)$. Тогда определение 1.1 переходит в следующее

Определение 1.3. Состояние $c \in C$ называется *устойчивым относительно* Ψ *и* θ тогда и только тогда, когда

$$(\forall \alpha \in \overline{N}(\Psi(c)))\,(\exists \beta \in \overline{N}(c))\,(\Psi(\beta) \subset \alpha),$$

где $\Psi(\beta) = \bigcup\limits_{c \in \beta} \Psi(c)$, а окрестность множества $\Psi(c)$ определяется обычным образом, т. е. $\overline{N}(\Psi(c)) = \{\alpha: \alpha \in \theta \,\&\, \Psi(c) \subset \alpha\}$.

Хотелось бы еще раз подчеркнуть, что в определении 1.3 система фигурирует лишь в виде порождаемого ею отношения Ψ, обладающего свойствами (i) и (ii), т. е. являющегося отношением предпорядка. Поэтому всякий раз, используя определение 1.3, мы будем говорить об устойчивости предпорядка Ψ и отдавать себе отчет в том, что отношение Ψ определено семейством функций перехода состояний некоторой системы.

В качестве иллюстрации применения определения 1.3 рассмотрим динамическую систему, заданную на евклидовом пространстве с нормированной топологией и семейством окрестностей θ, соответствующим этой топологии. Предположим, что у этой динамической системы нет входных воздействий [2]), т. е. что $\varphi_{0t}: C \to C$ и $\hat{c} \in C$ является равновесным состоянием системы, $\varphi_{0t}(\hat{c}) = \hat{c}$ при любом t. Но тогда определение 1.3 можно интерпретировать следующим образом:

$$(\forall \varepsilon)\,(\exists \delta)\,(\forall c)\,(\| c - c \| < \delta \Rightarrow (\forall t)\,(\| \varphi_{0t}(c) - \hat{c} \| < \varepsilon)).$$

---

[1]) Действительно, пусть $(c, c') \in \Psi$ и $(c', c'') \in \Psi$, т. е. пусть $c' = \varphi_{tt'}(c, x_{tt'})$ и $c'' = \varphi_{ss'}(c', \hat{x}_{ss'})$ для некоторых $x_{tt'}$ и $\hat{x}_{ss'}$. Положим теперь $t'' = (s' - s) + t'$. (Заметим, что, в силу инвариантности во времени системы S, множество моментов времени является линейно упорядоченной абелевой группой.) Но тогда $c'' = \varphi_{t't''}(c', F^{t'-s}(\hat{x}_{ss'}))$, поскольку S инвариантна во времени. Так как

$$x_{tt''} = x_{tt'} \cdot F^{t'-s}(\hat{x}_{ss'}) \in X_{tt''}$$

и

$$c'' = \varphi_{t't''}(c', F^{t'-s}(\hat{x}_{ss'})) =$$
$$= \varphi_{t't''}(\varphi_{tt'}(c, x_{tt'}), F^{t'-s}(\hat{x}_{ss'})) = \varphi_{tt''}(c, x_{tt'} \cdot F^{t'-s}(\hat{x}_{ss'})),$$

то $(c, c'') \in \Psi$.

[2]) Правильнее было бы сказать «существует единственное входное воздействие». — *Прим. перев.*

Это не что иное, как устойчивость по Ляпунову, а следовательно, определение 1.3 является обобщением понятия устойчивости по Ляпунову [1]).

Определение 1.3 можно распространить и на множества, а не только на точки.

Определение 1.4. Для того чтобы множество $C' \subset C$ было *устойчивым относительно* Ψ *и* θ, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\forall\alpha \in \overline{N}(\Psi\,(C')))\ (\exists\beta \in \overline{N}\,(C'))\ (\Psi\,(\beta) \subset \alpha).$$

(b) Устойчивость изолированной траектории [1])

Устойчивость по Ляпунову некоторого заданного элемента $\Psi\,(\hat{c})$ в предыдущем параграфе рассматривалась по отношению к другим элементам $\Psi\,(\beta)$. Но существует и устойчивость другого типа, при которой устойчивость множества $\Psi\,(\hat{c})$ нужно определять относительно самого $\Psi\,(\hat{c})$.

Типичным примером такого рода может служить устойчивость по Пуассону. Пусть динамическая система с фиксированным входным воздействием $\hat{x}$ описывается уравнением $\hat{z}_c\,(t) = \varphi_{0t}\,(c, \hat{x}^t)$. Траектория z_c: $T \to C$ называется *позитивно устойчивой по Пуассону* тогда и только тогда, когда

$$(\exists\hat{t})\ (\forall\alpha \in \overline{N}\,(\hat{z}_c\,(\hat{t})))\ (\forall t)\ (\exists t')\ (t \leqslant t' \Rightarrow \hat{z}_c\,(t') \in \alpha).$$

Например, если $\hat{z}_c\,(t) = \sin ct$, где $c \in E^1$, то $\hat{z}_c$ устойчива в указанном выше смысле для произвольных положительных t.

Приведем еще один пример. Для этого предположим, что некоторая динамическая система S определена на евклидовом пространстве с нормированной топологией и что, более того, для S существует всего одно входное воздействие $\hat{x}$. Пусть $\hat{z}\,(t) = \varphi_{0t}\,(c, \hat{x})$. Тогда классическое понятие устойчивости формулируется следующим образом: траектория $\hat{z}$: $T \to C$ называется *устойчивой* тогда и только тогда, когда

$$(\forall\varepsilon)\ (\exists\hat{t})\ (\forall t)\ (\forall t')\ (\hat{t} \leqslant t \,\&\, \hat{t} \leqslant t' \Rightarrow \|\,\hat{z}\,(t) - \hat{z}\,(t')\,\| < \varepsilon). \qquad (9.2)$$

Условие (9.2) определяет устойчивость относительно самой траектории $\hat{z}$. Но, вообще говоря, классическое понятие устойчивости и устойчивости по Пуассону не совпадают.

Рассмотрим, например, траекторию $\hat{z}\,(t) = 1\,/(1 + t)$. Эта траектория устойчива в смысле определения (9.2), но она не является устойчивой по Пуассону. При определенных же условиях клас-

[1]) См. монографию Немыцкого и Степанова [14].

сическая устойчивость становится устойчивостью по Ляпунову или, иначе говоря, асимптотической устойчивостью.

(c) Структурная устойчивость [1])

Понятие структурной устойчивости связано с «морфологией» системы. Представим себе, что общая система $S \subset X \times Y$ «параметризована» некоторым множеством D в том смысле, что каждому $d \in D$ соответствует некоторый «режим» работы системы. Более того, будем предполагать, что поведение системы можно классифицировать по различным его «типам», т. е. существует некоторая функция

$$P\colon \bar{S} \to E,$$

причем $e = P(S)$ означает, что для $S \in \bar{S}$ характерен тип поведения e, где $\bar{S} = \{S \subset X \times Y\}$. Пусть, кроме того, $R\colon D \to \bar{S}$, а F является композицией функций P и R, т. е. функция $F\colon D \to E$ такова, что

$$e = F(d) = P(R(d)).$$

Обычно система окрестностей точки $e \in E$ считается вырожденной: $\bar{N}(e) = \{\{e\}\}$. Тип поведения $\hat{e} \in E$ называется *структурно устойчивым* в том и только в том случае, когда для каждого $\hat{d} \in D$, такого, что $\hat{e} = F(\hat{d})$,

$$(\exists \beta \in \bar{N}(\hat{d}))\,(\forall d)(d \in \beta \Rightarrow F(d) = \hat{e}).$$

В качестве простого примера рассмотрим следующую динамическую систему:

$$(d^2z/dt^2) + 2d\,(dz/dt) + z = 0.$$

Обычно в зависимости от значения параметра d типы динамического поведения этой системы подразделяют на «передемпфированное» ($= e_1$), «критически демпфированное» ($= e_2$), «недодемпфированное» ($= e_3$), «устойчиво колебательное» ($= e_4$) и «неустойчивое» ($= e_5$). В этом случае

$$F(d) = \begin{cases} e_1, & \text{если } d > 1, \\ e_2, & \text{если } d = 1, \\ e_3, & \text{если } 0 < d < 1, \\ e_4, & \text{если } d = 0, \\ e_5, & \text{если } d < 0. \end{cases}$$

Если теперь в качестве θ_D и θ_E выбрать обычную и дискретную топологии соответственно, то нетрудно видеть, что типы поведения e_1, e_3 и e_5 устойчивы, а остальные — нет.

В заключение сделаем еще одно замечание принципиального характера.

---

[1]) См., например, работу Тома [15].

Устойчивость в этой главе определяется относительно некоторого заданного семейства подмножеств θ. *Если на θ не налагать никаких ограничений, то любую систему можно рассматривать как устойчивую относительно некоторого надлежащим образом выбранного семейства* θ. Однако чаще всего семейство θ задано с самого начала, и вопрос состоит в том, устойчива система относительно этого семейства или нет. Теперь мы собираемся подробно обсудить эту проблему для случая устойчивости множеств, понимаемой в смысле определения 1.4.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ МНОЖЕСТВ ДЛЯ ОБЩИХ СИСТЕМ

Устойчивость можно охарактеризовать с помощью свойств функции F. В этом параграфе мы займемся получением необходимых и достаточных условий устойчивости множеств, введенной в определении 1.4. В связи с этим термин «устойчивость» в этом параграфе будет использоваться исключительно для обозначения этого понятия.

(а) Предварительные соображения

В § 1 уже отмечалось, что семейство подмножеств $\theta \subset \Pi(C)$ приходится вводить только для того, чтобы оценивать изменения, происходящие в C. Теперь же мы собираемся усилить это понятие, определив понятие обобщенной метрики. Это позволит в дальнейшем ввести функции Ляпунова и охарактеризовать устойчивость систем в терминах существования подобной функции.

Определение 2.1. Пусть даны множество C, семейство его подмножеств $\theta \subset \Pi(C)$ и полная решетка W с наименьшим элементом 0. Пусть для каждого c определено такое подмножество $W_c \subset W$, что существует функция $\rho\colon C \times C' \to W$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $\rho(c, c') \geqslant 0$ и $\rho(c, c) = 0$;

(ii) $\rho(c, c') = \rho(c', c)$;

(iii) $\rho(c, c'') \leqslant \rho(c, c') \vee \rho(c', c'')$;

(iv) определим множество $S(c, w) = \{c'\colon \rho(c, c') \leqslant w\}$; тогда $\{S(c, w)\colon w \in W_c\}$ образует базу элемента $c \in C$ в том смысле, что

$$(\alpha)\ (\forall w \in W_c)\,(S(c, w) \in \theta),$$

$$(\beta)\ (\forall \alpha \in \theta)\,(c \in \alpha \Rightarrow (\exists w \in W_c)\,(c \in S(c, w) \subset \alpha)).$$

Функция ρ называется *обобщенной псевдометрикой* относительно θ, а если W_c при каждом c является еще и подрешеткой, то ρ называется *обобщенной метрикой* (или *расстоянием*).

Теперь мы докажем наш основной результат.

Предложение 2.1. Пусть C — произвольное множество, а θ — некоторое семейство подмножеств множества C. Тогда для (C, θ) существует обобщенная псевдометрика ρ.

Доказательство. Пусть $\theta = \{\alpha_i\colon i \in I\}$, где I — множество индексов для θ, и пусть $W = \{0, 1\}^I = \{w\colon I \to \{0, 1\}\}$. Если теперь на W определить отношение порядка $\leqslant$, положив $w \leqslant w' \Leftrightarrow (\forall i)\,(w(i) \leqslant w'(i))$, где $0 < 1$, то W оказывается полной решеткой с наибольшим элементом 1, где $1(i) = 1$ для любых $i \in I$, и наименьшим элементом 0, где $0(i) = 0$ для любых $i \in I$. Пусть теперь $\rho\colon C \times C \to W$таково, что

$$\rho(c, c') = w \Leftrightarrow w(i) = \begin{cases} 1, \text{ если } (c \in \alpha_i \& c' \notin \alpha_i) \vee (c \notin \alpha_i \& c' \in \alpha_i), \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

а $w_i \in W$ удовлетворяет условию

$$w_i(j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим $W_c = \{w_i\colon c \in \alpha_i \& i \in I\}$. Тогда можно показать, что условия (i) — (iv) оказываются выполненными.

Условие (i). Очевидно, что $\rho(c, c') \geqslant 0$, а так как невозможно, чтобы $c \in \alpha_i \& c \notin \alpha_i$, то $\rho(c, c) = 0$.

Условие (ii). Пусть $\rho(c, c') = w$ и $\rho(c', c) = w'$. Тогда для любого $i \in I$

$$w(i) = 1 \Leftrightarrow (c \in \alpha_i \& c' \notin \alpha_i) \vee (c \notin \alpha_i \& c' \in \alpha_i) \Leftrightarrow w'(i) = 1$$

и, следовательно, $\rho(c, c') = \rho(c', c)$.

Условие (iii). Пусть $\rho(c, c') = w$, $\rho(c', c'') = w'$ и $\rho(c, c'') = w''$. Тогда для любых $i \in I$

$$w''(i) = 1 \Rightarrow (c \in \alpha_i \& c'' \notin \alpha_i) \vee (c \notin \alpha_i \& c'' \in \alpha_i) \Rightarrow w(i) = 1 \vee w'(i) = 1$$

и, значит, $\rho(c, c'') \leqslant \rho(c, c') \vee \rho(c', c'')$.

Условие (iv). (α) Выберем произвольное $w_i \in W_c$. Нам нужно показать, что $\rho(c, c') \leqslant w_i \Leftrightarrow c' \in \alpha_i$. Предположим, что $\rho(c, c') = w'$. Если $c' \in \alpha_i$, то $w'(i) = 0$ и, следовательно, $w' \leqslant w_i$. Если же $c' \notin \alpha_i$, то $w'(i) = 1$ и, значит, неверно, что $w' \leqslant w_i$. Поэтому $S(c, w_i) = \alpha_i \in \theta$. ($\beta$) Выберем произвольное $\alpha_i \in \theta$. Если $c \in \alpha_i$, то $w_i \in W_c$. Но тогда $c \in S(c, w_i) = \alpha_i$, ч. т. д.

Очевидно, обобщенная метрика, построенная в процессе доказательства предложения 2.1, формализует интуитивное представление о том, что изменение при переходе от состояния c в состояние c' меньше, чем при переходе из c в c'', если $(\forall\alpha \in \theta)(c \in \alpha \& c'' \in \alpha \Rightarrow c' \in \alpha)$.

Рассмотрим теперь вопрос о характеризации устойчивости с помощью обобщенных метрик. Пусть C' будет некоторым подмножеством множества C, а θ — некоторым подмножеством множества $\Pi(C)$. Обозначим $\{\alpha: \alpha \in \theta \& C' \subset \alpha\}$ через $\overline{N}(C')$. Тогда справедливо следующее следствие:

Следствие 2.1. Пусть C' — некоторое подмножество множества C, а θ — некоторое подмножество множества $\Pi(C)$, и пусть $\rho: C \times C \to W$ — обобщенная псевдометрика, построенная в процессе доказательства предложения 2.1. Пусть $\rho(C', c) = \inf\limits_{c' \in C'} \rho(c', c)$. Тогда для C' существует подмножество $W_{c'} \subset W$, удовлетворяющее следующим условиям:

(a) $\rho(C', c) \geqslant 0$ и, если $c \in C'$, то $\rho(C', c) = 0$;
(b) $\rho(C', c'') \leqslant \rho(C', c') \vee \rho(c', c'')$;
(c) $(\forall w)(w \in W_{c'} \Rightarrow S(C', w) \in \overline{N}(C'))$;
(d) $(\forall\alpha \in \overline{N}(C'))(\exists w \in W_{c'})(C' \subset S(C', w) \subset \alpha)$.

Доказательство. Пусть $W_{c'} = \bigcap\limits_{c \in C'} W_c$. Покажем, что при таком определении $W_{c'}$ все условия (a) — (d) оказываются выполненными.

Условие (a). Очевидно, что $\rho(C', c) \geqslant 0$. Если же $c \in C'$, то $\rho(C', c) \leqslant \rho(c, c) = 0$ и, значит, $\rho(C', c) = 0$.

Условие (b). Для любого $c \in C'$ справедливо неравенство $\rho(c, c'') \leqslant \rho(c, c') \vee (\rho(c', c'')$. Поэтому для любого $c \in C'$ справедливы и неравенства

$$\rho(C', c'') \leqslant \rho(c, c'') \leqslant \rho(c, c') \vee \rho(c', c''),$$

откуда следует, что $\rho(C', c'') \leqslant \rho(C', c') \vee \rho(c', c'')$.

Условие (c). Если $w \in W_{c'}$, то $w(i)$ принимает значение 1 для всех $i \in I$, за исключением одной точки, в которой $w(i) = 0$, и $\alpha_i \in \overline{N}(C')$. Но это значит, что $S(C', w) = \{c: \rho(C', c) \leqslant w\} = \alpha_i \in \overline{N}(C')$, где $w(i) = 0$.

Условие (d). Если $\alpha_i \in \overline{N}(C')$, то $w_i \in W_{c'}$ и, следовательно, $C' \subset S(C', w_i) = \alpha_i$, ч. т. д.

(b) Основная теорема[1])

Теперь мы можем, используя следствие 2.1, получить необходимые и достаточные условия устойчивости, не вводя никаких дополнительных структур.

[1]) См. Есии [20].

Обозначим для этого отношение предпорядка в C через Ψ, и пусть N — произвольное частично упорядоченное множество, а N^+ — некоторое его фиксированное подмножество. Тогда можно ввести (см. [13]) следующее

Определение 2.2. Функция $f\colon C \to N$ называется *функцией Ляпунова* для подмножества $C^* \subset C$ тогда и только тогда, когда

(i) $(\forall c)(\forall c')[(c, c') \in \Psi \Rightarrow f(c) \geqslant f(c')]$;

(ii) $(\forall n)(\exists \alpha)(\forall c)[n \in N^+ \& C^* \subset \alpha \& c \in \alpha \Rightarrow f(c) \leqslant n]$;

(iii) $(\forall \alpha)(\exists n)(\forall c)\ [n \in N^+ \& \Psi(C^*) \subset \alpha \& f(c) \leqslant n \Rightarrow c \in \alpha]$.

Теорема 2.1. Пусть C — некоторое абстрактное множество, Ψ — отношение предпорядка в C, а θ — произвольное семейство подмножеств из C. Подмножество C^* является устойчивым относительно θ и Ψ тогда и только тогда, когда существует некоторая функция Ляпунова $f\colon C \to N$.

Доказательство. Начнем с доказательства достаточности. Выберем произвольное $\alpha \in \overline{N}(\Psi(C^*))$. Тогда, согласно условию (iii), для некоторого $\hat{n} \in N^+$ справедливо включение $\{c\colon f(c) \leqslant \hat{n}\} \subset \alpha$. Но в силу условия (ii) для $\hat{n}$ должно существовать такое $\beta \in \overline{N}(C^*)$, что $\beta \subset \{c\colon f(c) \leqslant \hat{n}\} \subset \alpha$. Более того, из условия (i) следует, что если $f(c) \leqslant \hat{n}$ и $(c, c') \in \Psi$, то $f(c') \leqslant \hat{n}$. Поэтому $\Psi(\beta) \subset \{c\colon f(c) \leqslant \hat{n}\} \subset \alpha$, и, следовательно, множество C^* устойчиво.

Перейдем теперь к доказательству необходимости. Пусть $N = W$, $N^+ = W_{\hat{C}}$, где $\hat{C} = \Psi(C^*)$ и $f(c) = \sup\limits_{c' \in \Psi(c)} \rho(\hat{C}, c')$, где W, $W_{\hat{C}}$ и ρ определены в следствии 2.1. Покажем тогда, что условия (i) — (iii) выполнены.

Условие (i). Поскольку $f(c) = \sup\limits_{c' \in \Psi(c)} \rho(\hat{C}, c')$ и Ψ транзитивно, условие (i), очевидно, выполнено.

Условие (ii). Выберем произвольное $n \in N^+$. Поскольку $\hat{C} \subset S(\hat{C}, n) \in \overline{N}(\hat{C})$ в силу следствия 2.1 и поскольку C^* устойчиво, всегда найдется такое $\alpha \in \overline{N}(C^*)$, что $\Psi(\alpha) \subset S(\hat{C}, n)$, т. е.

$$(\forall c)(\forall c')(c \in \alpha \& (c, c') \in \Psi \Rightarrow \rho(\hat{C}', c') \leqslant n).$$

Условие (iii). Выберем произвольное $\alpha \in \overline{N}(\hat{C})$. Тогда, согласно следствию 2.1, существует такое $n \in N^+$, что $\hat{C} \subset S(\hat{C}, n) \subset \alpha$. Если $f(c) \leqslant n$, то

$$n \geqslant f(c) = \sup_{c' \in \Psi(c)} \rho(\hat{C}, c') \geqslant \rho(\hat{C}, c),$$

откуда $c \in S(\hat{C}, n) \subset \alpha$, ч. т. д.

Во многих случаях устойчивость по Ляпунову исследуется относительно некоторого инвариантного множества C^*, т. е. множества, для которого $C^* = \Psi(C^*)$. Если C^* инвариантно, то определение 1.4 можно переформулировать следующим орбазом.

Инвариантное множество $C^* \subset C$ *устойчиво относительно* Ψ *и* θ тогда и только тогда, когда

$$(\forall\alpha \in \bar{N}(C^*))\,(\exists\beta \in \bar{N}(C^*))\,(\Psi(\beta) \subset \alpha).$$

Другими словами, если C^* не является инвариантным множеством, в качестве α выбирается некоторая окрестность множества $\Psi(C^*)$, но, если C^* инвариантно, эту роль может сыграть и окрестность множества C^*. В связи с этим для инвариантных множеств можно переформулировать определение функции Ляпунова:

Определение 2.3. Функция f: $C \to N$ называется *функцией Ляпунова* для инвариантного множества $C^* \subset C$ тогда и только тогда, когда

(i) $(\forall c)\,(\forall c')\,((c, c') \in \Psi \Rightarrow f(c) \geqslant f(c'))$;

(ii) $(\forall n)\,(\exists\alpha)\,(\forall c)\,(n \in N^+ \,\&\, C^* \subset \alpha \,\&\, c \in \alpha \Rightarrow f(c) \leqslant n)$;

(iii) $(\forall\alpha)\,(\exists n)\,(\forall c)\,(n \in N^+ \,\&\, C^* \subset \alpha \,\&\, f(c) \leqslant n \Rightarrow c \in \alpha)$.

Разница между определениями 2.2 и 2.3 состоит в том, что в условии (iii) определения 2.2 множество α содержит $\Psi(C^*)$, а в определении 2.3 — лишь C^*. Что же касается теоремы 2.1, то она сохраняет свою силу и для определения 2.3.

Следствие 2.2. Пусть C — некоторое абстрактное множество, Ψ — отношение предпорядка на C, а θ — произвольное семейство подмножеств множества C. Инвариантное множество $C^* \subset C$ является устойчивым относительно θ и Ψ тогда и только тогда, когда существует функция Ляпунова f: $C \to N$, удовлетворяющая определению 2.3.

(с) Применение основной теоремы

Подчеркнем еще раз, что множество C не было снабжено никакой дополнительной структурой, кроме той, которая порождается произвольным семейством подмножеств θ. Поэтому теорему 2.1 можно распространить на большое число частных случаев, получающихся в результате введения дополнительных структур на основных множествах и связанных с ними функциях. Интересно отметить, что основное структурное свойство функций Ляпунова, а также необходимые и достаточные условия устойчивости уловлены в определении 2.2 и теореме 2.1. Последняя теорема непосредственно переносится и на более конкретные системы, а для того, чтобы продемонстрировать справедливость необходимых и достаточных условий для любого частного случая, достаточно убедиться в том, что введение дополнительных структур не приводит к нарушению основных условий. Легко видеть, что утверждения теоремы 2.1 сохраняют свою силу и тогда, когда θ определяет топологию, т. е. удовлетворяет следующим условиям:

(i) $C \in \theta$ и пустое множество $\varnothing \in \theta$.

(ii) Объединение любого числа элементов из θ также принадлежит θ.

(iii) Пересечение любого конечного числа элементов из θ также является элементом θ.

Поэтому справедливо следующее следствие:

Следствие 2.3. Пусть C — топологическое пространство, $C^* \subset C$, а Ψ — отношение предпорядка в C. Множество C^* является устойчивым тогда и только тогда, когда существует функция Ляпунова $f\colon C \to N$.

В заключение рассмотрим проблему устойчивости в метрическом пространстве (см. [16]). Метрическое пространство представляет особый интерес по двум причинам. Во-первых, метрическое пространство дает возможность проиллюстрировать идею, лежащую в основе понятия обобщенной метрики. Поскольку построение функции Ляпунова базируется на понятии обобщенной метрики, эта идея построения функции Ляпунова может быть, очевидно, использована и для метрического пространства. Во-вторых, область значений функции Ляпунова, вообще говоря, существенно сложнее, чем у обычной скалярной функции. Однако в том случае, когда C — метрическое пространство, удается построить функцию Ляпунова, принимающую значения на вещественной оси (точнее говоря, на неотрицательной вещественной полуоси).

Итак, пусть C — метрическое пространство с метрикой $\rho\colon C \times C \to R$ и с порожденной этой метрикой топологией θ. Для подмножества $C' \subset C$ определим

$$\rho(C', c) = \inf_{c' \in C'} \rho(c', c),$$
$$S(C', \varepsilon) = \{c\colon \rho(C', c) < \varepsilon\}.$$

Тогда, если $W_{c'} = R^+$, где R^+ — множество положительных вещественных чисел, то, очевидно, справедливы следующие факты:

(i) $\rho(C', c) \geqslant 0$ и, если $c \in C'$, то $\rho(C', c) = 0$;

(ii) $(\forall w)(w \in W_{c'} \Rightarrow S(C', w) \in \bar{N}(C'))$,

где $\bar{N}(C')$ — все семейство открытых множеств, содержащее и C'. Более того, если C' компактно, то справедлив также следующий факт:

$$\text{(iii)} \qquad (\forall \alpha \in \overline{N}(C'))\,(\exists w \in W_{\bullet})\,(C' \subset S(C', w) \subset \alpha).$$

На самом деле, если утверждение (iii) ложно, то для любого n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ найдется $c_n \in S(C', 1/n) \cap (C \setminus \alpha)$. А так как $c_n \in S(C', 1/n)$, то существует и такое $\hat{c}_n \in C'$, что $\rho(c_n, \hat{c}_n) < 2/n$. Поскольку C' компактно, последовательность $\{\hat{c}_n\}$ должна иметь предельную точку $\hat{c}_0 \in C'$. Для простоты предположим, что $\{\hat{c}_n\}$ сходится к $\hat{c}_0$. Но тогда

$$\rho(c_n, \hat{c}_0) \leqslant \rho(c_n, \hat{c}_n) + \rho(\hat{c}_n, \hat{c}_0) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

а это противоречит утверждению, что $c_n \in C \setminus \alpha$.

Доказательство теоремы 2.1 свидетельствует о том, что существование функции Ляпунова, гарантирующей устойчивость множества C^*, где $C' = \Psi(C^*)$, определяется как раз этими тремя условиями и подсказывает построение функции Ляпунова $f\colon C \to R^+ \cup \{0\}$ вида

$$f(c) = \sup_{c' \in \Psi(c)} \rho(\Psi(C^*), c'),$$

а в случае инвариантных множеств C^* вида

$$f(c) = \sup_{c' \in \Psi(c)} \rho(C^*, c').$$

Это позволяет нам сформулировать следующую теорему:

Теорема 2.2. Пусть (C, θ) — метрическое пространство, C^* — некоторое компактное подмножество из C, а Ψ — некоторое отношение предпорядка в C. Множество C^* устойчиво относительно θ и Ψ в том и только в том случае, когда существует функция Ляпунова $f\colon C \to R^+ \cup \{0\}$, где R^+ — множество положительных вещественных чисел и $N^+ = R^+$.

Доказательство достаточности очевидно. Что же касается необходимости, то требуется проявить определенную осторожность при доказательстве справедливости условия (iii). В настоящем случае из $n \geqslant \rho(\hat{C}, c)$ еще не следует, что $c \in S(\hat{C}, n)$. Однако из существования такого n', $0 < n' < n$, что $\hat{C} \subset S(\hat{C}, n') \subset S(\hat{C}, n) \subset \alpha$, вытекает, что $n' \geqslant \rho(\hat{C}, c)$, откуда $c \in S(\hat{C}, n) \subset \alpha$, ч. т. д.

Глава X

СОЕДИНЕНИЯ, ДЕКОМПОЗИЦИЯ И АВТОНОМНОСТЬ

Одной из важных областей применения общей теории систем являются исследования крупномасштабных, больших систем. В этих применениях весьма существенно иметь возможность рассматривать систему как некоторое семейство индивидуально воспринимаемых и взаимосвязанных подсистем. Именно так и определяют во многих случаях на практике так называемый системный подход, и с этих позиций вся теория систем, интересующаяся системой как некоторой неделимой целостностью, рассматривается лишь как необходимая предпосылка для дальнейшего изучения крупномасштабных и сложных задач, представляющих настоящий интерес.

В этой главе нас будут интересовать различные вопросы, связанные с взаимодействием подсистем, соединение которых и образует систему в целом, а целью этих исследований будет закладка фундамента для нового развития теории систем, нацеленного на применение в сложных и крупномасштабных ситуациях.

Для того чтобы продемонстрировать широту возможных приложений этого подхода, здесь рассматриваются некоторые частные задачи двух совершенно разных направлений исследования. Опираясь на понятие управляемости, мы выводим условия автономности многомерных систем с помощью обратных связей как для общего, так и для линейного случая. В то же время решается и задача декомпозиции конечных систем с дискретным временем, приводящая к более простым подсистемам специального вида.

1. ОПЕРАТОРЫ СОЕДИНЕНИЯ

Соединение двух или нескольких систем — это очень простая операция. Она требует лишь соединить выход одной системы с входом другой или подать один и тот же входной сигнал на две системы. На практике это может означать, например, не более чем соответствующую «перепайку проводов». К сожалению, формализация этого простого понятия наталкивается на определенные трудности главным образом из-за возникающей при этом «бухгалтерии», т. е. необходимости в явном виде и строго зафиксировать, что соединено с чем, а на самом деле и что соединилось в действительности. И чтобы не увязнуть в попытках формулировки чрезмерно педантичных определений, мы сразу введем понятие класса соединяемых систем, а затем уже на нем определим различные операции соединения.

Для любого объекта $V_i = V_{i1} \times \ldots \times V_{in}$ договоримся обозначать через $\overline{V}_i$ семейство компонентных множеств V_i, $\overline{V}_i = \{V_{i1}, \ldots, V_{in}\}$. Пусть теперь $S_i \subset X_i \times Y_i$ — общая система с объектами

$$X_i = \times \{X_{ij}\colon j \in I_{xi}\}, \qquad Y_i = \times \{Y_{ij}\colon j \in I_{yi}\}.$$

В общем случае некоторые, но далеко не все компонентные множества X_i могут служить для реализации соединений. Обозначим через Z_{xi} декартово произведение таких компонентных множеств, так что запись $X_{ij} \in \overline{Z}_{x_i}$ будет обозначать, что X_{ij} есть компонента декартова произведения X_i и может служить для соединения. Обозначим затем через $\overline{X}_i^*$ семейство компонентных множеств X_i, не принадлежащих Z_{x_i}, $\overline{X}_i^* = \{X_{ij}\colon X_{ij} \in \overline{X}_i$ и $X_{ij} \notin \overline{Z}_{x_i}\}$, а через X_i^* — декартово произведение множеств из $\overline{X}_i^*$, $X_i^* = \times \{X_{ij}\colon X_{ij} \in \overline{X}_i^*\}$. Теперь мы можем представить входной объект системы S_i как произведение двух составных компонент: $X_i = X_i^* \times Z_{x_i}$. По аналогии обозначим через Z_{y_i} декартово произведение выходных компонент, которые могут участвовать в соединении. Теперь из каждой данной системы $S_i \subset X_i \times Y_i$ можно образовать, вообще говоря, много «разных» соединяемых систем $S_{iz} \subset (X_i^* \times Z_{x_i}) \times (Y_i^* \times Z_{y_i})$, отличающихся друг от друга выбором Z_{x_i} и Z_{y_i}. Взаимосвязь между системами S_i, определенными над X_i и Y_i, и системами S_{iz}, определенными над X_i^*, Z_{x_i}, Y_i^* и Z_{y_i}, очевидна. В обоих случаях мы в сущности имеем дело с одинаковыми системами, отличающимися одна от другой только возможностями соединений.

Определим в связи с этим класс соединяемых систем

$$\overline{S}_z = \{S_{iz}\colon S_{iz} \subset (X_i^* \times Z_{x_i}) \times (Y_i^* \times Z_{y_i})\}$$

и введем в нем некоторые операции соединения.

Определение 1.1. Пусть операция $\circ : \overline{S}_z \times \overline{S}_z \Rightarrow \overline{S}_z$ такова, что $S_1 \circ S_2 = S_3$, если [1])

---

[1]) Для того чтобы это и все последующие определения соединений действительно однозначно определяли систему, необходимо дополнительно договориться, что в системах, получаемых в результате соединений, для дальнейших соединений остаются лишь Z-компоненты объектов, не помеченных звездочками. — *Прим. перев.*

$$S_1 \subset X_1 \times (Y_1^* \times Z_{x_1}), \qquad S_2 \subset (X_2^* \times Z_{y_2}) \times Y_2,$$
$$S_3 \subset (X_1 \times X_2^*) \times (Y_1^* \times Y_2), \qquad Z_{x_1} = Z_{y_2} = Z;$$

и

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in S_3 \Leftrightarrow (\exists z)\,((x_1, (y_1, z)) \in S_1 \,\&\, ((x_2, z), y_2) \in S_2).$$

Тогда операция $\circ$ называется *каскадным соединением* (или *каскадной соединяющей операцией.*)

Определение 1.2. Пусть операция $+ : \overline{S}_z \times \overline{S}_z \to \overline{S}_z$ такова, что $S_1 + S_2 = S_3$ означает следующее:

$$S_1 \subset (X_1^* \times Z_{x_1}) \times Y_1, \qquad S_2 \subset (X_2^* \times Z_{x_2}) \times Y_2,$$
$$S_3 \subset (X_1^* \times X_2^* \times Z) \times (Y_1 \times Y_2), \qquad Z_{x_1} = Z_{x_2} = Z$$

и

$$((x_1, x_2, z), (y_1, y_2)) \in S_3 \Leftrightarrow ((x_1, z), y_1) \in S_1 \& ((x_2, z), y_2) \in S_2.$$

Тогда операцию $+$ называют *параллельным соединением* (или *параллельной соединяющей операцией*).

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{F}$ — отображение $\mathcal{F}: \overline{S}_z \to \overline{S}_z$, такое, что $\mathcal{F}(S_1) = S_2$, где $S_1 \subset (X^* \times Z_x) \times (Y^* \times Z_y)$, а $S_2 \subset X^* \times Y^*$, $Z_x = Z_y = Z$ и

$$(x, y) \in S_2 \Leftrightarrow (\exists z)\,(((x, z), (y, z)) \in S_1).$$

Тогда отображение $\mathcal{F}$ называется *замыканием обратной связи* (или *операцией замыкания обратной связи*) [1]).

Несколько примеров использования операторов соединения приведены на рис. 1.1. Следует отметить, что эти операторы можно было бы определить и другими способами. Например, вместо того, чтобы определять замыкание обратной связи для одиночной системы и соединять ее выход с входом, как показано на рис. 1.1, можно было бы предположить, что в цепи обратной связи должна быть еще одна подсистема, как показано на рис. 1.2. Однако три основные операции, введенные в определениях 1.1—1.3, исчерпывают в различных комбинациях большинство интересных случаев, и в этом смысле их можно рассматривать как примитивные. Например, соединение, изображенное на рис. 1.2, как следует из рис. 1.3, можно представить в виде $\mathcal{F}(S_1 \circ S_2)$.

Обратите внимание на то, что операции $\circ$, $+$ и $\mathcal{F}$ определены выше как частичные функции. И хотя сделать их полными можно, для простоты мы не будем здесь заниматься этим.

---

[1]) Заметим, что, согласно примечанию на стр. 202, определенная подобным образом система, получающаяся в результате замыкания обратной связи, не может соединяться ни с какой другой системой. Чтобы избежать этого, определение 1.3 пришлось бы модифицировать, введя «условный» оператор $\mathcal{F}_Z$, действующий на системы с входными и выходными объектами $X^* \times \hat{Z}_X \times Z$ и $Y^* \times \hat{Z}_Y \times Z$ соответственно. — *Прим. перев.*

Если операция $(S_1 \circ S_2) \circ S_3$ определена, то справедливо равенство $(S_1 \circ S_2) \circ S_3 = S_1 \circ (S_2 \circ S_3)$. В действительности, если S_1, S_2

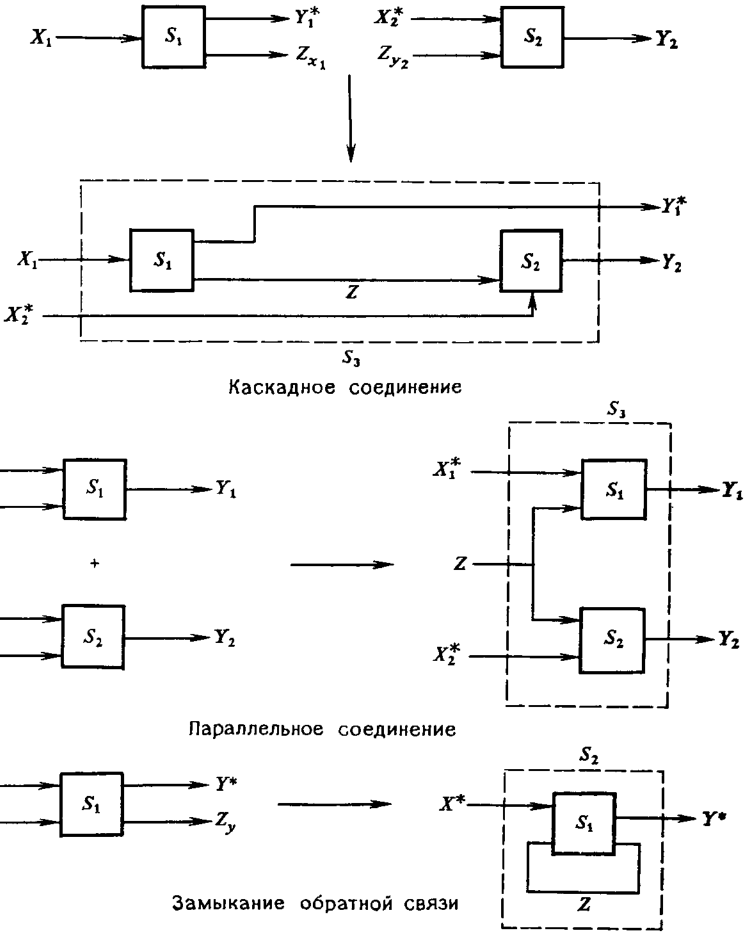


Рис. 1.1.

и S_3 определяются следующим образом:

$$S_1 \subset X_1 \times (Y_1^* \times Z_{y_1}),$$
$$S_2 \subset (X_2^* \times Z_{x_2}) \times (Y_2^* \times Z_{y_2}),$$
$$S_3 \subset (X_3^* \times Z_{x_3}) \times Y_3,$$
$$Z_{y_1} = Z_{x_2} = Z \text{ и } Z_{y_2} = Z_{x_3} = Z',$$

то

$$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in (S_1 \circ S_2) \circ S_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists z)\,(\exists z')\,((x_1, y_1, z) \in S_1 \,\&\, (x_2, z, y_2, z') \in S_2 \,\&\, (x_3, z', y_3) \in S_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in S_1 \circ (S_2 \circ S_3).$$

Аналогично,

$$(S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3),$$

если определены обе части этого равенства.

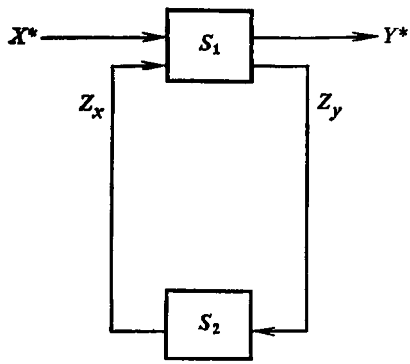


Рис. 1.2.

У операции $\circ$ нет единичного элемента. Однако единичные элементы можно определить и для входного, и для выходного

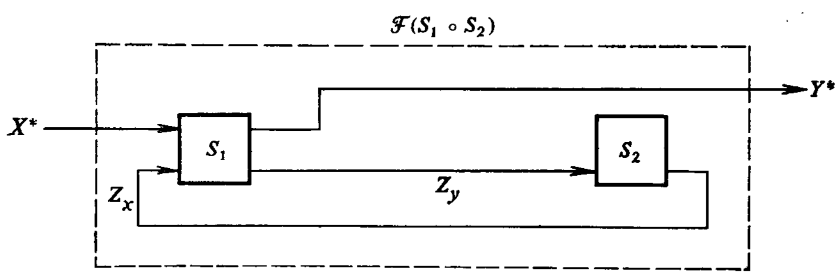


Рис. 1.3.

объектов: $I_x \subset X \times X$, $I_x = \{(x, x)\colon x \in X\}$ и $I_y \subset Y \times Y$, $I_y = \{(y, y)\colon y \in Y\}$. Это позволяет для любой заданной системы $S \subset X \times Y$ определить ее левую ${}^{-1}S \subset Y \times X$ и правую $S^{-1} \subset Y \times X$ обратные системы, потребовав, чтобы

$${}^{-1}S \circ S = I_y \text{ и } S \circ S^{-1} = I_x.$$

Назовем функцию f, определенную на некотором семействе подмножеств X_i множества X *функцией выбора*, если $f(X_i) \subset X_i$. Тогда мы сразу приходим к следующим очевидным утверждениям:

Предложение 1.1. Для системы $S \subset X \times Y$ существует правая обратная система $S^{-1} \subset Y \times X$ в том и только в том случае, когда найдется такая функция выбора f: $\{S(x): x \in \mathscr{D}(S)\} \to \mathscr{R}(S)$, что $\{f(S(x))\} \cap S(x') = \varnothing$ при любых $x' \neq x$, где $S(x) = \{y: (x, y) \in S\}$.

Предложение 1.2. Пусть $Y = \mathscr{R}(S)$. Тогда для существования у системы $S \subset X \times Y$ левой обратной системы ${}^{-1}S \subset Y \times X$ необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая функция выбора f: $\{(y)S: y \in \mathscr{R}(S)\} \to \mathscr{D}(S)$, что $\{f((y)S)\} \cap (y')S = \varnothing$ для любого $y' \neq y$, где $(y)S = \{x: (x, y) \in S\}$.

Роль единичного элемента для операции $+$ играет пустая система $\varnothing$. Три рассмотренные операции взаимосвязаны. Например, $\mathscr{F}(S_1 \circ S_2) = \mathscr{F}(S_2 \circ S_1)$, если только обе части этого равенства имеют смысл.

Рассмотрим теперь, как меняются некоторые свойства подсистем в результате их соединения. И прежде всего обратимся к вопросу о неупреждаемости. В этом плане важное значение имеет следующее предложение:

Предложение 1.3. Если системы $S_1 \subset X_1 \times (Y_1 \times Z)$ и $S_2 \subset (X_2 \times Z) \times Y_2$ неупреждающие, то неупреждающей является и система $S_3 = S_1 \circ S_2$.

Доказательство. Пусть $(y_1, z) = (\rho_{1y}(c_1, x_1), \rho_{1z}(c_1, x_1))$ и $y_2 = \rho_2(c_2, (x_2, z))$ задают неупреждающие представления в пространстве глобальных состояний. Предположим, что $(x_1, x_2) \mid \overline{T}^t = (x_1', x_2') \mid \overline{T}^t$. Тогда $y_1 \mid \overline{T}^t = y_1' \mid \overline{T}^t$ и $z \mid \overline{T}^t = z' \mid \overline{T}^t$, где $(y_1', z') = (\rho_{1y}(c_1, x_1'), \rho_{1z}(c_1, x_1'))$, и, следовательно, $y_2 \mid \overline{T}^t = y_2' \mid \overline{T}^t$, где $y_2' = \rho_2(c_2, (x_2', z'))$. Значит, система $S_1 \circ S_2$ является неупреждающей, ч. т. д.

Предложение 1.4. Если системы $S_1 \subset (X_1 \times Z) \times Y$ и $S_2 \subset (X_2 \times Z) \times Y$ неупреждающие, то неупреждающей будет и система $S_3 = S_1 + S_2$.

Предложение 1.5. Предположим, что система $S \subset (X \times Z) \times (Y \times Z)$ неупреждающая и такая, что $(y, z') = (\rho_y(c, x, z), \rho_z(c, x, z))$ — неупреждающая реакция системы. Тогда, если уравнение $z \mid \overline{T}^t = \rho_z(c, x, z) \mid \overline{T}^t$ при любых (c, x) и t имеет единственное решение относительно $z \mid \overline{T}^t$, то неупреждающей будет и система $\mathscr{F}(S)$.

Доказательство. Согласно определению операции $\mathscr{F}(S)$,

$$(x, y) \in \mathscr{F}(S) \Leftrightarrow (\exists z)(((x, z), (y, z)) \in S) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists z)(\exists c)(y = \rho_y(c, x, z) \& z = \rho_z(c, x, z)).$$

Так как уравнение $z = \rho_z(c, x, z)$ при любом (c, x) имеет относительно z единственное решение, обозначим его через $\varphi(c, x)$,

$z = \varphi(c, x) \Leftrightarrow z = \rho_z(c, x, z)$. Тогда

$$(x, y) \in \mathscr{F}(S) \Leftrightarrow (\exists c)(y = \rho_y(c, x, \varphi(c, x))).$$

Пусть теперь $\rho(c, x) = \rho_y(c, x, \varphi(c, x))$. Если реакция $\rho(c, x)$ неупреждающая, то утверждение теоремы получается без труда. Пусть $\hat{x} \mid \overline{T}^t = \hat{x}' \mid \overline{T}^t$, $\hat{z} = \rho_z(c, \hat{x}, \hat{z})$ и $\hat{z}' = \rho_z(c, \hat{x}', \hat{z}')$. В силу неупреждаемости ρ_z, мы имеем $\rho_z(c, \hat{x}', \hat{z}) \mid \overline{T}^t = \rho_z(c, \hat{x}, \hat{z}) \mid \overline{T}^t$. Но тогда $\varphi(c, \hat{x}') \mid \overline{T}^t = \varphi(c, \hat{x}) \mid \overline{T}^t$. Так как реакция ρ_y неупреждающая, то справедливо и равенство $\rho(c, \hat{x}) \mid \overline{T}^t = \rho(c, \hat{x}') \mid \overline{T}^t$. ч. т. д.

В качестве примера использования предложения 1.5 рассмотрим систему, схематически изображенную на рис. 1.4 и описываемую соотношением

$$((x, z), (y, z')) \in S \Leftrightarrow (\exists y(0))\left(y(t) = z'(t) = y(0) + \int_0^t (x+z)\, dt\right).$$

Реакция этой системы в пространстве глобальных состояний имеет тогда следующий вид:

$$\rho_z(c, x, z) = z' \Leftrightarrow z'(t) = c + \int_0^t (x + z)\, dt,$$

а значит, уравнение $z \mid \overline{T}^t = \rho_z(c, x, z) \mid \overline{T}^t$ имеет единственное решение $z \mid \overline{T}^t$ при любых (c, x) и t.

Поэтому, согласно предложению 1.5, эта система должна остаться неупреждающей и после того, как будет замкнута обратная связь. В этом нетрудно убедиться, если заметить, что после замыкания обратной связи система должна описываться соотношением

$$(x, y) \in \mathscr{F}(S) \Leftrightarrow (\exists z)(((x, z), (y, z)) \in S) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists z)(\exists y(0))\left(y(t) = z(t) = y(0) + \int_0^t (x+z)\, dt\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow dy/dt = x + y.$$

Все три операции соединения сохраняют линейность системы. Напомним, что линейные системы определяются на линейных пространствах.

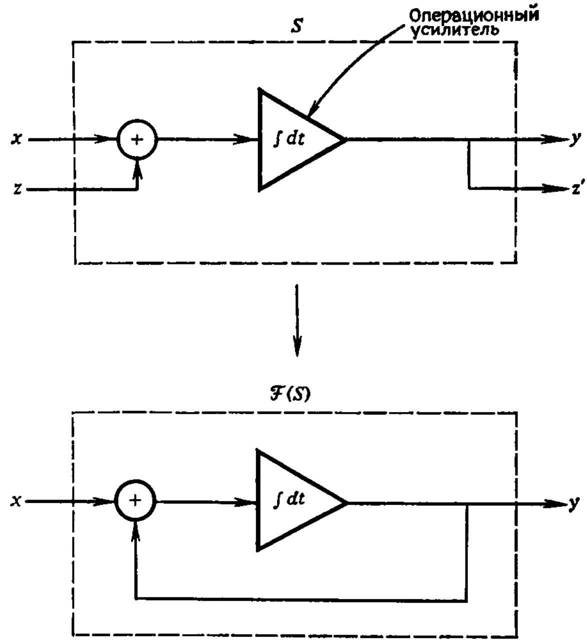


Рис. 1.4

Предложение 1.6. Предположим, что системы S_1 и S_2 линейные. Тогда системы $S_1 \circ S_2$, $S_1 + S_2$ и $\mathscr{F}(S_1)$ тоже будут линейными, если только они определены.

Доказательство. Докажем это утверждение лишь для операции замыкания обратной связи. Итак, пусть $S_1 \subset (X \times Z) \times (Y \times Z)$. Тогда если $(x, y) \in \mathscr{F}(S_1)$ и $(x', y') \in \mathscr{F}(S_1)$, то существуют такие $z \in Z$ и $z' \in Z$, что (x, z, y, z) [1]) $\in S_1$ и $(x', z', y', z') \in S_1$. Но поскольку система S_1 линейна, отсюда следует, что и $(x + x', z + z', y + y', z + z') \in S_1$. Но это в свою очередь означает, что $(x + x', y + y') \in \mathscr{F}(S_1)$. Аналогично доказывается, что $(\alpha x, \alpha y) \in \mathscr{F}(S_1)$, где α — скаляр, и, значит, система $\mathscr{F}(S_1)$ линейна, ч. т. д.

В последующих параграфах мы будем рассматривать функциональные системы. Напомним в этой связи, что

---

[1]) Для упрощения обозначений мы будем писать (x, z, y, z) вместо $((x, z), (y, z))$.

(i) система $S \subset X \times Y$ называется *функциональной* тогда и только тогда, когда

$$(x, y) \in S \mathbin{\&} (x, y') \in S \Rightarrow y = y';$$

(ii) система $S \subset X \times Y$ называется *взаимно однозначно функциональной* тогда и только тогда, когда S функциональна и

$$(x, y) \in S \mathbin{\&} (x', y) \in S \Rightarrow x = x'.$$

Предложение 1.7. Если системы S_1 и S_2 функциональны, то функциональны и системы $S_1 \circ S_2$ и $S_1 + S_2$ при условии, что они определены. Более того, каскадное и параллельное соединения сохраняют свойство взаимно однозначной функциональности.

Однако в общем случае операция замыкания обратной связи функциональности не сохраняет.

Предложение 1.8. Предположим, что система $S \subset (X \times Z) \times (Y \times Z)$ функциональна. Пусть

$$S(x) = \{z: (\exists y)((x, z, y, z) \in S)\},$$

$$S(x, y) = \{z: (\exists z')((x, z, y, z') \in S)\}.$$

Тогда система $\mathscr{F}(S)$ функциональна в том и только в том случае, когда для каждого $x \in X$

(C1) $$(\exists y)(S(x) \subset S(x, y)).$$

В частности, если для системы S выполняется условие

$$(x, z, y, z) \in S \mathbin{\&} (x, z', y', z') \in S \Rightarrow z = z',$$

то система $\mathscr{F}(S)$ также функциональна.

Доказательство. Предположим, что условие (C1) выполнено. Предположим также, что $(x, y) \in \mathscr{F}(S)$ и $(x, y') \in \mathscr{F}(S)$. Тогда должны существовать такие z и z', что (x, z, y, z) и (x, z', y', z') принадлежат S, а значит, $z \in S(x)$ и $z' \in S(x)$. Согласно условию (C1), существует такое $\hat{y}$, что $z \in S(x, \hat{y})$ и $z' \in S(x, \hat{y})$, а это значит, что для некоторых $\hat{z}$ и $\hat{z}'$ должны выполняться включения $(x, z, \hat{y}, \hat{z}) \in S$ и $(x, z', \hat{y}, \hat{z}') \in S$. А так как система S функциональна по предположению, то из $(x, z, y, z) \in S$ и $(x, z, \hat{y}, \hat{z}) \in S$ следует, что $y = \hat{y}$. Аналогичное рассуждение показывает, что $y' = \hat{y}$. Следовательно, $y = y'$.

Обратно, предположим теперь, что система $\mathscr{F}(S)$ функциональна. Выберем произвольное $\hat{x} \in X$. Если не существует такого $\hat{y}$, что $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathscr{F}(S)$, то $S(\hat{x}) = \varnothing$. Тогда утверждение $S(\hat{x}) \subset S(\hat{x}, y)$ очевидно. Предположим, что $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathscr{F}(S)$. Выберем теперь произвольное $z \in S(\hat{x})$. Тогда всегда найдется такое y, что $(\hat{x}, z, y, z) \in S$. Но так как система $\mathcal{F}(S)$ функциональна, то $y = \hat{y}$ и, следовательно, $z \in S(\hat{x}, \hat{y})$, ч. т. д.

2. ПОДСИСТЕМЫ, ЭЛЕМЕНТЫ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ

Определить понятие подсистемы можно многими разными способами. Здесь мы введем лишь те из этих понятий, которые показались нам наиболее многообещающими с точки зрения приложений.

Определение 2.1. Пусть $S \subset X \times Y$ — общая система. *Подсистемой* этой системы будем называть любое подмножество $S' \subset S$, $S' \subset X \times Y$. В свою очередь *элементом* S^* *системы* S мы будем называть такую систему, из которой с помощью основных операторов соединения можно получить исходную систему S (возможно, используя при этом и некоторые другие системы).

Необходимо отметить, что в приложениях термин «подсистема» используется для обозначения целого спектра совершенно различных понятий, в том числе и для того, что мы назвали в определении 2.1 элементом системы. Интерпретируя результаты этой главы, мы не должны забывать об этом.

Прежде всего изучим взаимосвязь между понятиями элемента и системы.

Для двух заданных систем $S_1 \subset X_1 \times Y_1$ и $S_2 \subset X_2 \times Y_2$ введем операторы проектирования:

$$\Pi_1\colon (X_1 \times X_2) \times (Y_1 \times Y_2) \to (X_1 \times Y_1)$$

и

$$\Pi_2\colon (X_1 \times X_2) \times (Y_1 \times Y_2) \to (X_2 \times Y_2),$$

такие, что

$$\Pi_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1, y_1) \text{ и } \Pi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_2, y_2).$$

Пусть, кроме того, $S \subset (X_1 \times X_2) \times (Y_1 \times Y_2)$.

Определение 2.2. Две системы $S_1 = \Pi_1(S)$ и $S_2 = \Pi_2(S)$ считаются *невзаимодействующими* (относительно S) тогда и только тогда, когда $S = S_1 + S_2$; в этом случае $(\Pi_1(S), \Pi_2(S))$ называется *независимой декомпозицией системы* S.

Определение 2.3. Независимая декомпозиция $(S_1, \ldots, S_n)$, где $S_1 + S_2 + \ldots + S_n = S$, называется *максимальной* тогда и только тогда, когда для любого S_i не существует (нетривиальной) независимой декомпозиции.

Небезынтересно выяснить, обладает система максимальной независимой декомпозицией или нет. Очевидно, что, если объекты системы образованы конечным числом компонент, т. е. $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ и $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_m$ для некоторых n и m, то для нее существует максимальная независимая декомпозиция. К этой проблеме мы еще вернемся в § 4, рассматривая контуры обратной связи.

Пока же рассмотрим основные декомпозиции на элементы.

Предложение 2.1. Любая система $S \subset (X_1 \times X_2) \times (Y_1 \times Y_2)$ допускает декомпозицию $S = \mathscr{F}(S_1 \circ S_2)$ в соединенные каскадно и охваченные обратной связью элементы, где $S_1 \subset (X_1 \times Z_1) \times (Y_1 \times Z_2)$, $S_2 \subset (X_2 \times Z_2) \times (Y_2 \times Z_1)$, а Z_1 и Z_2 — вспомогательные множества (рис. 2.1).

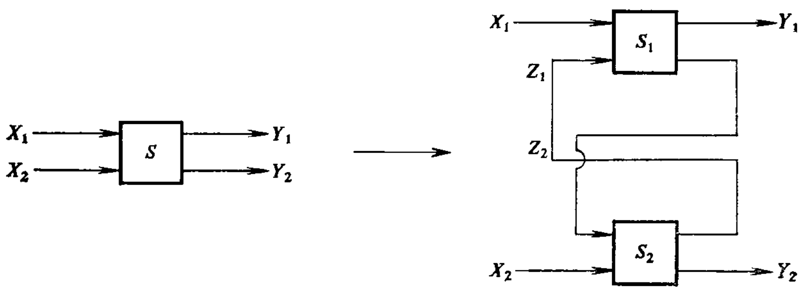


Рис. 2.1.

Доказательство. Пусть $Z_1 = X_2 \times Y_2$, а $Z_2 = X_1 \times Y_1$, и пусть

$$((x_1, z_1), (y_1, z_2)) \in S_1 \Longleftrightarrow (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S \,\&\, z_2 = (x_1, y_1),$$

где $z_1 = (x_2, y_2)$. Пусть, кроме того,

$$((x_2, z_2), (y_2, z_1)) \in S_2 \Longleftrightarrow (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S \,\&\, z_1 = (x_2, y_2),$$

где $z_2 = (x_1, y_1)$. Предположим, наконец, что $S' = \mathscr{F}(S_1 \circ S_2)$. Тогда

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \in S' \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\exists z_1)(\exists z_2)((x_1, z_1, y_1, z_2) \in S_1 \,\&\, (x_2, z_2, y_2, z_1) \in S_2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\exists (x_2', y_1'))(\exists (x_1', y_1'))((x_1, x_2', y_1, y_2') \in S \,\&\, (x_1', y_1') =$$

$$= (x_1, y_1) \,\&\, (x_1', x_2, y_1', y_2) \in S' \,\&\, (x_2', y_2') = (x_2, y_2)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S, \text{ ч. т. д.}$$

Предложение 2.2. Каждая система $S \subset (X_1 \times X_2) \times (Y_1 \times Y_2)$ допускает декомпозицию в соединенные каскадно элементы, как это показано на рис. 2.2.

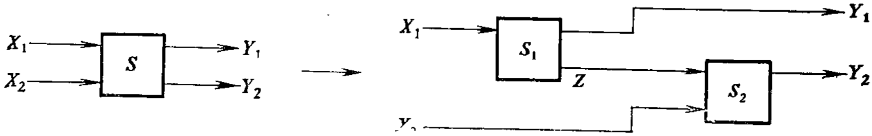


Рис. 2.2.

Доказательство. Пусть $Z = X_1 \times Y_1$, и пусть система $S_1 \subset X_1 \times (Y_1 \times Z_1)$ такова, что

$$(x_1, (y_1, z)) \in S_1 \Leftrightarrow (\exists (x_2, y_2)) ((x_1, x_2, y_1, y_2) \in S' \,\&\, z = (x_1, y_1)).$$

Пусть, кроме того, система $S_2 \subset (X_2 \times Z) \times Y_2$ удовлетворяет следующему условию: для $z = (x_1, y_1)$

$$((x_2, z), y_2) \in S_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S.$$

Но тогда

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, y_1, y_2) \in S_1 \circ S_2 &\Leftrightarrow (\exists z) ((x_1, y_1, z) \in S_1 \,\&\, (x_2, z, y_2) \in S_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists z) (\exists (x_2', y_2')) ((x_1, x_2', y_1, y_2') \in S \\ &\qquad \& \, z = (x_1, y_1) \,\&\, (x_2, z, y_2) \in S_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists (x_2', y_2')) ((x_1\, x_2', y_1, y_2') \in S \\ &\qquad \& \, (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S,\end{aligned}$$

ч. т. д.

Предложение 2.3. Пусть $S \subset (X_1 \times X_2) \times (Y_1 \times Y_2)$, и пусть $S(x) = \{y\colon (x, y) \in S\}$, где $X = X_1 \times X_2$, а $Y = Y_1 \times Y_2$. Пусть,

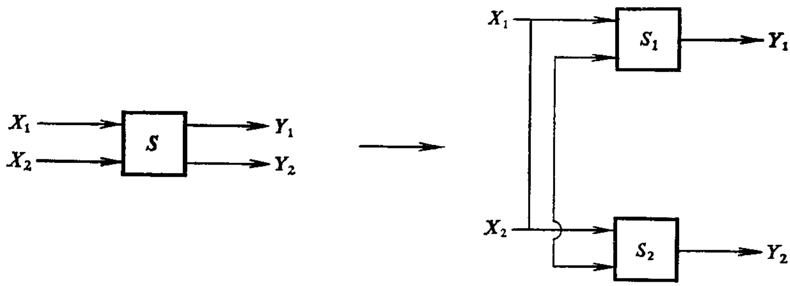


Рис. 2.3.

кроме того, $\Pi_1(y_1, y_2) = y_1$ и $\Pi_2(y_1, y_2) = y_2$. Система S допускает декомпозицию на системы S_1 и S_2, как это показано на рис. 2.3, в том и только в том случае, когда для любых $x \in \mathscr{D}(S)$ справедливо равенство $S(x) = \Pi_1(S(x)) \times \Pi_2(S(x))$.

Доказательство. Предположим, что $S(x) = \Pi_1(S(x)) \times \times \Pi_2(S(x))$ для любого $x \in \mathscr{D}(S)$. Обозначим через $S_1 \subset X \times Y_1$ систему, такую, что

$$(x, y_1) \in S_1 \Longleftrightarrow (\exists y_2)\,((x, y_1, y_2) \in S),$$

а через $S_2 \subset X \times Y_2$ — систему, такую, что

$$(x, y_2) \in S_2 \Longleftrightarrow (\exists y_1)\,((x, y_1, y_2) \in S).$$

Совершенно очевидно, что

$$(x, y_1, y_2) \in S \Rightarrow (x, y_1) \in S_1 \,\&\, (x, y_2) \in S_2.$$

Обратно, предположим, что $(x, y_1) \in S_1 \,\&\, (x, y_2) \in S_2$. Тогда $y_1 \in \Pi_1(S(x))$ и $y_2 \in \Pi_2(S(x))$, т. е. $(y_1, y_2) \in S(x)$, поскольку $S(x) = \Pi_1(S(x)) \times \Pi_2(S(x))$. Следовательно, $(x, y_1, y_2) \in S$.

Предположим теперь, что $S_1 \subset X \times Y_1$ и $S_2 \subset X \times Y_2$, реализующие указанную выше декомпозицию, существуют. Очевидно, что $S(x) \subset \Pi_1(S(x)) \times \Pi_2(S(x))$. Выберем тогда произвольные $y_1 \in \Pi_1(S(x))$ и $y_2 \in \Pi_2(S(x))$. Но тогда $(x, y_1) \in S_1$ и $(x, y_2) \in \in S_2$ и, следовательно $(x, y_1, y_2) \in S$, ч. т. д.

Предложение 2.4. Любая система $S \subset X \times Y$ допускает декомпозицию, изображенную на рис. 2.4, где

$$(x, x') \in E_x \Longleftrightarrow S(x) = S(x'),$$

$$(y, y') \in E_y \Longleftrightarrow (y)\,S = (y')\,S,$$

причем $S(x)$ и $(y)\,S$ определены в предложениях 1.1 и 1.2, а $\eta_x\colon X \to X/E_x$ и $\eta_y\colon Y \to Y/E_y$ — канонические отображения, т. е. $([y], y) \in \eta_y^{-1} \Longleftrightarrow [y] = \eta_y(y)$.

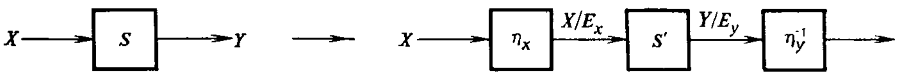


Рис. 2.4.

Доказательство. Пусть $S' \subset (X/E_x) \times (Y/E_y)$ определяется условием

$$([x], [y]) \in S' \Longleftrightarrow (\exists \hat{x})\,(\exists \hat{y})\,(\hat{x} \in [x] \,\&\, \hat{y} \in [y] \,\&\, (\hat{x}, \hat{y}) \in S).$$

Покажем тогда, что

$$(\forall x')\,(\forall y')\,(x' \in [x] \,\&\, y' \in [y] \,\&\, ([x], [y]) \in S' \Rightarrow (x', y') \in S).$$

Предположим, что $\hat{x} \in [x]$ и $\hat{y} \in [y]$ таковы, что $(\hat{x}, \hat{y}) \in S$. Существование таких элементов для $([x], [y]) \in S'$ гарантируется определением E_x и E_y. Заметим теперь, что из $x' \in [x]$ следует равенство $S(\hat{x}) = S(x')$. Более того, из $\hat{y} \in S(\hat{x})$ вытекает, что $(x', \hat{y}) \in S$. Значит, $x' \in (\hat{y}) S$. Но, с другой стороны, $y' \in [y]$ и $\hat{y} \in [y]$ означает, что $(y') S = (\hat{y}) S$. Следовательно, $x' \in (y') S$, т. е. $(x', y') \in S$, ч. т. д.

В заключение кратко остановимся на взаимосвязи понятий подсистемы и системы.

Определение 2.4. Пусть S_i $(i \in I)$ — некоторая функциональная подсистема системы $S \subset X \times Y$, т. е. $S_i \subset S$ и S_i: $\mathcal{D}(S) \to Y$. Если $\bigcup_{i \in I} S_i = S$, то $\{S_i\colon i \in I\}$ называется *функциональной декомпозицией системы* S.

Функциональная декомпозиция системы, очевидно, эквивалентна ее представлению в пространстве глобальных состояний. Поэтому такая декомпозиция всегда возможна и неединственна.

Определение 2.5. Пусть $\bar{S}_\alpha = \{S_{\alpha i}\colon i \in I_\alpha\}$ и $\bar{S}_\beta = \{S_{\beta i}\colon i \in I_\beta\}$ — две функциональные декомпозиции системы $S \subset X \times Y$. Определим для всех таких декомпозиций отношение порядка следующим образом: $\bar{S}_\alpha \leqslant \bar{S}_\beta$ тогда и только тогда, когда $\bar{S}_\alpha \subseteq \bar{S}_\beta$. Тогда если декомпозиция $\bar{S}_0$ удовлетворяет условию, что для любой функциональной декомпозиции $\bar{S}_\alpha$ системы S

$$\bar{S}_\alpha \leqslant \bar{S}_0 \Rightarrow \bar{S}_0 = \bar{S}_\alpha,$$

то $\bar{S}_0$ называется *минимальной функциональной декомпозицией системы* S.

Не составляет ни малейшего труда показать, что любая конечная система допускает минимальную функциональную декомпозицию.

3. СИСТЕМЫ С ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ

В этом параграфе мы будем рассматривать системы с обратными связями, типа изображенных на рис. 3.1. Такая система в целом описывается отношением

$$S \subset (X \times Z_x) \times (Y \times Z_y),$$

а ее элемент обратной связи — отношением

$$S_f \subset Z_y \times Z_x.$$

Обозначим через S_B множество всевозможных пар «вход —

выход» системы S из $X \times Y$, т. е.

$$S_B = \{(x, y)\colon (\exists\,(z, z'))\,(((x, z), (y, z')) \in S)\}.$$

Обозначим также через $\overline{S}_f$ класс всевозможных элементов в контуре обратной связи:

$$\overline{S}_f = \{S_f\colon S_f \subset Z_y \times Z_x\}.$$

Будем обозначать через $\mathscr{F}_s$ отображение $\mathscr{F}_s\colon \overline{S}_f \to \overline{S}$, если

$$\mathscr{F}_s\,(S_f) = \mathscr{F}(S \circ S_f).$$

Для любого фиксированного элемента в контуре обратной связи отображение $\mathscr{F}_s$ определяет получающуюся систему в целом,

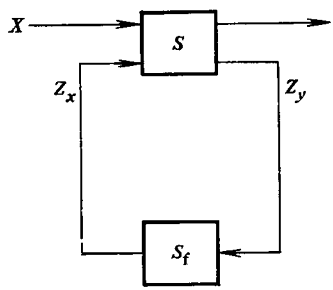


Рис. 3.1.

так что $\mathscr{F}_s$ можно рассматривать как описание последствий введения обратной связи. Некоторые важные с принципиальной точки зрения свойства $\mathscr{F}_s$ доказаны в следующих предложениях:

Предложение 3.1. Для любых $S_f \in \overline{S}_f$ справедливо включение $\mathscr{F}_s\,(S_f) \subset S_B$.

Доказательство.

$$(x, y) \in \mathscr{F}_s\,(S_f) \Leftrightarrow (x, y) \in \mathscr{F}\,(S \circ S_f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists z)\,(((x, z), (y, z)) \in S \circ S_f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists z)\,(\exists z')\,(((x, z), (y, z')) \in S \mathbin{\&} (z', z) \in S_f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y) \in S_B, \text{ ч. т. д.}$$

Предложение 3.2. Предположим, что отображение $\mathscr{S}_s$: $\Pi(S_B) \to \overline{S}_t$ таково [1]), что

$$(z', z) \in \mathscr{S}_s(S') \Leftrightarrow (\exists (x, y) \in S')(((x, z), (y, z')) \in S).$$

Тогда $S' \subset \mathscr{F}_s(\mathscr{S}_s(S'))$. Если S удовлетворяет при этом соотношению

$$\text{(C1)} \qquad (x, z, y, z') \in S \,\&\, (\hat{x}, z, \hat{y}, z') \in S \Rightarrow (x, y) = (\hat{x}, \hat{y}),$$

то
$$\mathscr{F}_s(\mathscr{S}_s(S')) = S' \Leftrightarrow S' \in \mathscr{R}(\mathscr{F}_s).$$

Доказательство. В общем случае из $S' \subset S_B$ следует

$$(x, y) \in S' \Rightarrow (\exists (z, z'))((x, z, y, z') \in S \,\&\, (z', z) \in \mathscr{S}_s(S')) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x, y) \in \mathscr{F}_s(\mathscr{S}_s(S')).$$

Предположим, что условие (C1) выполнено. Очевидно, что $\mathscr{F}_s(\mathscr{S}_s(S')) = S' \Rightarrow S' \in \mathscr{R}(\mathscr{F}_s)$, и, следовательно,

$$(x, y) \in \mathscr{F}_s(\mathscr{S}_s(S')) \Rightarrow (\exists (z', z))((z', z) \in \mathscr{S}_s(S') \,\&\, (x, z, y, z') \in S) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists (z', z))(\exists (\hat{x}, \hat{y}))((\hat{x}, \hat{y}) \in S' \,\&\, (\hat{x}, z, \hat{y}, z') \in$$
$$\in S \,\&\, (x, z, y, z') \in S) \Rightarrow (x, y) = (\hat{x}, \hat{y}) \in S'$$

(в силу условий теоремы).

Но это значит, что поскольку в общем случае справедливо соотношение $S' \subset \mathscr{F}_s(\mathscr{S}_s(S'))$, то имеет место равенство $S' = \mathscr{F}_s(\mathscr{S}_s(S'))$, ч. т. д.

Пусть теперь $S_{tB} = \{(z', z) : (\exists (x, y))((x, z, y, z') \in S)\} \subset Z_y \times Z_x$, и пусть

$$\overline{S}_t^* = \{S_t^* : S_t^* \subset S_{tB}\}.$$

Предложение 3.3. Предположим, что для системы S выполнено условие

$$(x, z, y, z') \in S \,\&\, (x, \hat{z}, y, \hat{z}') \in S \Rightarrow (z, z') = (\hat{z}, \hat{z}').$$

Тогда сужение $\mathscr{F}_s$ на $\overline{S}_t^*$, т. е. $\mathscr{F}_s \mid \overline{S}_t^*$, является взаимно однозначным отображением, и если $S' = \mathscr{F}_s(S_t^*)$, то $S_t^* = \mathscr{S}_s(S')$.

Доказательство. Заметим, что если $S' = \mathscr{F}_s(S_t^*)$, то

$$(z', z) \in \mathscr{S}_s(S') \Leftrightarrow (\exists (x, y))((x, y) \in S' \,\&\, (x, z, y, z') \in S) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists (x, y))(\exists (\hat{z}', \hat{z}))((\hat{z}', \hat{z}) \in S_t^* \,\&\, (x, \hat{z}, y, \hat{z}') \in$$

[1]) Здесь, как и раньше, $\Pi(S_B)$ означает множество подмножеств множества S_B.— *Прим. перев.*

$$\in S \& (x, z, y, z') \in S) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z', z) = (\hat{z}', \hat{z}) \in S_f^*, \text{ ч. т. д.}$$

Обратимся теперь к содержательным интерпретациям предложений 3.1, 3.2 и 3.3. Важные свойства обратной связи и тех

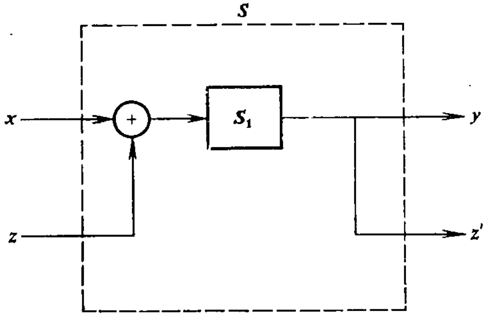


Рис. 3.2.

последствий для систем, к которым приводит замыкание в них обратных связей (например, с целью решения проблемы развязывания), можно изучать, исследуя свойства $\mathcal{F}_s$. В этой связи предложение 3.1 указывает на то, что введение любой обратной связи всегда приводит к сужению множества S_B. Для того чтобы проиллюстрировать значение предложения 3.2, рассмотрим случай обратной связи системы, определенной на линейном пространстве и представленной на рис. 3.2. Итак, пусть $S \subset (X \times Z_x) \times \times (Y \times Z_y)$, $Z_x = X$, $Z_y = Y$ и

$$(x, z, y, z') \in S \Leftrightarrow z' = y \& (x + z, y) \in S_1.$$

Поскольку пространство X является линейным, на X определена операция сложения. Предположим теперь, что система S функциональная (например, зафиксировано ее начальное состояние), а ее пространство входных воздействий приведено, так что S_1 является взаимно однозначным отображением. Таким образом, все условия предложений 3.2 и 3.3 выполнены. Предположим, кроме того, что S' является произвольной подсистемой системы S_B, $S' \subset S_B$. Тогда предложение 3.2 дает условия, при которых S' можно получить из S в результате введения обратной связи. При этом S' можно получить из S тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_s(\mathcal{S}_s(S')) = S'$. Более того, если такой способ синтеза S' возможен, то требуемая обратная связь определяется отображением $\mathcal{S}_s(S')$. Но этим мы еще займемся подробнее в § 4.

Дополнительные свойства отображения $\mathcal{F}_s$ отмечены в следующих предложениях:

Предложение 3.4. $\mathcal{F}_s$ является изотонным гомоморфизмом [1], т. е. $S_f \subseteq S_f' \Rightarrow \mathcal{F}_s(S_f) \subseteq \mathcal{F}_s(S_f')$.

Предложение 3.5. $\mathcal{S}_s$ является изотонным гомоморфизмом, т. е. $S' \subseteq \hat{S}' \Rightarrow \mathcal{S}_s(S') \subseteq \mathcal{S}_s(\hat{S}')$.

Предложение 3.6. Предположим, что система S удовлетворяет условиям предложения 3.3. Тогда класс систем, которые могут быть построены из S в результате введения обратных связей, замкнут над S_B относительно оператора $\mathcal{F}_s \circ \mathcal{S}_s$.

Доказательство. Пусть $J = \mathcal{F}_s \circ \mathcal{S}_s\colon \Pi(S_B) \to \Pi(S_B)$. Согласно предложениям 3.4 и 3.5, из $S' \subseteq \hat{S}' \subseteq S_B$ следует, что $J(S') \subseteq J(\hat{S}')$. Предложение 3.2 показывает, что $S' \subseteq J(S')$ для любых $S' \subseteq S_B$. Более того, поскольку $\mathcal{F}_s(\mathcal{S}_s(S')) \in \mathcal{R}(\mathcal{F}_s)$ при любом S', то из предложения 3.2 вытекает также, что $JJ(S') = J(S')$ при любых $S' \subseteq S_B$. А так как $J(S') = S' \Leftrightarrow S' \in \mathcal{R}(\mathcal{F}_s)$, то $\mathcal{R}(\mathcal{F}_s)$ замкнуто над S_B, ч. т. д.

4. АВТОНОМНОСТЬ И ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ

В настоящем параграфе мы зададимся целью получить необходимые и достаточные условия автономности системы, достигнутой с помощью введения обратных связей. Решение этой задачи можно рассматривать как иллюстрацию возможностей аппарата общей теории систем, развиваемого в этой главе. Аналогичным путем можно подойти и ко многим другим системным задачам, если они по своей сути носят структурный или алгебраический характер.

(a) Автономность функциональных систем

Рассмотрим систему $S \subset (X \times Z_x) \times (Y \times Z_y)$, в цепи обратной связи которой включен элемент $S_f \subset Z_y \times Z_x$, как это показано на рис. 4.1. Более того, предположим, что выполняется условие

(P1) $$(x, z_x, y, z_y) \in S \Rightarrow y = z_y$$

и что, следовательно, $Z_y = Y$. Иными словами, мы будем рассматривать систему с обратной связью, определенную на $(X \times Z_x) \times Y$, а не на $(X \times Z_x) \times (Y \times Z_y)$. Поэтому исполь-

[1] То есть гомоморфизмом, сохраняющим порядок. — *Прим. перев.*

зуемое далее обозначение $\mathcal{F}(S \circ S_f)$, где $S_f \subset Y \times Z_x$, не совсем соответствует нашим прежним определениям. Однако ради простоты обозначений мы позволим себе пойти на это.

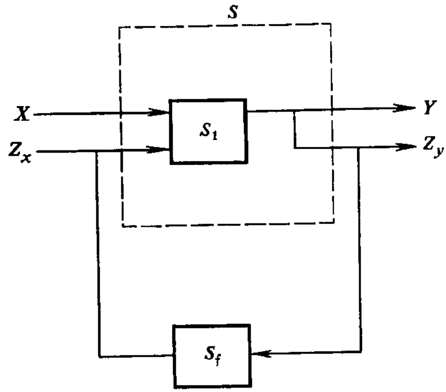


Рис. 4.1.

Прежде чем решать задачу об автономности, установим некоторые дополнительные свойства систем с обратной связью.

Предложение 4.1. Рассмотрим систему с обратной связью $S \subset (X \times Z_x) \times Y$, в контур обратной связи которой включен элемент $S_f \subset Y \times Z_x$. Предположим, что

(i) системы S_f и $\mathcal{F}_s(S_f)$ функциональны, т. е. что S_f: $(Y) \to Z_x$, $\mathcal{F}_s(S_f)$: $(X) \to Y$;

(ii) система S удовлетворяет условию

(P2) $$(x, z, y) \in S \& (x', z, y) \in S \Rightarrow x = x'.$$

Тогда функциональная система $\mathcal{F}_s(S_f)$: $(X) \to Y$ является взаимно однозначной.

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{F}_s(S_f)(x) = y$ и $\mathcal{F}_s(S_f)(x') = y$. Тогда

$$(\exists z)((x, z, y) \in S \& z = S_f(y))$$

и

$$(\exists z')((x', z', y) \in S \& z' = S_f(y)).$$

Следовательно, $z = z'$, а в силу (P2) отсюда следует, что $x = x'$, ч. т. д.

Используя предложение 4.1, мы можем доказать следующий фундаментальный результат:

Предложение 4.2. Предположим, что

(i) система S является функциональной, $S\colon \mathscr{D}(S) \to Y$;
(ii) система S удовлетворяет условию (P2);
(iii) система S удовлетворяет условию

$$\text{(P3)} \qquad (x, z, y) \in S \,\&\, (x, z', y) \in S \Rightarrow z = z'.$$

Пусть $\overline{S} \subset \Pi\,(Y \times Z_x)$ есть множество всех функциональных элементов в цепи обратной связи, определенных на $Y \times Z_x$, т. е. пусть $S_f\colon \mathscr{D}(S_f) \to Z_x$ таково, что система $\mathscr{F}(S \cdot S_f)$ функциональна. Обозначим через $\hat{S}$ произвольную систему $\hat{S} \subset X \times Y$, а через $K\,(X, Y)$ — семейство подсистем системы $\hat{S}$, таких, что

$K\,(X, Y) = \{S'\colon S' \subset \hat{S} \& S'$функциональна и взаимно однозначна.$\}$.

Тогда $\mathscr{F}_s\,(\hat{S}_f) = K\,(X, Y)$ в том и только в том случае, когда $S = \hat{S}_B$, где

$$S_B = \{(x, y)\colon (\exists z)\,((x, z, y) \in S)\}.$$

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Предположим, что $\mathscr{F}_s\,(\overline{S}_f) = K\,(X, Y)$. Выберем произвольное $(x, y) \in \hat{S}$. Поскольку $\mathscr{F}_s\,(\overline{S}_f) = K\,(X, Y)$, а $\bigcup K\,(X, Y) = \hat{S}$, заведомо существует такое $S_f \in \hat{S}_f$, что $(x, y) \in \mathscr{F}_s\,(S_f)$, т. е. $(\exists z)\,((y, z) \in S_f \,\&\, (x, z, y) \in S)$. Значит, $(x, y) \in S_B$. Выберем опять произвольное $(\hat{x}, \hat{y}) \in S_B$ и потребуем, чтобы $(\exists \hat{z})\,((\hat{x}, \hat{z}, \hat{y}) \in S)$. Пусть $S_f = \{(\hat{y}, \hat{z})\}$. Покажем, что $S_f \in \overline{S}_f$. С этой целью заметим, что если $(x, y) \in \mathscr{F}(S \circ S_f)$ и $(x, y') \in \mathscr{F}(S \circ S_f)$, то $y = \hat{y} = y'$, т. е. система $\mathscr{F}(S \circ S_f)$, очевидно, функциональна. Более того, функциональна и система S_f. Поэтому $S_f \in \overline{S}_f$. Но тогда, естественно, $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathscr{F}_s\,(S_f)$. Так как $\mathscr{F}_s\,(\hat{S}_f) = K\,(X, Y)$, отсюда следует, что $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{S}$.

Перейдем теперь к доказательству достаточности. Предположим, что $\hat{S} = S_B$. Выберем произвольное $S' \in \mathscr{F}_s\,(\overline{S}_f)$. Тогда найдется такая система $S_f \in \overline{S}_f$, что $S' = \mathscr{F}_s\,(S_f)$. Система S' функциональна в силу сделанных предположений относительно $\overline{S}_f$ и удовлетворяет соотношению $S' \subset S_B = \hat{S}$, поскольку $S' = \mathscr{F}\,(S \cdot S_f)$. Но, поскольку в силу предложения 4.1 система S' еще и взаимно однозначна, она должна принадлежать $K\,(X, Y)$.

Выберем теперь произвольную систему $S' \in K\,(X, Y)$. Из $\hat{S} = S_B$ следует, что $S' \subset S_B$. Предположим, что $S_f = \mathscr{F}_s\,(S')$, т. е.

$$S_f = \{(y, z)\colon (\exists z)\,((x, y) \in S' \,\&\, (x, z, y) \in S)\},$$

и пусть $(y, z) \in S_f$, $(y, z') \in S_f$. Тогда

$$(\exists x)(\exists x')((x, y) \in S' \& (x', y) \in S' \& (x, z, y) \in S \& (x', z', y) \in S).$$

Так как S' взаимно однозначна, то $x = x'$. Но тогда из условия (P3) вытекает, что $z = z'$. Следовательно, система S функциональна. Остается показать, что $\mathscr{F}(S \circ S_f) = S'$. Действительно,

$$\mathscr{F}(S \cdot S_f) \ni (x, y) \Leftrightarrow (\exists z)((x, z, y) \in S \& (y, z) \in S_f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists z)(y = S(x, z) \& (\exists \hat{x})(y = S'(\hat{x}) \& y = S(\hat{x}, z))) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists z)(\exists \hat{x})(y = S(x, z) \& y = S'(\hat{x}) \& y = S(\hat{x}, z)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists z)(y = S(x, z) \& y = S'(x)),$$

поскольку из (P2) следует, что $x = \hat{x} \Leftrightarrow (x, y) \in S'$, и поскольку $S' \subset S_B$. Таким образом, $\mathscr{F}(S \circ S_f) = S'$, где S' функциональна по определению. Но тогда $S_f \in \bar{S}_f$, откуда $S' \in \mathscr{F}_s(\bar{S}_f)$, ч. т. д.

Предложением 4.2 мы воспользуемся для решения задачи об автономности многомерных систем. Но прежде нам придется ввести строгое определение понятия автономности и понятия функциональной управляемости.

Определение 4.1. Общая система $S \subset X \times Y$ называется *функционально управляемой* тогда и только тогда, когда

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)((x, y) \in S).$$

Определение 4.2. Многомерная общая система $S \subset (X_1 \times \ldots \ldots X_n) \times Z_x \times (Y_1 \times \ldots \times Y_n)$ называется *автономной* в результате замыкания обратной связи тогда и только тогда, когда найдется такая система с обратной связью $S_f \subset (Y_1 \times \ldots \times Y_n) \times \times Z_x$, что

$$\mathscr{F}(S \circ S_f) = S_1 + \ldots + S_n,$$

где все $S_i \subset X_i \times Y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ функционально управляемы.

Понятие автономности, введенное в определении 4.2, означает, что после введения подходящей обратной связи каждая из составляющих выходного сигнала, например y_i, может быть изменена лишь за счет изменения соответствующего входного воздействия x_i, причем это изменение x_i никак не скажется на других составляющих выходного сигнала. В свою очередь функциональная управляемость означает, что надлежащим выбором входного воздействия x можно добиться получения любого выходного сигнала $(y_1, \ldots, y_n) \in Y$.

Определения 4.1 и 4.2 сформулированы для случая общих систем. Если общая система еще и функциональна, как это предполагается в настоящем параграфе, то в эти определения нужно внести очевидные поправки. В частности, если S — многомерная функциональная система, т. е.

$$S\colon (X_1 \times \ldots \times X_n) \times Z_x \to (Y_1 \times \ldots \times Y_n),$$

то ее обратная связь S_f всегда предполагается функциональной, т. е. $S_f\colon Y_1 \times \ldots \times Y_n \to Z_x$. Связь между двумя только что введенными понятиями устанавливается в следующем предложении:

Предложение 4.3. Пусть S — некоторая многомерная функциональная система $S\colon (X \times Z_x) \to Y$, где $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, $Z_x = Z_{x_1} \times \ldots \times Z_{x_n}$ и $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$. Если S можно сделать автономной с помощью некоторой обратной связи S_f, то S функционально управляема, т. е.

$$(\forall y \in Y)\,(\exists\,(x, z) \in X \times Z_x)\,(y = S\,(x, z)).$$

Доказательство. Обозначим через $S_f\colon Y \to Z_x$ элемент в контуре обратной связи, обеспечивающий автономность. Выберем произвольное $\hat{y} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n) \in Y$, и пусть $\hat{x}_i \in X_i$ таково, что $\hat{y}_i = S_i\,(\hat{x}_i)$. Это возможно в силу функциональной управляемости S_i. Но тогда $\mathcal{F}\,(S \circ S_f)\,(\hat{x}) = \hat{y}$, где $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$. Это верно также и потому, что $\mathcal{F}(S \circ S_f) = S_1 + \ldots + S_n$. Следовательно, согласно определению обратной связи, найдется такое $\hat{z} \in Z_x$, что $\hat{y} = S\,(\hat{x}, \hat{z})$ и $\hat{z} = S_f\,(\hat{y})$, ч. т. д.

Для практических приложений проблема автономности представляет интерес в более специальной постановке. А именно, если задана система $S_0\colon X_0 \to Y$, то возникает вопрос, можно ли в некотором смысле смешать входное воздействие с сигналом обратной связи и, подавая этот комбинированный сигнал на вход системы, обеспечить ее автономность. Чтобы обеспечить возможность комбинирования входного воздействия с сигналом обратной связи, вводится специальный элемент, соединенный с основной системой так, как это показано на рис. 4.2. Элемент H мы в дальнейшем будем называть *входным каскадом*, полагая, что $H\colon X \times Z_x \to X_0$. В этой новой постановке задача об автономности состоит в следующем. Для данной системы S_0, данного входного каскада типа H и заданного класса контуров обратной связи $\overline{S}_f$ найти условия, которым должна удовлетворять система S_0 для того, чтобы нашлась такая обратная связь $S_f \in \overline{S}_f$, при которой система $\mathcal{F}_s\,(S_f)$ для $S = H \circ S_0$ оказалась бы автономной.

Решение этой задачи сформулировано в виде следующего определения:

Определение 4.3. Входной каскад $H\colon X \times Z_x \to X_0$ называется *совершенным* тогда и только тогда, когда он удовлетворяет сле-

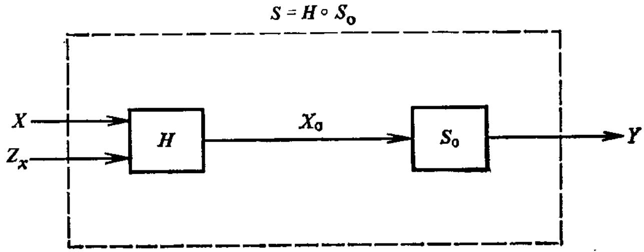


Рис. 4.2.

дующим условиям:

$$(\forall x \in X)\,(\forall x_0 \in X_0)\,(\exists z \in Z_x)\,(x_0 = H\,(x, z)).$$

Предложение 4.4. Пусть $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ и $Z_x = Z_{x_1} \times \ldots \times Z_{x_n}$. Предположим, кроме того, что

(i) система $S_0\colon X_0 \to Y$ взаимно однозначна, т. е. приведена относительно входных воздействий;

(ii) каскад H совершенен и, кроме того, удовлетворяет условиям

$$H\,(x, z) = H\,(x', z) \Rightarrow x = x', \qquad H\,(x, z) = H\,(x, z') \Rightarrow z = z';$$

(iii) $\overline{S}_f \subset \Pi\,(Y \times Z_x)$ — множество всех функциональных систем S_f, для которых $\mathscr{F}((H \circ S_0) \circ S_f)$ функциональна;

(iv) мощности множеств Y_i и X_i для каждого i совпадают.

Система S_0 функционально управляема в том и только в том случае, когда систему $S = H \circ S_0$ можно сделать автономной с помощью обратной связи из $\overline{S}_f$.

Доказательство. Начнем с достаточности. Пусть систему $H \circ S_0$ можно сделать автономной с помощью обратной связи из $\overline{S}_f$. Тогда из предложения 4.3 вытекает, что система $H \circ S_0$ функционально управляема, т. е.

$$(\forall \hat{y})\,(\exists\,(\hat{x}, \hat{z}))\,(\hat{y} = (H \circ S_0)\,(\hat{x}, \hat{z})).$$

Положим $\hat{x}_0 = H\,(\hat{x}, \hat{z})$. Тогда последнее условие означает, что

$$(\forall \hat{y})\,(\exists \hat{x}_0)\,(\hat{y} = S_0\,(\hat{x}_0)),$$

а это как раз и доказывает функциональную управляемость системы S_0.

Перейдем к доказательству необходимости. Предположим, что система S_0 функционально управляема. Выберем произвольные $\hat{x} \in X$ и $\hat{y} \in Y$. В силу функциональной управляемости S_0 всегда найдется такое $\hat{x}_0 \in X$, что $\hat{y} = S_0 (\hat{x}_0)$. Более того, поскольку каскад H совершенен, должен существовать и такой элемент $z \in \hat{Z}_x$, что $\hat{x}_0 = H (\hat{x}, \hat{z})$. Но тогда

$$(\forall (x, y)) (\exists z) ((x, z, y) \in H \circ S_0).$$

Пусть

$$\hat{S} = S_B = \{(x, y)\colon (\exists z) ((x, z, y) \in H \circ S_0)\} = X \times Y.$$

Из предложения 4.2 тогда вытекает, что $\mathscr{F}_s (\bar{S}_f) = K (X, Y)$. Предположим, что система $S_i\colon X_i \to Y_i$ взаимно однозначно функциональна и функционально управляема при любых $i \leqslant n$. Такие системы существуют в силу совпадения мощности любого Y_i с мощностью соответствующего X_i. Но тогда $S' = S_1 + \ldots + S_n \subset \hat{S}$ в силу предположений о структуре $\hat{S}$. Более того, система S' взаимно однозначно функциональна. Поэтому $\mathscr{F}_s (S_f) = S_1 + \ldots + S_n$ для некоторого контура обратной связи $S_f \in \bar{S}_f$, ч. т. д.

Обратимся теперь к исследованию линейных систем. Для этого частотного случая роль, аналогичную роли предложения 4.2, играет

Предложение 4.5. Предположим, что система S удовлетворяет условиям (i) — (iii) предложения 4.2 и, более того,

(iv) система S линейна.

Обозначим через $\bar{S}_f^L$ подмножество множества $\bar{S}_f$, определенного в предложении 4.2, $\bar{S}_f^L \subset \bar{S}_f$, потребовав, чтобы $S_f \in \bar{S}_f^L$ тогда и только тогда, когда $S_f \in \bar{S}_f$ и система S_f линейна. Пусть $\hat{S} \subset X \times Y$ — произвольная линейная система, а $L (X, Y)$ — подмножество семейства подсистем, определенного в предложении 4.2, $L (X, Y) \subset K (X, Y)$, включающее в себя те и только те системы S' из $K (X, Y)$, которые являются линейными.

Тогда $\mathscr{F}_s (\bar{S}_f^L) = L (X, Y)$, если $\hat{S} = S_B$, где

$$S_B = (\exists z) ((x, z, y) \in S).$$

Доказательство предложения 4.5 почти дословно повторяет доказательство предложения 4.2 с той лишь разницей, что после того, как в процессе доказательства будет определен контур обратной связи S_f, мы должны будем доказать еще и его линейность. Это доказательство мы предоставляем читателю для самостоятельного упражнения.

Для линейных систем в качестве входного каскада H: $X \times \times Z_x \to X_0$ обычно используются каскады вида $H(x, z) = x + z$. Как нетрудно видеть, все такие каскады являются совершенными, и для них, очевидно, выполняется условие (ii) предложения 4.4. Поэтому аналог предложения 4.4 для линейных систем может быть сформулирован следующим образом:

Предложение 4.6. Пусть $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ и $Z_x = Z_{x_1} \times \ldots \times Z_{x_n}$. Предположим, что

(i) система S_0: $X_0 \to Y$ линейна и приведена относительно своего входного воздействия;

(ii) $\overline{S}_f^L \subset \Pi(Y \times Z_x)$ есть множество всевозможных линейных функциональных систем S_f, для которых функциональной является и система $\mathscr{F}((H \circ S_0) \circ S_f)$;

(iii) для каждой пары (X_i, Y_i) найдется линейное взаимно однозначное соответствие S_i: $X_i \to Y_i$.

Тогда для функциональной управляемости системы S_0 необходимо и достаточно, чтобы систему $S = H \circ S_0$ можно было сделать автономной с помощью контура обратной связи из $\overline{S}_f^L$.

Обратимся теперь к случаю временных систем. При этом нас прежде всего интересуют неупреждающие системы. Напомним, что функциональная временная система S_0: $X_0 \to Y$ называется *неупреждающей* тогда и только тогда, когда

$$(\forall t)\,(\forall x)\,(\forall \hat{x})\,(x \mid \overline{T}^t = \hat{x} \mid \overline{T}^t \Rightarrow S_0(x) \mid \overline{T}^t = S_0(\hat{x}) \mid \overline{T}^t).$$

Поэтому функциональная временная система S_0 является неупреждающей тогда и только тогда, когда система $S_0 \mid \overline{T}^t$ оказывается функциональной при любом t. Но это приводит нас к следующему предложению:

Предложение 4.7. Пусть $S \subset (X \times Z_x) \times Y$, и пусть системы $S_f \subset Y \times Z_x$ и $\mathscr{F}(S \circ S_f) = \mathscr{F}_s(S_f)$ функциональные и неупреждающие. Тогда если система S удовлетворяет условию: для любого $t \in T$

$$(x, z, y) \in S \;\&\; (\hat{x}, \hat{z}, \hat{y}) \in S \;\&\; (z, y) \mid \overline{T}^t = (\hat{z}, \hat{y}) \mid \overline{T}^t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \mid \overline{T}^t = \hat{x} \mid \overline{T}^t,$$

то система $\mathscr{F}_s(S_f) \mid \overline{T}^t$ является взаимно однозначно функциональной.

Доказательство. Поскольку система $\mathscr{F}_s(S_f)$ является функциональной и неупреждающей, функциональной должна быть и система $\mathcal{F}_s(S_f) \mid \overline{T}^t$. Предположим тогда, что $y = \mathcal{F}_s(S_f)(x)$ и что $\hat{y} = \mathcal{F}_s(S_f)(\hat{x})$, а также что $y \mid \overline{T}^t = \hat{y} \mid \overline{T}^t$. Покажем, что $x \mid \overline{T}^t = \hat{x} \mid \overline{T}^t$. Из определения $\mathcal{F}_s(S_f)$ следует, что

$$(\exists z)(\exists \hat{z})((x, z, y) \in S \,\&\, (\hat{x}, \hat{z}, \hat{y}) \in S \,\&\, z = S_f(y) \,\&\, \hat{z} = S_f(\hat{y})).$$

Но так как $y \mid \overline{T}^t = \hat{y} \mid \overline{T}^t$, а система S_f неупреждающая, то заведомо $z \mid \overline{T}^t = \hat{z} \mid \overline{T}^t$. Тогда, поскольку $(z, y) \mid \overline{T}^t = (\hat{z}, \hat{y}) \mid \overline{T}^t$, мы имеем $x \mid \overline{T}^t = \hat{x} \mid \overline{T}^t$, а это значит, что система $\mathcal{F}_s(S_f) \mid \overline{T}^t$ действительно является функциональной и взаимно однозначной, ч. т. д.

Следующее предложение можно рассматривать как аналог предложения 4.2 для случая неупреждающих линейных временных систем.

Предложение 4.8. Предположим, что

(i) система $S \subset (X \times Z_x) \times Y$ является линейной, неупреждающей и функциональной, а к тому же при любых $t \in T$ удовлетворяет условиям

$$S(x, z) \mid \overline{T}^t = S(\hat{x}, \hat{z}) \mid \overline{T}^t \,\&\, z \mid \overline{T}^t = \hat{z} \mid \overline{T}^t \Rightarrow x \mid \overline{T}^t = \hat{x} \mid \overline{T}^t$$

и

$$S(x, z) \mid \overline{T}^t = S(\hat{x}, \hat{z}) \mid \overline{T}^t \,\&\, x \mid \overline{T}^t = \hat{x} \mid \overline{T}^t \Rightarrow z \mid \overline{T}^t = \hat{z} \mid \overline{T}^t;$$

(ii) $\overline{S}_f \subset \Pi(Y \times Z_x)$ — семейство линейных неупреждающих функциональных систем, для которых из $S_f \in \overline{S}_f$ следует, что система $\mathcal{F}(S \circ S_f)$ функциональная и неупреждающая.

Пусть, кроме того, $\hat{S} = S_B = \{(x, y)\colon (\exists z)((x, z, y) \in S)\}$, и пусть $L(X, Y)$ — семейство всех линейных подсистем S' системы $\hat{S}$, для которых системы $S' \mid \overline{T}^t$ при любом t являются взаимно однозначными функциональными.

Тогда $\mathcal{F}_s(\overline{S}_f) = L(X, Y)$.

Доказательство. Пусть S' — произвольная система, принадлежащая $\mathcal{F}_s(\overline{S}_f)$. Тогда существует такая система $S_f \in \overline{S}_f$, что $S' = \mathcal{F}_s(S_f) = \mathcal{F}(S \circ S_f)$, а так как и S, и S_f линейны, условие (ii) гарантирует линейность и функциональность системы S'. Более того, поскольку $S' = \mathcal{F}(S \circ S_f)$, необходимо, чтобы $S' \subset S_B = \hat{S}$. А так как $S' \mid \overline{T}^t$, согласно предложению 4.7, является взаимно однозначно функциональной системой, то S' должна принадлежать $L(X, Y)$.

Предположим теперь, что S' — произвольная система, принадлежащая $L(X, Y)$. Поскольку $\hat{S} = S_B$, мы имеем $S' \subset S_B$

Пусть

$$S_f = \{(y, z)\colon (\exists x)\,((x, y) \in S' \,\&\, (x, z, y) \in S)\} = \mathscr{S}_s(S').$$

Очевидно, что S_f линейна. Предположим, что $(y, z) \in S_f$ и $(\hat{y}, \hat{z}) \in S_f$. Тогда

$$(\exists x)\,(\exists \hat{x})\,(y = S'(x) \,\&\, \hat{y} = S'(\hat{x}) \,\&\, y = S(x, z) \,\&\, \hat{y} = S(\hat{x}, \hat{z})).$$

Предположим, кроме того, что $y \mid \overline{T}^t = \hat{y} \mid \overline{T}^t$. Но поскольку $S' \mid \overline{T}^t$ взаимно однозначно функциональна, то $x \mid \overline{T}^t = \hat{x} \mid \overline{T}^t$, а значит, $z \mid \overline{T}^t = \hat{z} \mid \overline{T}^t$. Таким образом, система S_f линейная, неупреждающая и функциональная. Так как, в силу предложения 4.2, $\mathscr{F}(S \circ S_f) = S'$, то система $\mathscr{F}(S \circ S_f)$ является неупреждающей и функциональной, откуда $S_f \in \overline{S}_f$, ч. т. д.

Взаимосвязь между функциональной управляемостью и возможностью сделать систему автономной для случая линейных неупреждающих временных систем устанавливается в следующем предложении, которое можно рассматривать как аналог предложения 4.4. Будем считать, что входной каскад $H\colon X \times Z_x \to X_0$ в этом предложении такой же, как и в предложении 4.6. Тогда справедливо следующее

Предложение 4.9. Пусть $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ и $Z_x = Z_{x_1} \times \ldots \times Z_{x_n}$. Пусть, кроме того,

(i) система $S_0\colon X_0 \to Y$ линейная, неупреждающая и удовлетворяет следующему условию:

$$(\forall t)\,(\forall x)\,(S_0(x) \mid \overline{T}^t = 0 \Rightarrow x \mid \overline{T}^t = 0);$$

(ii) $\overline{S}_f \subset \Pi\,(Y \times Z_x)$ — семейство линейных неупреждающих функциональных систем, таких, что если $S_f \in \overline{S}_f$, то $\mathscr{F}\,((H \circ S_0) \circ S_f)$ также является функциональной и неупреждающей;

(iii) для каждой пары (X_i, Y_i) найдется такое линейное отображение $S_i\colon X_i \to Y_i$, что для любого $t \in T$ система $S_i \mid \overline{T}^t$ определяет некоторое взаимно однозначное соответствие.

Тогда для функциональной управляемости S_0 необходимо и достаточно, чтобы систему $S = H \circ S_0$ можно было сделать автономной с помощью контура обратной связи из $\overline{S}_f$.

Если ослабить условия определения 4.1 (опустив, например, условие (iii) или позволив области определения S_i быть собственным подмножеством X_i), то ослабить удастся и условие (iv) предложения 4.4, условие (iii) предложения 4.6 и условие (iii) предложения 4.9.

Предложения 4.8 и 4.9 сформулированы для случая линейных неупреждающих временных систем. Однако очевидно, что после незначительных поправок они сохранят свою силу и для более общих неупреждающих временных систем.

(b) Автономность общих систем

Следуя ходу рассуждений предыдущего раздела, мы продолжим теперь изучение вопроса о возможности обеспечения авто-

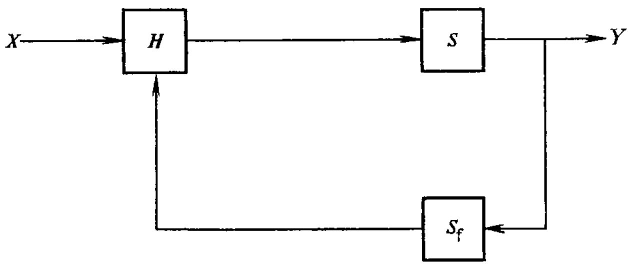


Рис. 4.3.

номности общих систем. На рис. 4.3 схематически представлена система, изучаемая в этом разделе. Здесь $S \subset X_0 \times Y$ есть некоторая общая система, H: $X \times Z \to X_0$ — ее входной каскад, а S_f: $Y \to Z$ — некоторый функциональный контур обратной связи.

Два следующих предложения представляют принципиальный интерес:

Предложение 4.10. Пусть $S_1 \subset X_1 \times Y_1$, $S_2 \subset X_2 \times Y_2$ и $S = S_1 + S_2 \subset (X_1 \times X_2) \times (Y_1 \times Y_2)$. Тогда для функциональной управляемости системы S необходимо и достаточно, чтобы функционально управляемыми были S_1 и S_2.

Предложение 4.11. Пусть $S \subset X_0 \times Y$ и $\hat{S} \subset X \times Y$ — системы, а H: $X \times Z \to X_0$ — входной каскад. Предположим, что существует такой контур обратной связи S_f: $Y \to Z$, что $\hat{S} = \mathcal{F}(H \circ S \circ S_f)$. Система S является функционально управляемой, если функционально управляема система $\hat{S}$.

Доказательство этого утверждения вытекает из соотношения $\mathcal{R}(\hat{S}) \subset \mathcal{R}(S)$.

Предложение 4.12. Пусть $S \subset X_0 \times Y$ — некоторая функционально управляемая система, и пусть $H\colon X \times Z \to X_0$ — входной каскад. Произвольную функционально управляемую систему $\hat{S} \subset X \times Y$ можно представить в виде $\mathscr{F}(H \circ S \circ S_f)$, где $S_f\colon Y \to Z$ — некоторый контур обратной связи, тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y$ найдется такое $z \in Z$, что

(i) $H((y)\hat{S},\ z) \subset (y)\ S$;

(ii) $H(x, z) \in (y)S \Rightarrow x \in (y)\ \hat{S}$,

где $(y)\ S = \{x\colon (x, y) \in S\}$ и $(y)\ \hat{S} = \{x\colon\ (x, y) \in \hat{S}\}$ определены в § 1.

Доказательство. Докажем сначала достаточность. Для этого определим множество $V(y)$, потребовав, чтобы

$$z \in V(y) \Leftrightarrow (H((y)\ \hat{S}, z) \subset (y)\ S)$$

и

$$H(x, z) \in (y)\ S \Rightarrow x \in (y)\ \hat{S}.$$

По предположению, $V(y) \neq \varnothing$. Используя соответствие $y \mapsto V(y)$ и аксиому выбора, построим некоторую функцию $S_f\colon Y \to Z$. Мы утверждаем, что $\hat{S} = \mathscr{F}(H \circ S \circ S_f)$. Включение $\hat{S} \subset \mathscr{F}(H \circ S \circ S_f)$ очевидно. Чтобы доказать обратное включение $\hat{S} \supset \mathscr{F}(H \circ S \circ S_f)$, выберем произвольную пару $(x, y) \in \mathscr{F}(H \circ S \circ S_f)$. Тогда существуют такие $z \in Z$ и $x_0 \in X_0$, что $H(x, z) = x_0$, $(x_0, y) \in S$ и $S_f(y) = z$. Значит, $H(x, z) \in (y)\ S$, откуда в свою очередь вытекает, что $x \in (y)\ \hat{S}$ и потому $(x, y) \in \hat{S}$.

Чтобы доказать необходимость, предположим, что $\hat{S} = \mathscr{F}(H \circ S \circ S_f)$. Тогда $(y)\ \hat{S} = \{x\colon H(x, S_f(y)) \in (y)\ S\}$ и, следовательно, $H((y)\ \hat{S},\ S_f(y)) \subset (y)\ S$. Пусть $H(x, S_f(y)) \in (y)\ S$. Тогда $(x, y) \in \mathscr{F}(H \circ S \circ S_f) = \hat{S}$ и, следовательно, $x \in (y)\ \hat{S}$, ч. т. д.

Предложение 4.13. Пусть $S \subset X_0 \times Y$ — некоторая система, а $H\colon X \times Z \to X_0$ — входной каскад. Предположим, что $S_1 \subset X_1 \times Y_1$ и $S_2 \subset X_2 \times Y_2$ — такие управляемые системы, что существует система $\hat{S} \subset X \times Y$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $\hat{S} = S_1 + S_2$;

(ii) для любого $y \in \mathscr{R}(S)$ найдется такое $z \in Z$, что

(α) $H((y)\ \hat{S}, z) \subset (y)\ S$,

(β) $H(x, z) \in (y)\ S \Rightarrow x \in (y)\ \hat{S}$.

Систему S можно разложить на автономные подсистемы S_1 и S_2 с помощью функционального контура обратной связи тогда и только тогда, когда S функционально управляема.

Доказательство. Необходимость сразу вытекает из предложения 4.11 и функциональной управляемости систем S_1 и S_2 (а значит, согласно предложению 4.10, и системы $S_1 + S_2$). В свою очередь достаточность является следствием предложения 4.12, ч. т. д.

Предложения 4.12 и 4.13 справедливы и для случая линейных систем.

Предложение 4.14. Пусть $S \subset X_0 \times Y$ — некоторая функциональная управляемая система, а H: $X \times Z \to X_0$ — линейный входной каскад.

Любую функционально управляемую линейную систему $\hat{S} \subset \subset X \times Y$ можно представить в виде $\mathscr{F}(H \circ S \circ S_f)$, где S_f — некоторый линейный функциональный контур обратной связи S_f: $Y \to Z$, тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y$ найдется такое $z \in Z$, что

(i) $H((y)\hat{S}, z) \subset (y) S$;

(ii) $H(x, z) \in (y) S \Rightarrow x \in (y) \hat{S}$.

Доказательство. Доказать необходимость утверждений теоремы можно точно так же, как при доказательстве предложения 4.12. Для того же, чтобы доказать достаточность, мы можем ограничиться построением некоторого линейного контура обратной связи S_f : $Y \to Z$. Определим $V(y)$ так же, как в доказательстве предложения 4.12. Мы утверждаем, что для любых скаляров α и β

$$z \in V(y) \text{ и } \hat{z} \in V(\hat{y}) \Rightarrow \alpha z + \beta \hat{z} \in V(\alpha y + \beta \hat{y}).$$

Чтобы убедиться в этом, предположим, что $z \in V(y)$ и $\hat{z} \in V(\hat{y})$. Прежде всего докажем, что

$$H(x, \alpha z + \beta \hat{z}) \in (\alpha y + \beta \hat{y}) S \Rightarrow x \in (\alpha y + \beta \hat{y}) \hat{S}.$$

Для этого выберем $x_1 \in X$ так, чтобы $H(x_1, z) \in (y) S$. Положим затем $x_2 = (1/\beta)(x - \alpha x_1)$, где предполагается, что $\beta \neq 0$, поскольку в случае $\beta = 0$ приведенное выше утверждение очевидно. Но тогда $x = \alpha x_1 + \beta x_2$ и, следовательно,

$$H(x, \alpha z + \beta \hat{z}) = \alpha H(x_1, z) + \beta H(x_2, \hat{z}).$$

Но, по предположению,

$$(\alpha H(x_1, z) + \beta H(x_2, \hat{z}), \alpha y + \beta \hat{y}) \in S, \quad (\alpha H(x_1, z), \alpha y) \in S$$

и, значит, $(\beta H(x_2, \hat{z}), \beta\hat{y}) \in S$, откуда $H(x_2, \hat{z}) \in (\hat{y})\, S$. По предположению, $x_1 \in (y)\, \hat{S}$ и $x_2 \in (\hat{y})\, \hat{S}$. Таким образом, $x \in (\alpha y + \beta\hat{y})\hat{S}$.

Чтобы доказать включение

$$H((\alpha y + \beta\hat{y})\, S,\ \alpha z + \beta\hat{z}) \subset (\alpha y + \beta\hat{y})\, S,$$

возьмем $x \in (\alpha y + \beta\hat{y})\, \hat{S}$. Так как система $\hat{S}$ функционально управляема, найдется такое $\hat{x} \in X$, что $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{S}$. Следовательно, $(x - \beta\hat{x}, \alpha y) \in \hat{S}$. Отсюда
$H(x, \alpha z + \hat{\beta} z) = \alpha H((1/\alpha)(x - \beta\hat{x}), z) + \beta H(\hat{x}, \hat{z}) \in (\alpha y + \beta\hat{y})\, S$, т. е.

$$H((\alpha y + \beta\hat{y})\, \hat{S},\ \alpha z + \beta\hat{z}) \subset (\alpha y + \hat{\beta} y)\, S$$

при условии, что $\alpha \neq 0$, поскольку случай $\alpha = 0$ очевиден.

Определим, наконец, $\hat{S}_f \subset Y \times Z$, потребовав, чтобы

$$(y, z) \in \hat{S}_f \iff z \in V(y).$$

Тогда контур обратной связи $\hat{S}_f$ линеен, и, используя лемму Цорна, можно показать, что существует такое линейное отображение S_f: $Y \to Z$, что $\{(y, S_f(y)) : y \in Y\} \subset \hat{S}_f$, причем S_f как раз и будем искомым линейным контуром обратной связи, ч. т. д.

Предложение 4.15. Пусть $S \subset X_0 \times Y$ — линейная система, а H: $X \times Z \to X_0$ — линейный входной каскад. Предположим также, что $S_1 \subset X_1 \times Y_1$ и $S_2 \subset X_2 \times Y_2$ — такие функционально управляемые линейные системы, что существует система $\hat{S} \subset X \times Y$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $\hat{S} = S_1 + S_2$;

(ii) для любого $y \in \mathscr{R}(S)$ найдется такое $z \in Z$, что

(α) $H((y)\,\hat{S}, z) \subset (y)\, S$,

(β) $H(x, z) \in (y)\, S \Rightarrow x \in (y)\, \hat{S}$.

Систему S можно разложить на автономные подсистемы S_1 и S_2 с помощью линейной обратной связи в том и только в том случае, когда система S функционально управляема.

Доказательство необходимости получается сразу из предложения 4.11, поскольку S_1 и S_2 функционально управляемы (а значит, согласно предложению 4.10, функционально управляема и система $S_1 + S_2$). Доказательство же достаточности вытекает из предложения 4.14, ч. т. д.

В качестве примера рассмотрим систему $S \subset X_0 \times Y$, описываемую уравнением $\dot{y} = Ay + Bx_0$, причем $X_0 = L_2(0, \infty)$, A —

матрица размера $n \times n$ и B — невырожденная матрица размера $n \times n$.

В этом случае система S функционально управляема. Рассмотрим систему с обратной связью, изображенную на рис. 4.4,

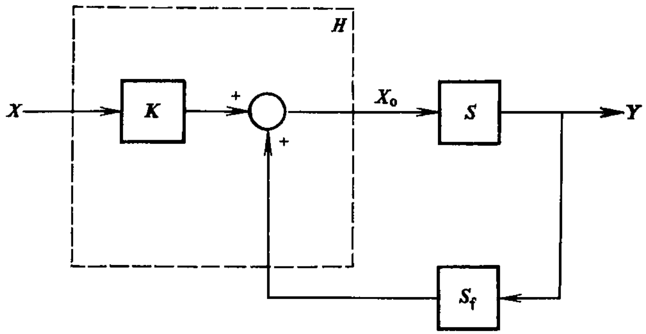


Рис. 4.4.

где $X = L_2(0, \infty)$. Пусть системы $S_i \subset X_i \times Y_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ определяются уравнениями $\dot{y}_i = \alpha_i y_i + \beta_i x_i$, где x_i и y_i — скалярные функции от t, а α_i и β_i — постоянные вещественные параметры. Предположим, что все $\beta_i \neq 0$ и $x_i \in L_2(0, \infty)$. Тогда система

$$\hat{S} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n \subset X \times Y$$

функционально управляема. Предположим, что S развязана в $S_1, \ldots, S_n$. Тогда для любого y должно существовать такое z, что $H((y)\hat{S}, z) \subset (y) S$. Поэтому если x_i и y_i удовлетворяют уравнениям $\dot{y}_i = \alpha_i y_i + \beta_i x_i$, то

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ y_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ y_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + B\left(K\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + z_i\right).$$

Значит,

$$B^{-1}(\alpha_i I - A)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + (\beta_i B^{-1} - K)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = z_i$$

и z_i должно быть независимым от x_i. Поэтому для каждого i

$$(\beta_i B^{-1} - K)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Таким образом,

$$z_i = B^{-1}(\alpha_i I - A)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Но отсюда $K = B^{-1}\beta$, а $S_f = B^{-1}(\alpha - A)$, где

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & \beta_n \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

На самом деле S можно разложить на автономные подсистемы $S_1, \dots, S_n$, если $K = B^{-1}\beta$ и $S_f = B^{-1}(\alpha - A)$. Более того, если ранг $B = n$ (где B — матрица размера $n \times n$), то можно использовать аналогичные рассуждения.

Предложение 4.12 можно распространить, дополнив его некоторыми новыми условиями, и на любые неупреждающие системы.

Предложение 4.16. Пусть $S \subset X_0 \times Y$ — функционально управляемая система с неупреждающей реакцией ρ, а $H\colon X \times Z \to X_0$ — входной каскад. Предположим также, что $\hat{S} \subset X + Y$ — заданная функционально управляемая неупреждающая система с неупреждающей реакцией $\hat{\rho}$. Пусть ρ, $\hat{\rho}$ и H удовлетворяют соответственно следующим условиям:

(1a) $\rho(c, x) \mid \bar{T}^t = \rho(c, \hat{x}) \mid \bar{T}^t \Rightarrow x \mid \bar{T}^t = \hat{x} \mid \bar{T}^t$;

(1b) $(\forall c)(\forall y \in \mathcal{R}(S))(\exists x)(\rho(c, x) = y)$;

(2a) $\hat{\rho}(c, x) \mid \bar{T}^t = \hat{\rho}(c, \hat{x}) \mid \bar{T}^t \Rightarrow x \mid \bar{T}^t = \hat{x} \mid \bar{T}^t$;

(2b) $(\forall c)(\forall y \in \mathcal{R}(S))(\exists x)(\hat{\rho}(c, x) = y)$;

(3) $H(x, z) \mid \bar{T}^t = H(\hat{x}, \hat{z}) \mid \bar{T}^t \,\&\, x \mid \bar{T}^t = \hat{x} \mid \bar{T}^t \Rightarrow z \mid \bar{T}^t = \hat{z} \mid \bar{T}^t$.

Тогда существует такой неупреждающий контур обратной связи S_f: $Y \to Z$, что $\mathcal{F}(H \circ S \circ S_f) = \hat{S}$ в том и только в том случае, когда для любого $y \in Y$ найдется такое $z \in Z$, что

(i) $H((y)\hat{S}, z) \subset (y) S$;

(ii) $H(x, z) \in (y) S \Rightarrow x \in (y) \hat{S}$.

Доказательство необходимости очевидно. Нам известно также, что из (i) и (ii) следует существование такого контура обратной связи S_f: $Y \to Z$, что $\mathcal{F}(H \circ S \circ S_f) = \hat{S}$. Поэтому для доказательства достаточности нам осталось показать, что если $\mathcal{F}(H \circ S \circ S_f) = \hat{S}$ и если сформулированные выше условия выполнены, то соответствующий контур обратной связи S_f является неупреждающим.

Предположим, что $y \in \mathcal{R}(\hat{S})$, $\hat{y} \in \mathcal{R}(\hat{S})$. Тогда найдутся такие c, d, x и $\hat{x}$, что

$$y = \hat{\rho}(d, x) = \rho(c, H(x, S_f(y))) \text{ и } \hat{y} = \hat{\rho}(d, \hat{x}) = \rho(c, H(\hat{x}, S_f(\hat{y}))).$$

Предположим дополнительно, что $y \mid \overline{T}^t = \hat{y} \mid \overline{T}^t$. Тогда, согласно предположениям теоремы, мы имеем $x \mid \overline{T}^t = \hat{x} \mid \overline{T}^t$ и

$$H(x, S_f(y)) \mid \overline{T}^t = H(\hat{x}, S_f(\hat{y})) \mid \overline{T}^t.$$

Отсюда $S_f(y) \mid \overline{T}^t = S_f(\hat{y}) \mid \overline{T}^t$ и, следовательно, контур обратной связи S_f является неупреждающим, ч. т. д.

5. АБСТРАКТНАЯ ЗАДАЧА О РАЗМЕЩЕНИИ ПОЛЮСОВ

Задачу о размещении полюсов обычно рассматривают для класса линейных инвариантных во времени систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Уже давно доказано, что для этого класса систем существование решения указанной задачи эквивалентно управляемости системы по состояниям. Этот результат с принципиальной точки зрения представляется достаточно интересным и заслуживает специального изучения с наших весьма общих позиций. Однако он весьма сильно опирается на особенности структуры дифференциальных уравнений. В частности, между возможностью матричного описания систем и существованием решения задачи о размещении полюсов существует весьма тесная связь. Поэтому для того, чтобы решить эту задачу на абстрактном уровне, необходимо прежде всего модифицировать саму постановку задачи, приспособив ее к принятому нами уровню рассмотрения.

В настоящем параграфе мы будем рассматривать системы с обратной связью лишь такого типа, который изображен на рис. 5.1, где

(i) подсистема S является сильно неупреждающей инвариантной во времени линейной динамической системой $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$;

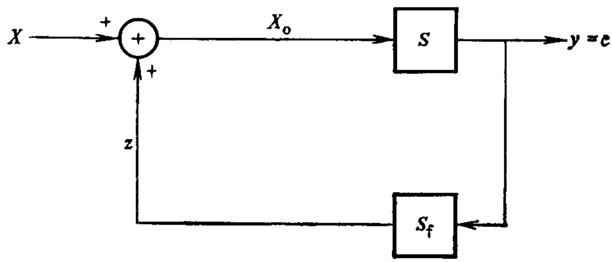


Рис. 5.1.

(ii) ее пространство состояния конечномерно и совпадает с пространством значений выходной величины, т. е. $B = C$ и $Y \subset \subset C^T$;

(iii) ее входной алфавит A совпадает с пространством состояний подсистемы S, т. е. $A = C$;

(iv) контур обратной связи является линейной статической функциональной системой, т. е. S_f: $C \to C$ $(= A)$ и $S_f(y)(t) = S_f(y(t))$; класс систем S_f, рассматриваемых в этом параграфе, будет обозначаться через $\bar{S}_f$;

(v) входной каскад описывается уравнением $H(x, z) = x + z$;

(vi) рассматриваемая система S удовлетворяет следующим условиям: для любых $S_f \in \bar{S}_f$, $c \in C$, $x \in X$ и $t \in T$

(α) уравнение $\rho_0(c, x + S_f(y)) \mid T_t = y \mid T_t$ имеет единственное решение y;

(β) $\rho_0(c, x + S_2(y)) = y \,\&\, \rho_0(c, \hat{x} + S_2(\hat{y})) = \hat{y} \,\&\, x^t = \hat{x}^t \Rightarrow \bar{y}^t = \bar{\hat{y}}^t$.

Предположение (vi) (α) позволяет определить функцию $\hat{\varphi}_{0t}$: $C \times X^t \to C$ следующим образом:

$$\hat{\varphi}_{0t}(c, x^t) = \varphi_{0t}(c, x^t + (S_f(y)) \mid T^t),$$

где y — решение уравнения $\rho_0(c, x^t \cdot x_t + S_f(y)) = y$, а x_t произвольно.

Более того, нетрудно показать, что семейство $\{\varphi_{0t}: t \in T\}$ обладает свойством композиции, т. е.

$$\hat{\varphi}_{0t}(c, x^t \cdot x_{tt'}) = \hat{\varphi}_{0\tau}(\hat{\varphi}_{0t}(c, x^t), F^{-t}(x_{tt'})),$$

где $\tau = t' - t$.

Это можно доказать, исходя из инвариантности во времени семейства $\bar{\varphi}$ и из предположений (iv) и (vi). [Обратите при этом внимание на то, что S_f коммутирует с F^t, т. е. $F^t(S_f(y)) = S_f(F^t(y))$.]

Назовем $\hat{\varphi}_{0t}$ *функцией перехода состояний системы с обратной связью*, и, как обычно, будем писать

$$\hat{\varphi}_{0t}(c, x^t) = \hat{\varphi}_{10t}(c) + \hat{\varphi}_{20t}(x^t).$$

В сделанных выше предположениях можно сформулировать следующий абстрактный эквивалент задачи о размещении полюсов:

Определение 5.1. Пусть S — некоторая линейная динамическая система указанного выше типа. Пусть также $f(w) = w^n + \alpha_{n-1}w^{n-1} + \ldots + \alpha_0$ — произвольный нормированный (с коэффициентом $+1$ при старшем члене) полином от независимой переменной w, коэффициенты которого принадлежат полю $\mathcal{A}$ (над которым определена система S), $\alpha_0 \neq 0$, а n совпадает с размерностью пространства C. Система S принадлежит классу систем с произвольно назначаемыми полюсами тогда и только тогда, когда для любого $t > 0$ существует такой контур обратной связи $S_f \in \bar{S}_f$, что

$$f(\hat{\varphi}_{10t}) = (\hat{\varphi}_{10t})^n + \alpha_{n-1}(\hat{\varphi}_{10t})^{n-1} + \ldots + \alpha_0 I = 0,$$

где операции сложения и умножения на скаляр понимаются поточечно, возведение $\hat{\varphi}_{10t}$ в степень — как результат композиции этой функции с самой собой соответствующее число раз, а отображение $I: C \to C$ есть тождественное отображение.

Взаимосвязь между принадлежностью системы к классу систем с произвольно размещаемыми полюсами и ее управляемостью по состояниям устанавливается в следующем предложении:

Предложение 5.1. Пусть S — некоторая линейная динамическая система указанного выше типа, а размерность ее пространства состояний C равна n. Предположим, что поле $\mathcal{A}$ содержит более чем $n + 1$ элементов, что реакция системы в пространстве состояний S, т. е. $\varphi_{10t}: C \to C$, представляет собой изоморфизм. Тогда, если полюсы системы S произвольно размещаемы, система управляема из нуля.

Доказательство. Выберем произвольное состояние $\hat{c} \in C$. Поскольку φ_{10t} — изоморфизм, найдется такое $\alpha_0 \neq 0$, что $(\varphi_{10t})^n + \alpha_0 I \equiv L_t$ также является изоморфизмом. Выберем тогда S_t так, чтобы $\hat{\varphi}_{10t}$ удовлетворяло уравнению $(\hat{\varphi}_{10t})^n + \alpha_0 I = 0$. В этом случае $(\hat{\varphi}_{10t})^n - (\varphi_{10t})^n = -L_t$. Но так как L_t — изоморфизм, то найдется такое $c \in C$, что $((\hat{\varphi}_{10t})^n - (\varphi_{10t})^n)(c) = \hat{c}$, т. е. (в силу композиционного свойства функций перехода) $\hat{\varphi}_{10\hat{t}}(c) - \varphi_{10\hat{t}}(c) = \hat{c}$, где $\hat{t} = nt$. Более того, согласно определению $\hat{\varphi}_{10t}$, для любого $c \in C$ и $S_t \in \bar{S_t}$

$$(\hat{\varphi}_{10\hat{t}} - \varphi_{10\hat{t}})(c) = \varphi_{0t}(0, S_t(y)^{\hat{t}}),$$

где y удовлетворяет соотношению $\rho_0(c, S_t(y)) = y$. Следовательно,

$$\varphi_{0\hat{t}}(0, S_t(y)^t) = \hat{c},$$

что и требовалось доказать.

В приведенном выше предложении предполагалось, что φ_{10t} есть изоморфизм. Но, как показывает предложение 4.3 гл. VII, это утверждение оказывается справедливым при довольно слабых ограничениях, и, в частности, так обстоит дело с любыми линейными инвариантными во времени системами, описываемыми дифференциальными уравнениями.

6. УПРОЩЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ [1])

В предыдущих параграфах мы рассматривали задачу декомпозиции системы по сути дела на две подсистемы довольно общего вида. В этом же параграфе мы обратимся к декомпозиции систем на семейство подсистем определенного и существенно более простого типа.

Будем рассматривать инвариантные во времени динамические системы с дискретным временем, описываемые отображениями

$$\rho_t: C \times X_t \to Y_t, \qquad \varphi_{tt'}: C \times X_{tt'} \to C,$$

где $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Для упрощения изложения предположим также следующее:

(i) Если рассматриваемая система является (сильно) неупреждающей, а с практической точки зрения именно это самый интересный случай, ее динамика полностью описывается семейством $\bar{\varphi} = \{\varphi_{tt'}: t, t' \in T\}$. В этом параграфе мы ограничимся поэтому

[1]) См. Хартманис и Стирнз [12].

рассмотрением лишь семейства $\bar{\varphi}$, которое будем называть системой переходов состояний, и будем заниматься лишь декомпозицией этого семейства.

(ii) Поскольку все рассматриваемые здесь системы инвариантны во времени и их время дискретно, все семейство $\bar{\varphi}$ можно охарактеризовать одним отображением, а именно φ_{01}: $C \times A \to C$, причем φ_{0t} или $\varphi_{tt'}$ можно однозначно определять через φ_{01}, используя свойство композиции функций перехода состояний. Обозначим φ_{01} через φ и будем называть это φ *системой переходов состояний.*

(iii) Предположим, кроме того, что $X = A^T$ и $\bar{X} = \bigcup_{t \in T} X^t$.

Тогда, если определить на $\bar{X}$ операцию сочленения $\circ$, потребовав, чтобы $\circ : \bar{X} \times \bar{X} \to \bar{X}$ так, что $x^t \circ \hat{x}^{t'} = x^t \cdot F^t(\hat{x}^{t'})$, где F^t — оператор сдвига, то $\bar{X}$ становится по существу свободным моноидом над A. Нейтральный элемент этого моноида условимся обозначать через x^0. Рассматривая в дальнейшем структуру множества $\bar{X}$, мы будем обращаться с $\bar{X}$ как с моноидом в указанном выше смысле.

Для упрощения обозначений и для обеспечения преемственности со стандартными источниками определим для систем переходов состояний особую форму каскадного соединения.

Определение 6.1. Пусть φ_1: $C_1 \times A \to C_1$ и φ_2: $C_2 \times (C_1 \times A) \to C_2$ — две системы переходов состояний, где A — входной алфавит системы φ_1, а $C_1 \times A$ — входной алфавит системы φ_2. Тогда *каскадным соединением* φ_1 и φ_2 называется такая система

$$\hat{\varphi}: (C_1 \times C_2) \times A \to C_1 \times C_2,$$

что

$$\hat{\varphi}((c_1, c_2), a) = (\varphi_1(c_1, a), \varphi_2(c_2, (c_1, a))).$$

Определение 6.2. Система переходов состояний φ: $C \times A \to C$ допускает *декомпозицию в каскадное соединение* двух систем переходов состояний φ_1: $C_1 \times A \to C_1$ и φ_2: $C_2 \times (C_1 \times A) \to C_2$ тогда и только тогда, когда найдется такое отображение R: $C_1 \times C_2 \to C$, что оно окажется сюръективным, а соответствующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
(C_1 \times C_2) & \times & A & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & C_1 \times C_2 \\
\downarrow R & & \downarrow I & & \downarrow R \\
C & \times & A & \xrightarrow{\varphi} & C
\end{array}$$

коммутативной.

С интуитивной точки зрения понятно, что φ допускает декомпозицию в каскадное соединение φ_1 и φ_2 тогда и только тогда, когда $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot R = \hat{\varphi} \cdot R$. (Строго говоря, для того чтобы $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot R$ можно было согласовать с определением каскадного соединения из § 1, нужно предварительно несколько изменить обозначения для φ_1 и φ_2.)

Принцип декомпозиции систем переходов состояний базируется на следующем результате:

Предложение 6.1. Пусть $\varphi: C \times A \to C$ — некоторая система переходов состояний. Тогда для заданного класса подмножеств $\{C_\alpha: \alpha \in C_1\}$ множества C, удовлетворяющего условиям

(i) $C = \bigcup_{\alpha \in C_1} C_\alpha$,

(ii) $(\forall C_\alpha)(\forall a)(\exists C_\beta)(\varphi(C_\alpha, a) \subset C_\beta)$,

всегда найдутся такое множество C_2 и две такие системы переходов состояний $\varphi_1: C_1 \times A \to C_1$ и $\varphi_2: C_2 \times (C_1 \times A) \to C_2$, что φ допускает декомпозицию в каскадное соединение систем φ_1 и φ_2.

Доказательство. Обозначим через $\hat{R} \subset C_1 \times C$ такую общую систему, что $(\alpha, c) \in \hat{R} \Leftrightarrow c \in C_\alpha$. Обозначим через C_2 множество глобальных состояний системы $\hat{R}$. Это значит, что существует такое отображение $R: C_1 \times C_2 \to C$, что $c \in C_\alpha \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\alpha, c) \in \hat{R} \Leftrightarrow (\exists c_2)(c = R(\alpha, c_2))$. Определим затем $\varphi_1: C_1 \times$ $\times A \to C_1$ и $\varphi_2: C_2 \times (C_1 \times A) \to C_2$ так, чтобы $\varphi_1(\alpha, a) =$ $= \beta \Rightarrow \varphi(C_\alpha, a) \subset C_\beta$ и

$$\varphi_2(c_2, (\alpha, a)) = c_2' \Rightarrow \varphi(R(\alpha, c_2), a) = R(\varphi_1(\alpha, a), c_2').$$

При этом может оказаться, что соотношение $\varphi(C_\alpha, a) \subset C_\beta$ выполняется при нескольких β. Тогда для определения φ_1 годится любое из этих β. Что же касается φ_2, то мы покажем, что отношение $\varphi(R(\alpha, c_2), a) = R(\varphi_1(\alpha, a), c_2')$ выполняется по крайней мере для одного c_2'. Действительно, из определения R вытекает, что $R(\alpha, c_2) \in C_\alpha$. Пусть $\varphi_1(\alpha, a) = \beta$. Но тогда, согласно определению φ_1, мы имеем $\varphi(C_\alpha, a) \subset C_\beta$, и, значит, $\varphi(R(\alpha, c_2), a) \in$ $\in C_\beta$. Поэтому существует такое $c_2' \in C_2$, что $\varphi(R(\alpha, c_2), a) =$ $= R(\beta, c_2')$, что и требовалось доказать. Если приведенному выше условию удовлетворяет несколько c_2', для определения φ_2 можно воспользоваться любым из них. Пусть теперь

$$\hat{\varphi}((c_1, c_2), a) = (\varphi_1(c_1, a), \varphi_2(c_2, (c_1, a))).$$

Покажем тогда, что $R[\hat{\varphi}((c_1, c_2), a)] = \varphi(R(c_1, c_2), a)$. Положим $\varphi_2(c_2, (c_1, a)) = c_2'$. По определению φ_2, это значит, что $\varphi(R(c_1, c_2), a) = R(\varphi_1(c_1, a), c_2')$. Следовательно, $R[\hat{\varphi}((c_1, c_2), a)] = \varphi(R(c_1, c_2), a)$. Более того, поскольку $\bigcup_{\alpha \in C_1} C_\alpha = C$, отображение R является сюръективным, ч. т. д.

Воспользуемся теперь предложением 6.1 и методом его доказательства для исследования случая, когда пространство состояний C системы переходов состояний конечно. Договоримся обозначать через C_α множество $C - \{\alpha\}$, где $\alpha \in C$. Как нетрудно видеть, семейство $\{C_\alpha\colon \alpha \in C\}$ удовлетворяет условиям предложения 6.1. Другими словами, система переходов состояний с конечным пространством состояний всегда допускает каскадную декомпозицию. Для того чтобы обратиться к более сильным результатам, относящимся к декомпозиции систем с конечным множеством состояний, нам понадобятся новые определения.

Определение 6.3. Пусть $\varphi\colon C \times A \to C$ — некоторая система переходов состояний, и пусть для каждого $a \in A$ отображение $\varphi_a\colon C \to C$ определяется условием $\varphi_a(c) = \varphi(c, a)$. Если отображение φ_a сюръективно, то входной символ a мы будем называть *перестановочным*. Если отображение φ_a постоянно, то входной символ a мы будем называть *сбрасывающим*. Если же отображение φ_a тождественно, то входной символ a будем называть *задерживающим*.

Определение 6.4. Пусть $\varphi\colon C \times A \to C$ — некоторая система переходов состояний. Если все входные символы этой системы перестановочные, то мы будем называть эту систему *P-системой*. Если все ее входные символы сбрасывающие или задерживающие, то мы будем называть ее *R-системой*. Наконец, если все входные символы системы либо перестановочные, либо сбрасывающие, то мы будем называть ее *P — R-системой*.

Возвратимся снова к случаю систем с конечным множеством состояний, для которых $C_\alpha = C - \{\alpha\}$. Если входной символ a является перестановочным для системы φ, то, согласно доказательству предложения 6.1, он является перестановочным и для компоненты φ_1. Если же символ a не перестановочен, то найдется такое $C_\beta \in \{C_\alpha\colon \alpha \in C\}$, что $\varphi(C_\alpha, a) \subset C_\beta$ при любых $a \in C_1 = C$. А это значит, что входной символ a оказывается сбрасывающим для φ_1. Поэтому φ_1 всегда является P—R-системой. Заметим также, что мощность множества C_2 может быть меньше, чем мощность C_1 или C. Поэтому, если последовательно повторить процедуру каскадной декомпозиции, намеченную в предложении 6.1, для системы переходов состояний, то в конце концов мы представим ее в виде цепочки каскадно соединенных P—R-

систем, ибо система переходов состояний с пространством состояний, состоящим из двух элементов, обязательно должна быть $P-R$-системой. Все это приводит нас к следующему результату:

Предложение 6.2. Любая конечная система переходов состояний допускает декомпозицию в каскадное соединение $P-R$-систем.

Область определения системы переходов состояний $\varphi: C \times A \to C$ можно естественным образом расширить до $C \times \overline{X}$, где $\overline{X}$ — свободный моноид, порожденный A. Для этого достаточно положить $\varphi(c, x^t) = \varphi_{0t}(c, x^t)$. Определим $\varphi_x: C \to C$, потребовав, чтобы $\varphi_x(c) = \varphi(c, x)$. Нетрудно показать, что $\varphi_{x'} \cdot \varphi_x = \varphi_{x \cdot x'}$, где через $\varphi_{x'} \cdot \varphi_x$ мы обозначили обычную композицию двух функций φ_x и $\varphi_{x'}$. Поэтому $x \in \overline{X}$ можно рассматривать как отображение $x: C \to C$, договорившись, что $x(c) = \varphi_x(c)$ и $\Lambda(c) = c$, где $\Lambda = x^0$ — единичный элемент моноида $\overline{X}$. Начиная с этого момента мы будем рассматривать $\overline{X}$ как моноид отображений в указанном выше смысле.

Определим теперь отношение $E \subset \overline{X} \times \overline{X}$ следующим образом:

$$(x, x') \in E \Leftrightarrow (\forall c)(x(c) = x'(c)).$$

Как нетрудно видеть, это отношение является отношением эквивалентности. Более того, это есть отношение конгруэнтности относительно операции, порождающей моноид $\overline{X}$. Обозначим через $\overline{X}/E$ фактормножество $\{[x]: x \in \overline{X}\}$. В соответствии со сказанным выше на множестве $\overline{X}/E$ можно определить операцию

$$[x] \cdot [x'] = [x \cdot x'].$$

Множество $\overline{X}/E$ также является моноидом относительно этой новой операции.

Предложение 6.3. Пусть $\varphi: C \times A \to C$ — некоторая система переходов состояний, и пусть C_1 — некоторая группа, содержащаяся в $\overline{X}/E$, относительно операции моноида $\overline{X}/E$. Тогда система переходов состояний φ допускает декомпозицию в каскадное соединение двух систем переходов состояний $\varphi_1: C_1 \times A \to C_1$ и $\varphi_2: C \times (C_1 \times A) \to C$, заданных условиями

$$\varphi_1(c_1, a) = \begin{cases} c_1 \cdot [a], & \text{если } [a] \in C_1, \\ c_1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\varphi_2(c, (c_1, a)) = \begin{cases} c, & \text{если } [a] \in C_1, \\ c_1^{-1}((c_1 \cdot [a])(c)) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где c_1^{-1} есть элемент, обратный к элементу c_1 группы C_1.

Доказательство. Пусть R: $C_1 \times C \to C$ определяется условием

$$R(c_1, c) = c_1(c).$$

Тогда

$$R(\hat{\varphi}((c_1, c), a)) = R(\varphi_1(c_1, a), \varphi_2(c, (c_1, a))) =$$
$$= \varphi_1(c_1, a)(\varphi_2(c, (c_1, a))) = (c_1 \cdot [a])(c) = \varphi(R(c_1, c), a).$$

Более того, если $c_1 = [\Lambda] \in C_1$, то $c_1(c) = c$ и, значит, отображение R сюръективно, ч. т. д.

Вернемся еще раз к случаю конечного множества состояний. Предложение 6.2 показывает, что любая конечная система переходов состояний допускает декомпозицию в каскадное соединение P—R-систем. Применим теперь предложение 6.3 к P—R-системам. Обозначим через P множество всех перестановочных входных символов, а через P^* — свободный моноид над P. Нетрудно показать, что $P^*/E \subset \overline{X}/E$ является конечной группой. Более того, поскольку каждый элемент из P^* определяет некоторое сюръективное отображение, для любого a, являющегося сбрасывающим входным символом, мы имеем $[a] \notin P^*/E$. Поэтому если a — сбрасывающий входной символ, то $\varphi_2(c, (c_1, a))$ из предложения 6.3 не зависит от c, а если a — перестановочный символ, то $\varphi_2(c, (c_1, a))$ определяет тождественное отображение, где $C_1 = P^*/E$. Поэтому система φ_2 всегда является R-системой.

Предложение 6.4. Любая конечная система переходов состояний допускает декомпозиции в каскадное соединение P-систем и R-систем.

Обратимся теперь к системе φ_1 из предложения 6.3, но прежде всего вспомним следующее определение:

Определение 6.5. Подгруппа H группы G называется *нормальной* в том и только в том случае, когда для любого $a \in G$ справедливо равенство $aH = Ha$, где $aH = \{x: (\exists y)(y \in H \& x = a \cdot y)\}$.

Определение 6.6. Группа G называется *простой* в том и только в том случае, когда она не содержит нетривиальных (т. е. отличающихся от самой G или от тождественной группы) нормальных подгрупп.

Определение 6.7. Пусть φ: $C \times A \to C$ — некоторая система переходов состояний, а C — некоторая группа. Если группа C простая, то и систему φ мы будем называть *простой*.

Пусть φ: $C \times A \to C$ — система переходов состояний, пространство состояний которой является группой. Пусть G — некоторая группа, а отображение ψ: $C \to G$ — гомоморфизм групп.

Определим отношение $E_\psi \subset C \times C$ так, что

$$(c,\ c') \in E_\psi \Leftrightarrow \psi(c) = \psi(c').$$

Очевидно, отношение E_ψ является отношением конгруэнтности. Обозначим через H_ψ множество $\{c\colon \psi(c) = e\}$, где e — тождественный элемент группы G.

Предложение 6.5. Если для гомоморфизма групп $\psi\colon C \to G$ выполняется следующее условие: для любого $a \in A$

$$\psi(c) = \psi(c') \Rightarrow \psi(\varphi(c,\ a)) = \psi(\varphi(c',\ a)),$$

то система $\varphi\colon C \times A \to C$ допускает декомпозицию в каскадное соединение систем $\varphi_1\colon (C/E_\psi) \times A \to (C/E_\psi)$ и $\varphi_2\colon H_\psi \times ((C/E_\psi) \times A) \to H_\psi$.

Доказательство. Пусть $C_\alpha = [\alpha] \in C/E_\psi$, где $\alpha \in C$. Тогда $\bigcup\limits_{\alpha \in C} C_\alpha = C$. Более того, нетрудно показать, что, для любых C_α и $a \in A$, $\varphi(C_\alpha,\ a) \subset C_\beta$, где $\beta = \varphi(\alpha,\ a)$. Выберем для этого произвольное $c \in C_\alpha$. Это значит, что $\psi(c) = \psi(\alpha)$. Из свойств отображения ψ, сформулированных в предложении 6.5, следует, что $\psi(\varphi(c,\ a)) = \psi(\varphi(\alpha,\ a))$, т. е. что $\varphi(c,\ a) \in C_\beta$, где $\beta = \varphi(\alpha,\ a)$. Пусть теперь $h\colon C/E_\psi \to C$ есть некоторая функция выбора, т. е. пусть $h([\alpha]) \in C_\alpha$, где $\alpha \in C$. Определим затем $R\colon (C/E_\psi) \times H_\psi \to C$, потребовав, чтобы $R(C_\alpha,\ y) = h(C_\alpha)\cdot y$, где $y \in H_\psi$. Тогда

$$\begin{aligned} c \in C_\alpha &\Leftrightarrow \psi(c) = \psi(\alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists\, y)\,(y \in H_\psi \ \&\ c = \alpha y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists\, y)\,(\exists\, \hat{y})\,(y \in H_\psi \ \&\ \hat{y} \in H_\psi \ \&\ c = \alpha\hat{y}\cdot\hat{y}^{-1}y) = \\ &\Leftrightarrow (\exists\, y)\,(y \in H_\psi \ \&\ c = R(C_\alpha,\ y)). \qquad (\text{где } h([\alpha]) = \alpha\hat{y}) \end{aligned}$$

Доказательство завершается практически так же, как и для предложения 6.1, ч. т. д.

Вернемся опять к системе $\varphi_1\colon C_1 \times A \to C_1$ из предложения 6.3.

Предложение 6.6. Пусть $\varphi_1\colon C_1 \times A \to C_1$ есть каскадная компонента из предложения 6.3, и пусть $\psi\colon C_1 \to G$ есть произвольный гомоморфизм групп. Тогда из равенства $\psi(c_1) = \psi(c_1')$ следует, что при любом $a \in A$ справедливо равенство $\psi(\varphi_1(c,\ a)) = \psi(\varphi_1(c_1',\ a))$. Тогда если C_1 не является простой группой, то система переходов состояний φ_1 допускает декомпозицию в каскадное соединение $\varphi_{11}\colon (C_1/H) \times A \to (C_1/H)$ и $\varphi_{12}\colon H \times ((C_1/H) \times A) \to H$, где $H \subset C_1$ — нормальная подгруппа группы C_1.

Доказательство. Пусть $\psi(c_1) = \psi(c_1')$, а $[a] \in C_1$. Тогда, согласно определению φ_1,

$$\psi(\varphi_1(c_1, a)) = \psi(c_1 \cdot [a]) = \psi(c_1)\cdot\psi([a]) = \psi(c_1')\cdot\psi([a]) = \psi(\varphi_1(c_1', a)).$$

Если же $[a] \notin C_1$, то

$$\psi(\varphi_1(c_1, a)) = \psi(c_1) = \psi(c_1') = \psi(\varphi_1(c_1', a)).$$

Предположим теперь, что H — нормальная подгруппа группы C_1. Тогда существуют такая другая группа G и такой гомоморфизм групп ψ: $C_1 \to G$, что $H = H_\psi$ и $\alpha H = [\alpha]$, где $\alpha \in C_1$. Но тогда утверждение предложения получается прямо из предложения 6.5, ч. т. д.

Согласно предложению 6.6, система переходов состояний φ_1 обладает одним специфическим свойством: для любого гомоморфизма групп ψ и любого $a \in A$

$$\psi(c_1) = \psi(c_1') \Rightarrow \psi(\varphi_1, (c_1, a)) = \psi(\varphi_1(c_1', a)).$$

Этим свойством обладают и φ_{11}, и φ_{12}, если их определять так же, как это делалось для φ_1 и φ_2 в предложении 6.1. Отметим, что если φ: $C \times A \to C$ есть конечная система переходов состояний, то пространство состояний C_1 системы φ_1 из предложения 6.3 также конечно. Но это приводит нас к следующему результату:

Предложение 6.7. Если система переходов состояний φ: $C \times A \to C$ конечна, то она допускает декомпозицию в каскадное соединение систем переходов состояний, каждая из которых является либо простой, либо сбрасывающей.

Каждая сбрасывающая система допускает параллельную декомпозицию, которую для случая систем переходов состояний мы определим следующим образом:

Определение 6.8. Пусть φ: $C \times A \to C$ — некоторая система переходов состояний, а $\{\varphi_i: C_i \times A \to C_i: i = 1, \ldots, n\}$ — некоторое семейство систем переходов состояний. Семейство $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ называется *параллельной декомпозицией* системы φ, если

$$\bar{\varphi}((c_1, \ldots, c_n), a) = (\varphi_1(c_1, a), \ldots, \varphi_n(c_n, a))$$

и существует такое сюръективное отображение R: $C_1 \times \ldots$

$\ldots \times C_n \to C$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
(C_1 \times \ldots \times C_n) & \times & A & \xrightarrow{\bar\varphi} & C_1 \times \ldots \times C_n \\
\downarrow R & & \downarrow I & & \downarrow R \\
C & \times & A & \xrightarrow{\varphi} & C
\end{array}$$

коммутативна.

Предложение 6.8. Пусть $\varphi\colon C \times A \to C$ — некоторая сбрасывающая система. Тогда для любого заданного семейства множеств $\{C_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ и сюръективного отображения $R\colon C_1 \times \ldots \times C_n \to C$ найдется такое семейство систем переходов состояний $\{\varphi_i\colon C_i \times A \to C_i\colon i = 1, \ldots, n\}$, что $\bar\varphi = \{\varphi_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ является параллельной декомпозицией системы φ.

Доказательство. Пусть система переходов состояний $\varphi_i\colon C_i \times A \to C_i$ определена условием

$$\varphi_i(c_i, a) = \begin{cases} c_i, & \text{если } a \text{ — задерживающий входной символ, т. е. } \varphi_a \text{ — тождественная функция,} \\ c_{a_i}, & \text{если } a \text{ — сбрасывающий входной символ,} \end{cases}$$

где

$$\bar c_a = (c_{a_1}, \ldots c_{a_n}) \in C_1 \times \ldots \times C_n$$

и $R(\bar c_a) = \varphi(c, a)$ для каждого $c \in C$. Поскольку для сбрасывающих a отображение R сюръективно, очевидно, существует такое $\bar c_a \in C_1 \times \ldots \times C_n$, что при любых c имеет место равенство $R(\bar c_a) = \varphi(c, a)$. Если этому условию удовлетворяет более одного $\bar c_a$, то для определения φ_i можно воспользоваться любым из них. Покажем теперь, что R удовлетворяет коммутативной диаграмме из определения 6.8. Для этого предположим сначала, что входной символ a задерживающий. Тогда

$$R(\bar\varphi((c_1, \ldots, c_n), a)) = R(c_1, \ldots, c_n) = \varphi(R(c_1, \ldots, c_n), a).$$

Предположим затем, что он сбрасывающий. Тогда

$$R(\bar\varphi((c_1, \ldots, c_n), a)) = R(\bar c_a) = \varphi(c, a) = \varphi(R(c_1, \ldots, c_n), a),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь пространство состояний C сбрасывающей системы конечно. Значит, найдутся такое положительное целое n и такое отображение $R\colon \{0, 1\}^n \to C$, что R сюръективно. Тогда из предложения 6.8 вытекает, что каждая конечная сбрасывающая система φ: $C \times A \to C$ допускает параллельную декомпозицию

$$\varphi_i\colon \{0,\ 1\} \times A \to \{0,\ 1\}\colon i = 1,\ \ldots,\ n\}.$$

Определение 6.9. Если пространство состояний C системы переходов состояний φ содержит точно два элемента, то ψ называется *двухпозиционной системой переходов состояний.*

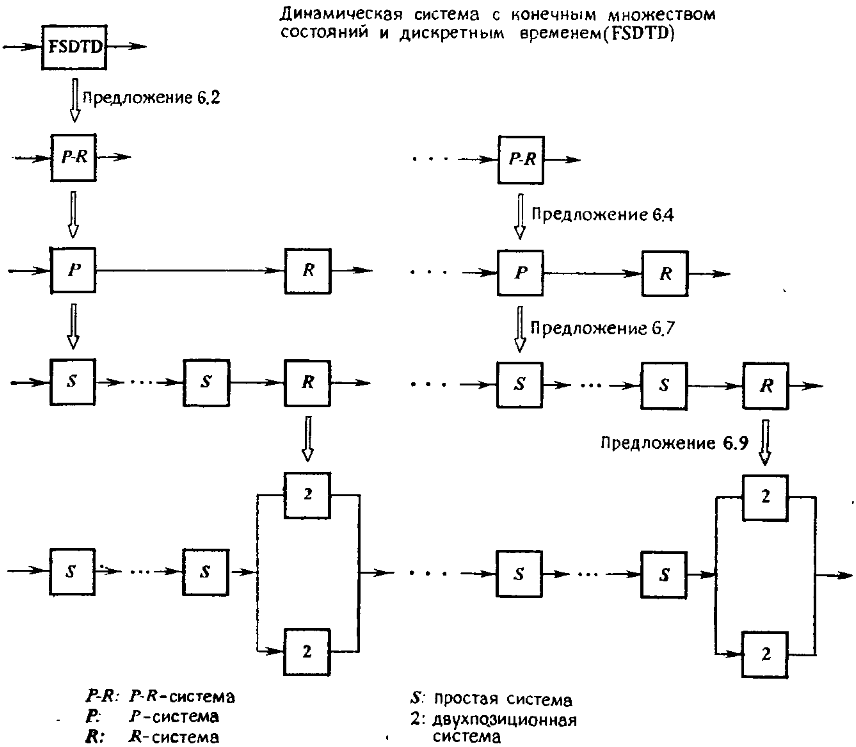


Рис. 6.1.

Объединяя определение 6.9 с предложением 6.7 с помощью предложения 6.8, мы приходим к следующему результату:

Предложение 6.9 (Крон и Роудз [17]). Если φ: $C \times A \to C$ — некоторая конечная система переходов состояний, то она допускает декомпозицию в каскадно-параллельное соединение систем переходов состояний, каждая из которых является либо простой, либо двухпозиционной.

Результаты основных теорем о декомпозиции, приведенных в этом параграфе, схематически представлены на рис. 6.1.

Глава XI

ВЫЧИСЛИМОСТЬ, НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ И ПОЛНОТА

К числу процессов с дискретным временем, допускающих представление с помощью динамических систем, относятся такие важнейшие процессы, как вычислительный процесс, процесс доказательства теорем, процесс переработки символьной информации и многое другое. В этой главе мы покажем, как можно моделировать эти процессы на языке общей теории систем, и, используя новые средства их описания, докажем некоторые основные результаты, относящиеся к важнейшим свойствам систем этого класса. В частности, мы рассмотрим проблему непротиворечивости и полноты формальной (или аксиоматической логической) системы и затронем проблему вычислимости. При этом нам удастся построить известную процедуру диагонализации Гёделя, не обращаясь к особенностям «динамики» логических систем. Это позволит вскрыть самые существенные особенности этого важнейшего результата, что отвечает духу нашей общей методологии, провозглашенной в первой главе книги.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ КАК ДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

В принципе любые вычисления можно описать следующим образом. Дано некоторое множество исходных данных, которые последовательно преобразуются по заранее установленному плану (алгоритму). В момент окончания этого процесса последний набор данных и принимается за результат вычислений. При этом условия окончания процесса преобразования данных должны содержаться в самих правилах применения этих преобразований, но могут зависеть и от исходных данных.

Нетрудно видеть, что подобный процесс вычисления является по сути дела динамическим. А так как он к тому же по самому своему определению является неупреждающим, стационарным и дискретным во времени, то динамическую систему, представляющую этот процесс, можно описывать исключительно с помощью функции перехода состояний.

В связи с этим мы начнем с класса инвариантных во времени семейств функций перехода состояний $\bar{\varphi} = \{\bar{\varphi}_i\}$, где $\bar{\varphi}_i =$

$= \{\varphi_{0t}^i\colon C \to C,\ t \in T\}$, и выходной функции $\lambda\colon C \to B$. Поскольку семейство функций перехода состояний $\bar{\varphi}_i$ для систем, описывающих вычислительные процессы, по определению, инвариантны во времени, $\bar{\varphi}_i$ могут быть представлены с помощью $\{\varphi_{0t}^i\}$. Более того, так как у всех таких $\bar{\varphi}_i$ время дискретно, т. е. $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, любое $\bar{\varphi}_i$ по сути дела задается соответствующим φ_{01}^i. Каждое $\bar{\varphi}_i$ из семейства $\bar{\varphi}$ определяет один алгоритм (одну программу) вычислений, а поэтому выбор самого класса $\bar{\varphi}$ определяет тип рассматриваемых алгоритмов (например, класс машин Тьюринга). Поскольку для $\bar{\varphi}_i$ предусмотрено всего одно входное воздействие, систему $(\bar{\varphi}_i, \lambda)$ мы будем называть *свободной динамической системой* [1]). Для нее выходная функция $\lambda\colon C \to B$ определяет результат «декодирования» текущего результата в том смысле, что она позволяет интерпретировать текущее состояние системы. В этой главе мы всегда будем считать выходную функцию λ фиксированной и единственной.

Для любого заданного семейства функций перехода состояний $\bar{\varphi}_i \in \bar{\varphi}$ состояние $c \in C$ называется *состоянием равновесия* тогда и только тогда, когда

$$(\forall t)\ (\varphi_{0t}^i(c) = c).$$

Обозначим через C_i^e множество состояний равновесия системы $\bar{\varphi}_i$. Другими словами, пусть

$$C_i^e = \{c\colon (\forall t)\ (\varphi_{0t}^i(c) = c)\}.$$

В этой главе будем предполагать, что для рассматриваемого нами класса $\bar{\varphi}$ существует такое подмножество $C^e \subset C$, что оно является множеством состояний равновесия для всех систем $\bar{\varphi}_i$, входящих в $\bar{\varphi}$, т. е. что для любого $\bar{\varphi}_i$ справедливо равенство $C_i^e = C^e$.

Исходя теперь из начального состояния (начальных данных) c и алгоритма $\bar{\varphi}_i \in \bar{\varphi}$, заметим, что изменения состояния системы отражают эволюцию вычислительного процесса во времени. Если же система достигает за конечное время состояния равновесия, то вычислительный процесс нужно считать законченным. Поэтому проблему вычислений можно интерпретировать как так называемую проблему устойчивости за конечное время, т. е. проблему достижимости устойчивого состояния за конечное время.

---

[1]) Такая терминология объясняется тем, что динамика подобной системы определяется лишь внутренними факторами, поскольку все внешние факторы (входные воздействия) заранее фиксированы. — *Прим. перев.*

При этом траекторию системы, переводящую ее в состояние равновесия за конечное время, мы будем называть *вычислением*. Все это подводит нас к следующему определению:

Определение 1.1. Функция $f\colon C \to B$ *вычислима* с помощью алгоритма из $\bar{\varphi}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\bar{\varphi}_i \in \bar{\varphi}$, что

$$(\forall c)\,(\exists t)\,(\varphi^i_{0t}\,(c) \in C^e \,\&\, f\,(c) = \lambda\,(\varphi^i_{0t}\,(c))).$$

Прежде чем двигаться дальше, хорошо бы еще более упростить характер рассмотрения. При этом мы будем иметь в виду, что для решения основного вопроса о вычислимости существенно лишь то, что процесс, задаваемый конкретным $\bar{\varphi}_i$ и c, завершается в состоянии равновесия за конечное время. Каким образом это достигается, т. е. каков сам характер этого процесса, нам совершенно не важно. Поэтому мы можем полностью абстрагироваться от особенностей динамики каждого семейства функций перехода состояний и рассматривать исключительно статические отображения пространства состояний в множество вычислительных процессов. С этой целью определим новую систему

$$\rho\colon C \times X \to Y,$$

у которой $X = \bar{\varphi}$, $Y = C^T$, а

$$\rho\,(c,\ \bar{\varphi}_i) = y \Longleftrightarrow (\forall t)\,(y\,(t) = \varphi^i_{0t}\,(c)).$$

Для упрощения обозначений введем также в рассмотрение подмножество $Y_0 \subset Y$ и отображение Res: $Y \to C$, потребовав, чтобы

$$Y_0 = \{y\colon (\exists \hat{t})\,(\forall t)\,(t \geqslant \hat{t} \Rightarrow y\,(t) = y\,(\hat{t}) \,\&\, y\,(\hat{t}) \in C^e)\}$$

и

$$\operatorname{Res}\,(y) = \begin{cases} y\,(\hat{t}), & \text{если } y \in Y_0, \\ \text{не определено в противном случае.} \end{cases}$$

В только что введенных терминах определение 1.1 можно сформулировать следующим образом:

Определение 1.2. Функция $f\colon (C) \to B$ называется *вычислимой* с помощью ρ тогда и только тогда, когда найдется такое $\hat{x} \in X$, что

(i) $c \in (C) \Longleftrightarrow \rho\,(c,\ \hat{x}) \in Y_0$,

(ii) $f\,(c) = \lambda \cdot \operatorname{Res} \cdot \rho\,(c,\ \hat{x})$.

Следует заметить, что в определении 1.2 функция f может быть частичной, т. е. определенной лишь на некотором собственном подмножестве (C) множества C. Теперь мы можем продолжить изложение, обращаясь исключительно к отображению ρ. Однако очень важно не забывать при этом об интерпретации ρ как динамической системы, порождаемой вычислительным процессом. Чтобы перекинуть эти мостки, мы приведем в последнем параграфе настоящей главы некоторые стандартные интерпретации отображения ρ, а пока введем несколько дополнительных понятий.

Определение 1.3. Подмножество $C' \subset C$ называется *приемлемым* для ρ тогда и только тогда, когда существует такое $\hat{x} \in X$, что

$$c \in C' \Leftrightarrow \rho(c, \hat{x}) \in Y_0,$$

т. е. C' — область, в которой для заданного $\hat{x}$ определены соответствующие вычисления.

Определение 1.4. Подмножество $Y' \subset Y_0$ называется *представимым* с помощью ρ, если найдется такое $\hat{x} \in X$, что

$$y \in Y' \Leftrightarrow (\exists c)\,(\rho(c, \hat{x}) = y).$$

Определение 1.5. Подмножество $C' \subset C$ называется *разрешимым* тогда и только тогда, когда C' и $C \setminus C'$ приемлемы для ρ.

Определение 1.6. Пусть W — произвольное подмножество в Y. Система ρ называется *W-непротиворечивой* тогда и только тогда, когда

$$W \cap Y_0 = \varnothing,$$

и *W-полной* тогда и только тогда, когда

$$W \cup Y_0 = Y.$$

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ДИАГОНАЛИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА (ГЁДЕЛЯ)

Докажем теперь фундаментальную теорему, содержащую основные аргументы в пользу невозможности решения некоторого типа задач о разрешимости. Эта теорема является обобщением знаменитой теоремы Гёделя, и мы изложим ее в общем контексте изучения свойств непротиворечивости и полноты систем.

Пусть $g\colon X \to C$ — некоторое инъективное отображение, которое мы будем называть *отображением Гёделя*. Относительно некоторого заданного отображения Гёделя для каждого $x \in X$ можно определить *норму* или *диагонализацию* y_x для любого $x \in X$:

$$y_x = \rho(g(x), x).$$

Обозначим через Q произвольное подмножество в Y. Но тогда можно определить и множество X_Q^d элементов из X, норма которых принадлежит Q, т. е.

$$x \in X_Q^d \Leftrightarrow \rho\,(g\,(x),\ x) \in Q.$$

Обозначим через C_Q^d образ X_Q^d относительно отображения g:

$$C_Q^d = g\,(X_Q^d).$$

Теорема 2.1. Пусть ρ: $C \times X \to Y$ — некоторая заданная система, а $W \subset Y$ — некоторое подмножество ее выходных величин. Тогда, если множество C_W^d приемлемо для этой системы, то система либо противоречива, либо неполна.

Доказательство. Поскольку множество C_W^d приемлемо, всегда найдется такое $x^* \in X$, что для любого $c \in C$

$$c \in C_W^d \Leftrightarrow \rho\,(c,\ x^*) \in Y_0,$$

и, в частности, для $g\,(x^*) \in C$:

$$g\,(x^*) \in C_W^d \Leftrightarrow \rho\,(g\,(x^*),\ x^*) \in Y_0, \tag{11.1}$$

где C_W^d, по определению, есть множество гёделевских образов элементов, нормы которых принадлежат W, т. е.

$$g\,(x) \in C_W^d \Leftrightarrow \rho\,(g\,(x),\ x) \in W. \tag{11.2}$$

Поскольку соотношение (11.2) справедливо для любых $x \in X$, то из (11.1) и (11.2) следует, что для заданного $x^* \in X$

$$\rho\,(g\,(x^*),\ x^*) \in Y_0 \Leftrightarrow \rho\,(g\,(x^*),\ x^*) \in W. \tag{11.3}$$

Обозначим через y^* такую выходную величину системы, что $y^* = \rho\,(g\,(x^*),\ x^*)$. Но тогда из (11.3) следует, что либо $y^* \in W \cap Y_0$, т. е. система W противоречива, либо что $y^* \notin W \cup Y_0$, т. е. система W неполна, ч. т. д.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ К ТЕОРИИ ФОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Покажем теперь, как эту фундаментальную теорему можно использовать для исследования конкретных систем с более богатой структурой. При этом мы обратимся к случаю так называемых формальных систем или систем преобразования символов, как к случаю, наиболее близкому к тому уровню изложения, который здесь принят. Аналогичное применение этот результат может найти и для других систем, например логических систем самых разных типов. В качестве типичного представителя формальной системы нам будет служить ее представление (см. [18]) в виде упорядоченной шестерки

$$K = (E,\ S,\ T,\ R,\ P,\ \varphi),$$

где

(1) E — счетное множество высказываний,
(2) $S \subset E$ — множество правильных предложений,
(3) $T \subset S$ — множество теорем из S,
(4) $R \subset S$ — множество опровержимых предложений,
(5) $P \subset E$ — множество (унарных) предикатов,
(6) φ — отображение φ: $E \times N \to E$, такое, что $\varphi(e,\ n) \in S$ всякий раз, когда e является ее некоторым предикатом, $e \in P$, а N — множество целых чисел.

Предположим теперь, что задано еще и инъективное отображение g: $E \to N$. Тогда для любого $e \in E$ число $g(e)$ называется *гёделевским номером* для e.

Для K весьма просто построить общую систему. С этой целью достаточно установить следующие соответствия:

(i) предикаты из P являются входными воздействиями системы;

(ii) высказывания из E являются ее состояниями;

(iii) предложения из S являются выходными величинами;

(iv) (суженная) функция Гёделя для этой общей системы является сужением отображения g для K, $g = g \mid P$, а ее представлением в пространстве состояний служит функция ρ: $E \times P \to S$, для которой

$$\rho(e,\ p) = \varphi(p,\ g(e));$$

(v) множество теорем $T \subset S$ соответствует Y_0.

Теперь мы готовы сформулировать теорему Гёделя (или, точнее, ее аналог) для формальной системы K.

Теорема 3.1. Пусть R^* — множество гёделевских номеров для всех элементов, нормы которых принадлежат подмножеству $R \subset S$. Если R^* представимо в K, то K либо R-противоречиво, либо R-неполно.

Доказательство. Пусть ρ — некоторая общая система для K, построенная по указанному выше принципу. Тогда множеству R^* для K соответствует некоторое множество входных воздействий C_W^{dl} точно такое же, как в § 2. Поскольку R^* представимо, множество C_W^{d} является приемлемым. Но тогда, согласно теореме 2.1, найдется такое входное воздействие $x \in X$, что

$$\rho (g (x), x) \in Y_0 \Longleftrightarrow \rho (g (x), x) \in W.$$

Но тогда существует и соответствующий предикат $p \in P$, такой, что

$$\varphi (p, g (p)) \in T \Longleftrightarrow \varphi (p, g (p)) \in R.$$

Предложение $\varphi (p, g (p))$ является примером предложения, которое либо одновеременно принадлежит T и R, либо одновременно не принадлежит ни T, ни R, а это значит, что K либо противоречиво, либо неполно, ч. т. д.

4. РЕАЛИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ МАШИН ТЬЮРИНГА [1]

Абстрактные динамические системы и понятия, введенные в § 1 этой главы, могут быть реализованы с помощью самых разнообразных моделей, используемых в теории вычислений.

Здесь мы рассмотрим вкратце лишь реализацию с помощью машин Тьюринга. Обозначим через I множество неотрицательных целых чисел: $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Пусть V — некоторое счетное множество, т. е. $V = \{v_0, v_1, \ldots\}$, а V^* — множество конечных последовательностей элементов из V, т. е. V^* — свободный моноид над V, единица (пустая последовательность) которого обозначается через Λ.

Машиной Тьюринга называется инвариантная во времени свободная динамическая система, для которой

(i) множеством моментов времени T является множество неотрицательных целых чисел;

(ii) пространством состояний является $C = V^* \times I \times V^*$;

(iii) выходным объектом B является V^*;

(iv) для каждой машины Тьюринга заданы два положительных целых числа m и n и отображение φ: $I_n \times V_m \to \tilde{V}_m \times I_n$, где $I_n = \{0, \ldots, n\}$, $V_m = \{v_0, \ldots, v_m\}$, $\tilde{V}_m = V_m \cup \{R, L\}$. Здесь R и L — особые элементы, а φ обладает тем свойством, что $\varphi (i, v_j) \neq (v_j, i)$ при всех $i \in I_n$ и $v_j \in V_m$, за исключением того случая, когда $i = 1$, в котором $\varphi (i, v_j) = (v_j, i)$ при любых $v_j \in V_m$. Функция перехода состояний φ_{01} в этом случае задается

[1] См. Дэвис [19].

условиями:

$$\varphi_{01}(\alpha v_k,\ i,\ v_j\beta)=\begin{cases}(\alpha v_k v_j,\ i',\ \beta), & \text{если } \varphi(i,\ v_j)=(R,\ i') \text{ и } \beta\neq\Lambda,\\ (\alpha v_k v_j,\ i',\ v_0), & \text{если } \varphi(i,\ v_j)=(R,\ i') \text{ и } \beta=\Lambda,\\ (\alpha,\ i',\ v_k v_j\beta), & \text{если } \varphi(i,\ v_j)=(L,\ i') \text{ и } \alpha v_k\neq\Lambda,\\ (\Lambda,\ i',\ v_0 v_j\beta), & \text{если } \varphi(i,\ v_j)=(L,\ i') \text{ и } \alpha v_k=\Lambda,\\ (\alpha v_k,\ i',\ v_e\beta), & \text{если } \varphi(i,\ v_j)=(v_e,\ i'),\\ (\alpha v_k,\ i,\ v_j\beta) & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где α и β принадлежат V^*, а i и i' суть элементы из I. Поскольку семейство функций перехода состояний машины Тьюринга инвариантно во времени, а множество ее моментов времени дискретно, все семейство функций перехода состояний однозначно определяется характером функции φ_{01}. Пара чисел $(m,\ n)$ будет называться характеристическими числами машины.

(v) Выходная функция λ: $C\to B$ определяется условием

$$\lambda(\alpha,\ i,\ \beta)=\alpha\cdot\beta.$$

Обозначим через V_m^* свободный моноид над V_m. Пусть $(m,\ n)$ — характеристические числа некоторой машины Тьюринга S. Тогда если начальное состояние машины принадлежит $V_m^*\times I_n\times V_m^*$, то состояние системы S будет по-прежнему принадлежать $V_m^*\times\times I_n\times V_m^*$ при любых $t\in T$. Другими словами, если начальное состояние нашей системы принадлежит $V_m^*\times I_n\times V_m^*$, то множество достижимых и представляющих теоретический интерес состояний равновесия должно быть подмножеством множества $V^*\times\{1\}\times V^*$. [Состояния вида $(\alpha,\ i,\ \Lambda)$ также являются тривиальными состояниями равновесия.] Следуя установившейся традиции, мы будем предполагать, что начальное состояние $c=(\alpha,\ i,\ \beta)$ машины Тьюринга с характеристическими числами $(m,\ n)$ выбирается лишь из множеств $\{\Lambda\}\times\{0\}\times V_m^*$ и таково, что $c=(\Lambda,\ 0,\ \beta)$, где $\beta\neq\Lambda$. В связи с этим для класса $\bar{\varphi}$ машин Тьюринга множество $V^*\times\{1\}\times V^*$ можно принять за C^e. Но тогда $(\bar{\varphi},\ \lambda)$ образует класс всех машин Тьюринга, а общая система ρ определяется этими машинами так, как показано в § 1.

Глава XII

КАТЕГОРИИ СИСТЕМ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ФУНКТОРЫ

В предыдущих главах мы изучали некоторые достаточно общие свойства систем и выясняли условия, при которых система обладает некоторыми определенными свойствами. Как нетрудно видеть, это дает возможность классифицировать системы в зависимости от того, каким набором рассматриваемых свойств они обладают. Естественно, что нам представляется полезным более строго определить различные такие классы и установить взаимосвязи между ними. Подходящим языком для решения этой задачи представляется язык теории категорий, специально занимающейся изучением классов и взаимосвязей между ними [1]).

Различные классы общих систем в этой главе определяются как соответствующие категории, причем гомоморфизмы между объектами одной категории интерпретируются как отношения моделирования. Взаимоотношения же между различными классами систем описываются с помощью подходящих функторов, при этом мы опираемся на результаты теорий представления и реализации, развитых в предыдущих главах. Будет установлено также каноническое преобразование этих функторов. Взаимосвязь между основными понятиями представлена схематически на рис. 4.1.

1. ПОСТРОЕНИЕ КАТЕГОРИЙ ОБЩИХ СИСТЕМ И ГОМОМОРФНЫХ МОДЕЛЕЙ

(а) Построение категории общих систем

Для того чтобы построить категорию, требуется некоторый класс объектов и некоторый класс морфизмов между ними. В качестве объектов мы просто возьмем системы, т. е. отношения на подходящим образом определенных множествах. Менее ясно, что же принять за морфизмы. В действительности оказывается, что искомые морфизмы можно ввести многими разными способами. Некоторые из наиболее интересных, с нашей точки зрения, подходов мы и собираемся здесь рассмотреть.

---

[1]) Здесь мы будем пользоваться понятием категории, определяемым через объекты которое дано в приложении IV.

(i) *Общий подход*

Поскольку наш подход к теории общих систем носит теоретико-множественный характер, наиболее естественными кандидатами на роль морфизмов нам представляются просто любые функции, определенные на соответствующих множествах. В этом случае категория общих систем будет определяться всевозможными отношениями $S \subset X \times Y$ и отображениями между ними. Все другие категории строятся с помощью дополнительных структур, вводимых на множествах X и Y, и выбора подходящих функций в качестве морфизмов.

(ii) *Структурный подход*

Если наше внимание сосредоточено в основном на структуре системы, то в качестве морфизмов можно использовать гомоморфизмы отношений. Пусть $S \subset X \times Y$ и $S' \subset X' \times Y'$ — две общие системы, а h и k — два отображения h: $X \to X'$ и k: $Y \to Y'$. Отображение $h \times k$: $X \times Y \to X' \times Y'$ называется *гомоморфизмом отношений* из S в S', если

$$(\forall (x, y)) ((x, y) \in S \Rightarrow (h(x), k(y)) \in S').$$

В этом случае категория общих систем будет определяться всевозможными отношениями $S \subset X \times Y$ и гомоморфизмами отношений между ними.

(iii) *Алгебраический подход*

Если X, X', Y и Y' являются алгебрами, то отображения h и k, введенные в разделе о структурном подходе, могут быть ограничены классом гомоморфизмов из X в X' и из Y в Y' соответственно, что позволяет построить еще одну категорию общих систем.

Категории, построенные таким образом, несколько у́же категорий, получающихся при структурном подходе, но они обладают рядом преимуществ, некоторые из которых перечислены ниже.

(i) Использование дополнительных структур открывает возможность более глубокого исследования различных свойств системы. Алгебраический способ введения таких дополнительных структур представляется наиболее естественным для использования аппарата теории категорий.

(ii) Гомоморфизмы вполне разумно рассматривать как «функции моделирования». Под этим подразумевается следующее: во многих случаях гомоморфизмы можно определить так, что они упрощают структуру исходной системы, одновременно сохраняют все наиболее существенные соотношения и опускают менее существенные детали. С этой точки зрения гомоморфный образ системы можно рассматривать как «упрощенную» систему, т. е. как модель исходной системы. Аналогичные соображения можно высказать и относительно структурного подхода. Однако если мы потребуем, например, чтобы модель линейной системы обязательно была линейной, то окажется, что структурное моделирование не обеспечивает этого требования.

В этой главе мы будем следовать в основном алгебраическому подходу. Однако, когда речь пойдет лишь о категориях общих систем без какой-либо алгебраической структуры, то этот подход в конечном счете можно считать совпадающим со структурным. Точнее говоря, когда мы рассматриваем общие системы, наш подход можно считать частным случаем алгебраического, при котором из-за того, что на объектах не введено никаких конкретных алгебраических структур, любую функцию можно рассматривать как гомоморфизм.

Если система $S \subset X \times Y$ является временной, то элементы множеств X и Y обладают особой структурой, а именно являются функциями времени, т. е. $x: T \to A$ и $y: T \to B$, а $X \subset A^T$ и $Y \subset B^T$. Поэтому когда мы называем функцию $h: X \to X'$ гомоморфизмом входных воздействий временных систем, то всегда предполагаем, что h построен с помощью функции (гомоморфизма) $h_a: A \to A'$ так, что $h(x)(t) = h_a(x(t))$ при любых $t \in T$, где $X' \subset A'^T$. Подобная конструкция обладает следующим свойством:

$$(\forall x^t)(\forall x'_t)(\forall x''_t)(x^t \cdot x'_t \in X \;\&\; x^t \cdot x''_t \in X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h(x^t \cdot x'_t) \mid T^t = h(x^t \cdot x''_t) \mid T^t).$$

А это позволяет определить расширение гомоморфизма $h: X \to X'$ временных систем как функцию $h: X^t \to X'^t$, удовлетворяющую следующему условию: $h(x^t) = h(x^t \cdot x_t) \mid T^t$, где x_t произвольно, если $x^t \cdot x_t \in X$. Аналогично, $h: X_{tt'} \to X'_{tt}$ можно определить с помощью условия

$$h(x_{tt'}) = h(x^t \cdot x_{tt'} \cdot x_{t'}) \mid T_{tt'}.$$

Другими словами, от гомоморфизмов временных объектов требуется, чтобы они по крайней мере были гомоморфизмами относительно операций сочленения и сужения.

(b) Гомоморфные модели

Сформулировать понятие модели можно, вообще говоря, многими способами. Однако с концептуальной точки зрения наиболее естественная математическая формулировка использует понятие гомоморфизма. Именно этим подходом мы и воспользуемся в настоящей главе. Сейчас же мы вкратце поясним, что это означает.

Пусть X, X', Y, Y' — некоторые Ω-алгебры, а

$$h_x\colon X \to X' \text{ и } h_y\colon Y \to Y'$$

— гомоморфизмы. Тогда легко показать, что отображение

$$h = \langle h_x, h_y \rangle\colon X \times Y \to X' \times Y',$$

для которого

$$h(x, y) = (h_x(x), h_y(y)),$$

также является гомоморфизмом относительно алгебраических структур на $X \times Y$ и $X' \times Y'$, определенных обычным образом. Все это позволяет ввести понятие гомоморфной модели.

Определение 1.1. Пусть $S \subset X \times Y$ и $S' \subset X' \times Y'$ являются общими системами, а $h = \langle h_x, h_y \rangle$ — гомоморфизм из $X \times Y$ в $X' \times Y'$, причем отображение h_x — сюръективно. Тогда система S' называется *моделью* системы S в том и только в том случае, когда

$$(\forall (x, y))((x, y) \in S \Rightarrow h(x, y) \in S').$$

Более того, системы S и S' называются *эквивалентными* тогда и только тогда, когда h является изоморфизмом и, кроме того, выполняется условие

$$(\forall (x', y'))((x', y') \in S' \Rightarrow h^{-1}(x', y') \in S).$$

Аналогично, для случая динамических систем понятие гомоморфных моделей определяется следующим образом:

Определение 1.2. Пусть

$$S = \{(\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t,\ \varphi_{tt'}\colon C_t \times X_{tt'} \to C_{t'})\colon t, t' \in T\}$$

и

$$\hat{S} = \{(\hat{\rho}_t\colon \hat{C}_t \times \hat{X}_t \to \hat{Y}_t,\ \hat{\varphi}_{tt'}\colon \hat{C}_t \times \hat{X}_{tt'} \to \hat{C}_{t'})\colon t, t' \in T\}$$

— динамические системы, а $h = \langle h_x, h_y, h_c \rangle$ для каждого $t \in T$ является гомоморфизмом из $X_t \times Y_t \times C_t$ в $\hat{X}_t \times \hat{Y}_t \times \hat{C}_t$, причем функция h_x сюръективна. Тогда система $\hat{S}$ называется *моделью* системы S в том и только в том случае, когда для любых c_t и x_t

$$h_y(\rho_t(c_t, x_t)) = \hat{\rho}_t(h_c(c_t), h_x(x_t)).$$

Кроме того, динамические системы S и $\hat{S}$ называются *эквивалентными* тогда и только тогда, когда h является изоморфизмом.

Аналогичные определения можно сформулировать для других типов представлений систем, например для их представлений с помощью глобальных реакций, входных реакций и т. п.

Как уже отмечалось выше, всякая гомоморфная модель обладает одним удобным свойством: она полностью сохраняет алгебраические структуры, представляющие для нас специальный интерес, и «пренебрегает» второстепенными деталями. А это полностью согласуется с нашим интуитивным представлением о моделях.

Рассмотрим весь этот комплекс вопросов несколько более подробно для класса динамических систем.

С этой целью предположим, что заданы реакция динамической системы $\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t$ и гомоморфизмы $h = \langle h_x, h_y, h_c \rangle$. Обозначим через $\hat{C}_t$, $\hat{X}_t$ и $\hat{Y}_t$ гомоморфные образы C_t, X_t и Y_t соответственно, а через $\hat{\rho}_t$ — гомоморфный образ ρ_t. Определим, наконец, отношение $E_x \subset X_t \times X_t$ так, что $(x_t, x'_t) \in E_x \Leftrightarrow h_x(x_t) = h_x(x'_t)$.

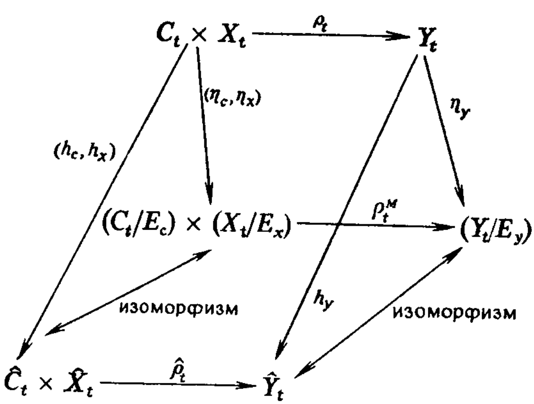
Как нетрудно видеть, отношение E_x является отношением эквивалентности. Аналогичным образом определим отношения эквивалентности E_y и E_c, порожденные h_y и h_c. Поскольку h_x, h_y и h_c — гомоморфизмы, факторможества X_t/E_x, Y_t/E_y и C_t/E_c можно наделить такими же алгебраическими структурами, что и X_t, Y_t и C_t. Однако два различных элемента x_t и x'_t, для которых $(x_t, x'_t) \in E_x$, могут считаться неэквивалентными относительно другой алгебраической структуры, не использовавшейся в определении гомоморфизма h_x и потому полностью игнорируемой этим гомоморфизмом. Пусть теперь

$$\rho_t^M\colon (C_t/E_c) \times (X_t/E_x) \to (Y_t/E_y), \quad \rho_t^M([c_t], [x_t]) = [\rho_t(c_t, x_t)],$$

где $c_t \in [c_t] \in C_t/E_c$ и $x_t \in [x_t] \in X_t/E_x$. Приведенное выше определение вполне корректно, поскольку

$$h_y(\rho_t(c_t, x_t)) = \hat{\rho}_t(h_c(c_t), h_x(x_t)).$$

Легко видеть, что ρ_t^M и $\hat{\rho}_t$ эквивалентны в том смысле, что между ними можно установить некоторый изоморфизм. А это значит, что диаграмма



где η_c, η_x и η_y суть канонические отображения, является коммутативной. Теперь понятно, что $\hat{\rho}_t$ можно рассматривать как упрощенную модель реакции ρ_t в силу своей изоморфности с ρ_t^M, определенной над фактормножествами.

Полезно отметить, что любой гомоморфизм порождает модель, т. е. каждая модель определяется некоторым гомоморфизмом, причем выбор соответствующего гомоморфизма зависит от того, какие свойства исходной системы считаются существенными при моделировании. Заметим к тому же, что во всех приведенных выше определениях только от h_x требовалась сюръективность. А это значит, что гомоморфный образ исходной системы в общем случае оказывается собственным подмножеством своей модели. Поэтому модель позволяет делать некоторые выводы, которые не имеют места для исходной системы, и это снова вполне согласуется с интуитивным представлением о моделях.

Гомоморфизм $h = \langle h_x, h_y, h_c \rangle$ из определения 1.2 задается исключительно по отношению к ρ. Поэтому здесь *не* требуется, чтобы диаграмма

$$\begin{tikzcd} C_t \times X_{tt'} \arrow[r, "\varphi_{tt'}"] \arrow[d, "h_c"'] \arrow[d, shift left=6ex, "h_x"] & C_{t'} \arrow[d, "h_c"'] \\ \hat{C}_t \times \hat{X}_{tt'} \arrow[r, "\hat{\varphi}_{tt'}"] & \hat{C}_{t'} \end{tikzcd}$$

была коммутативной. Однако мы покажем теперь, что подходящим образом определенная функция перехода состояний для модели из определения 1.2 находится в определенной взаимосвязи с функцией перехода состояний исходной системы — взаимосвязи, которая выглядит вполне естественно с точки зрения преобразований входных воздействий в выходные величины, а потому состояние является вторичным, производным понятием. С этой целью определим отношение $E_t \subset C_t \times C_t$, для которого

$$(c_t, c_t') \in E_t \Longleftrightarrow (\forall x_t)\,(\rho_t(c_t, x_t) = \rho_t(c_t', x_t)).$$

Нетрудно видеть, что отношение E_t является отношением эквивалентности. Заметим теперь, что если $(c_t, c_t') \in E_t$, то можно не различать c_t и c_t', поскольку и они всегда приводят к одинаковым выходным величинам в ответ на подачу одинаковых входных воздействий. А это значит, что в качестве объекта состояний можно использовать фактормножество C_t/E_t.

Покажем также, что E_t является отношением конгруэнтности относительно h_c и $\varphi_{tt'}(-, x_{tt'})$, т. е. что

(i) $[c_t] = [c_t'] \Rightarrow [h_c c_t] = [h_c c_t']$,

(ii) $[c_t] = [c_t'] \Rightarrow (\forall x_{tt'})\,([\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'})] = [\varphi_{tt'}(c_t', x_{tt'})])$, где, естественно, через $[h_c c_t]$ обозначен класс эквивалентности из $\hat{C}_t/\hat{E}_t$, а $\hat{E}_t \subset \hat{C}_t \times \hat{C}_t$. Действительно,

(i) $[c_t] = [c'_t] \Rightarrow [h_c c_t] = [h_c c'_t]$,

$$\begin{aligned}
[c_t] = [c'_t] &\Rightarrow (\forall x_t)\,(\rho_t(c_t, x_t) = \rho_t(c'_t, x_t)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\forall x_t)\,(h_y\rho_t(c_t, x_t) = h_y\rho_t(c'_t, x_t)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\forall x_t)\,(\hat{\rho}_t(h_c c_t, h_x x_t) = \hat{\rho}_t(h_c c'_t, h_x x_t)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\forall \hat{x}_t)\,(\hat{\rho}_t(h_c c_t, \hat{x}_t) = \hat{\rho}_t(h_c c'_t, \hat{x}_t))\,^{1)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow [h_c c_t] = [h_c c'_t];
\end{aligned}$$

(ii) для любых $x_{tt'} \in X_{tt'}$

$$\begin{aligned}
&[c_t] = [c'_t] \Rightarrow [\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'})] = [\varphi_{tt'}(c'_t, x_{tt'})], \\
&[c_t] = [c'_t] \Rightarrow (\forall x_t)\,(\rho_t(c_t, x_t) = \rho_t(c'_t, x_t)) \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow (\forall x_{tt'})\,(\forall x_{t'})\,(\rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t'}) = \\
&\qquad\qquad = \rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c'_t, x_{tt'}), x_{t'})) \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow (\forall x_{tt'})\,([\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'})] = [\varphi_{tt'}(c'_t, x_{tt'})]).
\end{aligned}$$

Все это позволяет определить расширение отображений $\varphi_{tt'}$ и h_c следующим образом:

$$\varphi_{tt'}\colon (C_t/E_t) \times X_{tt'} \Rightarrow C_{t'}/E_{t'},$$

так что

$$\varphi_{tt'}([c_t], x_{tt'}) = [\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'})],$$

и

$$h_c\colon C_t/E_t \to \hat{C}_{t'}/\hat{E}_{t'},$$

так что

$$h_c([c_t]) = [h_c(c_t)].$$

Но тогда мы приходим к следующему результату:

Предложение 1.1. Коммутативность диаграммы для ρ_t, приведенной в определении 1.2, влечет за собой коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
(C_t/E_t) \times X_{tt'} \arrow[r, "\varphi_{tt'}"] \arrow[d, "h_c"'] \arrow[d, shift left=8ex, "h_x"] & C_{t'}/E_{t'} \arrow[d, "h_c"] \\
(\hat{C}_t/\hat{E}_t) \times \hat{X}_{tt'} \arrow[r, "\hat{\varphi}_{tt'}"] & \hat{C}_{t'}/\hat{E}_{t'}
\end{tikzcd}$$

---

[1]) Ведь h_x является сюръективным.

где

$$(c_t, c'_t) \in E_t \Longleftrightarrow (\forall x_t)\,(\rho_t(c_t, x_t) = \rho_t(c'_t, x_t)),$$

$$\varphi_{tt'}([c_t], x_{tt'}) = [\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'})],$$

$$h_c([c_t]) = [h_c(c_t)].$$

Доказательство. Пусть $x_t = x_{tt'} \cdot x_{t'}$ и c_t произвольны. Тогда

$$\begin{aligned} h_y\rho_t(c_t, x_t) &= \hat{\rho}_t(h_c c_t, h_x x_t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow h_y\rho_t(c_t, x_t) \mid T_{t'} = \hat{\rho}_t(h_c c_t, h_x x_t) \mid T_{t'} \Rightarrow \\ &\Rightarrow h_y\rho_{t'}(\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), x_{t'}) = \\ &\qquad\qquad = \hat{\rho}_{t'}(\hat{\varphi}_{tt'}(h_c c_t, h_x x_{tt'}), h_x x_{t'}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{\rho}_{t'}(h_c\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'}), h_x x_{t'}) = \\ &\qquad\qquad = \hat{\rho}_{t'}(\hat{\varphi}_{tt'}(h_c c_t, h_x x_{tt'}), h_x x_{t'}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow [h_c\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'})] = [\hat{\varphi}_{tt'}(h_c c_t, h_x x_{tt'})]\,^{1)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow h_c\varphi_{tt'}([c_t], x_{tt'}) = \hat{\varphi}_{tt'}(h_c[c_t], h_x x_{tt'}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Сформулированное выше предложение означает, что если объекту состояний C_t разрешается иметь избыточные, «ненужные» состояния, то функция перехода состояний может и не удовлетворять коммутативной диаграмме. Но уж если мы учитываем лишь действительно существенные аспекты объекта C_t, т. е. если все избыточные состояния удалены, то соответствующая диаграмма обязательно должна быть коммутативной. И вновь хотелось бы подчеркнуть, что существование избыточных состояний является прямым следствием вторичного характера понятия объекта состояний.

Перед тем как перейти к рассмотрению общих систем на языке теории категорий, проиллюстрируем те основные идеи, на которые будет опираться наша теоретико-категорная классификация.

Пусть А и В на рис. 1.1 представляют две разные категории систем. Объекты каждой из этих категорий (т. е. системы данного типа) связаны друг с другом отношениями гомоморфного моделирования, играющими для соответствующей категории роль морфизмов. Сами же эти категории связаны друг с другом некоторыми функторами. В частности, нас будут особо интересовать два типа

---

1) Так как h_x сюръективно.

функторов, которые мы назовем конструктивным функтором и пренебрегающим функтором соответственно. Конструктивный функтор отображает системы с более бедной структурой в системы с более богатой структурой (скажем, с более богатой структурой на соответствующем множестве S). Например, конструктивный функтор

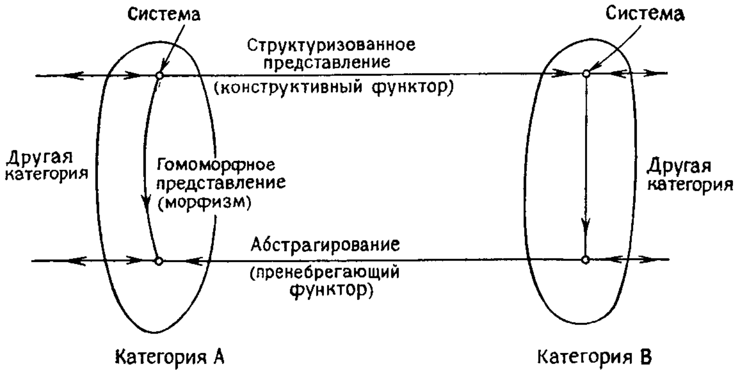


Рис. 1.1.

может отображать общие системы в системы с реакцией или временные системы в динамические. Пренебрегающий функтор определяет обратный переход, т. е. отображает, скажем, динамические системы во временные, и т. п.

2. КАТЕГОРИИ ОБЩИХ СИСТЕМ

В этом параграфе мы построим несколько категорий общих систем и установим существование некоторых функторов и отношений между ними. А поскольку тот факт, что некоторый класс объектов и некоторый класс морфизмов образуют категорию, нужно, вообще говоря, специально доказывать, мы введем целый ряд определений, и в том числе определений категорий, которые будут представлены здесь в виде предложений. При этом каждый раз, когда выполнение требуемых условий очевидно, доказательство соответствующего предложения мы будем опускать.

Намеченный выше алгебраический подход к построению категорий прежде всего подводит нас к следующему предложению:

Предложение 2.1. Пусть $\mathrm{Ob}\,\overline{S}$ есть класс всех отношений $S \subset X \times Y$, где множества X и Y произвольны, $X = \mathscr{D}(S)$, и для каждой пары S, $S' \in \mathrm{Ob}\,\overline{S}$ обозначим через $\mathrm{Mor}\,(S, S')$ множество всевозможных пар функций $f = \langle h_x, h_y \rangle$, где $h_x\colon X \to X'$, а $h_y\colon Y \to Y'$, таких, что h_x сюръективно и

$$(x, y) \in S \Rightarrow (h_x(x), h_y(y)) \in S'.$$

Определим композицию морфизмов из $\{\mathrm{Mor}(S, S')\colon S, S' \in \mathrm{Ob}\,\bar{S}\}$ с помощью условия

$$\langle h_x, h_y \rangle \cdot \langle h'_x, h_x \rangle = \langle h_x \cdot h'_x, h_y \cdot h'_y \rangle,$$

где $h_x \cdot h'_x$ и $h_y \cdot h'_y$ суть обычные композиции функций, т. е.

$$h_x \cdot h'_x(x') = h'_x(h'_x(x')).$$

Тогда $(\mathrm{Ob}\,\bar{S}, \{\mathrm{Mor}(S, S')\colon S, S' \in \mathrm{Ob}\,\bar{S}\})$ образуют категорию, которую мы будем обозначать через $\bar{S}$ и называть *категорией общих систем.*

С точки зрения развития последующей теории категория общих систем в том виде, как она определена в предложении 2.1, вызывает некоторые трудности. Они связаны с тем, что функции общего вида, используемые в предложении 2.1, могут привести к отображению функционального отношения R

$$(\forall(x, y))\,(\forall(x', y'))\,((x, y), (x', y') \in R \,\&\, x = x' \Rightarrow y = y')$$

в нефункциональное отношение, т. е. к отображению однозначного отношения в многозначное. Чтобы избежать этого, мы определим одну подкатегорию категории $\bar{S}$ следующим образом:

Предложение 2.2. Пусть $\mathrm{Ob}\bar{S}^f$ определен так же, как и в предложении 2.1, а $\mathrm{Mor}^f(S, S')$ есть подкласс функций, определенных в предложении 2.1 и такой, что для любого $f \in \mathrm{Mor}^f(S, S')$ из того, что $R \in \mathrm{Ob}\,\bar{S}^f$ функционально, следует, что функционально и $f(R)$. Тогда

$$(\mathrm{Ob}\,\bar{S}^f, \{\mathrm{Mor}^f(S, S')\colon S, S' \in \mathrm{Ob}\,\bar{S}^f\})$$

образует категорию, которая будет обозначаться через $\bar{S}^f$ и называться *функционально-конгруэнтной категорией общих систем.*

И для $\bar{S}$, и для $\bar{S}^f$ класс объектов одинаков, но в тех случаях, когда мы хотим специально подчеркнуть, о какой категории идет речь, мы будем обозначать класс объектов категории $\bar{S}^f$ через $\mathrm{Ob}\,\bar{S}^f$. И хотя обе категории относятся к одному и тому же классу систем, отношения моделирования, лежащие в их основе, вообще говоря, различны, причем для $\overline{S}^f$ они несколько сильнее, чем для $\overline{S}$. А именно, систему S' можно рассматривать как модель другой системы S в $\overline{S}$, даже если она не считается таковой в $\overline{S}^f$; в то же время если система S' считается моделью системы S в $\overline{S}^f$, то она заведомо является моделью системы S и в $\overline{S}$. Подобная взаимосвязь определяет следующий функтор между двумя введенными категориями:

Предложение 2.3. Пусть отображение H_1: $\overline{S}^f \to \overline{S}$ тождественно, т. е. для каждого $S \in \mathrm{Ob}\,\overline{S}^f$ справедливо равенство $H_1(S) = S$ и для каждого $\langle h_x, h_y \rangle \in \mathrm{Mor}\,(S, S')$ из $\overline{S}^f$

$$H_1(\langle h_x, h_y \rangle) = \langle h_x, h_y \rangle.$$

Тогда H_1 является функтором.

Определим теперь категорию, позволяющую рассматривать реакции систем.

Предложение 2.4. Пусть $\mathrm{Ob}\,\overline{S}_g$ — класс всевозможных функций ρ: $C \times X \to Y$, где C, X и Y — произвольные множества. Для любых ρ, $\rho' \in \mathrm{Ob}\,\overline{S}_g$ определим $\mathrm{Mor}\,(\rho, \rho')$ как множество всевозможных троек функций $f = \langle h_x, h_y, h_c \rangle$, h_x: $X \to X'$, h_y: $Y \to Y'$ и h_c: $C \to C'$, таких, что h_x сюръективно и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C \times X & \xrightarrow{\rho} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle h_c \times h_x} & & \downarrow{\scriptstyle h_y} \\ C' \times X' & \xrightarrow{\rho'} & Y' \end{array}$$

коммутативна, т. е. для любых $x \in X$ и $c \in C$

$$h_y \cdot \rho(c, x) = \rho'(h_c \cdot c, h_x \cdot x).$$

Определим композицию морфизмов из $\{\mathrm{Mor}\,(\rho, \rho')\colon \rho, \rho' \in \mathrm{Ob}\,\overline{S}_g\}$ с помощью условия

$$\langle h_x, h_y, h_c \rangle \cdot \langle h'_x, h'_y, h'_c \rangle = \langle h_x \cdot h'_x, h_y \cdot h'_y, h_c \cdot h'_c \rangle.$$

Тогда $(\mathrm{Ob}\,\overline{S}_g, \{\mathrm{Mor}\,(\rho, \rho')\colon \rho, \rho' \in \mathrm{Ob}\,\overline{S}_g\})$ является категорией, которая будет обозначаться через $\overline{S}_g$ и называться *категорией глобальных реакций.*

Рассмотрим теперь отношения между категориями $\overline{S}$, $\overline{S}^f$ и $\overline{S}_g$. Мы уже определили функтор между $\overline{S}$ и $\overline{S}^f$. Что же касается отношений между $\overline{S}$ и $\overline{S}^f$, с одной стороны, и $\overline{S}_g$ — с другой, то их можно охарактеризовать с помощью двух новых функторов: пренебрегающего F_1: $\overline{S}_g \to \overline{S}$, который ставит в соответствие каждой глобальной реакции некоторую общую систему, и конструктивного G_1: $\overline{S}^f \to \overline{S}_g$, который приписывает каждой общей системе ее глобальную реакцию.

Пусть для каждого отношения $S \subset X \times Y$

$$\mathrm{Fun}\,(S) = \{f\colon f\colon X \to Y\ \&\ f \subseteq S\}.$$

Предложение 2.5. Пусть G_1: $\overline{S}^f \to \overline{S}_g$ есть такое отображение, что

(i) для каждого $S \in \mathrm{Ob}\,\overline{S}^f$

$$G_1\,(S) = \rho,$$

где $C = \mathrm{Fun}\,(S) \subseteq Y^X$, ρ: $C \times X \to Y$ таковы, что при любых $(c,\ x) \in C \times X$

$$\rho\,(c,\ x) = c\,(x);$$

(ii) для каждой пары $\langle h_x,\ h_y\rangle \in \mathrm{Mor}\,(S,\ S')$

$$G_1\,(\langle h_x,\ h_y\rangle) = \langle h_x,\ h_y,\ h_c\rangle,$$

где для любого x

$$h_c\,(c) = c' \Leftrightarrow c'(h_x\cdot x\,) = h_y\cdot c\,(x),$$

т. е. коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
C \times X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "h_c \times h_x"'] & Y \arrow[d, "h_y"] \\
C' \times X' \arrow[r, "\rho'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

Тогда G_1 является функтором.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что h_c определено вполне корректно. Действительно, h_x сюръективно, и, следовательно, $h_x\,(X) = X'$, а так как отношение $R = \{(x,\ c\,(x))\colon x \in X\}$ функционально, то функционально и отношение

$$h_x \times h_y\,(R) = \{(h_x\cdot x,\ h_y\cdot c\,(x))\colon\ x \in X\},$$

откуда следует, что

$$h_x\cdot x = h_x\cdot\hat{x} \Rightarrow h_y\cdot c\,(x) = h_y\cdot c\,(\hat{x}).$$

Для $S \in \mathrm{Ob}\,\overline{S}^f$

$$G_1\,(I_S) = G_1\,(\langle I_x,\ I_y\rangle) = \langle I_x,\ I_y,\ h_c\rangle,$$

где $h_c(c) = c' \Leftrightarrow c'(x) = c(x)$ при любых x. Значит, $h_c = I_c$, т. е.

$$G_1\,(I_S) = I_{G_1(S)}.$$

Что же касается морфизмов $\langle h_x, h_y\rangle$ и $\langle h'_x, h'_y\rangle$, для которых

$$X \xrightarrow{h_x} X' \xrightarrow{h'_x} X'' \quad \text{и} \quad Y \xrightarrow{h_y} Y' \xrightarrow{h'_y} Y'',$$

то

$$G_1(\langle h'_x, h'_y\rangle \cdot \langle h_x, h_y\rangle) = G_1(\langle h'_x \cdot h_x, h'_y \cdot h_y\rangle) = \langle h'_x \cdot h_x, h'_y \cdot h_y, \hat{h}_c\rangle,$$

где, по определению, $\hat{h}_c$: $C \to C''$ и для каждого $x \in X$

$$\hat{h}_c(c) = c'' \Leftrightarrow c''(h'_x \cdot h_x \cdot x) = h'_y \cdot h_y \cdot c(x).$$

Но, с другой стороны,

$$G_1(\langle h_x, h_y\rangle) = \langle h_x, h_y, h_c\rangle,$$

где для каждого $x \in X$

$$h_c(c) = c' \Leftrightarrow c'(h_x \cdot x) = h_y \cdot c(x),$$

и

$$G_1(\langle h'_x, h'_y\rangle) = \langle h'_x, h'_y, h'_c\rangle,$$

где для каждого $x' \in X'$

$$h'_c(c') = c'' \Leftrightarrow c''(h'_x \cdot x') = h'_y \cdot c'(x').$$

Поэтому для каждого $x' \in X'$ и $x \in X$

$$\begin{aligned} h'_c \cdot h_c(c) = c'' &\Leftrightarrow c''(h'_x \cdot x') = h'_y[h_c(c)](x') \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c''(h'_x \cdot h_x \cdot x) = h'_y[h_c(c)](h_x \cdot x)\ ^{1)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c''(h'_x \cdot h_x \cdot x) = h'_y \cdot c'(h_x \cdot x)\ ^{2)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c''(h'_x \cdot h_x \cdot x) = h'_y \cdot h_y \cdot c(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \hat{h}_c(c) = c''. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} G_1(\langle h'_x, h'_y\rangle \cdot \langle h_x, h_y\rangle) &= \langle h'_x, h'_y, h'_c\rangle \cdot \langle h_x, h_y, h_c\rangle = \\ &= G_1(\langle h'_x, h'_y\rangle) \cdot G_1(\langle h_x, h_y\rangle), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Предложение 2.6. Пусть F_1: $\bar{S}_g \to \bar{S}$ — такое отображение, что для каждого $\rho \in \mathrm{Ob}\,\bar{S}_g$

$$F_1(\rho) = S \subset X \times Y,$$

---

[1]) Поскольку h_x сюръективно.

[2]) Где $c' = h_c(c)$.

где

$$(x,\ y) \in S \Leftrightarrow (\exists\, c)\ (y = \rho\,(c,\ x)),$$

а для каждой тройки $\langle h_x,\ h_y,\ h_c\rangle$

$$F_1\,(\langle h_x,\ h_y,\ h_c\rangle) = \langle h_x,\ h_y\rangle.$$

Тогда F_1 является функтором.

Приведенные выше соображения приводят к диаграмме, изображенной на рис. 2.1. Однако для того, чтобы несколько симметри-

$$\begin{tikzcd}
\bar{S} & & \bar{S}_g \arrow[ll, "F_1"'] \\
 & & \\
\bar{S}^f \arrow[uu, "H_1"] \arrow[uurr, "G_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Рис. 2.1.

зовать отношения, порождаемые этой диаграммой, мы введем еще понятие функционально-конгруэнтной категории глобальных реакций.

Предложение 2.7. Пусть класс объектов $\mathrm{Ob}\,\bar{S}^f_g$ определен, как в предложении 2.4, т. е. пусть $\mathrm{Ob}\,\bar{S}^f_g = \mathrm{Ob}\,\bar{S}_g$, и $\mathrm{Mor}^f\,(\rho,\ \rho')$ является подмножеством морфизмов, определенных в предложении 2.4, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
C \times X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "h_c \times h_x"'] & Y \arrow[d, "h_y"] \\
C' \times X' \arrow[r, "\rho'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

коммутативна, а отображения $\langle h_x,\ h_y\rangle$ функционально-конгруэнтны относительно любого функционального отношения $R \subset F_1\,(\rho)$, т. е. отношение $(h_x \times h_y)\,(R)$ является также отношением функционального типа.

Тогда $(\mathrm{Ob}\,\bar{S}^f_g,\ \{\mathrm{Mor}^f\,(\rho,\ \rho')\colon \rho,\ \rho' \in \mathrm{Ob}\,\bar{S}^f_g\})$ образует категорию, которая будет обозначаться через $\bar{S}^f_g$ и называться *функционально-конгруэнтной категорией глобальных реакций.*

Доказательство. Пусть $R \subset F_1(\rho)$ — некоторое функциональное отношение, и пусть

$$\langle h_x, h_y, h_c\rangle \in \mathrm{Mor}^f(\rho, \rho').$$

Тогда

$$\begin{aligned}(x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in F_1(\rho) \Rightarrow (\exists c)\,(y = \rho(c, x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists c')\,(h_y \cdot y = \rho'(c', h_x \cdot x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (h_x \cdot x, h_y \cdot y) \in F_1(\rho') \Rightarrow (h_x \times h_y)(x, y) \in F_1(\rho').\end{aligned}$$

Следовательно, $(h_x \times h_y)(R) \subset F_1(\rho')$. Поэтому, если $\langle h_x, h_y, h_c\rangle \in \mathrm{Mor}^f(\rho, \rho')$, а $\langle h'_x, h'_y, h'_c\rangle \in \mathrm{Mor}^f(\rho', \rho'')$, то

$$\langle h'_x, h'_y, h'_c\rangle \cdot \langle h_x, h_y, h_c\rangle \in \mathrm{Mor}^f(\rho, \rho''),$$

что и требовалось доказать.

Категории $\bar{S}^f_g$ и $\bar{S}_g$, очевидно, связаны тождественным функтором

$$H_2\colon \bar{S}^f_g \to \bar{S}_g,$$

для которого $H_2(\rho) = \rho$ и $H_2(\langle h_x, h_y, h_c\rangle) = \langle h_x, h_y, h_c\rangle$. Более того, $\bar{S}^f$ и $\bar{S}^f_g$ связаны между собой функтором G_1, определенным в предложении 2.5, в одном направлении и функтором F^f_1, являющимся сужением функтора F_1, — в другом. Все эти соотношения сведены в диаграмму на рис. 2.2.

$$\begin{tikzcd}
\bar{S} & & \bar{S}_g \arrow[ll, "F_1"'] \\
\bar{S}^f \arrow[u, "H_1"] \arrow[rr, bend right, "G_1"'] & & \bar{S}^f_g \arrow[u, "H_2"'] \arrow[ll, bend right, "F_1^f"']
\end{tikzcd}$$

Рис. 2.2.

Функторы G_1 и F^f_1, очевидно, взаимосвязаны. В самом деле, мы покажем далее, что функтор F^f_1 является левым сопряженным к функтору G_1.

То, что $F^f_1 \cdot G_1\colon \bar{S}^f \to \bar{S}^f$ — тождественный функтор, очевидно. Менее очевиден характер композиции этих функторов в обратном порядке. Договоримся обозначать через $\rho_c\colon X \to Y$ для каждого $\rho\colon C \times X \to Y$ такую функцию, что $\rho_c(x) = \rho(c, x)$.

Предложение 2.8. $G_1F_1^f\colon \overline{S}_g^f \to \overline{S}_g^f$ есть функтор. Более того, для каждого $\rho \in \overline{S}_g^f$ существует морфизм $\tau_1(\rho) \in \mathrm{Mor}\,(\rho,\ G_1F_1^f\,(\rho))$, схематически представленный на рис. 2.3. Этот морфизм $\tau_1\,(\rho)$ задается

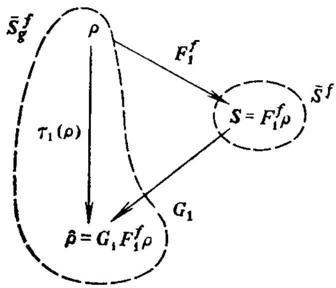


Рис. 2.3.

условием $\tau_1\,(\rho) = \langle I_x,\ I_y,\ h_c\rangle$, где для $\rho\colon C \times X \to Y$ справедливо равенство $h_c\,(c) = \rho_c$.

Доказательство. Пусть $\rho\colon C \times X \to Y$, и пусть $\hat{\rho} = G_1F_1^f\rho\colon\ \hat{C} \times X \to Y$. Согласно определению F_1^f, необходимо, чтобы $F_1^f\,(\rho) = S$, где

$$S = \{(x,\ y)\colon\ (\exists c)\,(\rho\,(c,\ x) = y)\}.$$

Поэтому для каждого $c \in C$ мы имеем $\rho_c \in \mathrm{Fun}\,(S) = \hat{C}$, и, следовательно, отображение $h_c\colon\ C \to \hat{C}$ определено корректно. Но из определения $\hat{\rho}$ вытекает, что

$$\hat{\rho}\,(h_c\cdot c,\ I_x\cdot x) = \hat{\rho}\,(\rho_c,\ x) = \rho_c\,(x) = \rho\,(c,\ x) = I_y\ \rho(c,\ x)$$

и, значит,

$$\langle I_x,\ I_y,\ h_c\rangle \in \mathrm{Mor}\,(\rho,\ G_1F_1^f\rho),$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы можем получить следующий результат:

Предложение 2.9. Пусть $I\colon\ \overline{S}_g^f \to \overline{S}_g^f$ — тождественный функтор. Тогда преобразование $\tau_1\colon\ I \to G_1F_1^f$ является каноническим, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\rho \arrow[r, "\tau_1(\rho)"] \arrow[d, "h"'] & G_1F_1^f\,(\rho) \arrow[d, "G_1F_1^f(h)"] \\
\rho' \arrow[r, "\tau_1(\rho')"] & G_1F_1^f\,(\rho')
\end{tikzcd}$$

где $\tau_1(\rho)$ определено в предложении 2.8, коммутативна.

Доказательство. Пусть $h = \langle h_x, h_y, h_c \rangle$, $\tau_1(\rho) = \langle I_x, I_y, \hat{h}_c \rangle$, $\tau_1(\rho') = \langle I_{x'}, I_{y'}, \hat{h}_{c'} \rangle$ и $G_1 F_1^f(h) = \langle h_x, h_y, h'_c \rangle$, где $\rho\colon C \times X \to Y$, $\rho'\colon C' \times X' \to Y'$, $G_1 F_1^f(\rho) = \hat{\rho}\colon \hat{C} \times X \to Y$ и $G_1 F_1^f(\rho') = \hat{\rho}'\colon \hat{C}' \times X \to Y'$. Тогда нам достаточно установить, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\hat{h}_c} & \hat{C} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_c} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h'_c} \\ C' & \xrightarrow{\hat{h}_{c'}} & \hat{C}' \end{array}$$

коммутативна. Но, согласно определениям $\hat{h}_c$, $\hat{h}_{c'}$ и h'_c, необходимо, чтобы $\hat{h}_c(c) = \rho_c$, $\hat{h}_{c'}(c') = \rho'_{c'}$ и для любого $x \in X$

$$h'_c(\hat{c}) = \hat{c}' \Leftrightarrow \hat{c}'(h_x \cdot x) = h_y \cdot \hat{c}(x).$$

Поэтому для любого $x \in X$

$$h'_c \cdot \hat{h}_c(c) = h'_c(\rho_c) \equiv \hat{c}'' \Leftrightarrow \hat{c}''(h_x \cdot x) = h_y \rho_c(x)$$

и

$$\hat{h}'_c \cdot h_c(c) = \rho'_{h_c(c)} \equiv \hat{c}' \Leftrightarrow \hat{c}'(h_x \cdot x) = \rho'(h_c \cdot c, h_x \cdot x).$$

А так как для любого $x \in X$ справедливо равенство $\rho'(h_c \cdot c, h_x \cdot x) = h_y \rho(c, x)$, то $\hat{c}'' = \hat{c}'$, ч. т. д.

Предложение 2.10. Пусть для каждого $\rho \in \mathrm{Ob}\, \bar{S}_g^f$ и $S \in \mathrm{Ob}\, \bar{S}^f$

$$\tau_2(\rho, S)(h) = G_1(h) \cdot \tau_1(\rho),$$

где $h \in \mathrm{Mor}(F_1^f \rho, S)$. Тогда

$$\tau_2(\rho, S)\colon \mathrm{Mor}(F_1^f \rho, S) \to \mathrm{Mor}(\rho, G_1 S)$$

является морфизмом категории $\overline{\mathrm{Set}}$, т. е. категории множеств. Более того, τ_2 является каноническим преобразованием из $\mathrm{Mor}(F_1^f -, -)$ в $\mathrm{Mor}(-, G_1 -)$, т. е.

$$\mathrm{Mor}(F_1^f -, -),\ \mathrm{Mor}(-, G_1 -)\colon (\bar{S}_g^f)^{\mathrm{op}} \times \bar{S}^f \to \overline{\mathrm{Set}},$$

$$\tau_2\colon \mathrm{Mor}(F_1^f -, -) \to \mathrm{Mor}(-, G_1 -),$$

и диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}(F_1^f\rho', S) \arrow[r, "\tau_2(\rho', S)"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}(F_1^f f, g)"] & \mathrm{Mor}(\rho', G_1S) \arrow[d, "\mathrm{Mor}(f, G_1g)"] \\
\mathrm{Mor}(F_1^f\rho, S') \arrow[r, "\tau_2(\rho, S')"] & \mathrm{Mor}(\rho, G_1S')
\end{tikzcd}$$

где $f \in \mathrm{Mor}(\rho, \rho')$ и $g \in \mathrm{Mor}(S, S')$, коммутативна.

Доказательство. Так как $\tau_1(\rho) \in \mathrm{Mor}(\rho, G_1F_1^f(\rho))$ и $G_1(h) \in \mathrm{Mor}(G_1F_1^f\rho, G_1S)$, то

$$G_1(h)\cdot\tau_1(\rho) \in \mathrm{Mor}(\rho, G_1S).$$

Следовательно,

$$\tau_2(\rho, S) \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Mor}(F_1^f\rho, S), \mathrm{Mor}(\rho, G_1S)).$$

Зададим произвольный элемент $h \in \mathrm{Mor}(F_1^f\rho', S)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mor}(f, G_1g)\,\tau_2(\rho', S)(h) &= \mathrm{Mor}(f, G_1g)\,G_1(h)\,\tau_1(\rho') = \\
&= G_1(g)\,G_1(h)\,\tau_1(\rho')\,f = \\
&= G_1(g)\,G_1(h)\,G_1F_1^f(f)\,\tau_1(\rho)\,^{1)} = \\
&= G_1(g\cdot h\cdot F_1^f(f))\cdot\tau_1(\rho) = \\
&= \tau_2(\rho, S')\,(g\cdot h\cdot F_1^f(f)) = \\
&= \tau_2(\rho, S')\,\mathrm{Mor}(F_1^f f, g)(h), \qquad \text{ч. т. д.}
\end{aligned}$$

Предложение 2.11. Пусть для каждого $\rho \in \mathrm{Ob}\,\overline{S}_g^f$ и $S \in \mathrm{Ob}\,\overline{S}^f$

$$\tau_3(\rho, S)(h) = F_1^f(h),$$

где $h \in \mathrm{Mor}(\rho, G_1S)$. Тогда

$$\tau_3(\rho, S)\colon \mathrm{Mor}(\rho, G_1S) \to \mathrm{Mor}(F_1^f\rho, S)$$

представляет собой морфизм категории $\overline{\mathrm{S}}\mathrm{et}$. Более того, преобразование τ_3: $\mathrm{Mor}(-, G_1 -) \to \mathrm{Mor}(F_1^f -, -)$ является каноническим, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}(\rho', G_1S) \arrow[r, "\tau_3(\rho', S)"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}(f, G_1g)"] & \mathrm{Mor}(F_1^f\rho', S) \arrow[d, "\mathrm{Mor}(F_1^f f, g)"] \\
\mathrm{Mor}(\rho, G_1S') \arrow[r, "\tau_3(\rho, S')"] & \mathrm{Mor}(F_1^f\rho, S')
\end{tikzcd}$$

в которой $f \in \mathrm{Mor}(\rho, \rho')$ и $g \in \mathrm{Mor}(S, S')$.

---

[1]) Согласно предложению 2.9.

Доказательство. Если $h \in \mathrm{Mor}(\rho, G_1S)$, то $F_1^f(h) \in \mathrm{Mor}(F_1^f\rho, F_1^f G_1S)$. А так как $F_1^fG_1 = I$, то $F_1^f(h) \in \mathrm{Mor}(F_1^f\rho, S)$. Следовательно,

$$\tau_3(\rho, S) \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Mor}(\rho, G_1S), \mathrm{Mor}(F_1^f\rho, S)).$$

Зададимся теперь произвольным $h \in \mathrm{Mor}(\rho', G_1S)$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}(F_1^ff, g)\,\tau_3(\rho', S)(h) &= \mathrm{Mor}(F_1^ff, g)\cdot F_1^f(h) = \\ &= g\cdot F_1^f(h)\,F_1^f(f) = \\ &= (F_1^fG_1)\,g\cdot F_1^f(h)\cdot F_1^f(f) = \\ &= F_1^f(G_1g\cdot h\cdot f) = \\ &= \tau_3(\rho, S')(G_1g\cdot h\cdot f) = \\ &= \tau_3(\rho, S')\,\mathrm{Mor}(f, G_1g)(h),\end{aligned}$$ ч. т. д.

Предложение 2.12. Преобразование $\tau_2(\rho, S)$ обратимо, так что

$$\tau_2(\rho, S)\cdot\tau_3(\rho, S) = I_{\mathrm{Mor}(\rho,\, G_1S)}$$

и

$$\tau_3(\rho, S)\cdot\tau_2(\rho, S) = I_{\mathrm{Mor}(F_1^f\rho,\, S)}.$$

Другими словами, τ_2 является каноническим изоморфизмом для $\mathrm{Mor}(F_1^f\,—,—) \cong \mathrm{Mor}(—, G_1—)$ и, следовательно, F_1^f является левым сопряженным к G_1.

Доказательство. Пусть $h \in \mathrm{Mor}(F_1^f\rho, S)$ произвольно. Тогда

$$\begin{aligned}\tau_3(\rho, S)\,\tau_2(\rho, S)(h) &= \tau_3(\rho, S)\,G_1(h)\tau_1(\rho) = \\ &= F_1^f(G_1(h)\,\tau_1(\rho)) = \\ &= F_1^fG_1(h)\cdot F_1^f\tau_1(\rho) = h.\end{aligned}$$

Выберем теперь произвольное $h \in \mathrm{Mor}(\rho, G_1S)$. Тогда

$$\tau_2(\rho, S)\,\tau_3(\rho, S)(h) = \tau_2(\rho, S)\,F_1^f(h) = G_1(F_1^f(h))\cdot\tau_1(\rho).$$

Поскольку диаграмма

$$\begin{tikzcd} \rho \arrow[r, "\tau_1(\rho)"] \arrow[d, "h"'] & G_1F_1^f(\rho) \arrow[d, "G_1F_1^f(h)"] \\ G_1S \arrow[r, "\tau_1(G_1S)"] & G_1F_1^fG_1S = G_1S \end{tikzcd}$$

коммутативна, то

$$\begin{aligned}\tau_2(\rho,\ S)\,\tau_3(\rho,\ S)(h) &= G_1(F_1^f(h))\cdot\tau_1(\rho) = \\ &= \tau_1(G_1S)\cdot h = \\ &= h \qquad (\text{так как } \tau_1(G_1S) = I),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из предложения 2.12 непосредственно следует, что для каждого $\rho \in \mathrm{Ob}\,\overline{S}_g^f$

$$\mathrm{Mor}(\rho,\ G_1—) \cong \mathrm{Mor}(F_1^f\rho,\ —)\colon \overline{S}^f \to \overline{S}^f.$$

Напомним еще, что G_1 — это конструктивный функтор, представляющий «процедуру реализации». В этом свете приведенное выше отношение показывает, что отношение моделирования между ρ и глобальной реакцией G_1S, построенной для $S \in \mathrm{Ob}\,\overline{S}^f$, по сути дела совпадает с аналогичным отношением между $F_1^f\rho$ и S.

3. КАТЕГОРИИ ВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ

В предыдущем параграфе мы занимались общими системами, и все полученные там результаты распространяются, конечно, и на более специальные структуры типа временных систем. Совершенно аналогичные утверждения можно привести для $\overline{S}$ и $\overline{S}_g$, если они представляют собой классы временных систем и начальных реакций соответственно, используя основные определения § 2. Однако существуют и другие категории и функторы, в явном виде использующие особенности структуры временных систем. Именно ими мы и займемся в настоящем параграфе.

Новая категория временны́х систем будет введена в следующем предложении:

Предложение 3.1. Обозначим через $\mathrm{Ob}\,\overline{I}$ класс семейств отображений $\overline{\rho} = \{\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t \mid t \in T\}$, где для любых $t \in T$ множество C_t произвольно, а X_t и Y_t суть сужения таких временных объектов X и Y, что

(i) входной объект X удовлетворяет условию согласованности входных воздействий, т. е.

$$(\forall x)(\forall x')(\forall t)(x,\ x' \in X \Rightarrow x^t\cdot x'_t \in X);$$

(ii) семейство $\overline{\rho}$ удовлетворяет условиям реализуемости, т. е.

$$\text{(P1)}\quad (\forall t)(\forall t')(\forall c_t)(\forall x_{tt'})(\exists c_{t'})(\forall x_{t'})(\rho_{t'}(c_{t'},\ x_{t'}) = \\ = \rho_t(c_t,\ x_{tt'}\cdot x_{t'}) \mid T_{t'}),$$

$$\text{(P2)}\quad (\forall t)(\forall c_t)(\exists c_0)(\exists x^t)(\forall x_t)(\rho_t(c_t,\ x_t) = \rho_0(c_0,\ x^t\cdot x_t) \mid T_t).$$

Кроме того, для любой пары $\bar{\rho}, \bar{\rho}' \in \mathrm{Ob}\, I$ пусть $\mathrm{Mor}\,(\bar{\rho}, \bar{\rho}')$ будет множеством всевозможных троек гомоморфизмов $h = \langle h_x, h_y, h_c\rangle$, $h_x\colon X \to X'$; $h_y\colon Y \to Y'$, $h_c\colon C_t \to C'_t$, таких, что h_x сюръективно, а диаграмма

$$\begin{tikzcd} C_t \times X_t \arrow[r, "\rho_t"] \arrow[d, "h_c \times h_x"] & Y_t \arrow[d, "h_y"] \\ C'_t \times X'_t \arrow[r, "\rho'_t"] & Y'_t \end{tikzcd}$$

при любых $t \in T$ коммутативна, т. е.

$$h_y \cdot \rho_t\,(c_t,\ x_t) = \rho'_t\,(h_c \cdot c_t,\ h_x \cdot x_t).$$

Тогда $(\mathrm{Ob}\,\bar{I},\ \{\mathrm{Mor}\,(\bar{\rho}, \bar{\rho}')\})$ образует категорию, которая будет обозначаться через $\bar{I}$ и называться *категорией реакций временных систем.*

Заметим, что, строго говоря, для каждого $t \in T$ нужно было бы определять свою функцию h_c. Однако для упрощения обозначений мы будем все их обозначать одинаковым символом h_c.

Отметим также, что условия реализуемости из предложения 3.1 являются более ограничительными, чем в общем случае. Другими словами, общее условие реализуемости требует, чтобы вместо (P2) выполнялось условие

$$(\mathrm{P2})' \quad (\forall t)\,(\forall c_t)\,(\forall x_t)\,(\exists c_0)\,(\exists x^t)\,(\rho_t\,(c_t,\ x_t) = \rho_0\,(c_0,\ x^t \cdot x_t) \mid T_t).$$

При этом ясно, что если семейство $\bar{\rho}$ удовлетворяет условиям (P1) и (P2), то $\bar{\rho}$ всегда реализуемо, поскольку из (P2) следует (P2)$'$. В то же время, если функция перехода состояний $\varphi_{tt'}\colon C_t \times X_{tt'} \to C_{t'}$, соответствующая $\bar{\rho}$, удовлетворяет условию

$$C_t = \varphi_{0t}\,(C_0 \times X^t),$$

то, очевидно, выполняется и условие (P2). По сути дела условия (P1) и (P2) являются условиями реализуемости, если выполнено требование $C_t = \varphi_{0t}\,(C_0 \times X^t)$. А поскольку последнее требование особенно удобно для использования аппарата теории категорий, оно и выступает здесь в роли условия (P2)$'$. В дальнейшем мы убедимся, что это ограничение не приводит к серьезной потере общности.

Существует пренебрегающий функтор, ставящий в соответствие каждой реакции временной системы ее начальную реакцию на состояние. Этот функтор определяется следующим образом:

Предложение 3.2. Пусть $F_2\colon \bar{I} \to \bar{S}_g$ — такое отображение, что для каждого $\bar{\rho} \in \mathrm{Ob}\,\bar{I}$

$$F_2(\bar{\rho}) = \rho \ (\in \mathrm{Ob}\,\bar{S}_g),$$

причем

$$\rho = \rho_0$$

и для каждой тройки $\langle h_x, h_y, h_c\rangle \in \mathrm{Mor}\,(\bar{\rho}, \bar{\rho}')$

$$F_2(\langle h_x, h_y, h_c\rangle) = \langle h_x, h_y, h_c\rangle.$$

Тогда F_2 является функтором

Существует также и конструктивный функтор, который каждой начальной реакции на состояние приписывает реакцию временно́й системы.

Пусть для каждого фиксированного $\rho \in \mathrm{Ob}\,\bar{S}_g$ отношение $E_t \subset (C \times X^t) \times (C \times X^t)$ определяется условиями

$$((c, x^t), (c', x'^t)) \in E_t \Leftrightarrow (\forall x_t)\,(\rho\,(c, x^t \cdot x_t) \mid T_t = \rho\,(c', x'^t \cdot x_t) \mid T_t)$$

и

$$(c, c') \in E_0 \Leftrightarrow (\forall x)\,(\rho\,(c, x) = \rho\,(c', x)).$$

Предложение 3.3. Пусть отображение $G_2\colon \bar{S}_g \to \bar{I}$ таково, что для каждого $\rho \in \mathrm{Ob}\,\bar{S}_g$

$$G_2(\rho) = \bar{\rho},$$

где $\bar{\rho} = \{\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t\}$, $C_t = (C \times X^t)/E_t$, и

$$\rho_t(c_t, x_t) = \rho\,(c, x^t \cdot x_t) \mid T_t,$$

где

$$c_t = [(c, x^t)],$$

а для каждой тройки $\langle h_x, h_y, h_c\rangle \in \mathrm{Mor}\,(\rho, \rho')$

$$G_2(\langle h_x, h_y, h_c\rangle) = \langle h_x, h_y, \hat{h}_c\rangle,$$

где для $c_t = [(c, x^t)]$

$$\hat{h}_c(c^t) = [(h_c c, h_x x^t)] \in C'_t.$$

Тогда G_2 является функтором

Доказательство. Показать, что ρ_t определено вполне корректно и что $G_2(\rho)$ при любых $\rho \in \mathrm{Ob}\,\bar{S}_g$ удовлетворяет условиям (P1) и (P2), т. е. что $G_2(\rho) \in \mathrm{Ob}\,\bar{I}$, совсем несложно.

Поэтому для произвольной тройки $\langle h_x, h_y, h_c\rangle \in \mathrm{Mor}(\rho, \rho')$ пусть $\langle h_x, h_y, \bar{h}_c\rangle = G_2(\langle h_x, h_y, h_c\rangle)$, $\bar{\rho} = G_2(\rho)$ и $\bar{\rho}' = G_2(\rho')$. Если $c_t = [(c, x^t)]$, то

$$\begin{aligned} h_y \cdot \rho_t(c_t, x_t) &= h_y(\rho(c, x^t \cdot x_t) \mid T_t) = \\ &= (h_y \cdot \rho(c, x^t \cdot x_t)) \mid T_t = \\ &= \rho'(h_c(c), h_x(x^t) \cdot h_t(x_t)) \mid T_t = \\ &= \rho'_t([(h_c(c), h_x(x^t))], h_x(x_t)) = \\ &= \rho'_t(h_c(c_t), h_x(x_t)). \end{aligned}$$

Следовательно, $\langle h_x, h_y, \bar{h}_c\rangle \in \mathrm{Mor}(G_2(\rho), G_2(\rho'))$.

Нетрудно также показать, что $G_2(h' \cdot h) = G_2(h') \cdot G_2(h)$, где $h \in \mathrm{Mor}(\rho, \rho')$ и $h' \in \mathrm{Mor}(\rho', \rho'')$, и что $G_2(I_\rho) = I_{G_2}(\rho)$, ч. т. д.

Теперь, рассуждая так же, как при доказательстве левой сопряженности функтора F_1^f к G_1, можно показать, что функтор F_2 является левым сопряженным к функтору G_2.

Предложение 3.4. Функтор F_2G_2: $\bar{S}_g \to \bar{S}_g$ является тождественным.

Зададимся произвольным $\bar{\rho} \in \mathrm{Ob}\,\bar{I}$. Поскольку $\bar{\rho}$ удовлетворяет условию (P2) предложения 3.1, найдется такое отображение φ: $C_t \to (C \times X^t)/E_t$, что для всех x_t

$$\varphi(c_t) = [(c, x^t)] \iff \rho_t(c_t, x_t) = \rho_0(c, x^t \cdot x_t) \mid T_t.$$

Строго говоря, φ зависит от t. Однако для упрощения обозначений мы будем для всех t пользоваться единым символом φ.

С помощью отображения φ можно определить каноническое преобразование μ_1: $I \to G_2F_2$.

Предложение 3.5. Пусть для каждого $\bar{\rho} \in \mathrm{Ob}\,\bar{I}$

$$\mu_1(\bar{\rho}) = \langle I_x, I_y, \varphi\rangle.$$

Тогда $\mu_1(\bar{\rho}) \in \mathrm{Mor}(\bar{\rho}, G_2F_2\bar{\rho})$. Более того, μ_1 является каноническим преобразованием в том смысле, что для μ_1: $I \to G_2F_2$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bar{\rho} & \xrightarrow{\mu_1(\bar{\rho})} & G_2F_2\bar{\rho} \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G_2F_2 \cdot h} \\ \bar{\rho}' & \xrightarrow{\mu_1(\bar{\rho}')} & G_2F_2\bar{\rho}' \end{array}$$

где I есть тождественный функтор из $\bar{I}$ в I, коммутативна.

Доказательство. Пусть

$$\bar{\rho} = \{\rho_t: C_t \times X_t \to Y_t \,\&\, t \in T\}$$

и

$$G_2F_2\bar{\rho} = \{\hat{\rho}_t\colon \hat{C}_t \times X_t \to Y_t \,\&\, t \in T\},$$

где $\hat{C}_t = (C \times X^t)/E_t$. Тогда для любых $[c, x^t] \in \hat{C}_t$

$$\hat{\rho}_t([c, x^t], x_t) = \rho_0(c, x^t \cdot x_t) \mid T_t.$$

Пусть $\varphi(c_t) = [c, x^t]$. Тогда

$$\hat{\rho}_t([c, x^t], x_t) = \rho_0(c, x^t \cdot x_t) \mid T_t = \rho_t(c_t, x_t),$$

а это значит, что $\langle I_x, I_y, \varphi\rangle \in \operatorname{Mor}(\bar{\rho}, G_2F_2\bar{\rho})$.

Пусть, наконец, $h = \langle h_x, h_y, h_c\rangle$, $G_2F_2h = \langle h_x, h_y, \bar{h}_c\rangle$ и $\langle I_x, I_y, \varphi'\rangle \in \operatorname{Mor}(\bar{\rho}', G_2F_2\bar{\rho}')$. Для фиксированного $c_t \in C_t$ положим $\varphi(c_t) = [(c, x^t)]$ и $\varphi'h_c(c_t) = [c', x'^t]$, где $\rho'_t\colon C'_t \times X'_t \to Y'_t$. Тогда для любых x_t и x'_t

$$\rho_t(c_t, x_t) = \rho_0(c, x^t \cdot x_t) \mid T_t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho'_t(h_c \cdot c_t, h_x \cdot x_t) = \rho'_0(h_c \cdot c, h_x(x^t) \cdot h_x(x_t)) \mid T_t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho'_t(h_c \cdot c_t, x'_t) = \rho'_0(h_c \cdot c, h_x(x^t) \cdot x'_t) \mid T_t.$$

Но в то же время из равенства $\varphi'h_c(c_t) = [c', x'^t]$ следует, что для любого x'_t

$$\rho'_0(c', x'^t \cdot x'_t) \mid T_t = \rho'_t(h_t \cdot c_t, x'_t).$$

Значит, $[c', x'^t] = [h_c \cdot c, h_x \cdot x^t]$, т. е. $h_c \cdot \varphi(c_t) = \varphi'h_c(c_t)$ для любых c_t. Поэтому $G_2F_2h\mu_1(\bar{\rho}) = \mu_1(\bar{\rho}') \cdot h$, ч. т. д.

Предложение 3.6. Пусть

$$\mu_2(\bar{\rho}, \rho)\colon \operatorname{Mor}(F_2\bar{\rho}, \rho) \to \operatorname{Mor}(\bar{\rho}, G_2\rho)$$

таково, что для каждого $h \in \operatorname{Mor}(F_2\bar{\rho}, \rho)$ имеет место равенство $\mu_2(\bar{\rho}, \rho)(h) = G_2(h)\,\mu_1(\bar{\rho})$. Тогда μ_2 является каноническим преобразованием, т. е.

$$\mu_2\colon \operatorname{Mor}(F_2—,—) \to \operatorname{Mor}(—, G_2—),$$

а диаграмма

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Mor}(F_2\bar{\rho}', \rho) \arrow[r, "\mu_2(\bar{\rho}', \rho)"] \arrow[d, "\operatorname{Mor}(F_2f, g)"'] & \operatorname{Mor}(\bar{\rho}', G_2\rho) \arrow[d, "\operatorname{Mor}(f, G_2f)"] \\ \operatorname{Mor}(F_2\bar{\rho}, \rho') \arrow[r, "\mu_2(\bar{\rho}, \rho')"] & \operatorname{Mor}(\bar{\rho}, G_2\rho') \end{tikzcd}$$

где $f \in \operatorname{Mor}(\bar{\rho}, \bar{\rho}')$, $g \in \operatorname{Mor}(\rho, \rho')$ и

$$\mathrm{Mor}\,(F_2—,—),\ \mathrm{Mor}\,(—,\ G_2—)\colon \bar{I}^{\mathrm{op}} \times \bar{S}_g \to \overline{\mathrm{Set}},$$

является коммутативной.

Предложение 3.7. Пусть

$$\mu_3\,(\bar\rho,\ \rho)\colon \mathrm{Mor}\,(\bar\rho,\ G_2\rho) \to \mathrm{Mor}\,(F_2\bar\rho,\ \rho)$$

таково, что для каждого $h \in \mathrm{Mor}\,(\bar\rho,\ G_2\rho)$ имеет место равенство $\mu_3\,(\bar\rho,\ \rho)\,(h) = F_2(h)$. Тогда μ_3 является каноническим преобразованием, т. е.

$$\mu_3\colon \mathrm{Mor}\,(—,\ G_2—) \to \mathrm{Mor}\,(F_2—,—),$$

а диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}\,(\bar\rho',\ G_2\rho) \arrow[r, "\mu_3(\bar\rho',\ \rho)"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}(f,\ G_2 g)"'] & \mathrm{Mor}\,(F_2\bar\rho',\ \rho) \arrow[d, "\mathrm{Mor}(F_2 f,\ g)"] \\
\mathrm{Mor}\,(\bar\rho,\ G_2\rho') \arrow[r, "\mu_3(\bar\rho,\ \rho')"] & \mathrm{Mor}\,(F_2\bar\rho,\ G_2\bar\rho')
\end{tikzcd}$$

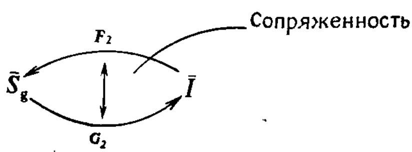
где $f \in \mathrm{Mor}\,(\bar\rho,\ \bar\rho')$, $g \in \mathrm{Mor}\,(\rho,\ \rho')$ и

$$\mathrm{Mor}\,(F_2—,—),\ \mathrm{Mor}\,(—,\ G_2—)\colon \bar{I}^{\mathrm{op}} \times \bar{S}_g \to \overline{\mathrm{Set}},$$

коммутативна.

Предложение 3.8. Преобразование $\mu_2\,(\bar\rho,\ \rho)$ обратимо и таково, что $\mu_2^{-1}\,(\bar\rho,\ \mu) = \mu_3\,(\bar\rho,\ \mu)$. Следовательно, функтор F_2 является левым сопряженным к G_2.

Все это можно выразить диаграммой



и соотношением $\mathrm{Mor}\,(F_2—,—) \cong \mathrm{Mor}\,(—,\ G_2—)$.

4. КАТЕГОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Следуя процедуре предыдущего параграфа, мы введем теперь категорию динамических систем и различные функторы, связывающие эту новую категорию со старыми, которые рассматривались ранее. И, конечно, при построении категории динамических систем мы можем чувствовать себя менее связанными, поскольку результат этого построения зависит не только от выбора объекта состояний C_t, но и от характера семейства функций перехода состояний $\bar{\varphi}$. Понятие категории динамических систем должно быть согласовано со всеми основными подходами, принятыми нами для развития общей теории систем, а именно с представлением о системе как об отношении между множеством входных воздействий и выходных величин, в то время как понятия состояния и семейства функций перехода состояний должны быть производными, вторичными понятиями.

Прежде чем вводить категорию динамических систем, уместно сделать следующее замечание. Пусть $\{\varphi_{tt'}\colon C_t \times X_{tt'} \to C_{t'}\}$ — семейство функций перехода состояний некоторой динамической системы. В общем случае $\varphi_{tt'}(C_t \times X_{tt'})$ оказывается собственным подмножеством множества $C_{t'}$. Однако существует весьма естественный способ сделать функцию $\varphi_{tt'}$ сюръективной. Обозначим для каждого $t \in T$ через $\bar{C}_t$ множество $\varphi_{0t}(C \times X^t)$. Мы утверждаем, что $\varphi_{tt'}(\bar{C}_t \times X_{tt'}) = \bar{C}_{t'}$. Действительно,

$$
\begin{aligned}
&c_{t'} \in \varphi_{tt'}(\bar{C}_{t'} \times X_{tt'}) \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow (\exists\, (c_t, x_{tt'}))\, (c_t \in \bar{C}_t \;\&\; c_{t'} = \varphi_{tt'}\,(c_t, x_{tt'})) \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow (\exists\, (c, x^t))\, (\exists\, x_{tt'})\, (c_t = \varphi_{0t}(c, x^t) \;\&\; c_{t'} = \varphi_{tt'}\,(c_t, x_{tt'})) \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow (\exists\, (c, x^t \cdot x_{tt'}))\, (c_{t'} = \varphi_{0t'}(c, x^t \cdot x_{tt'})) \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow c_{t'} \in \bar{C}_{t'}.
\end{aligned}
$$

Более того, непосредственно из теоремы о реализации следует, что

$$
\begin{aligned}
\{(x_t, y_t)\colon (\exists\, c_t \in C_t)\, (y_t = \rho_t(c_t, x_t))\} &= \\
&= \{(x_t, y_t) \mid (\exists\, c_t \in \bar{C}_t)\, (y_t = \rho_t(c_t, x_t))\}.
\end{aligned}
$$

Поэтому без какой-нибудь потери общности всегда можно предполагать, что каждая функция семейства перехода состояний любой динамической системы сюръективна.

Предложение 4.1. Пусть $\mathrm{Ob}\,\bar{D}$ представляет собой множество всевозможных пар $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$, для которых

$$
\begin{aligned}
\rho &= \{\rho_t\colon C_t \times X_t \to Y_t \;\&\; t \in T\}, \\
\bar{\varphi} &= \{\varphi_{tt'}\colon C_t \times X_{tt'} \to C_{t'} \;\&\; t,\ t' \in T\},
\end{aligned}
$$

все $\varphi_{tt'}$ сюръективны, а $\bar{\rho} = \{\rho_t\}$ и $\bar{\varphi} = \{\varphi_{tt'}\}$ удовлетворяют условию согласованности входных воздействий и состояний, условию согласованности реакций и обладают свойством композиции (см. гл. II). Пусть также для любых $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$, $(\bar{\rho}', \bar{\varphi}') \in \mathrm{Ob}\,\bar{D}$ множество $\mathrm{Mor}\,((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), (\bar{\rho}', \bar{\varphi}'))$ образовано всевозможными тройками гомоморфизмов $f = \langle h_x, h_y, h_c \rangle$, для которых h_x сюръективнс, а диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_t \times X_t & \xrightarrow{\rho_t} & Y_t \\ {\scriptstyle h_c \times h_x}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h_y} \\ C'_t \times X'_t & \xrightarrow[\rho'_t]{} & Y'_t \end{array}$$

коммутативна. Более того, пусть

$$\langle h_x, h_y, h_c \rangle \cdot \langle h'_x, h'_y, h'_c \rangle = \langle h_x \cdot h'_x, h_y \cdot h'_y, h_c \cdot h'_c \rangle.$$

Тогда $(\mathrm{Ob}\,\bar{D}, \{\mathrm{Mor}\,((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), (\bar{\rho}', \bar{\varphi}'))\})$ образует категорию, которую мы будем обозначать через $\bar{D}$ и называть *категорией динамических систем.*

В определении категории $\bar{D}$ от морфизмов $h = \langle h_x, h_y, h_c \rangle$ не требовалось, чтобы они были гомоморфизмами относительно φ. Однако, как уже отмечалось в § 1, морфизм h является одновременно и гомоморфизмом для φ в смысле коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} (C_t/E_t) \times X_{tt'} & \xrightarrow{\hat{\varphi}_{tt'}} & (C_{t'}/E_{t'}) \\ {\scriptstyle \hat{h}_c \times h_x}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \hat{h}_c} \\ (C'_t/E'_t) \times X'_{tt'} & \xrightarrow{\hat{\varphi}'_{tt'}} & (C'_{t'}/E'_{t'}) \end{array}$$

где $E_t \subset C_t \times C_t$ — отношение эквивалентности, такое, что

$$(c_t, c'_t) \in E_t \Leftrightarrow (\forall\, x_t)\,(\rho_t\,(c_t, x_t) = \rho_t\,(c'_t, x_t)),$$

$$\hat{h}_c\colon (C_t/E_t) \to C'_t/E'_t,$$

и

$$\hat{\varphi}_{tt'}\colon (C_t/E_t) \times X_{tt'} \to (C_{t'}/E_{t'})$$

представляют собой расширения $h_c\colon C_t \to C'_t$ и $\varphi_{tt'}\colon C_t \times X_{tt'} \to C_{t'}$, для которых

$$\hat{h}_c\,([c_t]) = [h_c\,(c_t)],$$

$$\hat{\varphi}_{tt'}([c_t], x_{tt'}) = [\varphi_{tt'}(c_t, x_{tt'})].$$

Для удобства обозначений договоримся, что $\hat{C}_t = C_t/E_t$. Теперь ясно, что для любого заданного $\bar{\rho} \in \mathrm{Ob}\,\bar{I}$ и любого $t \in T$ можно определить отображение $\hat{\rho}_t$: $\hat{C}_t \times X_t \to Y_t$ следующим образом:

$$\hat{\rho}_t([c_t], x_t) = \rho_t(c_t, x_t).$$

Более того, нетрудно показать, что $\bar{\hat{\rho}} = \{\hat{\rho}_t: t \in T\} \in \mathrm{Ob}\,\bar{I}$.

Введем, наконец, некоторые функторы, связывающие категорию динамических систем с ранее введенными категориями. Мы начнем с пренебрегающего функтора, связывающего $\bar{D}$ с последней из введенных до него категорий $\bar{I}$.

Предложение 4.2. Пусть для отображения F_3: $\bar{D} \to \bar{I}$ и любой пары $(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \in \mathrm{Ob}\,\bar{D}$

$$F_3(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) = \bar{\hat{\rho}},$$

а для любых морфизмов

$$F_3(\langle h_x, h_y, h_c\rangle) = \langle h_x, h_y, \hat{h}_c\rangle,$$

где $\bar{\hat{\rho}}$ и $\hat{h}_c$ определены выше. Тогда F_3 является функтором.

Для того чтобы ввести конструктивный функтор, связывающий $\bar{I}$ и $\bar{D}$, заметим прежде всего, что для каждого

$$\bar{\hat{\rho}} = \{\hat{\rho}_t: \hat{C}_t \times X_t \to Y_t \;\&\; t \in T\},$$

порожденного семейством

$$\bar{\rho} = \{\rho_t: C_t \times X_t \to Y_t \;\&\; t \in T\},$$

условие (P1) предложения 3.1 однозначно определяет для всех $t, t' \in T$ функцию $\hat{\varphi}_{tt'}$: $\hat{C}_t \times X_{tt'} \to \hat{C}_{t'}$. Это позволяет задать конструктивный функтор через посредство $\bar{\hat{\rho}}$ и $\bar{\hat{\varphi}} = \{\hat{\varphi}_{tt'}: \hat{C}_t \times X_{tt'} \to \hat{C}_{t'}\}$.

Предложение 4.3. Пусть для отображения G_3: $\bar{I} \to \bar{D}$ и всех $\bar{\rho} \in \mathrm{Ob}\,\bar{I}$

$$G_3(\bar{\bar{\rho}}) = (\bar{\hat{\rho}}, \bar{\hat{\varphi}}),$$

а для всех $\langle h_x, h_y, h_c\rangle \in \mathrm{Mor}\,(\bar{\rho}, \bar{\rho}')$

$$G_3(\langle h_x, h_y, h_c\rangle) = \langle h_x, h_y, \hat{h}_c\rangle,$$

где $\hat{h}_c([c_t]) = [h_c(c_t)]$. Тогда G_3 является функтором.

Обозначим через $\bar{I}_r$ полную подкатегорию категории $\bar{I}$, такую, что

$$\bar{\hat{\rho}} = \{\hat{\rho}_t: \hat{C}_t \times X_t \to Y_t \;\&\; t \in T\} \in \mathrm{Ob}\,\bar{I}_r \Longleftrightarrow [\bar{\hat{\rho}} \in \bar{I} \text{ и } \bar{\hat{\rho}} \text{ приведено}].$$

Из самого построения функтора F_3 видно, что его область значений совпадает с $\bar{I}_r$. Если теперь определить F_3^r как функтор из $\bar{D}$ в $\bar{I}_r$ и обозначить сужение G_3 на $\bar{I}_r$ через G_3^r, то доказанные ниже результаты показывают, что F_3^r является левым сопряженным к G_3^r. Обозначим через η: $C_t \to \hat{C}_t$ каноническое отображение, т. е. пусть для любого $t \in T$ выполняется равенство $\eta(c_t) = [c_t]$. Из определений функторов F_3^r и G_3^r следует, что

$$F_3^r G_3^r = I\colon \bar{I}_r \to \bar{I}_r.$$

Предложение 4.4. Для каждой пары $(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \in \mathrm{Ob}\,\bar{D}$ пусть $\nu_1(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) = \langle I_x, I_y, \eta\rangle$. Тогда

$$\nu_1(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \in \mathrm{Mor}\,((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), G_3^r F_3^r(\bar{\rho}, \bar{\varphi})).$$

Более того, ν_1 является каноническим преобразованием, т. е. ν_1: $I \to G_3^r F_3^r$, а диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \arrow[r, "\nu_1(\bar{\rho}, \bar{\varphi})"] \arrow[d, "h"'] & G_3^r F_3^r(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \arrow[d, "G_3^r F_3^r h"] \\
(\bar{\rho}', \bar{\varphi}') \arrow[r, "\nu_1(\bar{\rho}', \bar{\varphi}')"] & G_3^r F_3^r(\bar{\rho}', \bar{\varphi}')
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Предложение 4.5. Пусть для каждой пары $(\bar{\bar{\rho}}, \bar{\varphi}) \in \mathrm{Ob}\,\bar{D}$ и $\bar{\hat{\rho}}_i \in \mathrm{Ob}\,\bar{I}_r$

$$\nu_2((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), \bar{\hat{\rho}}_i)\colon \mathrm{Mor}\,(F_3^r(\bar{\rho}, \bar{\varphi}), \bar{\hat{\rho}}_i) \to \mathrm{Mor}\,((\bar{\bar{\rho}}, \bar{\varphi}), G_3^r \bar{\hat{\rho}}_i)$$

таково, что для любых $h \in \mathrm{Mor}\,(F_3^r(\bar{\rho}, \bar{\varphi}), \bar{\hat{\rho}}_i)$

$$\nu_2((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), \bar{\hat{\rho}}_i)(h) = G_3^r(h)\,\nu_1(\bar{\rho}, \bar{\varphi}).$$

Тогда ν_2 является каноническим преобразованием, то есть ν_2: $\mathrm{Mor}\,(F_3^r —, —) \to \mathrm{Mor}\,(—, G_3^r —)$, а диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}\,(F_3^r(\bar{\rho}', \bar{\varphi}'), \bar{\hat{\rho}}_i) \arrow[r, "\nu_2((\bar{\rho}', \bar{\varphi}'), \bar{\hat{\rho}}_i)"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}(F_3^r f,\, g)"'] & \mathrm{Mor}\,((\bar{\rho}', \bar{\varphi}'), G_3^r \bar{\hat{\rho}}_i) \arrow[d, "\mathrm{Mor}(f,\, G_3^r g)"] \\
\mathrm{Mor}\,(F_3^r(\bar{\rho}, \bar{\varphi}), \bar{\hat{\rho}}_i') \arrow[r, "\nu_2((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), \bar{\hat{\rho}}_i')"] & \mathrm{Mor}\,((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), G_3^r \bar{\hat{\rho}}_i')
\end{tikzcd}$$

где $f \in \mathrm{Mor}\,((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), (\bar{\rho}', \bar{\varphi}'))$ и $g \in \mathrm{Mor}\,(\bar{\hat{\rho}}_i, \bar{\hat{\rho}}_i')$, коммутативна.

Предложение 4.6. Пусть для каждой пары $(\bar{\rho}, \bar{\varphi}) \in \mathrm{Ob}\,\bar{D}$ и каждого $\bar{\hat{\rho}}_i \in \mathrm{Ob}\,\bar{I}_r$

$$\nu_2((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), \bar{\hat{\rho}}_i)\colon \mathrm{Mor}\,((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), G_3^r \bar{\hat{\rho}}_i) \to \mathrm{Mor}\,(F_3^r(\bar{\bar{\rho}}, \bar{\varphi}), \bar{\hat{\rho}}_i)$$

таково, что для любых $h \in \mathrm{Mor}\,((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), G_3^r\bar{\hat{\rho}}_i)$

$$\nu_3\,((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), \bar{\hat{\rho}}_i)\,(h) = F_3^r\,(h)$$

Тогда ν_3 является каноническим преобразованием, то есть ν_3: $\mathrm{Mor}\,(-, G_3^r-) \to \mathrm{Mor}\,(F_3^r-, -)$, а диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}\,((\bar{\rho}', \bar{\varphi}'), G_3^r\bar{\hat{\rho}}_i) \arrow[r, "\nu_3((\bar{\rho}', \bar{\varphi}'), \bar{\hat{\rho}}_i)"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}(f, G_3^r g)"] & \mathrm{Mor}\,(F_3^r(\bar{\rho}', \bar{\varphi}'), \bar{\hat{\rho}}_i) \arrow[d, "\mathrm{Mor}(F_3^r f, g)"] \\
\mathrm{Mor}\,((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), G_3^r\bar{\hat{\rho}}_i') \arrow[r, "\nu_3((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), \bar{\hat{\rho}}_i')"] & \mathrm{Mor}\,(F_3^r(\bar{\rho}, \bar{\varphi}), \bar{\hat{\rho}}_i')
\end{tikzcd}$$

для которой $f \in \mathrm{Mor}\,((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), (\bar{\rho}', \bar{\varphi}'))$ и $g \in \mathrm{Mor}\,(\bar{\hat{\rho}}_i, \bar{\hat{\rho}}_i')$, коммутативна.

И, наконец, последнее предложение:

Предложение 4.7. Преобразование $\nu_2\,((\bar{\bar{\rho}}, \bar{\bar{\varphi}}), \bar{\hat{\rho}}_i)$ обратимо, так что

$$\nu_2^{-1}\,((\bar{\rho}, \bar{\bar{\varphi}}), \bar{\hat{\rho}}_i) = \nu_3\,((\bar{\rho}, \bar{\varphi}), \bar{\hat{\rho}}_i).$$

Поэтому функтор F_3^r является левым сопряженным к G_3^r, т. е.

$$\mathrm{Mor}\,(F_3^r-,-) \cong \mathrm{Mor}\,(-, G_3^r-)\colon \bar{D}^{\mathrm{op}} \times \bar{I}_r \to \overline{\mathrm{Set}}.$$

Подводя итог изложенному, можно сказать, что на протяжении этой главы мы установили соотношения между категориями, которые изображены в виде диаграммы, представленной на рис. 4.1,

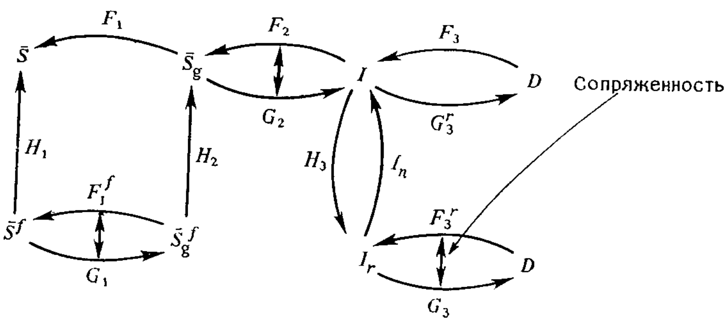


Рис. 4.1.

где I_n — функтор включения, а функтор H_3: $\bar{I} \to \bar{I}_r$ задается условиями:

$$H_3\,(\bar{\rho}) = \bar{\hat{\rho}} \quad \text{и} \quad H_3\,(\langle h_x, h_y, h_c\rangle) = \langle h_x, h_y, \hat{h}_c\rangle.$$

КОММЕНТАРИИ К СПИСКУ ЛИТЕРАТУРЫ И ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

В связи с тем что настоящая книга задумана как монография, посвященная новой теории, в ней встречаются ссылки на литературу двух разных типов. Ссылки первого типа [2—20] отсылают читателя к результатам из других областей знаний, которые используются в стратегически важные моменты изложения для того, чтобы указать на возможные области применения или чтобы связать новую теорию с другими отраслями знаний. Ссылки же второго типа [1, 21—41] знакомят читателя с более ранними и сопутствующими работами того же направления. Литература первого типа упоминается на протяжении всей этой книги, а все используемые нами источники перечислены в конце настоящего приложения.

Программа развития математической общей теории систем в том виде, в каком она намечена в гл. I, была впервые задумана в 1960 г. (см. [1]). Приводя список литературы за такой долгий период времени, трудно удержаться от того, чтобы не взглянуть на развитие этой дисциплины в ее исторической перспективе, но, как и в любом историческом исследовании, нам не менее трудно сохранить объективность и удержаться от выражения личного отношения. Мы попробуем разрешить эту задачу по справедливости, придав нашей библиографии характер очерка истории развития этого научного направления, и попытаемся показать, какое влияние оказали на наши исследования работы других авторов. При этом нам кажется необходимым хронологически отделить все то, что относится к периоду до 1960 г., поскольку работы того периода непосредственно (хотя и не всегда одинаково) сказались на формировании нашей программы.

Наша программа сложилась главным образом под воздействием трех ведущих научных школ, давших к тому же и основной толчок зарождению этого нового направления. Школы эти связаны с именами Людвига фон Берталанфи [21, 22], Норберта Винера [23, 24] и Герберта Саймона [25, 26]. Мы говорим здесь о «школах», желая особо отметить, что в успехах, привычно связываемых с именами этих первооткрывателей и основных пропагандистов, значительны заслуги и многих других ученых. Так, Анатоль Рапопорт [27] и Кеннет Боулдинг [28] немало сделали для общей теории систем в смысле Берталанфи, а Росс Эшби [29] — для кибернетики в смысле Винера.

Прежде всего нам хочется упомянуть имя фон Берталанфи, ибо если говорить лично о нас, то именно он первый помог формированию наших идей, а потому все, что сделано до его первых работ по общей теории систем, мы предоставляем в полное распоряжение историков. Фон Берталанфи предложил свою общую теорию систем как некоторую философию науки. Подобная теория должна была заниматься самыми фундаментальными процессами, являющимися универсальными в том смысле, что они охватывают явления, относящиеся к любой научной дисциплине. Эта теория должна была также стать поистине междисциплинарной и отказываться от внутридисциплинарных рамок независимо от того, как бы ни была развита соответствующая дисциплина. В частности, Берталанфи среди других научных дисциплин особо выделял математику и решительно утверждал, что создание математической теории общих систем противоречит основным понятиям общей теории систем [22].

Наш интерес привлекла здесь главным образом идея о необходимости создания общей теории систем. В то же время наша конкретная программа явилась скорее результатом нашего несогласия с взглядами и подходами, предложенными ранее. В стремлении выражать свои мысли ясно, точно и строго, т. е. на языке математики, нет ничего ограничительного. Напротив, основная опасность таится как раз в попытках построить научную теорию, и особенно междисциплинарную теорию, на туманной, нечеткой и допускающей разные интерпретации основе. Многим междисциплинарным рассуждениям не хватает именно прочной основы, на которой мог бы базироваться междисциплинарный обмен знаниями, и нечеткость языка может лишь затормозить, а не стимулировать прогресс в этой области. Возможно, что именно этим объясняется, почему многие зрелые ученые даже со склонностью к философии (например, Моно [30]) отвергают общую теорию систем как неоперационную, т. е. лишенную возможности объяснения реальных явлений. В то время как фон Берталанфи интересовали те аспекты систем, которые связаны с *теорией общих систем* как наукой об универсальных законах и принципах, распространяющихся одновременно на биологические, физические, социальные и другие явления, нас интересует *общая теория систем*, в которой речь должна идти об общих свойствах формальных отношений между интересующими нас объектами, и потому в ней не должно быть места внутридисциплинарным соображениям, поскольку любая формальная теория междисциплинарна по самому своему характеру.

Кроме того, необходимо отметить влияние, которое оказал на нас Норберт Винер, и по двум причинам. Во-первых, Винеру удалось показать, что междисциплинарные проблемы можно решать математическими методами. Во-вторых, он указал на своеобразие и важность процессов управления для любых явлений природы. Винер весьма удачно придумал термин «кибернетика», который должен был служить как бы знаменем для работ, посвященных изучению информационных систем управления. Однако, к сожалению, под это знамя встала довольно пестрая компания исследователей, и думается, что настоящие успехи кибернетики еще впереди. По нашему мнению, нам удалось несколько продвинуться в сторону создания общей теории некоторых целенаправленных, т. е. кибернетических, систем [31]. Настоящая книга должна заложить достаточно прочный фундамент более полной общей теории кибернетики.

Влияние на наши работы идей Герберта Саймона не столь непосредственно. Его глубокое понимание того, как «действительно» работают сложные системы (в противовес известным идеализациям, часто связанным с идеями оптимизации), будь они социальными, политическими или «искусственными», и его яркие многочисленные примеры, уточняющие эти представления, послужили неисчерпаемым источником типичных ситуаций, объяснять которые должна формальная теория. Желание формализовать подобные реалистические представления и сценарии явилось весьма сильным побудительным мотивом, на который мы ответили в более явном виде скорее работой [31], чем настоящей книгой.

Ну а что же о последующих работах? Упомянем лишь несколько направлений, которые кажутся нам либо наиболее близкими, либо привлекли к себе наибольшее внимание.

Прежде всего начиная с середины 60-х годов наметилась тенденция к интеграции различных специализированных уже достаточно развитых технических теорий [32—34] с целью создания более абстрактной теории какого-то особого класса систем (например, алгебраической теории систем, описываемых конечно-разностными уравнениями [34]). Подобные теории, по определению, приводят к результатам такого рода и такого уровня общности, который интересует и нас, однако их нужно продвинуть гораздо дальше, прежде чем они действительно сомкнутся с общей теорией систем. Наиболее близка к этой цели теория, развиваемая Уаймором. Однако из-за того, что его формальный аппарат требует весьма богатой математической структуры, подход Уаймора не годится для полноценного описания крупномасштабных или целенаправленных систем и без существенной переделки не может подняться до уровня общности, характерного для нашей теории систем.

Вторая тенденция связана с попытками применения нашего формализма. В этом плане Мако [35] изучал проблему естественных состояний, а Уиндекнехт [36] на базе нашего понятия временной системы попытался построить общую теорию динамических процессов, но возможности его теории оказались весьма ограниченными, несмотря на кажущуюся детальность анализа.

В качестве третьей тенденции отметим попытки разработки других подходов. Среди них особого упоминания заслуживают работы Клира [37] и Гогена [38]. Пока еще рано судить, насколько обоснованы эти подходы и как они связаны с другими усилиями подобного рода.

Наконец, мы отсылаем читателя к работам [39] и [40], где можно найти многочисленные ссылки на работы, с которыми ему стоит ознакомиться, чтобы получить представление о различных подходах данного направления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mesarovic M. D., Eckman D. P., On some basic concepts of the general systems theory, Proc. 3rd Internat. Conf. Cy., Namure, Belgium, 1961.
2. Nerode A., Linear automaton transformation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 (1958).
3. Hajek O., Dynamical Systems in the Plane, Academic Press, New York and London, 1968.
4. Gill A., Introduction to the Theory of Finite-State Machines, McGraw-Hill, New York, 1962.
5. Brockett R. W., Finite-Dimensional Linear Systems, Wiley, New York, 1970.
6. Mikusinski J., Operational Calculus, Pergamon, Oxford, 1959, гл. II. (Микусинский Я., Операторное исчисление, ИЛ, М., 1956.)
7. MacLane S., Birkhoff G., Algebra, Macmillan, New York, 1971, гл. V.
8. Lee E. B., Markus L., Foundations of Optimal Control Theory, Wiley, New York, 1967. (Ли Э. Б., Маркус Л., Основы теории оптимального управления, «Наука», М., 1972).
9. Taylor A. E., Introduction to Functional Analysis, Wiley, New York, 1963.
10. Kalman R. E., Ho Y. C., Narendra K. S., Controllability of linear dynamical systems, in «Contributions to Differential Equations», Vol. 1, Wiley, New York, 1963.
11. Brockett R. W., Mesarovic M. D., The reproducibility of multivariable systems, *Math. Anal. Appl.*, 10 (1965).
12. Hartmanis J., Stearns R. E., Algebraic Structure Theory of Sequential Machines, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
13. Bushaw D., A stability criterion for general systems, *J. Math. Systems Theory*, 1 (1967).
14. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М. — Л., 1947.
15. Thom R., Stabilité structurelle et Morphógénèse, Benjamin, New York, 1972.
16. Зубов В. И., Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд-во Ленингр. ун-та, 1957.
17. Krohn K. B., Rhodes J. L., Algebraic theory of machines, in Proc. Symp. Math. Theory of Automata, Wiley, New York, 1963.

18. Smullyan R. M., Theory of Formal Systems, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1961.
19. Davis M., Computability and Unsolvability, McGraw-Hill, New York, 1958.
20. Yoshii S., General Stability of Sets, M. S. thesis, Case Western Reserve Univ., Cleveland, Ohio, 1971.
21. von Bertalanffy L., An outline of general system theory, *Brit. J. Philos. Sci.*, 1 (1950), 134—164. Перепечатано в «General System Theory: Foundations, Development, Applications», George Braziller, New York, 1968.
22. von Bertalanffy L., General Systems Theory, George Braziller, New York, 1968, гл. I и VIII.
23. Wiener N., Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine, M. I. T. Press, Cambridge, Mass., and Wiley, New York, 1961. (Винер Н., Кибернетика или управление и связь в животном и машине, «Сов. Радио», М., 1958.)
24. Wiener N., The Human Use of Human Beings; Cybernetics and Society, Houghton Mifflin, Boston, 1950. (Винер Н., Кибернетика и общество, ИЛ, М., 1958.)
25. Simon H. A., Administrative Behavior, Free Press, New York, 1957.
26. Simon H. A., The Sciences of the Artificial, M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1969. (Саймон Г., Науки об искусственном, «Мир», М., 1972.)
27. Rapoport A., Mathematical aspects of general systems analysis, General Systems Year Books, 11 (1966).
28. Boulding K., General systems theory-skeleton of science, in «General Systems Year-book», Vol. 1, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1956.
29. Ashby W. R., An Introduction to Cybernetics, 3rd ed. Wiley, New York, 1958. (Эшби У. Р., Введение в кибернетику, ИЛ, М., 1959.)
30. Monod Jacques, Le Hasard et la Necessite, Editions Du Seuil, Paris, 1970.
31. Mesarovic M. D., Macko D., Takahara Y., Theory of Hierarchical Multilevel Systems, Acad. Press, New York and London, 1970. (Месарович М. и др., Теория иерархических многоуровневых систем, «Мир», М., 1973.)
32. Volterra V., Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations, Dover, New York, 1959.
33. Wymore A. W., A Mathematical Theory of Systems Engineering — The Elements, Wiley, New York, 1967.
34. Kalman R. E., Falb P. L., Arbib M. A., Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill, New York, 1969. (Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем, «Мир», М., 1971.)
35. Macko D., Natural states and past-determinism of general time systems. *Inform. Sci.*, 3 (1971).
36. Windeknecht T. G., General Dynamical Processes: A Mathematical Introduction, Academic Press, New York and London, 1971.
37. Klir G. J., An Approach to General Systems Theory, Van Nostrand, New York, 1969, предисловие и гл. 1, 7, 9, 10 и 11.
38. Goguen J. A., Realization is universal, *J. Math. Systems Theory*, 6, No. 4, January (1973).
39. Klir G. J., Trends in General Systems Theory, Wiley, New York, 1972.
40. Mesarovic M. D., Views on general systems theory, in «Proc. 2nd Systems Symp. Cast Inst., Tech»., Wiley, New York, 1964.
41. Pareigis B., Categories and Functors, Academic Press, New York and London, 1970.

Приложение II

ДРУГИЕ ПОДХОДЫ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОСНОВАНИЮ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Отправной точкой нашей теории является понятие системы, определенное на теоретико-множественном уровне.

Но, конечно, существуют и другие возможные подходы, либо сформулированные на более низком уровне общности, либо определяющие основное понятие системы с других позиций. Мы рассмотрели много подобных подходов и обнаружили, что каждый из них обладает существенными недостатками, а потому не может претендовать на роль фундамента общей теории систем; в этом смысле все они уступают подходу, развиваемому в настоящей книге. Ознакомимся вкратце с причинами, побудившими нас отвергнуть несколько наиболее явных претендентов на эту роль.

1. АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Абстрактные математические структуры, используемые в аксиоматических логических системах, без сомнения, слишком специальны для того, чтобы служить основой для определения фундаментального понятия системы. Однако логикой можно пользоваться и так, как это делается в метаматематике, т. е. для изучения высказываний о системах и дедуктивного анализа их свойств и поведения. Подобный подход представляется весьма привлекательным, и мы не обошли его своим вниманием. Конкретнее, пусть F — некоторый (формальный) язык, а f — множество (правильных) высказываний на языке F, выражающих обнаруженные факты или предполагаемые свойства системы. Пусть множество f является «исчерпывающим» с точки зрения имеющихся знаний об интересующей нас системе, т. е. содержит все установленные и гипотетические факты о ее поведении. Тогда мы можем ввести следующее понятие, которое называется *вербальным* (*лингвистическим*) *определением* системы [1].

Системой называется некоторое собственное подмножество правильных высказываний.

Конечно, можно возразить, что подобное множество скорее описывает систему, а не *определяет* ее, но, поскольку, по определению, оно охватывает все, что мы знаем о системе, то по сути дела это одно и то же.

Взаимосвязь между понятием системы как отношения на абстрактных множествах и понятием системы как множества высказываний совершенно прозрачна. На языке математической логики первое из них представляет модель, для которой второе понятие является ее «реализацией». Поэтому теорию моделей можно использовать для дальнейшего уточнения этой взаимосвязи.

Подход к созданию общей теории систем через высказывания о системах и их поведении представляется очень привлекательным, поскольку на практике именно такими высказываниями нередко ограничивается все, что нам известно о системе. Поэтому его можно рассматривать как первый шаг к формализации эмпирических данных, т. е. личного опыта. Однако мы не следовали лингвистическому подходу в этой книге, поскольку он ведет к изучению интересующих нас свойств систем слишком далеким путем [1]).

2. ТОПОЛОГИЯ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Теорию систем можно, по-видимому, развивать исходя и из специальных понятий, определенных на множествах с более богатой математической структурой, например в терминах потоков в топологических пространствах, отображений в функциональных пространствах и т. п. Двигаясь в этом направлении, мы могли бы начать просто с непрерывных и дискретных динамических систем и попытаться объединить обе теории в одну. Именно в этом и состоит подход через обобщение, о котором уже упоминалось в гл. I и приложении I. Однако ни один из этих подходов не согласуется с теми целями, которые были сформулированы в нашей программе, и в частности с нашим стремлением к предельной общности и желанием получить возможность описывать плохо структуризованные, неопределенные ситуации. Более того, попытки, сделанные в этом направлении, свидетельствуют о том, что теория сразу же запутывается в массе чисто технических трудностей, имеющих весьма малое (если вообще какое-нибудь) принципиальное значение для теории систем как таковой.

3. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ

Известны также попытки построить чисто алгебраическую теорию систем. Все лучшее, что удалось достичь на этом пути, включено в наш подход. Действительно, каждый раз, когда в этом возникала принципиальная необходимость, мы немедленно вводили подходящие алгебраические структуры, и львиная доля конкрет-

---

[1]) Лингвистическому подходу следует, по-видимому, в своих работах Клир [39], исходящий от так называемых «характерных черт» системы.

ных математических результатов, полученных в этой книге, носит алгебраический характер. Однако, когда речь заходит о введении фундаментальных понятий, т. е. о самих основах новой теории, язык теории множеств, безусловно, предпочтительнее языка алгебраических структур. В самом деле, если начинать построение теории на теоретико-множественном уровне, то для решения некоторого класса задач более естественно переходить к топологическим, а не алгебраическим структурам (см., например, гл. IX).

Мы уже отмечали, что в целом ряде мест нашей теории целесообразным оказалось использование соответствующих алгебраических структур. Тем не менее мы старались не перегружать внимание читателя достаточно частными алгебраическими вопросами, например вопросами, связанными с множествами конечной мощности (см., впрочем, гл. IX, где подобные вопросы рассматриваются в принятых нами рамках). Действительно, целый ряд наиболее сложных и интересных проблем теории систем возникает как раз там, где приходится одновременно иметь дело с множествами конечной, несчетной и даже еще более высокой мощности. Попытки ограничить алгебраическую теорию систем изучением одних «функций дискретного времени», для которых все вспомогательные множества не более чем счетны, хотя и интересны сами по себе, бьют мимо главной цели и обходят стороной основные подводные камни общей теории систем, опирающейся на алгебраический фундамент.

4. БОЛЕЕ УЗКИЕ ПОНЯТИЯ СИСТЕМЫ

Последние, хотя совсем не самые малоубедительные, возражения против определения системы как теоретико-множественного отношения можно выдвинуть на том основании, что на нечто «целое», заслуживающее названия системы, нужно наложить дополнительные требования, даже если оставаться на теоретико-множественном уровне. В первую очередь на роль такого дополнительного требования, которое необходимо включить в определение системы, выдвигают условие, согласно которому, прежде чем объект исследования заслужит право называться системой, мы должны убедиться в том, что его можно описать не просто отношением, но еще и пространством состояний и соответствующими функциями перехода и выходными функциями. Но хотя подобное требование (скажем, существование для данного отношения соответствующих функций перехода состояний и выходных функций) может показаться в принципе разумным, практика подобных ограничений, налагаемых на сами первичные понятия, наталкивается на целый ряд трудностей; некоторые из них мы сейчас опишем.

(i) В реальной жизни, и в частности в биологических и социальных науках, зачастую встречаются системы, по самой своей сути являющиеся целенаправленными и допускающие формальное описание лишь в качестве таковых. Подобные системы все еще можно рассматривать как системы в нашем смысле. В то же время всякие попытки ввести для них понятие состояния и описать переходы в пространстве состояний заставляют делать произвольные, ничем не подкрепленные предположения такого масштаба, что это ставит под сомнение адекватность всей модели в целом. И хотя в этой книге целенаправленные системы как таковые не рассматриваются, наш подход не исключает такой возможности и потому не может помешать будущему прогрессу в этом направлении (см. приложение III).

(ii) В конкретных приложениях системы нередко описываются с помощью семейства их подсистем и взаимодействий между ними. Даже если для каждой из этих подсистем известны функции перехода состояний, определить переходы состояний для всей системы в целом, как правило, оказывается делом весьма трудным и обременительным и, быть может, даже невозможным. Но всякая подобная комбинация систем, безусловно, также является системой, а полезность требования, согласно которому суммарная система считается таковой, если она обладает функцией перехода состояний, представляется весьма и весьма сомнительной.

(iii) Отправной точкой процесса создания любых моделей являются наблюдения и предположение о существании взаимосвязи между ними. Первичное понятие системы следовало бы определять, опираясь как раз на подобные данные. А можно ли такие отношения описать как переход в пространстве состояний — это факт, который требует доказательства. Но даже если это возможно, подобное описание не единственно и лишний раз подтверждает вторичный, производный характер понятия состояния. Все эти соображения нашли вполне убедительное отражение в теории реализации, представленной в этой книге.

Приложение III

ОТКРЫТЫЕ СИСТЕМЫ И ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ

В этой книге нам не удалось рассмотреть два весьма важных понятия, играющих в общей теории систем фундаментальную роль. Речь идет о понятиях открытой и целенаправленной систем. Одна из причин подобного упущения кроется в необходимости прежде всего разработать феноменологический подход, объясняющий возникновение пар «вход — выход», подход, которому посвящена эта книга и на базе которого может быть в дальнейшем развита теория открытых и целенаправленных систем. Возможные направления такого развития как раз и намечаются в этом приложении.

1. ОТКРЫТЫЕ СИСТЕМЫ

Вообще говоря, система является именно отношением, а не функцией, и в подобном общем случае определить, какова будет выходная величина в ответ на наблюдаемое или предполагаемое входное воздействие, не удается. Как показано в нашей книге, это положение вещей можно исправить введением глобального или начального объекта состояний, а это в принципе всегда возможно. Однако введение произвольного глобального объекта состояний может привести к определенным трудностям.

(i) Хотя существование глобальных состояний теоретически гарантировано, на практике информации, необходимой для определения глобального состояния системы в каждый конкретный момент времени, может и не быть. В этом случае определить выход по известному входу все равно невозможно, и отдавать себе в этом отчет полезно с самого начала, с первых шагов моделирования системы.

(ii) Введение глобальных состояний может привести к неподходящим (и даже неверным) интерпретациям того, что известно о системе; это может привести к замене упреждающей системы неупреждающей или системы, о поведении которой мы располагаем лишь вероятностной информацией, системой, описываемой детерминистически, и т. д. В каждом из подобных случаев описание системы должно быть таким, чтобы оно предельно точно отражало наше понимание поведения реальной системы, а предсказуемости выходной величины системы следует добиваться не непосредственно, а в обход.

На интуитивном уровне понимания *открытой системой* называют систему, которую нельзя (удовлетворительным образом) представить в виде функции (т. е. даже зная все условия ее работы, нельзя сказать, каким будет ее выход). Для того чтобы формализовать это понятие открытой системы, проще всего начать с предположения, что у входного объекта системы имеется две составляющие, т. е. $X = M \cup U$ и

$$S \subset M \times U \times Y.$$

Предположим теперь, что мы можем определить (или выявить), какова будет (или есть) компонента m входного воздействия системы, и в то же время в лучшем случае лишь сказать, к какому подмножеству $U_m \subset U$ будет принадлежать его вторая компонента u. Это типичный случай неопределенной ситуации. В этом случае M представляет измеримое, непосредственно наблюдаемое или управляемое входное воздействие, а U — те входные воздействия, о которых имеется только косвенная (если она вообще есть) информация. Для любого заданного $m \in M$ самое большее, что можно сказать про соответствующую выходную величину,— это то, что она должна принадлежать множеству $Y_m = S(m, U_m)$. Подобная система и является открытой в общем смысле.

Такое понятие открытой системы вполне соответствует традиционному. Система считается открытой в классическом смысле, если:

(i) либо на нее действует источник энергии или информации, поведением которого нельзя управлять, или непосредственно, без ошибок наблюдать;

(ii) либо неоднозначность реакции системы нельзя приписать разнице в состояниях — обычно в рамках принятого рассмотрения (например, когда система описывается дифференциальным уравнением с коэффициентами, явно зависящими от времени).

Очевидно, что понятие открытой системы в том виде, в каком оно введено выше, охватывает оба эти классических случая.

Наметим теперь вкратце, как можно косвенным образом восстановить «предсказуемость» выхода открытой системы. С этой целью мы рассмотрим два таких метода. И в том, и в другом методах проблему непредсказуемости пытаются решить, переходя от рассмотрения элементов выходного объекта к его *подмножествам*.

(a) Почти предсказуемые выходные величины

Для каждого заданного $x \in X$ определяется такое подмножество $Y_x \subset Y$, что

$$y \in Y_x \Leftrightarrow (\exists x)\ ((x,\ y) \in S),$$

где $X = M \times U$.

Множество Y_x состоит из всех выходных величин, которые могут получиться в ответ на данное входное воздействие x.

Обозначим через $\Pi\ (Y)$ множество подмножеств Y. В некоторых случаях оказывается возможным определить новую систему

$$S' \subseteq X \times \Pi\ (Y),$$

для которой

$$(x,\ \hat{Y}) \in S' \Leftrightarrow \hat{Y} = Y_x,$$

где $\hat{Y} \in \Pi\ (Y)$.

Система S', очевидно, функциональна:

$$S'\colon X \to \Pi\ (Y).$$

Поэтому о предсказуемости можно говорить лишь с точностью до подмножеств множества Y. Если для любого $x \in X$ множество Y_x достаточно мало в некотором смысле, то описание S с помощью S' может быть удовлетворительным. А это, очевидно, зависит от характера системы S и критерия, используемого для оценки «размеров» множества Y_x.

(b) Почти предсказуемые системы

Во многих практических случаях поведение системы не удается предсказать не только потому, что неизвестна ее реакция, но и потому, что неясно влияние на нее окружающей среды. С формальной точки зрения это означает, что мы не может однозначно определить, каким будет входное воздействие системы. Однако в большинстве случаев все же можно выделить некоторое подмножество из X, описывающее условия функционирования системы. Например, в системах со многими входами некоторые из входов могут находиться под нашим управлением, в то время как для остальных отсутствует свобода выбора (даже если их можно наблюдать). Для таких систем при любом выборе значений управляемых входных воздействий остается целое подмножество входов, которые могут оказывать на систему непредсказуемое воздействие.

В подобном случае определенной предсказуемости можно добиться в результате перехода к множествам подмножеств как для входного, так и для выходного объектов.

Обозначим через $\Pi(X)$ множество подмножеств множества входных воздействий X, и пусть входные условия работы системы в процессе наблюдений допускают описание подмножествами множества X. Тогда можно определить функциональную систему

$$S_\Pi : \Pi(X) \to \Pi(Y),$$

для которой при любых $\hat{X} \in \Pi(X)$

$$S_\Pi(\hat{X}) = \hat{Y} \Leftrightarrow \hat{Y} = \{Y_x : x \in \hat{X}\}.$$

Более подробное описание системы S, возможно, получится в результате введения дополнительной структуры на $\Pi(X)$ и $\Pi(Y)$. Подобные соображения ведут непосредственно к нечетким и вероятностным описаниям системы.

2. ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ

В этом случае система описывается не прямо, а с помощью некоторой задачи принятия решений. По сути дела такую систему $S \subseteq X \times Y$ определяют, требуя, чтобы пара (x, y) принадлежала S тогда и только тогда, когда y является решением задачи принятия решений, задаваемой элементом x. В качестве иллюстрации того, что понимается под задачей принятия решений, рассмотрим две следующие ситуации.

(а) Общая задача оптимизации

Пусть $g: X \to V$ — некоторая функция, отображающая произвольное множество X в множество V, которое предполагается линейно или частично упорядоченным отношением $\leqslant$. Тогда общая проблема оптимизации состоит в следующем.

Для данного подмножества $X^f \subseteq X$ найти такое $\hat{x} \in X^f$, что для всех $x \in X^f$

$$g(\hat{x}) \geqslant g(x). \tag{A.1}$$

Множество X называется *множеством решений*, множество X^f — множеством *допустимых решений*, функция g — *целевой функцией*, а V — *множеством оценок*. В этих терминах общая задача оптимизации задается парой (g, X^f). Элемент $\hat{x} \in X^f$, удовлетворяющий условию (A.1) при всех x из X^f, называют *решением* задачи оптимизации, заданной парой (g, X^f).

Нередко функцию g определяют с помощью двух функций:

$$P: X \to Y \text{ и } G: X \times Y \to V,$$

$$g(x) = G(x, P(x)).$$

В этом случае функцию P называют *выходной функцией* или *моделью* (объекта управления), функцию G — *функцией качества* или *оценочной функцией*; задачу оптимизации тогда можно определить тройкой (P, G, X^f) или парой (P, G), если $X^f = X$.

То, что P называют «моделью объекта управления», означает следующее. Задача оптимизации, задаваемая тройкой (P, G, X^f), на самом деле определяется относительно системы, которой нужно управлять и которая описывается функцией P. Однако в общем случае мы не обязаны предполагать, что модель P и реальный объект управления связаны какими-то специфическими отношениями. Более того, сама гипотеза существования объекта управления как единого целого может оставаться под вопросом и использоваться лишь для того, чтобы поставить задачу оптимизации, определяющую систему через процесс принятия решений.

(b) Общая задача удовлетворения

Пусть X и Ω — произвольные множества, а g — функция из $X \times \Omega$ в множество V, линейно упорядоченное отношением $\leqslant$. Пусть также τ — некоторая функция из Ω в V. Тогда задача удовлетворения состоит в следующем.

Для заданного $X^f \subseteq X$ найти такой элемент $\hat{x}$ из X^f, что для всех ω из Ω

$$g(\hat{x}, \omega) \geqslant \tau(\omega). \tag{A.2}$$

Множество Ω называют *множеством неопределенности*, функцию τ — *уровнем удовлетворения*, а неравенство (A.2) — *критерием удовлетворения*. Все остальные элементы задачи удовлетворения интерпретируются так же, как в задаче оптимизации. Задача удовлетворения определяется четверкой (g, τ, X^f, Ω), а элемент $\hat{x}$ из X^f, удовлетворяющий критерию (A.2) при всех ω из Ω, рассматривается как решение задачи удовлетворения, задаваемой четверкой (g, τ, X^f, Ω).

Множество неопределенности Ω называют еще и *множеством возмущений*, поскольку оно представляет собой множество всевозможных воздействий, которые сказываются на поведении системы. В тех случаях, когда целевая функция g задана через выходную функцию $P\colon X \times \Omega \to Y$ и оценочную функцию $G\colon X \times \Omega \times Y \to V$,

$$g(x, \omega) = G(x, \omega, P(x, \omega)),$$

множество Ω определяет множество всевозможных воздействий, которые могут сказаться на исходе принятого решения x. Отметим попутно, что благодаря выбранному уровню общности элементы из Ω охватывают как случай так называемой параметрической, так и случай структурной неопределенности. Функция τ определяет во всех этих случаях «нижний предел» допустимого или приемлемого качества системы. Решение x считается удовлетворительным, если его качество не меньше порогового значения $\tau(\omega)$ при любых проявлениях неопределенности ω из заданного множества Ω.

В более общей формулировке задачи удовлетворения отношение линейного порядка $\leqslant$ можно заменить любым подходящим отношением $R \subseteq V \times V$. В этом случае общая задача удовлетворения состоит в том, чтобы найти в X^f такой элемент $\hat{x}$, что для всех ω из Ω

$$g(\hat{x}, \omega) \, R \, \tau(\omega),$$

где R — отношение «удовлетворения» на множестве оценок V. Другими словами, решение $\hat{x}$ из X^f считается удовлетворительным, если для любого ω из Ω оценка его качества $g(\hat{x}, \omega)$ находится в отношении R к пороговой величине $\tau(\omega)$.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы дать определение системы принятия решений в рамках общей теории систем.

Система $S \subseteq X \times Y$ называется *системой принятия решений*, если найдутся такое семейство задач принятия решений D_x, $x \in X$, решения которых принадлежат множеству Z, и такое отображение $T: Z \to Y$, что для любого x из X и y из Y пара (x, y) принадлежит системе S тогда и только тогда, когда найдется такое $z \in Z$, что z является решением задачи D_x, а $T(z) = y$.

Во многих ситуациях (но далеко не во всех!) выходные величины системы совпадают с решениями задач принятия решений, т. е. $Z = Y$, а отображение T тождественно.

В заключение сделаем несколько замечаний относительно понятия системы принятия решений.

(i) Для системы принятия решений может существовать конструктивное описание с помощью системы уравнений, особенно в том случае, когда соответствующая задача принятия решений допускает аналитическое решение в том смысле, что для каждого $x \in X$ существует аналитический алгоритм, определяющий выходную величину $y = S(x)$. Однако такой алгоритм может и не существовать. В общем случае для определения системы принятия решений достаточно лишь, чтобы задача принятия решений была корректной, и никаких специальных требований к существованию какого-либо алгоритма построения решения не предъявляется.

(ii) Любую систему преобразования входов в выходы можно представить как систему принятия решений, и наоборот. Любую систему можно рассматривать и как систему принятия решений, просто опираясь на предположение о целесообразности ее поведения. На самом деле феноменологическое и целенаправленное описание системы часто бывает полезно использовать по очереди в зависимости от того, на что направлен в данный момент интерес исследователя. Яркий пример подобного подхода дает классическая физика, где одно и то же явление в зависимости от ситуации описывается либо обычным законом, либо соответствующим вариационным принципом. Аналогичные примеры можно найти и в так называемом бихевиористском подходе к психологии.

(iii) Задача оптимизации, очевидно, является частным случаем задачи удовлетворения. Чтобы убедиться в этом, достаточно предположить, что Ω содержит всего один элемент $\{\omega\}$, а $\tau(\omega)$ является минимумом функции g на множестве $X^f \times \{\omega\}$. Впрочем, и проблему удовлетворения за счет подходящего выбора целевой функции можно сформулировать как задачу оптимизации. Итак, все это сводится лишь к вопросу интерпретации или эстетической оценки. Однако с принципиальных позиций, о которых мы не будем говорить здесь подробно, два эти подхода совершенно различны

Рассмотрим, наконец, понятие целенаправленной системы. В общем случае понятие цели и целенаправленного поведения может остаться неформализованным, поскольку, возможно, следует воздержаться от попыток описания подобного поведения в ситуации, когда точный смысл понятия цели и процесса, ведущего к ее достижению, не сформулирован в явном виде. Прежде чем начать работать над формализацией, нужно по крайней мере предположить, что мы умеем распознать хотя бы «состояние» достижения цели. Пример из психологии, возможно, поможет понять, что мы имеем здесь в виду. Достижение «состояния личного счастья» может быть целью поведения человека, но конкретное содержание, которое вкладывается в это понятие, известно разве что каждому человеку, а способ достижения этой цели может быть заранее неизвестным даже и ему самому. Пытаясь достичь подобной цели, человек обычно испробует стратегии, которые, по его мнению, приведут к выполнению стоящих перед ним задач. Он может попробовать повысить свой образовательный уровень, попытаться заработать побольше денег, жениться или испробовать любую другую комбинацию стратегий, но ни одна из этих стратегий не гарантирует достижения поставленной цели и ни об одной из них нельзя с уверенностью сказать, что она предпочтительнее другой. Человек может осознать, что его целенаправленное поведение оказалось безуспешным лишь после завершения нескольких неудачных попыток.

Если формализация целенаправленного поведения вообще возможна, она неизбежно приводит к описанию общей ситуации принятия решений. Поэтому мы предполагаем, что формализованная целенаправленность ведет к тем же понятиям, что и общая теория принятия решений. Формализованная цель определяется некоторой задачей принятия решений, а достижение цели означает, что соответствующая задача принятия решений решена. И нам хотелось бы здесь еще раз подчеркнуть, что проблему целенаправленности можно формализовать, не конкретизируя метод решения соответствующей задачи принятия решений.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ КАТЕГОРИЙ

В нашей книге мы пользуемся обычными понятиями теории категорий [41]. Чтобы не отсылать читателя каждый раз к специальной литературе, мы приводим здесь определения основных понятий.

1. Обозначим через $\overline{X}$ некоторый класс объектов вместе с двумя такими функциями, что

(i) одна из них ставит в соответствие каждой паре (X, Y) объектов из $\overline{X}$ множество $\mathrm{Mor}\,(X, Y)$; элементы $f \in \mathrm{Mor}\,(X, Y)$ называются морфизмами $f\colon X \to Y$ из класса $\overline{X}$ с областью X и кообластью Y;

(ii) другая функция ставит в соответствие каждой тройке (X, Y, Z) объектов класса $\overline{X}$ функцию

$$\mathrm{Mor}\,(Y, Z) \times \mathrm{Mor}\,(X, Y) \to \mathrm{Mor}\,(X \times Z).$$

На морфизмах $g\colon Y \to Z$ и $f\colon X \to Y$ эта функция записывается как $(g, f) \to g \cdot f$, а морфизм $g \cdot f\colon X \to Z$ называется композицией морфизмов g и f. Класс $\overline{X}$ вместе с двумя этими функциями называется *категорией*, если для него выполняются две следующие аксиомы.

Аксиома ассоциативности. Если $h\colon Z \to W$, $g\colon Y \to Z$ и $f\colon X \to Y$ суть морфизмы из $\overline{X}$ с указанными областями и кообластями, то

$$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f.$$

Существование единицы. Для каждого объекта Y из $\overline{X}$ существует морфизм $I_y\colon Y \to Y$, такой, что

$$I_y \cdot f = f \text{ для } f\colon X \to Y$$

и

$$g \cdot I_y = g \text{ для } g\colon Y \to Z.$$

2. Класс объектов из $\overline{X}$ обозначается через $\mathrm{Ob}\,\overline{X}$.

3. Морфизм $f\colon X \to Y$ категории $\overline{X}$ называется обратимым в $\overline{X}$, если существует такой морфизм $g\colon Y \to X$, принадлежащий

$\overline{X}$, что $g \cdot f = I_x$ и $f \cdot g = I_y$. Морфизм g в этом случае обозначается через f^{-1}, поскольку если такой морфизм существует, то он единствен.

4. Если $\overline{X}$ и $\overline{X}'$ суть две категории, то функтором F: $\overline{X} \to \overline{X}'$ называют пару отображений, одно из которых ставит в соответствие каждому объекту X первой категории $\overline{X}$ некоторый объект $F(X)$ категории $\overline{X}'$, а другое ставит в соответствие каждому морфизму f: $X \to Y$ первой категории $\overline{X}$ некоторый морфизм $F(f)$: $F(X) \to F(Y)$ второй категории $\overline{X}'$. Эти отображения должны удовлетворять следующим двум условиям:

$$F(I_x) = I_{F(X)} \text{ для каждого } I_x \text{ из } \overline{X},$$

$$F(g \cdot f) = F(g) \cdot F(f) \text{ для каждой композиции } g \cdot f, \text{ определенной в } \overline{X}.$$

5. Для каждой категории $\overline{X}$ можно построить другую категорию $\overline{Y}$, объекты которой совпадают с объектами из $\overline{X}$, а в качестве морфизмов f^{op}: $Y \to X$ категории $\overline{Y}$ берутся морфизмы f: $X \to Y$ категории $\overline{X}$, причем композиция в $\overline{Y}$ задается условием $f^{op} \cdot g^{op} = (g \cdot f)^{op}$; она определена каждый раз, когда определена композиция $g \cdot f$. Такую категорию $\overline{Y}$ мы будем обозначать через $\overline{X}^{op}$.

6. Если F и G — функторы из $\overline{X}$ в $\overline{X}'$, то каноническим преобразованием τ: $F \to G$ из F в G называется отображение, которое ставит в соответствие каждому объекту X из $\overline{X}$ морфизм $\tau(X)$: $F(X) \to G(X)$ из $\overline{X}'$ таким образом, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau(X)"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau(Y)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

где f: $X \to Y$ — произвольный морфизм из $\overline{X}$, коммутативна.

7. Для каждой пары категорий $\overline{X}$ и $\overline{X}'$ можно построить еще одну категорию $\overline{X} \times \overline{X}'$, называемую их произведением, условившись, что объектами из $\overline{X} \times \overline{X}'$ будут упорядоченные пары (X, X') объектов из $\overline{X}$ и $\overline{X}'$ соответственно, а морфизмами $(X, X') \to (Y, Y')$ с указанными областями и кообластями — упорядоченные пары (f, f') морфизмов f: $X \to Y$ и f': $X' \to Y'$. Композиция морфизмов определяется почленно.

8. Если F: $\bar{\bar{X}} \to \bar{\bar{X}}'$ — функтор, то мы можем построить другой функтор:

$$\mathrm{Mor}\,(F\,—,—)\colon \bar{\bar{X}}^{\mathrm{op}} \times \bar{\bar{X}}' \to \bar{\bar{\mathrm{S}}}\mathrm{et},$$

где $\mathrm{Mor}\,(F\,—,—)\,(X,\ X') \equiv \mathrm{Mor}\,(FX,\ X')$ есть множество всевозможных морфизмов $FX \to X'$, а $\mathrm{Mor}\,(F\,—,\ —)\,(f^{\mathrm{op}},\ g) \equiv \equiv \mathrm{Mor}\,(Ef,\ g)$ для морфизма $(f^{\mathrm{op}},\ g)$: $(Y,\ X') \to (X,\ Y')$ есть такое отображение $\mathrm{Mor}\,(Ff,\ g)$: $\mathrm{Mor}\,(FX,\ X') \to \mathrm{Mor}\,(FY,\ Y')$, что для любого $h \in \mathrm{Mor}\,(FY,\ Y')$

$$\mathrm{Mor}\,(Ff,\ g)\,(h) = g \cdot h \cdot Ff.$$

9. Каноническое преобразование τ: $F \to G$ функтора F: $\bar{\bar{X}} \to \to \bar{\bar{X}}'$ в функтор G: $\bar{\bar{X}} \to \bar{\bar{X}}'$ называется каноническим изоморфизмом тогда и только тогда, когда для каждого объекта X категории $\bar{\bar{X}}$ $\tau(X)$ обратим в $\bar{\bar{X}}'$; в этом случае мы будем писать, что $F \cong G$.

10. Пара функторов F: $\bar{\bar{X}} \to \bar{\bar{X}}'$ и G: $\bar{\bar{X}}' \to \bar{\bar{X}}$ называется сопряженной тогда и только тогда, когда $\mathrm{Mor}\,(F\,—,\ —) \cong \cong \mathrm{Mor}\,(—,\ G\,—)$: $X^{\mathrm{op}} \times \bar{\bar{X}}'$. При этом функтор F называют левым сопряженным к G, а функтор G — правым сопряженным к F.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу:
129820, Москва, И-110, ГСП,
1-й Рижский пер., д. 2,
издательство «Мир».

ИБ № 921

М. Месарович
Я. Такахара

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ:
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Редактор Д. Борисова
Художник А. Шипов
Художественный редактор В. Шаповалов
Технический редактор А. Резоухова

Сдано в набор 30/VI 1977 г.
Подписано к печати 28/XI 1977 г.
Бумага тип. № 1 $60\times90^{1}/_{16}$=9,75 бум. л.
19,5 печ. л.
Уч.-изд. л. 16,42. Изд. № 1/9121.
Цена 1 р. 40 к. Зак. № 0296

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Московская типография № 7 «Искра
революции» Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9.