А.В. Малишевский

Качественные модели в теории сложных систем

A.V. Malishevski

Qualitative Models in the Theory of Complex Systems

The set of papers collected in this book, by a distinguished Russian scientist Dr. Andrey Malishevski, represents primarily his work in qualitative theory of complex systems. The papers treat a wide range of issues, all from the same unified point of view: individual and collective choice, consumer behavior, multiple-player games, optimization, causality, data analysis. The major approach used is qualitative analysis: in the author's opinion, detailed quantitative descriptions of genuinely complex systems are impossible. The Appendix contains few short essays by friends and colleagues of Andrey Malishevski reminiscing about his personality and life.

Andrey Malishevski was a great intellectual, a remarkable scholar, a leader of thought, and exceptionally innovative in his technical work.

***Amartya Sen*,**
1998 Nobel Prize Winner for Economics

Андрей Витальевич Малишевский

A. V. Malishevski

QUALITATIVE MODELS IN THE THEORY OF COMPLEX SYSTEMS

MOSCOW
NAUKA • FIZMATLIT
1998

А. В. Малишевский

КАЧЕСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

МОСКВА
НАУКА • ФИЗМАТЛИТ
1998

ББК 22.18
М 19

С о с т а в и т е л и:
В.Я. Лумельский, Б.Г. Миркин, И.Б. Мучник, С.В. Петров,
Л.И. Розоноэр, П.Ю. Чеботарев, А.Л. Чернявский

МАЛИШЕВСКИЙ А.В. Качественные модели в теории сложных систем.—М.: Наука. Физматлит. 1998.—528 с.—ISBN 5-02-015237-4

Книга Андрея Витальевича Малишевского содержит основные его работы по качественной теории сложных систем. С единых позиций в книге рассматривается широкий круг проблем, от причинности до теории полезности и принятия решений. Автор исходит из того, что именно качественные методы образуют фундамент исследования сложных систем и являются единственно адекватными, поскольку детальное количественное описание таких систем невозможно. В приложении к книге в серии коротких заметок характеризуются личность и гражданская позиция автора.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов, специализирующихся в математической экономике, системном анализе и дискретной математике.

Табл. 2. Ил. 4. Библ. 244 назв.

E d i t o r s:
V. Lumelsky, B. Mirkin, I. Muchnik, S. Petrov,
L. Rozonoer, P. Chebotarev, A. Chernyavsky

A.V. MALISHEVSKI. Qualitative Models in the Theory of Complex Systems.—M.: Nauka. Fizmatlit. 1998.—528 p.—ISBN 5-02-015237-4

The set of papers collected in this book, by a distinguished Russian scientist Dr. Andrey Malishevski, represents primarily his work in qualitative theory of complex systems. The papers treat a wide range of issues, all from the same unified point of view: individual and collective choice, consumer behavior, multiple-player games, optimization, causality, data analysis. The major approach used is qualitative analysis: in the author's opinion, detailed quantitative descriptions of genuinely complex systems are impossible. The Appendix contains few short essays by friends and colleagues of Andrey Malishevski reminiscing about his personality and life.

Tabl. 2. Fig. 4. Bibl. 244 titles.

ТП–99–II

ISBN 5-02-015237-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

От составителей

Андрей Витальевич Малишевский не успел написать монографию, подытоживающую все его главные результаты. Эта книга задумана как некоторая (неизбежно весьма несовершенная) замена ненаписанной монографии. Поэтому мы, подбирая статьи А.В., пытаемся следовать не столько хронологии, сколько логике его исследований. Хронологический порядок соблюдается внутри каждого из трех разделов, из которых состоит книга.

Фактически все главные работы А.В. (за исключением цикла статей о динамике цепных систем, составившего основу его кандидатской диссертации, и нескольких статей об экономических моделях) посвящены исследованию сложных систем взаимодействующих элементов и свойств (да и цепные системы, как отмечал сам А.В., могут быть рассмотрены как системы взаимосвязанных элементарных процессов). С единых позиций (по существу, даже в рамках одной общей модели) А.В. рассматривает и игры многих лиц (включая теорию коалиций), и агрегирование, и теорию принятия решений, а также ряд вопросов математической экономики. С этим обстоятельством связана трудность классификации статей А.В. по темам, так как в статьях по теории принятия решений, содержатся, например, результаты по теории коалиций и агрегированию, и наоборот, статьи по агрегированию прямо трактуют вопросы теории принятия решений. Поэтому наше распределение статей по рубрикам «Качественные модели сложных систем взаимодействующих элементов и свойств» и «Структурные свойства в теории принятия решений» в значительной степени условно. Все же выделение этих рубрик, по-видимому, оправдано следующими двумя обстоятельствами. Во-первых, А.В. заинтересовался теорией принятия решений не с самого начала его научной деятельности, и во многих его работах по теории сложных систем теория принятия решений вообще не затрагивается. С другой стороны, многие работы А.В. специфичны, несмотря на свою общность по существу, именно для теории принятия решений.

Некоторого пояснения требует термин «Качественные модели», используемый и в названии книги, и в заголовке одного из ее разделов. Здесь слово «качественный» рассматривается как антоним слову «количественный». Во-первых, А.В. сам употребил это слово в названии своей докторской диссертации: «Разработка и исследование метода множественных свойств и отношений в качественной теории принятия решений». Но дело даже не в этом. Главное в том, что А.В. никогда не интересовался методами расчета, количественными свойствами систем. Он занимался именно сложными системами, детальное описание которых недостижимо. Поэтому количественные расчеты таких систем не могут быть адекватными реальности (тем более, если система включает человека). В современной литературе следует выделить три возможных подхода к исследованию сложных систем:

1) изучать только те свойства модели, которые не зависят в широких пределах от значений ее параметров;

2) с самого начала выбрать модель так, чтобы вопрос о ее идентификации (об определении значений параметров) даже не возникал, т.е. с самого начала строить качественную модель;

3) перейти от исходной детальной модели к упрощенному феноменологическому, макроскопическому, агрегированному описанию — как поступают, например, в термодинамике или в макроэкономике. А.В. в своей работе использовал, главным образом, первый и второй подходы, которые не позволяют делать количественные выводы, но гарантируют надежность качественных выводов. Термин «качественная теория» применим именно к теориям, построенным на этих двух путях. В начале своих исследований А.В. использовал первый путь, который привел его к изучению качественных топологических свойств рассматриваемых моделей. В последних своих работах А.В., стимулируемый проблемами теории принятия решений, в которых количественные вопросы почти не возникают, шел по второму пути, используя простейшие конечные модели комбинаторного характера и получая с их помощью нетривиальные, глубокие результаты. Что касается третьего подхода к исследованию сложных систем, то А.В. использовал его не часто: сюда относится выполненная в соавторстве с Л.И. Розоноэром работа о моделях случайного распределения ресурсов и об аналогиях термодинамики и экономики (тоже помещенная нами в раздел «Качественные модели сложных систем взаимодействующих элементов и свойств») и, кроме того, к третьему пути идейно примыкают методы упрощения описания и оценок, использованные А.В. в работах, посвященных цепным системам.

При построении и исследовании моделей сложных систем А.В. всегда стремился найти интересные содержательные проблемы, проясняющие те или иные стороны реальности, и лишь потом ставить соответствующие математические задачи, а не ограничиваться формальными постановками задач. Он любил повторять шутливое замечание, принадлежащее, кажется, М.Л. Цетлину, о том, что при построении модели следует идти «от жизни, а не от высшего образования». С этим связано и пристрастие А.В. к возможно более простым математическим моделям, на которых рассматриваемые содержательные проблемы выглядят особенно рельефно.

Стремлением А.В. идти «от жизни, а не от высшего образования» объясняется его живой интерес к обычным житейским ситуациям, в которых А.В. умел находить много поучительного. Так, много размышляя о социальных проблемах вообще и о природе демократии в частности, он умел тонко подмечать конфликтные, подчас парадоксальные ситуации во взаимоотношениях индивида и коллектива. А.В. различал понятия «все» и «каждый», иллюстрируя конфликт между «каждым» и «всеми» простым бытовым примером очереди в институтскую столовую. При подходе к раздаточному окошку «каждый» стоящий в очереди надолго задерживался, выбирая блюда, а «все» (стоящие в очереди сзади) были крайне этим недовольны. Хотя «все» есть сумма «каждых», но интересы «каждого» как бы расходятся с интересами «всех». На простой модели «триумфального пути» А.В. показал, что, используя подобный конфликт «каждого» и «всех», можно добиться парадоксального на первый взгляд эффекта, когда, действуя, казалось бы, в интересах «почти всех» (подавляющего большинства) можно в конечном итоге ограбить «каждого». В этом примере подавляющее большинство голосует за то, чтобы отбирать некоторое материальное благо у каждого поочередно, деля это благо, за исключением некоторой откладываемой малой части, поровну между остальными, а отложенная часть отдается лицу, проводящему голосование. В результате большого числа повторений такой процедуры голосования практически все материальное благо оказывается в руках лица, проводящего голосование, а все голосовавшие оказываются ограбленными. А.В. никогда не публиковал теорему о «триумфальном пути», но с его разрешения она вошла (по цензурным условиям название было заменено на более техническое) в книгу Б.Г. Миркина «Проблема группового выбора» [63, гл. 2, разд. 1.3] и быстро стала частью научного фольклора. Пример «триумфального пути» иллюстрирует различие между истинной демократией и охлократией (властью толпы), которая может стать замаскированной формой автократии. Истинная демократия подразумевает защиту прав меньшинства, «каждого», как бы это ни противоречило желаниям подавляющего большинства остальных, даже «почти всех».

А.В. был очень требователен к публикациям своих работ. Отчасти поэтому общее число опубликованных им работ сравнительно невелико — немногим больше 50. В этой книге помещены основные из опубликованных работ А.В. Вместе с тем, из-за ограниченности объема книги не были включены три широко известных препринта «Проблемы логического обоснования в общей теории выбора», написанные М.А. Айзерманом и А.В. Малишевским (изданные Институтом проблем управления в 1980 и 1982 годах [6, 8, 9, 85, 86]), а также некоторые другие важные работы. У составителей книги нет уверенности, что А.В. одобрил бы отбор всех публикуемых здесь работ. В частности это относится к некоторым его ранним публикациям, включенным нами в первый раздел книги. Однако нам представляется, что эти работы, так же как остальные, не потеряли актуальность до сих пор и будут прочтены с интересом заново. Мы надеемся данной публикацией привлечь внимание исследователей к развитым здесь идеям и методам. Возможно, А.В. не одобрил бы также публикацию его популярной (написанной для энциклопедического словаря по экономике) статьи о функциях выбора. Но эта статья дает представление о педагогическом стиле А.В. Малишевского.

А.В. придавал большое значение языку публикаций, стремясь к прозрачности и простоте изложения. Поэтому в этой книге его работы опубликованы на языке оригинала, без перевода. В сносках к статьям приводятся библиографические данные, а в списке литературы звездочками отмечены работы, включенные в книгу.

Составители не считали бы свою задачу выполненной, если бы книга не давала читателю представления об А.В. как о человеке и личности. Конечно, сами публикуемые работы несут на себе какой-то отпечаток личности автора, но все они имеют научный и, в подавляющем большинстве, математический характер, и по самому своему жанру могут отразить личность автора лишь в минимальной степени. Поэтому мы решили включить в книгу небольшой раздел «Об авторе» — воспоминания коллег и друзей Андрея Витальевича.

Мы благодарны всем тем, кто своей помощью и советами способствовал изданию этой книги. Среди них особенно хотелось бы отметить Н.А. Андрюшину, А.Ю. Волоша, В.Г. Гришина, Е.М. Каганову, Т.И. Янкелевич.

From Editors

Andrey Malishevski never wrote a monograph that would summarize his scientific results. This book is meant as a substitution (however imperfect) of that unwritten monograph. When putting together his scientific papers in a single volume, we tried to follow not so much the chronology as the internal logic of his research as we saw it. Chronological order is maintained, however, within each of the three chapters that make the book.

The main body of AM's work is devoted to his research of complex systems with interacting elements. Though this should in principle exclude his work on dynamics of chain systems, AM himself observed that chain systems can also be considered as systems of interrelated elementary processes. He approached similarly, within the same unified perspective (actually, within a single general model) a good number of other problems — games with multiple players (including coalitions theory), aggregation processes, decision theory, and a number of issues in mathematical economics.

This makes it difficult to categorize AM's work: for example, his papers on decision theory contain results on coalitions theory and aggregation, and inversely, his papers on aggregation directly address issues of decision theory. Accordingly, our division of papers between "Qualitative models of complex systems with interacting elements" and "Structural properties of decision theory" is rather relative. We were guided by these two considerations. First, AM's interest in decision theory came later in his career; many of his works on complex systems do not touch upon issues of decision making. On the other hand, many of his other works are specifically addressing decision theory.

As used here, the term "qualitative" (as in "qualitative models") is the antonym of "quantitative". We use it here to emphasize for the reader the fact that AM's research interests were never on the calculation methods or quantitative properties of the phenomenon in hand. His interest was on really complex systems — systems whose detailed quantitative investigation is inherently impossible (especially when including humans).

There are three approaches one finds in today's research on complex systems:

1) studying those properties of the model which are largely independent of the parameter values,

2) choosing from the beginning a qualitative model, so that the identification questions (say, finding parameter values) would not be an issue,

3) moving from the original detailed model to a simplified phenomenological, macro, aggregated description — this is common, e.g., in thermodynamics or macroeconomics.

The term "qualitative theory" is applicable primarily to theories built along the first and second approaches; these do not allow one to obtain quantitative results, but can lead to solid qualitative conclusions. In his work AM relied primarily on these two approaches. His use of the first approach in his early work led him to the study of qualitative topological properties of various models. Motivated later by problems in decision theory where quantitative issues are rare, he moved to the second approach, obtaining deep results via finite combinatorial models.

As to the third approach, AM did not use it often; it is exemplified by the work (coauthored with L. Rozonoer) on models of random resource allocation and on analogies between thermodynamics and economics (see chapter "Qualitative models of complex systems with interacting elements"); also here would be methods of simplification of representation and estimates developed in his works on chain systems.

When working on models of complex systems, AM always tried first to find an interesting "story" that would illustrate and clarify the model's important sides. Then he would move to the problem formalization. He often cited a joke (perhaps by M. Zeitlin) that in in modeling one should go "from life, not from higher education". This also shows in his thrust for the simplest mathematical model that would still capture the essence of the problem in hand.

The same interest in a "story" characterized his deep observations of societal phenomena. He thought much about social issues and about the nature of democracy. In doing so, he was very good at noticing conflicting, even paradoxical, situations in the interaction between an individual and a group. Once he illustrated a conflict between "all" and "anyone" on the example of the lunch queue in his Institute dining room. When approaching the food distribution counter, "anyone" wants to spend more time choosing dishes, whereas "all" (the rest of people in the queue behind) are not happy about this behavior of "anyone"; they would prefer to take away this extra time from "anyone" and divide it justly among "all". Though "all" is the sum of all "anyone"'s, the interests of "anyone" differ from those of "all".

AM then used this observation as part of a seemingly paradoxical model that was meant to illustrate the difference between democracy and the governance by the mob (which can be a masked version of autocracy). He called the model “triumphal journey”: the majority of a group of people vote in favor of taking away some desirable item (say, the savings) from “anyone”, divide it, minus a modest put-aside part, equally among the rest of them, and give the put-aside part to the “leader” who runs the vote. After repeating this procedure enough times, almost all the savings will end up in the leader’s hands, robbing the rest of the group of their savings. This conclusion suggests that in a real democracy the minority must be defended as well, even if the majority disagrees. AM never bothered to describe this in a paper but easily agreed the ”triumphal journey” theorem to be reproduced in B. Mirkin’s book “Group Choice” [63, Ch.2]. Given Russian censorship problems at the time, at AM’s suggestion the ironic “triumphal journey” was replaced by a more benign “total majority path”.

Andrey Malishevski was unusually demanding to the quality of his own publications. For his high professional reputation, the body of work he produced is small — somewhat over 50 scientific papers. For the lack of space this book does not include all of them. We were guided by the hope that the book may attract today’s researchers to the ideas and methods it offers. On these grounds we decided to include some of AM’s earlier and less known works which look quite up-to-date today. To give the reader an idea of Dr. Malishevski’s pedagogical style, we also included an article on choice functions that he wrote in 1992 for a then-planned large reference volume “Encyclopedia of Economics”. On the other hand, omitted are his three technical reports “Problems of logical justification in the general theory of choice” (coauthored with M. Aizerman, Institute of Control Sciences, 1980 and 1982 [6, 8, 9, 85, 86]) that have been very popular in the Russian systems-analysis community, and few other works.

AM always paid much attention to the language and exposition style in his publications, rewriting them time and again and trying to make them simpler and more transparent. His papers are published in this volume in the language of the originals, without translation. Footnotes to specific papers refer to bibliographic data. Asterisks in the Bibliography section denote papers included in this book.

Though one’s writings carry an imprint of the author’s personality, this happens in a minimal way with the work of intense scientific and mathematical nature — which is the category the papers in this volume belong to. The editors would find their goals unfulfilled without giving the reader some feel for Andrey Malishevski the human, for his unusual personality. Thus we added a small section “About the author” — reminiscences of colleagues and friends about Andrey Malishevski.

We are grateful to those whose help and advice made this book possible. Special thanks go to N.A. Andriushina, A.Y. Volosh, V.G. Grishin, E.M. Kaganova, and T.I. Yankelevich.

Раздел I
Анализ цепных динамических систем

О понятии состояния динамической системы [1]

Приводится пример простой задачи, в которой введение понятия «состояния» системы на интуитивной основе может привести к неприменимости принципа оптимальности Беллмана.

В последние годы рассматривается много различного рода оптимизационных задач, в которых введенное на основе интуитивных представлений понятие «состояния» позволяет, опираясь на принцип оптимальности Беллмана, применить для решения задачи метод динамического программирования. В литературе трудно найти такую задачу, где возникало бы понятие «состояния», которое представлялось бы достаточно естественным и адекватным существу задачи и вместе с тем вступало бы в противоречие с принципом оптимальности. Цель настоящей работы — продемонстрировать простой пример, в котором интуитивных требований к понятию «состояния» не всегда достаточно для того, чтобы гарантировать применимость формальной схемы динамического программирования.

Чтобы не вводить понятие «состояния» в самой формулировке задачи, будем вести изложение по возможности на содержательном языке, приняв за основу следующую модельную ситуацию. Представим себе револьвер, в барабане которого имеется три гнезда. Барабан может поворачиваться, помещая против ствола каждое из трех гнезд поочередно. Обладатель револьвера — назовем его экспериментатором — может выполнять с ним два действия.

1. Нажимать на спуск. Если при этом в гнезде, расположенном против ствола, имеется патрон, то происходит выстрел. Кроме того, независимо от наличия или отсутствия патрона барабан поворачивается на одно гнездо по часовой стрелке.

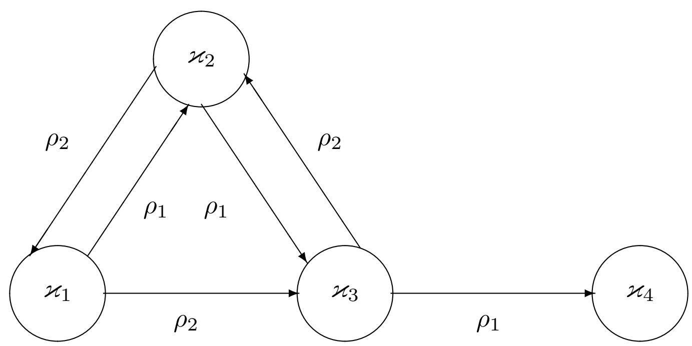
2. Поворачивать барабан на одно гнездо против часовой стрелки.

Предполагаем, что каждое из этих двух действий занимает единицу времени (такт).

[1] Автоматика и телемеханика.—1970.—№3.—С. 102–107.

Пусть в одном из гнезд барабана (экспериментатору неизвестно, в каком именно) находится патрон. Требуется разрядить револьвер с помощью указанных допустимых действий (произведя выстрел).

Удобно изображать различные варианты расположения патрона с помощью графа (см. рисунок). На этом графе вершина $\varkappa_3$ обозначает присутствие патрона в том гнезде барабана, которое расположено против ствола, $\varkappa_2$ — в следующем против часовой стрелки гнезде барабана, $\varkappa_1$ — в гнезде, следующем после $\varkappa_2$. Вершина $\varkappa_4$ символизирует разряженный револьвер (выстрел произведен). Дуги с надписью ρ_1 соответствуют первому действию экспериментатора, дуги с надписью ρ_2 — второму действию.



По условию задачи начальному расположению патрона может соответствовать любая из вершин $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$. Стремясь разрядить револьвер и совершая для этого допустимые действия (ρ_1 и ρ_2), экспериментатор последовательно ликвидирует различные возможности расположения патрона в барабане до тех пор, пока происшедший выстрел не просигнализирует о том, что осталась единственная возможность — $\varkappa_4$.

Чтобы формализовать такой эксперимент с револьвером, рассмотрим множество возможных в данный момент вариантов расположения патрона, назвав его экспериментальной ситуацией S. До начала эксперимента экспериментальная ситуация S^0 имеет вид $\{\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3\}$. Нажатие на спуск — действие ρ_1 — преобразует S^0 в экспериментальную ситуацию $\{\varkappa_4\}$, если происходит выстрел (т.е. если истинным расположением патрона было $\varkappa_3$), и в ситуацию $\{\varkappa_2, \varkappa_3\}$, если выстрела не происходит (и, следовательно, истинным расположением патрона было $\varkappa_1$ или $\varkappa_2$). Поворот барабана — действие ρ_2, очевидно, ситуацию S^0 не изменяет. Легко перебрать подобным образом все способы преобразования всех восьми возможных экспериментальных ситуаций друг в друга.

Необходимость разрядить револьвер, таким образом, может быть представлена как задача преобразования начальной экспериментальной ситуации S^0 в требуемую ситуацию $S^f = \{\varkappa_4\}$. Эксперимент представляется как динамический процесс, состояниями которого являются сменяющие друг друга экспериментальные ситуации.

Преобразование экспериментальной ситуации S в новую ситуацию определяется не только воздействием экспериментатора ρ, но и истинным расположением патрона $\varkappa \in S$, которое, в свою очередь, зависит от истинного начального расположения патрона $\varkappa^0 \in S^0$. Поэтому решением задачи может считаться только такая стратегия экспериментатора (правило подачи воздействия ρ), которая гарантирует переход в требуемую ситуацию S^f (выстрел) за конечное время при любом возможном начальном расположении патрона $\varkappa^0 \in S^0$. Очевидно, для этого достаточно применить стратегию $\rho_1\rho_1\rho_1$ — три раза подряд нажать на спуск.

Пусть теперь желательно не просто разрядить револьвер, но разрядить его за кратчайшее время. Прежде всего формализуем это требование, для чего потребуется дать интуитивно приемлемое определение кратчайшего эксперимента. Очевидно, что продолжительность («длина») эксперимента l (время от начала эксперимента до его окончания — выстрела) зависит не только от стратегии экспериментатора e, но и от истинного начального расположения патрона $\varkappa^0 \in S^0 \colon l = l(e, \varkappa^0)$. Под кратчайшим экспериментом будем понимать такую стратегию экспериментатора, которая гарантирует минимальную длину эксперимента в худшем случае, т.е. минимизирует критерий

$$\max_{\varkappa^0 \in S^0} l(e, \varkappa^0). \tag{1}$$

Величину

$$\min_{e} \max_{\varkappa^0 \in S^0} l(e, \varkappa^0) \tag{2}$$

назовем минимальной длиной эксперимента при начальной экспериментальной ситуации S^0 и обозначим ее через $f(S^0)$. Легко видеть, что стратегия $\rho_1\rho_1\rho_1$ и является в рассматриваемом примере оптимальной в смысле критерия (1), гарантирующей минимальную длину эксперимента (2) $f(S^0) = 3$.

Возьмем в качестве начальной произвольную экспериментальную ситуацию S и рассмотрим соответствующую минимальную длину эксперимента $f(S)$. Обозначим ее через $S_{\rho\varkappa}$ ситуацию, получаемую из S при воздействии экспериментатора ρ и истинном расположении патрона $\varkappa \in S$. Поскольку все $\varkappa \in S$ равновозможны, то, как нетрудно видеть, функция $f(S)$ должна удовлетворять рекуррентному уравнению динамического программирования [1]

$$f(S) = 1 + \min_{\rho} \max_{\varkappa \in S} \quad f(S_{\rho\varkappa}) \quad (f(S^f) = 0). \tag{3}$$

Решение этого уравнения для рассматриваемого примера, разумеется, приводит к оптимальной стратегии $\rho_1\rho_1\rho_1$. Важно отметить, что сама возможность написания уравнения динамического программирования (3) подтверждает, что экспериментальная ситуация S выбрана в качестве состояния динамического процесса эксперимента достаточно удачно. Действительно, предположение о том, что экспериментальная ситуация S содержит в себе всю нужную экспериментатору информацию о процессе, подтверждается тем, что оптимальная стратегия экспериментатора, согласно (3), представляется как последовательность воздействий, подаваемых по закону $\rho_{\text{опт}} = \rho_{\text{опт}}(S)$. Это вполне согласуется с характером данной задачи как своеобразной задачи оптимального по быстродействию (в минимаксном смысле) управления дискретной системой [2].

До сих пор предполагалось, что экспериментатор использует детерминированную стратегию; критерием качества стратегии служила детерминированная величина (1). Вид критерия (1) позволяет интерпретировать эксперимент как игру с природой, где экспериментатор выбирает стратегию e, природа выбирает начальное расположение патрона $\varkappa^0 \in S^0$, а платежами экспериментатора (выигрышами природы) служат числа $l(e, \varkappa^0)$. Гарантируемая длина оптимального эксперимента (2) при этом предстает как обычный минимаксный платеж в матричной игре [33]. Но понятие платежа и гарантируемого платежа в теории игр распространяется и на вероятностные (рандомизированные) стратегии поведения игрока; при этом в качестве платежа обычно используется математическое ожидание платежа по реализациям стратегии. Оптимальное значение минимаксного критерия типа (2) при этом имеет смысл гарантируемого минимального математического ожидания платежа. В рассматриваемой задаче это означает минимальную среднюю длину эксперимента, которую экспериментатор может гарантировать выбором рандомизированной стратегии.

---

[1] Эти рассуждения представляют собой некоторое видоизменение вывода уравнения кратчайшего эксперимента с последовательностной машиной по Беллману [14].

[2] Оптимальная стратегия выше записывалась в виде «программы» $\rho_1\rho_1\rho_1$ без обратной связи по S. Возможность такого представления стратегии основана на том специфическом для данного примера обстоятельстве, что эта обратная связь используется лишь для определения момента окончания эксперимента (переход в S^f — выстрел).

Рандомизация стратегий в игре, вообще говоря, обеспечивает игроку дополнительный выигрыш в смысле указанного критерия. Поэтому, если такой критерий считать приемлемым в нашей задаче, т.е. если согласиться считать «кратчайшим» эксперимент с такой стратегией, которая обеспечивает минимальное среднее время до выстрела в худшем случае, то целесообразно расширить класс рассматриваемых стратегий экспериментатора, допуская (кроме детерминированного) случайный выбор воздействий. При этом следует подразумевать в (1) и (2) под $l(e, \varkappa^0)$ среднюю длину эксперимента при вероятностной стратегии экспериментатора e и начальном расположении патрона $\varkappa^0 \in S^0$.

Чтобы отыскать минимальную среднюю длину (2) вероятностного эксперимента и оптимальную рандомизированную стратегию экспериментатора в задаче о револьвере, найдем решение соответствующей матричной игры с природой. Выпишем матрицу этой игры, сопоставляя ее строки детерминированным стратегиям экспериментатора, а столбцы — вариантам начального расположения патрона и записывая в качестве элемента матрицы длину соответствующей реализации эксперимента:

	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa_3$
$\rho_1\rho_1\rho_1$	3	2	1
$\rho_2\rho_1\rho_1\rho_1$	2	4	3
$\rho_1\rho_2\rho_1\rho_1\rho_1$	5	4	1
$\rho_2\rho_2\rho_1\rho_1\rho_1$	4	3	5
....	......	......	......

Здесь выписаны только четыре детерминированные стратегии экспериментатора, так как легко видеть, что любая другая стратегия превосходится [33] первой из выписанных. Это же относится и к третьей и четвертой из приведенных стратегий. Вычеркнув их, обнаруживаем, что третья стратегия автомата ($\varkappa_3$) превосходится второй ($\varkappa_2$). Получаемая в результате редуцированная игра 2×2

	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$
$\rho_1\rho_1\rho_1$	3	2
$\rho_2\rho_1\rho_1\rho_1$	2	4

легко решается. Оптимальная стратегия оказывается смесью первой и второй чистых (детерминированных) стратегий $\rho_1\rho_1\rho_1$ и $\rho_2\rho_1\rho_1\rho_1$ с вероятностями $p = 2/3$ и $q = 1 - p = 1/3$ соответственно; значение игры — минимаксная длина эксперимента — составляет $2\frac{2}{3}$. Заметим, что оптимальная детерминированная стратегия экспериментатора $\rho_1\rho_1\rho_1$ гарантирует минимаксную длину $l = 3$, так что рандомизация эксперимента, как и ожидалось, дала в этом примере определенный выигрыш.

Обсудим полученный результат. Оптимальное поведение экспериментатора оказалось таким: в начальный момент времени нужно, бросив жребий, нажать на спуск либо повернуть барабан в противоположную сторону (с вероятностями 2/3 и 1/3 соответственно), а затем нажимать на спуск вплоть до выстрела. Подчеркнем, что в начале эксперимента оказывается целесообразным совершать (с ненулевой вероятностью), казалось бы, заведомо бесполезное действие — поворот барабана, которое сохраняет ситуацию S^0 полной неопределенности в расположении патрона. Повернув барабан и оказавшись, как можно было бы думать, в точности в прежнем положении и имея прежнюю цель — произвести выстрел за минимальное время, экспериментатор тем не менее теперь уже, согласно оптимальной стратегии, должен вести себя по-новому (не бросать жребий, а сразу нажимать на спуск). Все эти, быть может, несколько противоречащие интуиции результаты заставляют признать, что при переходе от детерминированного эксперимента к рандомизированному экспериментальная ситуация S перестает служить столь исчерпывающим описанием состояния эксперимента, каким она являлась в детерминированном случае.

Формально это выражается в том, что теперь уже нельзя, используя экспериментальную ситуацию как состояние эксперимента, составить уравнение динамического программирования для кратчайшего рандомизированного эксперимента — аналог (3). Действительно, если бы такое уравнение могло быть записано, то оно имело бы вид (3) с тем отличием, что в правой части теперь стояло бы выражение

$$\min_{\pi_\rho} \max_{\varkappa \in S} M_\rho \{ f(S_{\rho,\varkappa}) \}, \tag{4}$$

где π_ρ — распределение вероятностей выбора различных ρ, M_ρ — символ математического ожидания по ρ. Тогда, аналогично детерминированному случаю, оптимальная рандомизированная стратегия экспериментатора представлялась бы в виде $\pi_{\rho\,\text{опт}} = \pi_{\rho\,\text{опт}}(S)$, т.е. сводилась бы к независимому случайному выбору воздействий на каждом шаге эксперимента с вероятностями, зависящими только от текущей экспериментальной ситуации S. Но это противоречит полученному ранее выводу, что в разных фазах оптимального эксперимента с револьвером в одной и той же экспериментальной ситуации $S = S^0$ следует совершать различные действия (в одном случае выбирать ρ_1 и ρ_2 случайно с вероятностями 2/3 и 1/3, в другом случае выбирать ρ_1 детерминированно), выводу, который не согласуется с принципом оптимальности Беллмана, если пытаться применять этот принцип к S как «состоянию» процесса.

Причина такого противоречия заключается в том, что для рандомизированного эксперимента в отличие от детерминированного становится неверным утверждение, что в ходе эксперимента в любой экспериментальной ситуации S любое $\varkappa \in S$ возможно в равной степени. Действительно, в задаче о револьвере оптимальный эксперимент состоит из двух ветвей ($\rho_1\rho_1\rho_1$ и $\rho_2\rho_1\rho_1\rho_1$), выбираемых бросанием жребия с вероятностями 2/3 и 1/3 соответственно. Первая ветвь в худшем случае (при $\varkappa^0 = \varkappa_1$) дает реализацию эксперимента длины 3; вторая ветвь в худшем для нее случае ($\varkappa^0 = \varkappa_2$) дает реализацию длины 4. Но поскольку истинное начальное расположение патрона фиксируется до бросания жребия, то если $\varkappa^0$ дает худший случай для первой ветви эксперимента ($\varkappa^0 = \varkappa_1$), тем самым для второй ветви эксперимента обеспечивается не худший случай — в случае реализации этой ветви эксперимента длина эксперимента составит только 2. Именно за счет такой скрытой зависимости между ветвями эксперимента и получается дополнительный выигрыш экспериментатора при рандомизации эксперимента. Таким образом, возможности реализации худших для экспериментатора значений $\varkappa \in S$ — положений патрона — ограничены тем, что в действительности до начала эксперимента патрон должен был находиться хотя и в неизвестном, но в каком-то фиксированном положении $\varkappa^0 \in S^0$. Рассмотренная задача обладает той особенностью, что это ограничение препятствует применению принципа оптимальности и составлению уравнения динамического программирования лишь для рандомизированных экспериментов, не препятствуя этому для детерминированных экспериментов.

Итак, в данной задаче в зависимости от того, допускаются ли в ней только детерминированные или наряду с ними и случайные воздействия, одно и то же понятие экспериментальной ситуации, выступая в интуитивно оправданной роли «состояния» динамического процесса эксперимента, может в одном случае удовлетворять, а в другом не удовлетворять принципу оптимальности.

Некоторые глобальные оценки цепных систем. I[1]

Показывается, что различные задачи, возникающие при исследовании некоторых экономических моделей и надежности автоматов, при изучении экспериментов с автоматами, приводят к одно-

[1] Автоматика и телемеханика.—1970.—№4.—С. 72–80.

типным схемам, связанным с исследованием абстрактных «цепных» структур. Предлагаются методы укрупненного описания и строятся оценки «глобальных» показателей таких структур. Полученные оценки используются для исследования трех указанных задач. Работа состоит из двух частей. Первая часть содержит изложение задач, формальное описание вводимого класса «цепных систем» и соображения об оценках глобальных показателей. Вторая часть работы «Некоторые глобальные оценки цепных систем» посвящена построению таких оценок и их приложению к конкретным задачам.

Введение

В различных технических и экономических задачах встречаются случаи, когда детальное описание функционирования изучаемой системы содержит многократное повторение однотипных процессов, а глобальные характеристики системы, которые и представляют интерес по содержательному смыслу задачи, получаются как совокупный результат таких элементарных процессов. При этом своеобразная цепная структура детальной картины системы позволяет составить ее компактное описание в виде цепи надлежащим образом выбранных «укрупненных состояний», что дает возможность искать единообразные приемы анализа таких систем. В качестве примеров опишем ситуации, связанные с построением некоторых моделей экономического роста, моделей надежности дискретных автоматов, а также с организацией экспериментов с последовательностными машинами.

В качестве модели экономического роста рассмотрим, например, динамическую модель n-продуктовой экономики типа «затраты — выпуск» [20, 26]. Предполагается, что производство каждого из продуктов требует определенных поставок части или всех n продуктов. Шкала времени разбивается на плановые периоды, что и определяет тактность в данной системе. С каждым тактом связывается набор продуктов, имеющийся в наличии к концу соответствующего планового периода. К следующему такту в системе появится новый набор продуктов, полученный как суммарный результат многих различных производственных процессов. В свою очередь, данный набор продуктов также потребовал для своего появления наличия определенных ресурсов продуктов в предыдущем такте, причем потребность в ресурсах определяется всей совокупностью протекающих в системе производственных процессов. С учетом того, что каждый продукт может быть произведен, вообще говоря, многими различными способами, детальный план функционирования такой экономической системы должен содержать перечень всех применяемых в данном периоде способов производства каждого из продуктов. Для каждого из реализуемых элементарных производственных процессов в этом плане должно быть указано, откуда поступают продукты, затрачиваемые в этом процессе, и, наоборот, какие из последующих процессов используют производимый в этом процессе продукт. План в целом предстает как сложная система взаимосвязанных элементарных процессов, однако положение упрощается, если в конечном счете интересоваться лишь суммарными ресурсами продуктов в системе. Тогда можно рассматривать полный набор продуктов в данном такте (отказавшись от учета способов его возникновения) как укрупненное (или по экономической терминологии — агрегированное) описание состояния системы, а поставки продуктов в пределах планового периода и их переработку в новые продукты — как переход от одного состояния к другому. Функционирование системы приобретает вид цепи переходов между смежными укрупненными состояниями в соседние такты.

В качестве другого примера рассмотрим одну постановку задачи надежности конечного автомата. Абсолютно надежный конечный автомат определяется заданием n его внутренних состояний и функции перехода между ними в зависимости от воспринимаемого входного символа [4]. Пусть теперь для каждого внутреннего состояния автомата и каждого входного символа задана вероятность неправильного перехода (сбоя) или полного отказа в работе автомата. Тем самым и правильные (рабочие) переходы приобретают определенные вероятности. Будем интерпретировать любую неисправность автомата как переход в $(n+1)$-е (нерабочее) состояние. Тогда динамическая надежность автомата характеризуется его работоспособностью — полной вероятностью его пребывания в одном из n рабочих состояний в данном такте.

Анализ динамической надежности усложняется, если поступающие на автомат входные символы (которые и определяют вероятности переходов) могут зависеть от предыстории функционирования автомата (например, от последовательности пройденных им состояний); вид этой зависимости характеризует среду, в которой работает автомат. В этом случае целесообразно под элементарным процессом понимать смену внутреннего состояния у автомата с некоторой данной предысторией, которая и определяет условные вероятности перехода автомата в то или иное внутреннее состояние. Тогда полная (безусловная) вероятность перехода автомата из некоторого внутреннего состояния в данном такте в другое состояние представится как взвешенная сумма таких условных вероятностей, характеризующих элементарные процессы перехода. Таким образом, под состоянием динамической системы «автомат в среде» можно по-прежнему понимать внутреннее состояние автомата без дополнительного указания его предыстории, помня, однако, что описание системы как цепи переходов между так понимаемыми состояниями есть результат укрупнения детальной картины переходов такого неавтономного автомата. Можно рассматривать в качестве состояния такой системы распределение вероятностей на внутренних состояниях автомата, а в качестве переходов между состояниями — эволюцию этого распределения за один такт. Это представление оказывается удобным в задаче оценки таких глобальных показателей надежности автомата, как работоспособность или среднее время исправной работы.

Третья задача, которую мы приведем в качестве примера, также связана с конечными автоматами и в определенном смысле примыкает к предыдущей. Эта задача состоит в том, чтобы оценить длину входной последовательности, которая переводит последовательностную машину (автомат Мили) из неизвестного начального состояния в некоторое известное (или заданное) конечное состояние (задача Мура [4] об эксперименте с автоматом). Подавая на автомат входные символы и наблюдая его выходные символы, можно, зная структуру автомата, в каждом такте указать множество внутренних состояний, в которых может находиться автомат. Назовем это множество экспериментальной ситуацией. Тогда эксперимент с автоматом представится как цепь сменяющих друг друга экспериментальных ситуаций, переходы между которыми зависят не только от подаваемого входного символа, но и от истинного внутреннего состояния автомата, которое, в свою очередь, определяется истинным начальным состоянием автомата и всей предысторией эксперимента. Подавая входные символы не только детерминированно, но и случайно, можно получить вероятностные переходы между экспериментальными ситуациями; такое обобщение известной детерминированной схемы еще более усложняет анализ. Путь к упрощенному описанию такого эксперимента состоит в интерпретации его как динамической системы, состоянием которой является экспериментальная ситуация, а тактность переходов между состояниями определяется тактностью входных символов. При этом, как и в предыдущем примере, упрощение связано с отбрасыванием предыстории прихода в данное состояние.

Во всех этих трех внешне разнородных задачах возникает одна и та же ситуация: исходя из содержательной стороны задачи, можно ввести понятие состояния таким образом, что динамический процесс в системе представляется как цепь переходов между состояниями в некоторой тактности. Характеристики этих переходов получаются как результат укрупнения характеристик многих элементарных процессов, фигурирующих в детальном описании системы. Системы такого рода условимся называть цепными системами. В связи с тем, что различные элементарные процессы, неявно входящие в укрупненное описание системы, могут быть сложным образом связаны между собой, цепная система в общем случае не обладает свойствами марковской системы.

Цель исследования цепной системы может быть в общем виде сформулирована как получение оценок некоторых глобальных, «валовых» показателей, характеризующих процесс в этой системе и имеющих содержательный смысл в тех или иных конкретных задачах (например, смысл суммарного количества продукта или полной вероятности события). Такой укрупненный характер применяемых показателей позволяет эффективно пользоваться приемами укрупненного описания состояний системы и переходов между ними.

Оценки указанного типа могут быть в достаточно общем виде построены для одного класса цепных систем, включающего в себя, в частности, все три изложенных выше примера. Описанию этого класса систем посвящен раздел 1 статьи. Предлагаемый для этой цели формализм близок к тому, который используется в динамических моделях экономики[1] [20, 26]. Раздел 2 статьи содержит краткое обсуждение применяемых типов оценок показателей системы и методов их отыскания. Вывод оценок и их приложение к конкретным задачам описываются в следующей статье.

1. Формальное описание одного класса «цепных систем»

Опишем теперь на удобном для этой цели формальном языке тот класс цепных систем, который будет рассматриваться в этой работе и для которого выводятся далее глобальные оценки. Прежде всего предположим, что состояние системы можно охарактеризовать, задав n-мерный вектор с неотрицательными компонентами; эти компоненты будем называть факторами. В экономической системе, где факторами являются различные продукты, состояние естественно описывать вектором ресурсов в данный момент времени. Чтобы получить сходное описание в вероятностной модели объекта с конечным числом состояний (типа изложенных во введении конечно-автоматных задач), следует рассматривать вместо динамики единичного объекта эволюцию статистического ансамбля объектов[2]. При таком подходе можно

---

[1] Формальные аналогии между n-продуктовыми экономическими моделями и марковскими цепями с n состояниями неоднократно отмечались и использовались разными авторами [75, 190, 238].

[2] В дальнейшем, говоря о вероятностной модели и статистическом ансамбле, всегда будем подразумевать задачи такого типа.

формально рассматривать долю статистического ансамбля, приходящуюся на i-е состояние объекта (т.е. полную вероятность пребывания объекта в i-м состоянии), как i-ю компоненту вектора состояния системы (i-й фактор), понимая теперь уже под состоянием вектор распределения вероятностей на состояниях исходного объекта, описывающий статистический ансамбль.

Итак, пусть состояние системы дается n-мерным неотрицательным вектором-строкой $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$. Будем предполагать, что смена состояния при переходе от предыдущего такта t к последующему $t+1$, т.е. преобразование вектора $\mathbf{q}(t)$ в $\mathbf{q}(t+1)$, представляется как совокупный результат многих элементарных процессов следующего вида. Элементарным процессом i-го типа будем называть преобразование некоторого количества i-го фактора x_i в определенные количества, вообще говоря, всех n факторов $y_1, \ldots, y_n$. Связь входа x_i и выхода $(y_1, \ldots, y_n)$ элементарного процесса i-го типа удобно представлять с помощью «вектора процесса» $\mathbf{b}_i$:

$$(y_1, \ldots, y_n) = x_i \mathbf{b}_i = x_i \, (b_{i1}, \ldots, b_{in}). \tag{1}$$

В классических экономических моделях леонтьевского типа [20, 26] принято представлять в таком виде технологические процессы производства i-го продукта; в этом случае x_i представляет собой «интенсивность» процесса, а коэффициент b_{ij} равен количеству j-го продукта, необходимому для производства единицы i-го продукта. В соответствии с этой интерпретацией вектор $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, который мы называли выходом процесса (1), представляет собой набор ресурсов, необходимых для производства x_i единиц i-го продукта данным технологическим способом. Поэтому рассматриваемый процесс в экономической модели интерпретируется не как процесс производства, а как процесс «заказывания» необходимых ресурсов [1] [20].

Рассматривая вероятностную модель, обозначим через x_i некоторую часть статистического ансамбля, соответствующую i-му состоянию объекта, и пусть $(b_{i1}, \ldots, b_{in})$ — строка вероятностей перехода из этого состояния. Тогда эволюция «подансамбля» x_i за один шаг определится уравнением (1).

Обратимся к вопросу о том, как из таких элементарных процессов складывается преобразование укрупненных состояний системы $\mathbf{q}(t) \to \mathbf{q(t+1)}$. Снабдим различные элементарные процессы в системе перечисляющим их индексом ω; через $\Omega_i(t)$ обозначим множество индексов всех элементарных процессов i-го типа, соответствующих t-у такту.

---

[1] Этот процесс можно рассматривать как процесс производства, если обратить ход времени.

Будем считать, что

$$q_i(t) = \sum_{\omega \in \Omega_i(t)} x_i^\omega,$$

$$q_j(t+1) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in \Omega_i(t)} y_j^\omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in \Omega_i(t)} x_i^\omega b_{ij}^\omega.$$

Полагая

$$\mathbf{b}_i(t) = \sum_{\omega \in \Omega_i(t)} \gamma_i^\omega \mathbf{b}_i^\omega, \quad \gamma_i^\omega = \frac{x_i^\omega}{\sum\limits_{\omega \in \Omega_i(t)} x_i^\omega},$$

можно записать

$$q_j(t+1) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\, b_{ij}(t),$$

или в матричной форме

$$\mathbf{q}(t+1) = \mathbf{q}(t)\,\mathbf{B}(t). \tag{2}$$

Уравнение (2) будем рассматривать как укрупненное описание цепной системы интересующего нас класса. Это уравнение имеет характерную марковскую форму. Однако преобразование $\mathbf{q}(t)$ в $\mathbf{q}(t+1)$, заданное матрицей $\mathbf{B}(t)$, в действительности определяется всей совокупностью значений γ_i и $\mathbf{b}_i$ $(\omega \in \boldsymbol{\Omega}_i(t), i = 1, \ldots, n)$, характеризующих отдельные элементарные процессы (так как только точное знание этих величин позволяет выписать матрицу $\mathbf{B}(t)$), а эти величины могут быть сложным образом связаны как между собой, так и с величинами γ_i^ω, b_i^ω, относящимися к другим моментам времени. Для пояснения этого вновь вернемся к содержательным примерам.

Опишем экономическую модель, которую можно представить как цепную систему, характеризуемую укрупненным уравнением (2) $(t = 0, 1, \ldots, T-1; \mathbf{q}(0) = \mathbf{r})$. Модель представляет собой «план-заказ», составленный на глубину T плановых периодов и направленный на получение в заданный момент времени $t = 0$ требуемого набора продуктов $\mathbf{q}(0) = \mathbf{r}$. Для производства этого набора продуктов предусматривается определенное число технологических процессов, совокупный заказ на ресурсы для которых определяется суммированием соответствующих процессов вида (1) и порождает требование на набор продуктов $\mathbf{q}(1)$ в следующем плановом периоде[1] $t = 1$. Требуемый набор $\mathbf{q}(1)$, в свою очередь, порождает совокупный заказ $\mathbf{q}(2)$ и т. д. вплоть до последнего заказа $\mathbf{q}(T)$, дающего окончательные плановые требования на ресурсы.

[1] В реальном направлении времени — в предыдущем плановом периоде.

Каждый фиксированный вариант такого плана-заказа содержит некоторое конечное число элементарных процессов заказывания различных продуктов в различные такты $t = 0, 1, \ldots, T-1$. Снабдить эти процессы индексом ω можно, например, просто пронумеровав их. Заметим теперь, что если в данном варианте плана-заказа попытаться заменить некоторый ω-й элементарный процесс другим процессом (с другим вектором $\mathbf{b}_i^\omega$ и другой интенсивностью x_i^ω), то уже в силу необходимости соблюдать материальный баланс по каждому из продуктов (равенство затрат и выпуска) этот альтернативный процесс должен как-то зависеть от остальных элементарных процессов в этом плане. Помимо этого, взаимозависимость между различными процессами в плане-заказе может быть обусловлена факторами, которые в явной форме в модели не учитываются, например, ограниченностью трудовых ресурсов. Таким образом, выбор каждого элементарного процесса в таком плане заведомо нельзя считать независимым от выбора других процессов.

Обратимся теперь к вероятностной иллюстрации цепной системы. Рассмотрим общую модель случайных переходов между n состояниями $s_1, \ldots, s_n$ в дискретном времени $t = 0, 1, \ldots$ Если описывать модель, следя за некоторой ее реализацией, то закон блуждания по состояниям имеет такой вид: данный экземпляр системы, оказавшись в момент времени t в состоянии s_i, в следующий момент времени $t+1$ перейдет в одно из состояний $s_1, \ldots, s_n$ с некоторыми вероятностями $b_{i1}, \ldots, b_{in}$. Эти вероятности в общем случае связаны со всей предысторией данного экземпляра системы, например, с последовательностью пройденных перед этим состояний, с воспринятыми при этом внешними воздействиями и т.п.

Чтобы дать в некотором смысле исчерпывающее описание поведения модели, будем рассматривать всю совокупность ее реализаций, т.е. будем рассматривать статистический ансамбль системы и его «размывание» по состояниям (считая известным начальный ансамбль — распределение вероятностей на состояниях $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$). Рассмотрим подансамбль систем, находящихся в данный момент времени в состоянии s_i и обладающих общей предысторией ω. Пусть объем этого подансамбля равен x_i (за единицу принят полный объем начального ансамбля $\sum_{i=1}^n r_i$). Преобразование этого подансамбля к следующему моменту времени, определяемое строкой переходных вероятностей $\mathbf{b}_i^\omega = (b_{i1}^\omega, \ldots, b_{in}^\omega)$, может интерпретироваться как процесс, переводящий подансамбль x_i^ω в «расщепленный подансамбль» $\mathbf{y}^\omega = (y_1^\omega, \ldots, y_n^\omega)$ по закону $\mathbf{y}^\omega = x_i^\omega \mathbf{b}_i^\omega$.

Таким образом, можно формально рассматривать процессы преобразования подансамблей с одинаковой предысторией, порождающие ветвящийся процесс «размывания» ансамбля, как элементарные процессы в цепной системе с n факторами; под i-м фактором понимается доля полного статистического ансамбля q_i, находящаяся в состоянии s_i, а за индекс ω элементарного процесса принимается индекс предыстории соответствующего подансамбля. Поскольку наличие и объем подансамбля с данной предысторией определяется предшествующими элементарными процессами, то и в такой цепной системе различные элементарные процессы оказываются взаимосвязанными. Поэтому укрупненное описание эволюции ансамбля $\mathbf{q}(t)$ в виде (2) является лишь псевдомарковским, так как матрицы переходных вероятностей $\mathbf{B}(t)$ могут неявно заключать в себе сколь угодно полную информацию о предыстории процесса.

Итак, уравнение преобразования укрупненных состояний цепной системы (2) является точным уравнением именно постольку, поскольку в коэффициентах этого уравнения — матрицах $\mathbf{B}(t)$ — содержится вся необходимая детальная информация о системе. Чтобы выписать эти матрицы, нужно, вообще говоря, знать всю детальную картину элементарных процессов в цепной системе, возможность сложных «глубинных» взаимосвязей между которыми только что была проиллюстрирована на примерах. Поэтому марковская форма укрупненного описания (2) говорит не об отсутствии таких связей, а лишь о том, что в результате произведенного для данной цепной системы укрупнения все эти связи учтены в коэффициентах (2).

Если бы задача состояла в точном вычислении траектории $\mathbf{q}(t)$ уравнения (2), для чего понадобилось бы точное знание матриц $\mathbf{B}(t)$ в этом уравнении, то представление описания цепной системы в укрупненной форме (2) не принесло бы реального облегчения по сравнению с расчетом системы на детальном уровне элементарных процессов. Однако решаемая в этой работе задача заключается в другом — в оценке некоторых глобальных показателей системы, которые могут пониматься как функционалы на траекториях укрупненного уравнения (2). Далее будет показано, что для оценки таких показателей нет нужды знать точный вид матриц $\mathbf{B}(t)$. Достаточно оценить, какие матрицы $\mathbf{B}(t)$ вообще могли бы получиться, если бы «глубинные» связи между элементарными процессами отсутствовали и в этом смысле цепь была бы марковского типа.

К игнорированию таких связей естественным образом приводит «списочное» описание цепной системы, неоднократно используемое в дальнейшем. Это описание представляет собой простое перечисление тех элементарных процессов, которые присутствуют или могут присутствовать в детальной картине системы без привязки их к структуре этой системы. Другими словами, цепная система или семейство систем при таком подходе укрупненно описывается тем, что для каждого i-го фактора указывается список $\{\mathbf{b}_i\}$ возможных элементарных процессов преобразования этого фактора. Конкретная структура цепной системы, фактически используемые в ней элементарные процессы и интенсивности этих процессов остаются при этом неизвестными. В дальнейшем будем различать «скрытые» параметры системы, относительно которых известна лишь априорно возможная область изменения, и «выделенные» параметры, значения которых, реализуемые в данной системе (или множества значений, реализуемые на данном семействе систем), могут считаться известными.

Пусть задан полный список всех априорно возможных в системе элементарных процессов $\{\{\mathbf{b}_1\}, \{\mathbf{b}_2\}, \ldots, \{\mathbf{b}_n\}\}$; для простоты предполагаем, что этот список конечен. При описании конкретных систем могут встретиться два различных случая: когда для каждого i-го фактора имеется возможность выделить один реализуемый процесс $\mathbf{b}_i$ из списка $\{\mathbf{b}_i\}$ и когда можно выделить самое меньшее — некоторый подсписок списка $\{\mathbf{b}_i\}$. Для формального описания этих случаев удобно ввести соответствующую параметризацию списков, считая, что выбор элементарного процесса или подсписка процессов i-го типа из заданного списка $\{\mathbf{b}_i\}$ дается фиксацией значения некоторого параметра u_i. В первом случае данный параметр можно отождествить с номером процесса в списке: $\{\mathbf{b}_i\} = \{\mathbf{b}_i(u_i)\}$, $u_i = 1, \ldots, r_i$. Во втором случае удобно считать, что выбор конкретного процесса из списка $\{\mathbf{b}_i\}$ определяется помимо u_i вторым (скрытым) параметром v_i: $\{\mathbf{b}_i\} = \{\mathbf{b}_i(u_i, v_i)\}$. В этом случае $u_i = 1, \ldots, r_i$ задает номер подсписка, а $v_i = 1, \ldots, s_i$ — номер процесса в этом подсписке (без существенного ограничения общности считаем, что все подсписки имеют одинаковый размер s_i). Этот формализм будет использоваться в части II работы при выводе некоторых глобальных оценок для цепных систем рассматриваемого класса.

2. Некоторые соображения о глобальных оценках в цепных системах

Глобальные оценки цепной системы рассматриваются как оценки некоторых показателей ее укрупненного описания, и поэтому предполагается, что предварительно проделана вся описанная выше работа по переходу от детального к укрупненному описанию системы.

Возникают три вопроса: какого рода оценки естественно вводить, каким методом эти оценки удобно получать и, наконец, какой вид эти оценки имеют в конкретных случаях. Рассмотрим последовательно эти три вопроса. Первым двум из этих вопросов посвящен настоящий раздел этой статьи.

2.1. Выбор оценок. При анализе цепных систем представляют интерес два рода оценок. Первый род оценок — это границы возможных значений показателя J для рассматриваемой системы или семейства систем. Оценки типа границ должны иметь силу при всех априорно возможных значениях скрытых параметров (см. конец параграфа 1).

Обозначим совокупность всех скрытых параметров через H, а траекторию $\mathbf{q}(t)(t=0,1,\ldots)$ системы (2) — через Q. Тогда в силу однозначной зависимости $Q=Q(H)$ функционал $J(Q)$ становится функционалом от скрытых параметров: $J=J(Q(H))$. Нижней и верхней границами показателя J служат числа K и L, удовлетворяющие неравенствам $K\leqslant J(Q(H))\leqslant L$ для всех H, т. е.

$$K\leqslant \min_H J(Q(H)),\quad L\geqslant \max_H J(Q(H)), \tag{3}$$

где скрытые параметры H пробегают все априорно возможное множество значений.

Второй род оценок — это достижимые значения показателя J. О таких оценках можно говорить в том случае, если рассматривается семейство систем, охарактеризованное указанием множества значений, которое пробегают некоторые выделенные параметры системы [1], и если желательно указать крайние значения показателя J, которые могут быть гарантированы надлежащим подбором выделенных параметров G, каковы бы ни были значения скрытых параметров H. Будем называть число M нижним, а N — верхним достижимым значением, если существуют допустимые значения G^1 и G^2 выделенных параметров G такие, что $J(Q(G^1,H))\leqslant M, J(Q(G^2,H))\geqslant N$ для всех H, т.е.

$$M\geqslant \min_G\max_H J(Q(G,H)),\quad N\leqslant \max_G\min_H J(Q(G,H)). \tag{4}$$

Оценки K, L, M, N будем называть точными (неулучшаемыми), если K и N — максимальные, а L и M — минимальные из чисел, удовлетворяющих (3) и (4), т.е. если (3) и (4) переходят в равенства.

[1] Для цепных систем в качестве выделенных будут рассматриваться параметры u_i^ω, определяющие возможные в системе процессы или подсписки таких процессов; те параметры, которые определяют выбор реализуемых процессов из этих подсписков (v_i^ω) и интенсивности этих процессов (γ_i^ω), остаются скрытыми параметрами. Поэтому достижимые значения показателя J в цепной системе при выделении параметров u_i^ω — это значения J, гарантируемые надлежащим выбором допускаемых в системе элементарных процессов. Эти выделенные параметры могут давать и укрупненную информацию о системе (если задается единый список процессов для всей системы), и более детализированную информацию (если указываемый подсписок допускаемых процессов может зависеть от места процесса в структуре системы).

2.2. Метод получения оценок. Чтобы получить оценки показателей $J(Q)$, не опираясь на явное выражение траектории Q, воспользуемся методом функций Лагранжа, рассматривая (2) как заданные ограничения. Пусть траектория системы $Q = Q(H)$ или, при наличии выделенных параметров, $Q = = Q(G, H)$ определяется из условия $\mathbf{f}(Q, G, H) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{f}$ для определенности — вектор-строка. Выпишем функцию (функционал) Лагранжа

$$\Phi = J(Q) + \mathbf{f}(Q, G, H)\mathbf{p},$$

где $\mathbf{p}$ — вектор-столбец той же размерности, что и $\mathbf{f}$. Зафиксируем некоторое $\mathbf{p}$ и заметим, что на траекториях $Q = Q(G, H)$ имеет место равенство

$$J(Q) = \Phi(Q, G, H; \mathbf{p}),$$

т. е. $J(Q(G, H))$ тождественно по G, H равно $\Phi(Q(G, H), G, H; \mathbf{p})$. Легко проверить, что в качестве верхних и нижних границ и достижимых значений показателя J можно взять верхние и нижние границы и соответственно достижимые значения функции Лагранжа Φ, если считать Q скрытым параметром с некоторым множеством значений $\mathcal{K} \ni Q(G, H)$ ($\mathcal{K}$ может зависеть от H и G).

Действительно,

$$\max_H J(Q(H)) = \max_H \Phi(Q(H), H; \mathbf{p}) \leqslant \max_H \max_{Q \in \mathcal{K}(H)} \Phi(Q, H; \mathbf{p});$$
$$\max_G \min_H J(Q(G, H)) = \max_G \min_H \Phi(Q(G, H), G, H; \mathbf{p}) \geqslant$$
$$\geqslant \max_G \min_H \min_{Q \in \mathcal{K}(G,H)} \Phi(Q, G, H; \mathbf{p}),$$

так что верхние границы (достижимые значения) Φ одновременно являются верхними границами (соответственно достижимыми значениями) J. Аналогично рассматриваются нижние границы и достижимые значения.

Удобство изложенных приемов оценки J через Φ состоит в том, что допускается варьирование Q с нарушением условий $\mathbf{f}(Q, G, H) = \mathbf{0}$. Разумеется, точность получаемых такими приемами оценок зависит от того, насколько удачно подобран вектор «множителей Лагранжа» $\mathbf{p}$. Отметим, что при отыскании оценки в отличие от точной постановки экстремальной задачи нет необходимости искать $\mathbf{p}$ как точное решение некоторой двойственной задачи. Поэтому при подборе $\mathbf{p}$ можно свободно использовать эвристические соображения, связанные с известной интерпретацией двойственных переменных в задачах экстремизации. В рассматриваемых здесь задачах оценки цепных систем эти приемы оказались достаточно действенными.

Некоторые глобальные оценки цепных систем. II [1]

Рассматриваются укрупненные характеристики систем, имеющих специфическую «цепную» структуру. В предыдущей статье было показано, что к исследованию таких систем приводят задачи, связанные с некоторыми моделями в математической экономике, в теории надежности конечных автоматов и теории экспериментов с автоматами. Настоящая статья посвящена построению некоторых оценок для глобальных показателей цепных систем рассматриваемого типа и применению этих оценок в указанных задачах.

1. Вывод некоторых глобальных оценок для цепных систем

В качестве глобальных показателей цепной системы рассматриваемого класса, т. е. в качестве представляющих интерес функционалов J на траекториях $\mathbf{q}(t)$ укрупненного уравнения цепной системы (уравнения (2) в [36])

$$\mathbf{q}(t+1) = \mathbf{q}(t)\,\mathbf{B}(t) \quad (t = 0, 1, \ldots), \tag{1}$$

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{r},$$

рассмотрим показатель $R(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)$ (имеющий характер «суммарного ресурса» в системе в t-м такте) и «интегральный» показатель $D = \sum_{t=0}^{\infty} R(t)$ (своего рода «суммарный ресурс» за весь период функционирования системы).

1.1. Оценки показателя D. Приступая к оцениванию интегрального показателя D (изучение которого представляет как самостоятельный интерес, так и базу для оценки показателя $R(t)$), начнем с необходимых для дальнейшего вспомогательных построений. Рассмотрим сначала однопараметрические списки процессов $\{\mathbf{b}_i(u_i)\}$, $u_i = 1, \ldots, r_i$; $i = 1, \ldots, n$. Составим вектор параметров $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ и рассмотрим матрицу $\mathbf{B}(\mathbf{u})$, i-я строка которой есть $\mathbf{b}_i(u_i)$.

Пусть $\mathbf{B}$ — $(n \times n)$-мерная неотрицательная матрица, а $\mathbf{e}$ — вектор-столбец из единиц. Будем обозначать через $\mathbf{h}(\mathbf{B})$ векторный ряд [2]

---

[1] Автоматика и телемеханика. 1970.—№5.—С. 106–118.

[2] Согласно теории матриц [19] ряд (2) сходится (т.е. сходятся к конечным значениям скалярные ряды для каждой его компоненты) в том и только в том случае, если число Фробениуса $\lambda(\mathbf{B})$ (неотрицательное собственное число матрицы $\mathbf{B}$, максимальное по модулю среди всех ее собственных чисел) удовлетворяет условию $\lambda(\mathbf{B}) < 1$. В дальнейшем всегда будем предполагать выполнение условий, обеспечивающих конечность фигурирующих в тексте векторов $\mathbf{h}^{*}$, $\mathbf{h}^{**}$, $\mathbf{h}^{\mathrm{mM}}$, $\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}$ (3)–(4) и (16)–(17).

$$\mathbf{h}(\mathbf{B}) = \mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{e} + \mathbf{B}^2\mathbf{e} + \ldots \tag{2}$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{h}(\mathbf{B}(\mathbf{u}))$ и введем обозначения

$$h_i^* = \min_{\mathbf{u}} h_i(\mathbf{B}(\mathbf{u})) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

$$h_i^{**} = \max_{\mathbf{u}} h_i(\mathbf{B}(\mathbf{u})) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Составим из компонент h_i^* и h_i^{**} n-мерные вектор-столбцы $\mathbf{h}^*$ и $\mathbf{h}^{**}$ соответственно. Тогда имеют место уравнения

$$h_i^* = \min_{u_i}[1 + \mathbf{b}_i(u_i)\mathbf{h}^*] \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

$$h_i^{**} = \max_{u_i}[1 + \mathbf{b}_i(u_i)\mathbf{h}^{**}] \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Доказательство этого утверждения приведено в приложении I. Составим множества (списки) $\{u_i\}^*$ и $\{u_i\}^{**}$ всех тех значений параметра u_i, которые доставляют min в (3) и max в (4) соответственно $(i = 1, \ldots, n)$. Нетрудно видеть, что выпуклая комбинация

$$\mathbf{b}_i = \sum_{\omega \in \Omega_i} \gamma_i^\omega \mathbf{b}_i(u_i^\omega), \tag{7}$$

где

$$\gamma_i^\omega \geqslant 0, \quad \omega \in \Omega_i, \quad \sum_{\omega \in \Omega_i} \gamma_i^\omega = 1,$$

удовлетворяет условиям

$$h_i^* \leqslant 1 + \mathbf{b}_i\mathbf{h}^* \tag{8}$$

и

$$h_i^{**} \geqslant 1 + \mathbf{b}_i\mathbf{h}^{**}, \tag{9}$$

причем если $u_i^\omega \in \{u_i\}^*$ (или соответственно $u_i^\omega \in \{u_i\}^{**}$) для всех $\omega \in \Omega_i$, то (8) (соответственно (9)) обращается в равенство.

Приступим теперь к построению оценок показателя D по спискам процессов $\{\mathbf{b}_i(u_i)\}(i = 1, \ldots, n)$. Следуя приему, изложенному в п. 2.2 первой части работы, построим функцию Лагранжа, рассматривая динамические уравнения системы (1) как ограничения. Поскольку удобнее оценивать сначала не бесконечный ряд $D = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{q}(t)\mathbf{e}$, а его частичную сумму $D_T = \sum_{t=0}^{T} \mathbf{q}(t)\mathbf{e}$, то соответствующую функцию Лагранжа возьмем в виде

$$\Phi_T = D_T + [\mathbf{r} - \mathbf{q}(0)]\,\mathbf{p}(0) + \sum_{t=0}^{T} [\mathbf{q}(t)\,\mathbf{B}(t) - \mathbf{q}(t+1)]\,\mathbf{p}(t+1). \tag{10}$$

Перепишем (10) следующим образом:

$$\Phi_T = \mathbf{r}\mathbf{p}(0) + \sum_{t=0}^{T} \mathbf{q}(t)\,[\mathbf{e} + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{p}(t)] - \mathbf{q}(T+1)\,\mathbf{p}(T+1). \quad (11)$$

Здесь Φ_T зависит от параметров системы γ_i^ω, u_i^ω через матрицы $\mathbf{B}(t)$ (напомним, что i-я строка матрицы $\mathbf{B}$ имеет вид (7)).

Считая все параметры γ_i^ω, u_i^ω скрытыми и следуя ч. I работы, где рассматривалась произвольная совокупность скрытых параметров (H), построим верхнюю границу (L) для показателя $J = D$. С этой целью положим в (11) $\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{h}^{**}$; в силу (7), (9) все векторные выражения в квадратных скобках в (11) при этом неположительны. Поскольку траектория $\mathbf{q}(t)$ заведомо неотрицательна, это сразу дает для Φ_T верхнюю границу вида $\Phi_T \leqslant \mathbf{r}\mathbf{h}^{**}$. Следовательно[1], для D_T имеем верхнюю границу $D_T \leqslant \mathbf{r}\mathbf{h}^{**}$. В связи с тем, что $D = \lim\limits_{T\to\infty} D_T$, имеем $D \leqslant \mathbf{r}\mathbf{h}^{**}$, т.е. $L = \mathbf{r}\mathbf{h}^{**}$.

Оценим максимальное значение показателя D, которое можно гарантировать подбором единого списка процессов (без указания конкретных реализуемых процессов из этого списка и их относительных интенсивностей, которые остаются скрытыми параметрами). С этой целью введем «укрупненную» совокупность выделенных параметров (G), представляющую собой список U допускаемых значений u_i параметров $u_i^\omega (i = 1, \ldots, n)$: $U = \{\{u_1\}, \ldots, \{u_n\}\}$, где множества $\{u_i\}$ могут содержать, в частности, и по одному значению u_i. Возьмем набор параметров $U^{**} = \{\{u_1\}^{**}, \ldots, \{u_n\}^{**}\}$. Легко видеть, что при $U = U^{**}$ все выражения в квадратных скобках в (11) равны нулю при произвольном наборе Γ скрытых параметров γ_i^ω. Значит, для произвольной цепной системы с выделенными параметрами $U = U^{**}$ имеем $\Phi_T \geqslant \mathbf{r}\mathbf{h}^{**} - \mathbf{q}(T+1)\mathbf{h}^{**}$ (более того, здесь можно поставить знак равенства). Следовательно[2], и $D_T \geqslant \mathbf{r}\mathbf{h}^{**} - \hat{\mathbf{q}}(T+1)\mathbf{h}^{**}$, где $\hat{\mathbf{q}}(T+1)$ — значение $\mathbf{q}(T+1)$ на траектории этой системы $Q(U^{**}, \Gamma)$.

Для перехода к оценке D заметим, что из $D = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \mathbf{q}(t)\mathbf{e} < \infty$ следует $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}$; поэтому для рассматриваемой системы

$$D = \lim_{T\to\infty} D_T \geqslant \lim_{T\to\infty} (\mathbf{r}\mathbf{h}^{**} - \hat{\mathbf{q}}(T+1)\mathbf{h}^{**}) = \mathbf{r}\mathbf{h}^{**}.$$

[1] Для вывода этого утверждения по формальной схеме п. 2.2 ч. I работы достаточно принять за $\mathcal{K}(H)$ множество всех «неотрицательных траекторий» $\{Q\} = \{\mathbf{q}(t) : \mathbf{q}(t) \geqslant 0, t = 0, 1, \ldots\}$.

[2] В формальной схеме из ч. I следует принять за $\mathcal{K}(G, H)$ (где U играет роль G, Γ — роль H) множество траекторий Q таких, что $\mathbf{q}(t) \geqslant 0$, $(t = 0, 1, \ldots)$ и $\mathbf{q}(T+1) = \hat{\mathbf{q}}(T+1)$.

Сопоставляя это с полученной выше верхней границей показателя D

$$D(U, \Gamma) \leqslant L = \mathbf{rh}^{**} \quad \text{для всех } U, \Gamma, \tag{12}$$

обнаруживаем, что $\mathbf{rh}^{**}$ является в то же время верхним достижимым значением (N) показателя D по U:

$$D(U^{**}, \Gamma) = N = \mathbf{rh}^{**} \quad \text{для всех } \Gamma, \tag{13}$$

а это означает, что полученные оценки являются точными (неулучшаемыми). Таким образом, одно лишь указание надлежащего списка допускаемых элементарных процессов в системе гарантирует достижение максимального значения показателя D — того максимального значения, которое вообще может быть достигнуто при каком бы то ни было подборе элементарных процессов в детальной структуре системы. Аналогичные утверждения справедливы и для других рассматриваемых ниже глобальных показателей цепных систем.

Подобным же образом находятся точные нижние оценки (K и M) показателя D:

$$D(U, \Gamma) \geqslant K = \mathbf{rh}^{*} \quad \text{для всех } U, \Gamma, \tag{14}$$

$$D(U^{*}, \Gamma) = M = \mathbf{rh}^{*} \quad \text{для всех } \Gamma \tag{15}$$

(здесь $U^* = \{\{u_1\}^*, \ldots, \{u_n\}^*\}$). Оценки (12)–(15) являются искомыми оценками глобального показателя D для случая однопараметрических списков элементарных процессов в цепной системе.

При отыскании этих оценок для конкретной системы нужно находить вспомогательные величины h_i^* и h_i^{**} ($i = 1, \ldots, n$). Практически это удобнее делать, не пользуясь определениями (3), (4), а решая уравнения (5), (6) при помощи подходящей рекуррентной процедуры. Единственность решений этих уравнений (на множестве векторов $\mathbf{h} \geqslant \mathbf{0}$) следует из того, что оценки (12)–(15) точные (при произвольных $\mathbf{r} \geqslant \mathbf{0}$), а при получении их используется только тот факт, что $\mathbf{h}^*$ и $\mathbf{h}^{**}$ удовлетворяют уравнениям (5), (6). Аналогичные соображения касаются и всех получаемых ниже оценок, и к этому обстоятельству мы далее возвращаться не будем.

Двойная параметризация списков: $\{\mathbf{b}_i(u_i, v_i)\}$, $u_i = 1, \ldots, r_i$, $v_i = 1, \ldots, s_i$; $i = 1, \ldots, n$, как уже отмечалось, представляет интерес в случае, когда ищутся достижимые значения показателей по таким выделенным параметрам U, которые определяют лишь подсписки возможных процессов (фиксация $u_i = \tilde{u}_i$ дает подсписок $\{\mathbf{b}_i(\tilde{u}_i, v_i)\}$, $v_i = 1, \ldots, s_i$).

Построим оценки достижимых по выделенным параметрам $U = \{\{u_1\}, \ldots, \{u_n\}\}$ значений показателя D, относя к скрытым параметрам (H) параметры $V = \{v_i^\omega\}$ и $\Gamma = \{\gamma_i^\omega\}$, $\omega \in \Omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$;

$t = 0, 1, \ldots$ Для этого достаточно провести рассуждения почти такие же, как и в случае однопараметрических списков. Введем матрицу $\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, i-я строка которой имеет вид $\mathbf{b}_i(u_i, v_i)$, и рассмотрим векторный ряд $\mathbf{h}(\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ (см. (2)). Введем обозначения

$$h_i^{\mathrm{mM}} = \min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{v}} h_i(\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{16}$$

$$h_i^{\mathrm{Mm}} = \max_{\mathbf{u}} \min_{\mathbf{v}} h_i(\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{17}$$

Составим из компонент h_i^{mM} и h_i^{Mm} n-мерные вектор-столбцы $\mathbf{h}^{\mathrm{mM}}$ и $\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}$ соответственно. Тогда имеют место уравнения

$$h_i^{\mathrm{mM}} = \min_{u_i} \max_{v_i} [1 + \mathbf{b}_i(u_i, v_i)\mathbf{h}^{\mathrm{mM}}] \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{18}$$

$$h_i^{\mathrm{Mm}} = \max_{u_i} \min_{v_i} [1 + \mathbf{b}_i(u_i, v_i)\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}] \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Доказательство этого приведено в приложении II.

Составим множества $\{u_i\}^{\mathrm{mM}}$ и $\{u_i\}^{\mathrm{Mm}}$ из всех значений параметра u_i, которые доставляют min в (18) и max в (19) соответственно $(i = 1, \ldots, n)$, и положим $U^{\mathrm{mM}} = \{\{u_1\}^{\mathrm{mM}}, \ldots, \{u_n\}^{\mathrm{mM}}\}$ и $U^{\mathrm{Mm}} = \{\{u_1\}^{\mathrm{Mm}}, \ldots, \{u_n\}^{\mathrm{Mm}}\}$.

Снова рассматривая функционал Лагранжа (11), полагая в нем $p(t) \equiv \mathbf{h}^{\mathrm{mM}}$ (или $\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}$) и используя уравнения (18), (19), нетрудно аналогично предыдущему случаю однопараметрических списков получить точные оценки достижимых по U значений показателя D для случая двухпараметрических списков:

$$D(U^{\mathrm{mM}}, V, \Gamma) \leqslant M = \mathbf{r}\mathbf{h}^{\mathrm{mM}} \quad \text{для всех } V, \Gamma, \tag{20}$$

$$D(U^{\mathrm{Mm}}, V, \Gamma) \geqslant N = \mathbf{r}\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}} \quad \text{для всех } V, \Gamma. \tag{21}$$

Эти оценки точны в том смысле, что никакой единый список U не может гарантировать значения показателя D меньшего, чем $\mathbf{r}\mathbf{h}^{\mathrm{mM}}$, и большего, чем $\mathbf{r}\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}$[1].

При выводе оценок (12)–(15) и (20)–(21) рассматривался простейший случай конечных списков: множество $\{\mathbf{b}_i\}$ содержит конечное число векторов процессов $\mathbf{b}_i$. Иногда могут представлять интерес и бесконечные списки, в частности, уместно рассмотреть множество векторов процессов, являющихся выпуклыми комбинациями[2] исходных r_i

[1] Более того, как и в случае однопараметрических списков процессов, даже детальное перечисление выделенных параметров u_i^{ω} не может гарантировать таких значений (так как всегда можно подобрать препятствующие этому значения скрытых параметров v_i^{ω}).

[2] Такая задача может возникнуть, в частности, в вероятностной модели, где векторы $\mathbf{b}_i$ — строки переходных вероятностей; в случае, когда параметр u_i сам является случайной величиной, распределенной с вероятностями $p_{u_i}^i$.

векторов из списка $\{\mathbf{b}_i\}$, когда список $\{\mathbf{b}_i\}$ процессов i-го типа (одно- или двухпараметрический) пополняется «смешанными» процессами

$$\mathbf{b}_i(\mathbf{p}^i) = \sum_{u_i=1}^{r_i} p^i_{u_i}\mathbf{b}_i(u_i) \ \text{ или } \ \mathbf{b}_i(\mathbf{p}^i, v_i) = \sum_{u_i=1}^{r_i} p^i_{u_i}\mathbf{b}_i(u_i, v_i)$$

соответственно. Здесь векторный параметр $\mathbf{p}^i = (p^i_1, \ldots, p^i_{r_i})$ представляет собой набор коэффициентов выпуклой комбинации $\Big(p^i_{u_i} \geqslant 0,\ \sum_{u_i=1}^{r_i} p^i_{u_i} = 1\Big)$. Можно показать, что все проведенные рассуждения могут быть повторены и в этом случае, если всюду заменить параметры u_i на $\mathbf{p}^i$. Оценки (12)–(15) для однопараметрических списков остаются при таком пополнении списков в точности теми же, а оценки достижимых значений для двухпараметрических списков сохраняют форму (20)–(21), но с измененными значениями $\mathbf{h}^{\mathrm{mM}}$ и $\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}$ (16)–(17).

1.2. Оценки показателя $R(t)$**.** Перейдем теперь от «интегрального» показателя D к «динамическому» показателю $R(t)$. Зададимся целью оценить показатель $R(t)$ не при некотором фиксированном значении t, а сразу на всей временной оси $t = 0, 1, \ldots$ В связи с этим будем искать оценки в естественном для заданной задачи классе оценок[1] последовательности $R(t)$ $(t = 0, 1, \ldots)$, не требуя, чтобы эти оценки были неулучшаемыми при каждом t в отдельности.

Как и при выводе оценок показателя D, произведем некоторые предварительные построения. Рассмотрим сначала однопараметрические списки $\{\mathbf{b}_i(u_i)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть $\lambda' = \min_{\mathbf{u}} \lambda(\mathbf{B}(\mathbf{u}))$ и $\lambda'' = \max_{\mathbf{u}} \lambda(\mathbf{B}(\mathbf{u}))$. Для оценивания $R(t)$ воспользуемся результатами, полученными при оценивании D. Введем в рассмотрение вектор

$$\mathbf{h}\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{B}\right) = \mathbf{e} + \frac{1}{\sigma}\mathbf{B}\mathbf{e} + \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{B}^2\mathbf{e} + \ldots,$$

где σ — положительный скаляр. Составим из компонент

$$h^*_i(\sigma) = \min_{\mathbf{u}} h_i\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{B}(\mathbf{u})\right) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$h^{**}_i(\sigma) = \max_{\mathbf{u}} h_i\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{B}(\mathbf{u})\right) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

[1] Таким классом, как будет показано далее, является класс «экспоненциальных» оценок.

векторы $\mathbf{h}^*(\sigma)$ и $\mathbf{h}^{**}(\sigma)$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{h}^*(\sigma) < \infty$ при $\sigma > \lambda'$, а $\mathbf{h}^{**}(\sigma) < \infty$ при $\sigma > \lambda''$. Рассмотрим асимптотику векторов $\mathbf{h}^*(\sigma)$ и $\mathbf{h}^{**}(\sigma)$ при $\sigma \downarrow \lambda'$ и $\sigma \downarrow \lambda''$ соответственно[1]. Примем за норму неотрицательного вектора $\mathbf{z}$ число $\|\mathbf{z}\| = \sum_{i=1}^{n} z_i$. Можно показать, что пределы $\lim\limits_{\sigma\downarrow\lambda'} \dfrac{\mathbf{h}^*(\sigma)}{\|\mathbf{h}^*(\sigma)\|} = \mathbf{g}'$ и $\lim\limits_{\sigma\downarrow\lambda''} \dfrac{\mathbf{h}^{**}(\sigma)}{\|\mathbf{h}^{**}(\sigma)\|} = \mathbf{g}''$ существуют и удовлетворяют уравнениям

$$\lambda' g_i' = \min_{u_i} \mathbf{b}_i(u_i)\mathbf{g}' \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{22}$$

$$\lambda'' g_i'' = \max_{u_i} \mathbf{b}_i(u_i)\mathbf{g}'' \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{23}$$

Для дальнейшего нам потребуется лишь факт существования неотрицательных векторов $\mathbf{g}'$, $\mathbf{g}''$, удовлетворяющих (22) и (23), а чтобы получить такие векторы, достаточно взять частичные пределы указанных величин. Доказательство последнего приведено в приложении III.

Составим множества $\{u_i\}'$ и $\{u_i\}''$ всех значений параметра u_i, которые доставляют min в (22) и max в (23) соответственно ($i = 1, \ldots, n$). Выпуклая комбинация

$$\mathbf{b}_i = \sum_{\omega\in\Omega_i} \gamma_i^\omega \mathbf{b}_i(u_i^\omega)$$

удовлетворяет условиям

$$\lambda' g_i' \leqslant \mathbf{b}_i \mathbf{g}', \tag{24}$$

$$\lambda'' g_i'' \geqslant \mathbf{b}_i \mathbf{g}'', \tag{25}$$

причем если $u_i^\omega \in \{u_i\}'$ (или $u_i^\omega \in \{u_i\}''$) для всех $\omega \in \Omega_i$, то (24) (соответственно (25)) обращается в равенство.

В общем случае числа λ', λ'' и векторы $\mathbf{g}'$, $\mathbf{g}''$ удовлетворяют условиям $\lambda' \geqslant 0$, $\lambda'' \geqslant 0$; $\mathbf{g}' \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{g}'' \geqslant \mathbf{0}$ и $\mathbf{g}' \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{g}'' \neq \mathbf{0}$. Ниже мы ограничимся случаями $\lambda' > 0$, $\mathbf{g}' > \mathbf{0}$ и $\lambda'' > 0$, $\mathbf{g}'' > \mathbf{0}$, исключив тем самым из рассмотрения «вырожденные» случаи. Действительно, возьмем, например, пару λ', $\mathbf{g}'$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{g}'$ представляет собой собственный вектор матрицы $\mathbf{B}(\mathbf{u}')$, составленной из строк $\mathbf{b}_i(u_i')$, $u_i' \in \{u_i\}'$ ($i = 1, \ldots, n$), который соответствует собственному числу λ'. Поэтому, если не выполняется условие $\lambda' > 0$, $\mathbf{g}' > \mathbf{0}$, т. е. если $g_i' = 0$ хотя бы для одного i, или если $\lambda' = 0$, то матрица $\mathbf{B}(\mathbf{u}')$ разложима [19]. Аналогичное рассуждение относится и к λ'', $\mathbf{g}''$. Разложимость матриц $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ как раз и означает определенную структурную вырожденность цепной системы.

[1] Знак $\downarrow$ означает стремление сверху.

Перейдем к оцениванию показателя $R(t)$. Временно зафиксируем $t = T$ и запишем для показателя $J = R(T)$ функцию Лагранжа:

$$\Phi = \mathbf{q}(T)\,\mathbf{e} + [\mathbf{r} - \mathbf{q}(0)]\,\mathbf{p}(0) + \sum_{t=0}^{T-1} [\mathbf{q}(t)\,\mathbf{B}(t) - \mathbf{q}(t+1)]\,\mathbf{p}(t+1)$$

или

$$\Phi = \mathbf{r}\mathbf{p}(0) + \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{q}(t)\,[\mathbf{B}(t+1)\,\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{p}(t)] + \mathbf{q}(T)\,[\mathbf{e} - \mathbf{p}(T)]. \quad (26)$$

Положим в (26) $\mathbf{p}(t) = \alpha'\lambda'^{T-t}\mathbf{g}'$, где константа $\alpha' > 0$ выбрана так, что $\alpha'\mathbf{g}' \leqslant \mathbf{e}$. Тогда в силу (24) все выражения в квадратных скобках в (26) неотрицательны, откуда $\Phi \geqslant \mathbf{r}\mathbf{p}(0)$, ($\mathbf{p}(0) = \alpha'\lambda'^{T}\mathbf{g}'$) и, значит, $R(T) \geqslant \alpha'\lambda'^{T}\mathbf{r}\mathbf{g}'$. Нижняя граница для $R(T)$ найдена. Для отыскания нижнего достижимого значения $R(T)$ положим в (26) $\mathbf{p}(t) = \beta'\lambda'^{T-t}\mathbf{g}'$, где константа $\beta' > 0$ выбрана так, что $\beta'\mathbf{g}' \geqslant \mathbf{e}$. Возьмем набор выделенных параметров $U' = \{\{u_1\}', \ldots, \{u_n\}'\}$. В этом случае все выражения в квадратных скобках в (26) неположительны, что дает оценку нижнего достижимого по U значения $R(T; U', \Gamma) \leqslant \beta'\lambda'^{T}\mathbf{r}\mathbf{g}'$. Так как выведенные оценки справедливы для произвольного T, имеем сразу для всех $t = 0, 1, \ldots$ нижнюю границу

$$R(t; U, \Gamma) \geqslant \alpha'\lambda'^{t}\mathbf{r}\mathbf{g}' \quad \text{для всех } U, \Gamma \quad (27)$$

и нижнее достижимое значение

$$R(t; U', \Gamma) \leqslant \beta'\lambda'^{t}\mathbf{r}\mathbf{g}' \quad \text{для всех } \Gamma. \quad (28)$$

Эти оценки неточные, так как, вообще говоря, $\alpha' < \beta'$. Однако они являются неулучшаемыми в определенном классе оценок — в классе экспонент. Чтобы придать однозначный смысл этому утверждению, рассмотрим следующие показатели, характеризующие последовательность $R(t)$ $(t = 0, 1, \ldots)$:

$$\varphi = \exp\left\{\varliminf_{t\to\infty} \frac{\ln R(t)}{t}\right\}, \quad \psi = \exp\left\{\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln R(t)}{t}\right\}.$$

Назовем φ нижним темпом роста величины $R(t)$, а ψ верхним темпом роста; если эти величины совпадают, будем называть $\chi = \varphi = \psi$ темпом роста[1] $R(t)$. Используя (27), (28), можно сказать, что λ' представляет собой нижнюю границу (K) и одновременно нижнее достижимое значение (M) темпа роста $\chi[R(t)]$.

[1] Если $\chi[R(t)] < 1$, естественно называть χ темпом убывания величины $R(t)$.

Аналогично можно получить для последовательности $R(t)$ $(t = 0, 1, \ldots)$ верхнюю границу

$$R(t; U, \Gamma) \leqslant \alpha'' \lambda''^t \mathbf{r}\mathbf{g}'' \quad (\alpha'' > 0) \qquad \text{для всех } U, \Gamma \tag{29}$$

и верхнее достижимое значение

$$R(t; U'', \Gamma) \geqslant \beta'' \lambda''^t \mathbf{r}\mathbf{g}'' \quad (\beta'' > 0) \qquad \text{для всех } \Gamma. \tag{30}$$

Величина λ'' представляет собой верхнюю границу (L) и одновременно верхнее достижимое значение (N) темпа роста $\chi[R(t)]$.

Рассмотрим двухпараметрические списки процессов $\{\mathbf{b}_i(u_i, v_i)\}$, $u_i = 1, \ldots, r_i$, $v_i = 1, \ldots, s_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Положим $\lambda^{\mathrm{mM}} = \min\limits_{\mathbf{u}} \max\limits_{\mathbf{v}} \lambda(\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ и $\lambda^{\mathrm{Mm}} = \max\limits_{\mathbf{u}} \min\limits_{\mathbf{v}} \lambda(\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$. По аналогии с $\mathbf{h}^*(\sigma)$ и $\mathbf{h}^{**}(\sigma)$ можно рассмотреть векторы $\mathbf{h}^{\mathrm{mM}}(\sigma)$ и $\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}(\sigma)$ и показать, что пределы

$$\lim_{\sigma \downarrow \lambda^{\mathrm{mM}}} \frac{\mathbf{h}^{\mathrm{mM}}(\sigma)}{\|\mathbf{h}^{\mathrm{mM}}(\sigma)\|} = \mathbf{g}^{\mathrm{mM}} \text{ и } \lim_{\sigma \downarrow \lambda^{\mathrm{Mm}}} \frac{\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}(\sigma)}{\|\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}(\sigma)\|} = \mathbf{g}^{\mathrm{Mm}}$$

существуют и удовлетворяют уравнениям

$$\lambda^{\mathrm{mM}} g_i^{\mathrm{mM}} = \min_{u_i} \max_{v_i} \mathbf{b}_i(u_i, v_i) \mathbf{g}^{\mathrm{mM}} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{31}$$

$$\lambda^{\mathrm{Mm}} g_i^{\mathrm{Mm}} = \max_{u_i} \min_{v_i} \mathbf{b}_i(u_i, v_i) \mathbf{g}^{\mathrm{Mm}} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{32}$$

Пользуясь этими результатами, как и в случае однопараметрических списков, можно построить оценки достижимых по U значений $R(t)$ в классе экспоненциальных оценок, аналогичные (28) и (30): нижнее достижимое значение $\sim (\lambda^{\mathrm{mM}})^t$ и верхнее достижимое значение $\sim (\lambda^{\mathrm{Mm}})^t$. Другими словами, темп роста $\chi[R(t)]$ имеет нижнее и верхнее достижимые по U значения $M = \lambda^{\mathrm{mM}}$ и $N = \lambda^{\mathrm{Mm}}$ соответственно; эти оценки являются точными (неулучшаемыми).

Таким образом, все «характерные» оценки показателя $R(t)$ имеют экспоненциальный вид. Грубо говоря, цепная система не может продемонстрировать никакого существенно иного поведения, чем экспоненциальный рост (или «угасание»).

2. Приложение полученных оценок к трем задачам

Рассмотрим теперь приложения, которые имеют полученные оценки показателей цепных систем в тех трех задачах, о которых говорилось во введении в части I настоящей работы (см. [36]).

2.1. Экономическая модель «план-заказ». Вернемся к экономической модели, описанной в части I настоящей работы [36]. Как отмечалось выше, укрупненное описание (1) для такой системы характеризует совокупный заказ на набор продуктов $\mathbf{q}(t)$, подсчитанный на t плановых периодов назад $(t = 1, \ldots, T)$, исходя из требования на получение заданного набора продуктов $\mathbf{q}(0) = \mathbf{r}$ при $t = 0$. В этой задаче $R(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)$ может рассматриваться как «валовой» показатель, характеризующий суммарный объем ресурсов или объем продукции [1]. Тогда «темп роста» $\chi[R(t)]$ характеризует рост объема поставок при переходе к более ранним плановым периодам. Для расширяющейся экономики эта величина должна быть меньше единицы; обратная величина $\chi^{-1} > 1$ дает, грубо говоря, относительный прирост валовой продукции за один плановый период [2].

Рассмотрим задачу, существенно связанную с построением оценок для плана-заказа указанного выше вида. Предположим, что при создании плана-заказа имеется этап предварительного планирования, на котором можно выбирать лишь списки предполагаемых процессов производства каждого продукта, не детализируя, какие именно процессы и в каком пункте плана будут реализованы. Следуя формальной схеме, описанной выше, можно сказать, что здесь составителем плана выделяются параметры u_i, определяющие подсписки возможных процессов, в то время как параметры v_i^{ω}, определяющие выбор конкретных процессов из этих подсписков, и γ_i^{ω} — интенсивности таких процессов — остаются скрытыми. В связи с этим уместно искать минимаксную оценку темпа роста такой системы $\chi[R(t)]$ — оценку, которая характеризует наибольшую величину темпа роста валовой продукции, которую можно гарантировать подбором предварительных списков процессов. В соответствии с разделом 1 статьи искомая минимаксная оценка χ — нижнее достижимое значение χ по выделенным параметрам U — имеет вид λ^{mM}. Таким образом, максимальная гарантируемая предварительным планом величина темпа роста валовой продукции χ^{-1} равна $(\lambda^{\mathrm{mM}})^{-1}$, т.е. в экономической модели такого рода предварительным планом может быть гарантирован экспоненциальный рост $\sim (\lambda^{\mathrm{mM}})^{-t}$, но не более.

Из общих оценок, полученных выше можно было бы получить и некоторые оценки экспоненциального роста, известные из исследований линейных экономических моделей [20, 26, 32, 189]; на этих результатах мы здесь не останавливаемся.

2.2. Вероятностная модель. В качестве второго примера рассмотрим применение полученных оценок к исследованию общей веро-

---

[1] Предполагается, что единицы измерения различных продуктов выбраны так, что суммирование количеств этих продуктов с единичными весами имеет смысл.

[2] Поскольку показатель χ по своему характеру асимптотический, такое утверждение применимо к достаточно долгосрочному плану.

ятностной «автоматной» модели. Во введении и далее в части I настоящей работы в [36] к такой модели была сведена задача надежности автомата. Эта модель оказывается полезной и при изучении экспериментов с автоматами, также упомянутых во введении в [36]. Модель характеризуется тем, что фигурирующие в ней строки переходных вероятностей $\mathbf{b}_i = (b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})$ $(i = 1, \ldots, n)$ должны удовлетворять лишь условиям $b_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \leqslant 1$; допускаемый при этом случай $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} < 1$ интерпретируется как возможность перехода (с вероятностью $1- -\sum_{j=1}^{n} b_{ij}$) в дополнительное «поглощающее» состояние s_0, из которого система выйти не может. Легко видеть, что показатель $R(t) = = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)$ — текущий объем статистического ансамбля в состояниях $s_1, \ldots, s_n$ — при этом убывает (не возрастает) по t.

Применяя (при соответствующих предположениях) оценки темпа роста (убывания) показателя $R(t)$ в такой системе, получаем, что объем статистического ансамбля в конечной модели с поглощением может убывать лишь по закону «экспоненциального типа»:

$$c'\lambda'^t \leqslant R(t) \leqslant c''\lambda''^t, \tag{33}$$

где c', $c'' > 0$ — константы. Подчеркнем, что этот вывод справедлив вне зависимости от того, как именно связаны параметры, определяющие выбор строк переходных вероятностей (из заданных списков), с предысторией системы. Напомним, что в задаче надежности конечного автомата такими параметрами являются поступающие извне входные символы и что непредсказуемая зависимость этих входных символов от предыстории делает невозможным точный расчет динамической надежности автомата. В то же время оценка надежности автомата при помощи показателя $R(t)$ (представляющего собой безусловную вероятность пребывания автомата в одном из n рабочих состояний) заведомо может быть получена в форме (33).

«Интегральный» показатель $D = \sum_{t=0}^{\infty} R(t)$ для вероятностной модели с поглощением также имеет ясный содержательный смысл. Пусть $\delta(t)$ — величина, равная 1, если система в момент времени t находится в одном из состояний $s_1, \ldots, s_n$, и равная 0, если система находится в поглощающем состоянии s_0. Тогда величина $\sum_{t=0}^{\infty} \delta(t)$, подсчитанная на некоторой реализации системы, представляет собой «время жизни» этой реализации, а усреднение этой величины по всему множеству реализаций дает «среднее время жизни» модели $\overline{\sum_{t=0}^{\infty} \delta(t)} = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{\delta(t)} = = \sum_{t=0}^{\infty} R(t)$, т. е. как раз величину D.

Получив интерпретацию оценки показателя D как оценки среднего времени жизни модели с начальным распределением на состояниях

$\mathbf{r}$, легко заметить, что и вспомогательный вектор $\mathbf{h}$ в оценках D вида $\mathbf{rh}$ (см. (12)–(15) и (20)–(21)) имеет аналогичную интерпретацию: компонента h_i представляет собой соответствующую оценку среднего времени жизни модели с начальным распределением $\mathbf{r} = \mathbf{r}^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (единица на i-м месте), т.е. с детерминированным начальным состоянием s_i. Поэтому (5), (6) и (18), (19) представляют собой уравнения типа уравнений динамического программирования для оценок среднего времени жизни системы [1].

Применение этих результатов к изложенной ранее модельной задаче надежности автомата очевидно, так как по самому существу дела эта модель имеет поглощающее состояние: им является нерабочее состояние, куда автомат попадает при неисправности. В задаче экспериментов с автоматами (типа задачи Мура) эти результаты также могут быть использованы, так как и эта задача может быть представлена как вероятностная модель с поглощающим состоянием [2]. Действительно, во введении отмечалось, что эксперимент может быть представлен как цепь переходов между экспериментальными ситуациями (если эксперимент вероятностный, то переходы случайны). Цель эксперимента — перевести автомат в известное (или заданное) внутреннее состояние, т.е., другими словами, перейти в экспериментальную ситуацию вида «автомат находится в данном внутреннем состоянии». Рассматривая эту ситуацию как «поглощающее состояние эксперимента», получаем представление эксперимента как вероятностной модели переходов на конечном множестве состояний, одно из которых поглощающее.

Установив таким образом принципиальную возможность интерпретировать вероятностный эксперимент с конечным автоматом как вероятностную модель с поглощением, воспользуемся принятым для цепных систем «оценочным» подходом для построения оценки длины такого эксперимента.

2.3. Оценка длины вероятностного эксперимента с конечным автоматом. Классическая схема эксперимента с конечным автоматом (последовательностной машиной) по Муру [4] в настоящее время имеет много вариантов. Будем для определенности придерживать-

[1] Уравнения типа (5), (6) встречаются как точные уравнения в некоторых задачах оптимизации в управляемых марковских цепях [13, 15, 73, 129]. Отметим, что существование оптимального управления в таких задачах в виде стационарной марковской стратегии [129], не учитывающей предыстории системы, подтверждает со своей стороны допустимость укрупненного марковского описания такой системы в виде (1).

[2] Отметим в связи с этим работу [73], где управляемая марковская цепь с поглощающим состоянием рассматривалась как модель в задаче технической диагностики, а также обзор [13], охватывающий сходные модели профилактики «стареющих» систем.

ся одного из них — в форме задачи перевода автомата из неизвестного начального состояния в заданное конечное состояние. Под автоматом будем понимать автомат типа Мили (последовательностную машину) с m внутренними состояниями $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$, с k входными символами $\rho_1, \ldots, \rho_k$, с r выходными символами $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, функцией переходов $\varkappa' = F(\varkappa, \rho)$ и функцией выхода $\lambda = \Phi(\varkappa, \rho)$ [4].

Пусть $\varkappa_f$ — заданное конечное состояние, и пусть в начальный момент времени $t = 0$ автомат может находиться в каком-либо состоянии из множества $S^0 = \{\varkappa_{i_1} \ldots, \varkappa_{i_W}\}$. Под экспериментом будем понимать подачу символов ρ на вход автомата с целью перевести автомат в $\varkappa_f$ за конечное число тактов, каково бы ни было истинное начальное состояние автомата $\varkappa^0 \in S^0$.

Так как состояния автомата в ходе эксперимента не наблюдаются непосредственно, то установить факт прихода автомата в заданное состояние $\varkappa_f$ экспериментатор должен по наблюдаемой последовательности символов ρ^t, λ^t ($t = 0, 1, \ldots$ — такты). Назовем экспериментальной ситуацией S множество всех состояний, в которых может находиться автомат в данный момент времени; ситуация S^t, очевидно, однозначно определяется предысторией эксперимента $\rho^0, \lambda^0, \rho^1, \lambda^1, \ldots, \rho^{t-1}, \lambda^{t-1}$. Теперь можно сказать, что цель эксперимента — преобразовать начальную экспериментальную ситуацию S^0 в требуемую ситуацию $S_f = \{\varkappa_f\}$.

Эксперимент можно представить как цепь преобразований экспериментальных ситуаций следующего вида. Если при экспериментальной ситуации S на вход автомата подан символ ρ, то на выходе автомата появляется символ $\lambda = \Phi(\varkappa, \rho)$, определяемый, помимо ρ, состоянием автомата $\varkappa$ ($\varkappa \in S$). Регистрируемая пара символов ρ, λ определяет новое множество возможных состояний автомата, т.е. новую экспериментальную ситуацию; обозначим ее $S_{\rho,\lambda}$. Таким образом, смена экспериментальной ситуации определяется двумя параметрами: «выделенным» параметром ρ и «скрытым» параметром $\varkappa$. При экспериментальной ситуации S и при подаче детерминированного входного символа ρ произойдет детерминированный процесс перехода $S \to S_{\rho,\Phi(\varkappa,\rho)}$, зависящий от скрытого параметра $\varkappa \in S$. При подаче случайного входного символа ρ в соответствии с распределением вероятностей π_ρ произойдет процесс случайного перехода из S в одну из ситуаций $S_{\rho_1,\Phi(\varkappa,\rho_1)}, \ldots, S_{\rho_k,\Phi(\varkappa,\rho_k)}$ с вероятностями $\pi_{\rho_1}, \ldots, \pi_{\rho_k}$ соответственно (подчеркнем, что $\varkappa$ здесь всюду одно и то же) [1]. Поэтому вероятностный эксперимент описывается вероятностной моделью переходов на

[1] В пункте 1 о подобном процессе говорилось как о процессе, «смешанном» по выделенному параметру.

конечном множестве $n = 2^{\mathrm{m}} - 1$ экспериментальных ситуаций с «поглощением» в ситуации S_f, причем параметрами процессов перехода являются выделенные параметры π_ρ и скрытые параметры $\varkappa$. Можно сказать, что выделенные параметры π_ρ определяют подсписки возможных процессов перехода из S, а выбор конкретного процесса из такого подсписка определяется скрытым параметром $\varkappa$. Рассматриваемая система настолько проста, что нет надобности вводить формальную запись элементарных процессов с помощью векторов $\mathbf{b}_i$, как это делается для цепной системы общего вида; вместо этого можно работать в содержательных терминах исходной задачи, учитывая замечания об оценках в вероятностных моделях с поглощением, сделанные в п. 2.2.

Оценка, которая ищется в этой задаче, — это оценка длины эксперимента (в вероятностном случае средней длины эксперимента), т.е. числа тактов до перехода в требуемую экспериментальную ситуацию. В теории экспериментов с автоматами представляет интерес минимальная длина эксперимента, т.е. такая длина, которая может быть гарантирована при некоторой стратегии экспериментатора вне зависимости от истинного начального состояния автомата, в то время как никакая другая стратегия не гарантирует меньшей длины. Обозначим минимальную среднюю длину вероятностного эксперимента при начальной экспериментальной ситуации S через $f(S)$. В качестве оценки величины $f(S)$ примем оценку, которую, согласно прежней терминологии, следует назвать нижним достижимым значением показателя «среднее время жизни» по выделенным параметрам π_ρ; эта оценка (обозначим ее через $\varphi(S)$) является мажорантой величины $f(S)$, т.е. $f(S) \leqslant \varphi(S)$. Она может быть получена как решение уравнения (18), принимающего вид рекуррентного уравнения динамического программирования:

$$\varphi(S) = 1 + \min_{\pi_\rho} \max_{\varkappa \in S} \sum_{\rho} \pi_\rho \varphi(S_{\rho, \Phi(\varkappa, \rho)}). \tag{34}$$

Здесь $\pi_\rho \geqslant 0$, $\sum\limits_{\rho} \pi_\rho = 1$; ρ пробегает значения $\rho_1, \ldots, \rho_k$.

Сделаем в связи с этим следующее замечание. В случае детерминированного эксперимента уравнение (34) переходит в точное уравнение динамического программирования [1] для минимальной длины эксперимента $f(S)$:

$$f(S) = 1 + \min_{\rho} \max_{\varkappa \in S} f(S_{\rho, \Phi(\varkappa, \rho)}). \tag{35}$$

[1] Вывод этого уравнения с незначительными изменениями повторяет вывод из работы [14].

Здесь наблюдается своеобразный случай, когда наличие «глубинных» связей между скрытыми параметрами цепной системы не нарушает марковского характера ее описания, поскольку позволяет предполагать как бы возможность независимого выбора параметров $\varkappa \in S$ в различных экспериментальных ситуациях S, хотя в действительности значения $\varkappa \in S$ предопределены истинным внутренним состоянием автомата в начале эксперимента $\varkappa^0 \in S^0$. Однако такое свойство не сохраняется при переходе к вероятностным экспериментам — это показывает пример из [35], который нетрудно перевести на язык «конечноавтоматного» эксперимента. Поэтому уравнение (34) в отличие от (35) является уравнением лишь на оценку, но не на точное значение минимальной длины эксперимента. Этот факт еще раз демонстрирует, что вводимое при «цепном» описании системы понятие «состояния» (в данном случае экспериментальная ситуация) может не заключать в себе полной информации о системе (в частности, не позволяя непосредственно пользоваться методом динамического программирования как точным методом) и в то же время может служить достаточно эффективным средством для построения искомых оценок.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Вывод уравнения (5). Положим

$$h'_1 = \min_{u_i} [1 + \mathbf{b}_i(u_i)\mathbf{h}^*].$$

Рассмотрим векторный ряд $\mathbf{h}(\mathbf{B})$ (2). Для него справедливо соотношение

$$\mathbf{h}(\mathbf{B}) = \mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{h}(\mathbf{B}) \tag{П.1}$$

(в случае $\lambda(\mathbf{B}) \geqslant 1$, когда некоторые или все компоненты этого ряда обращаются в ∞, можно понимать (П.1) как символическое равенство, если полагать $0 \cdot \infty = 0$). Тогда с учетом (П.1) имеем

$$h_i^* = \min_{\mathbf{u}} \mathbf{h}_i(\mathbf{B}(\mathbf{u})) = \min_{\mathbf{u}} [1 + \mathbf{b}_i(u_i)\mathbf{h}(\mathbf{B}(\mathbf{u}))]. \tag{П.2}$$

По определению, $h_i(\mathbf{B}(\mathbf{u})) \geqslant h_i^*$ $(i = 1, \ldots, n)$ для любых $\mathbf{u}$, и поэтому в силу (П.2)

$$h_i^* \geqslant \min_{u_i} [1 + \mathbf{b}_i(u_i)\mathbf{h}^*] = h'_i. \tag{П.3}$$

Таким образом, $h_i^* \geqslant h'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ или в векторной записи $\mathbf{h}^* \geqslant \mathbf{h}'$. Но тогда

$$h'_i = \min_{u_i} [1 + \mathbf{b}_i(u_i)\mathbf{h}^*] \geqslant \min_{u_i} [1 + \mathbf{b}_i(u_i)\mathbf{h}']. \tag{П.4}$$

Пусть min в правой части (П.4) достигается при $u_i = \tilde{u}_i$. Положим $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$. Тогда в матричной записи

$$\mathbf{h}' \geqslant \mathbf{e} + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{h}' \geqslant \mathbf{e} + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{e} + \mathbf{B}^2(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{e} + \ldots = \mathbf{h}(\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}})) \geqslant \mathbf{h}^*. \quad (\text{П.5})$$

Сопоставляя (П.3) и (П.5), получаем искомое равенство $\mathbf{h}' = \mathbf{h}^*$.

Аналогичным образом выводится уравнение (6).

II. Вывод уравнения (19) проведем, опираясь на выведенное в приложении I уравнение (5). Положим

$$h_i' = \max_{u_i} \min_{v_i} [1 + \mathbf{b}_i(u_i, v_i)\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}].$$

Введем обозначение $h_i^{\mathrm{m}}(\mathbf{u}) = \min\limits_{\mathbf{v}} h_i(\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ и составим вектор-столбец $\mathbf{h}^{\mathrm{m}}(\mathbf{u})$ с компонентами $h_1^{\mathrm{m}}(\mathbf{u}), \ldots, h_n^{\mathrm{m}}(\mathbf{u})$. В силу конечности $\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}$ и соотношения

$$h_i^{\mathrm{Mm}} = \max_{\mathbf{u}} h_i^{\mathrm{m}}(\mathbf{u}) \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (\text{П.6})$$

вектор $\mathbf{h}^{\mathrm{m}}(\mathbf{u})$ также конечен при любом $\mathbf{u}$. Поэтому при любом фиксированном $\mathbf{u}$ можно записать для $\mathbf{h}^{\mathrm{m}}(\mathbf{u})$ соотношение (5), которое приобретает вид

$$h_i^{\mathrm{m}}(\mathbf{u}) = \min_{v_i} [1 + \mathbf{b}_i(u_i, v_i)\, \mathbf{h}^{\mathrm{m}}(\mathbf{u})] \quad (i = 1, \ldots, n). \quad (\text{П.7})$$

В силу (П.6) и (П.7) имеем

$$h_i^{\mathrm{Mm}} = \max_{\mathbf{u}} \min_{v_i} [1 + \mathbf{b}_i(u_i, v_i)\, \mathbf{h}^{\mathrm{m}}(\mathbf{u})] \leqslant \\ \leqslant \max_{u_i} \min_{v_i} [1 + \mathbf{b}_i(u_i, v_i)\mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}] = h_i'. \quad (\text{П.8})$$

Таким образом, $h^{\mathrm{Mm}} \leqslant h'$. Поэтому

$$h_i' = \max_{u_i} \min_{v_i} [1 + \mathbf{b}_i(u_i, v_i)\, \mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}] \leqslant \max_{u_i} \min_{v_i} [1 + \mathbf{b}_i(u_i, v_i)\, \mathbf{h}']. \quad (\text{П.9})$$

Пусть $u_i = \tilde{u}_i$ доставляет max в правой части (П.9) и положим $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$. Подставим $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$ в (П.7); пусть при этом min в (П.7) достигается при $v_i = \tilde{v}_i$. Положим $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$ и рассмотрим матрицу $\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})$. В силу (П.7)

$$\mathbf{h}^{\mathrm{m}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{e} + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})\, \mathbf{h}^{\mathrm{m}}(\tilde{\mathbf{u}}) \geqslant \\ \geqslant \mathbf{e} + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})\, \mathbf{e} + \mathbf{B}^2(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})\, \mathbf{e} + \ldots = \mathbf{h}(\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})). \quad (\text{П.10})$$

Согласно определению $\mathbf{h}^{\mathrm{m}}(\mathbf{u})$ неравенство в (П.10) может быть только равенством, поэтому $\mathbf{h}(\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}})) = \mathbf{h}^{\mathrm{m}}(\tilde{\mathbf{u}}) \leqslant h^{\mathrm{Mm}}$. Но тогда согласно (П.9)

$$\begin{aligned} &\mathbf{h}' \leqslant \mathbf{e} + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}})\,\mathbf{h}' \leqslant \\ &\quad \leqslant \mathbf{e} + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}})\,\mathbf{e} + \mathbf{B}^2(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}})\,\mathbf{e} + \ldots = \mathbf{h}\,(\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}})) \leqslant \mathbf{h}^{\mathrm{Mm}} \end{aligned} \qquad (\text{П}.11)$$

(с учетом вытекающего из (П.10) условия $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{B}^{\mathrm{k}}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}) = 0$). Сравнивая (П.8) и (П.11), получаем $\mathbf{h}' = \mathbf{h}^{\mathrm{Mm}}$, т.е. равенство (19).

Аналогичным образом выводится уравнение (18).

III. Вывод уравнения (22). Заметим, что $h_i^*(\sigma)$ $(i = 1,\ldots,n)$ — убывающие функции σ, определенные при $\sigma > \lambda'$, и $\|\mathbf{h}^*(\sigma)\| \to \infty$ при $\sigma \downarrow \lambda'$. Вектор $\dfrac{\|\mathbf{h}^*(\sigma)\|}{\mathbf{h}^*(\sigma)}$, единичный по норме, заведомо имеет по крайней мере частичный предел при $\sigma \downarrow \lambda'$. Обозначим этот предел — предел по некоторой последовательности $\sigma_k \downarrow \lambda'$ при $k \to \infty$ — через $\mathbf{g}'$.

Пользуясь уравнением (5) для $h_i^*(\sigma) = \min\limits_{\mathbf{u}} h_i\left(\dfrac{1}{\sigma}\mathbf{B}(\mathbf{u})\right)$ $(i = 1,\ldots,n)$, имеем

$$\sigma\frac{h_i^*(\sigma)}{\|\mathbf{h}^*(\sigma)\|} = \min_{u_i}\left[\frac{\sigma}{\|\mathbf{h}^*(\sigma)\|} + \mathbf{b}_i(u_i)\frac{\mathbf{h}^*(\sigma)}{\|\mathbf{h}^*(\sigma)\|}\right] \quad (i = 1,\ldots,n), \qquad (\text{П}.12)$$

откуда, переходя к пределу по $k \to \infty$ на последовательности σ_k, получаем (22).

Аналогично выводится уравнение (23).

Раздел II
Качественные модели сложных систем взаимодействующих элементов и свойств

Один класс игр, связанный с моделями коллективного поведения [1]

Описывается класс игр многих лиц со специфическим типом взаимоотношений между игроками. К участию в таких играх привлекаются автоматы с простой тактикой поведения. Устанавливаются критерии существования ситуации равновесия в игре (в смысле Нэша) и ее достижимости в процессе игры автоматов. В качестве примера приводится игровая интерпретация модели рынка и модели системы массового обслуживания.

Подход к исследованию коллективного поведения, основанный на изучении игр автоматов, берет начало в работах М.Л.Цетлина и его сотрудников. В одной из этих работ, посвященной задаче регулировки мощности в коллективе радиостанций [77], обращено внимание на такой тип отношений в коллективе, когда поведению участников свойственно определенное взаимное противодействие. Подобная ситуация может возникнуть и в экономических системах; это отчетливо обнаруживается при попытке рассмотреть абстрактную модель рынка (типа модели процесса регулирования рыночных цен, описанной в [26]) с точки зрения коллективного поведения [79]. Анализ некоторых формальных свойств таких моделей показывает, что ряд общих результатов справедлив для целого класса игр безотносительно к их конкретной природе. Изложению этих результатов и некоторым их применениям и посвящена настоящая статья.

Класс игр, о котором пойдет речь, характеризуется специфическим типом взаимодействия между участниками, что формально отражено в постулатах относительно того, каким образом наилучший ответ игрока на действия партнеров зависит от этих действий. Имеющаяся при этом возможность применять при отыскании такого наилучшего

[1] Автоматика и телемеханика.—1969.—№11.—С. 128–137 (в соавторстве с *Ю.Д.Тенисбергом*).

ответа лишь ограниченную информацию позволяет эффективно использовать в роли участников игры автоматы, обладающие несложной тактикой поведения.

Основные результаты, полученные в работе, сформулированы в теоремах о существовании и единственности ситуации равновесия в игре (в смысле Нэша) и о достижимости этой ситуации в процессе игры автоматов. Эти результаты используются для игровой интерпретации процесса установления рыночных цен, а также для анализа одной системы массового обслуживания.

1. Описание игры. Основные теоремы

Будем рассматривать игры n лиц следующего типа. Пусть i-й участник управляет переменной c_i, придавая ей значения из замкнутого интервала (быть может, бесконечного) $a_i \leqslant c_i \leqslant b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ситуация в игре описывается вектором $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in C$, где $C = \{\mathbf{c}\colon \mathbf{a} \leqslant \mathbf{c} \leqslant \mathbf{b}\}$. Будем предполагать, что для каждого i-го игрока при любых фиксированных значениях «чужих» переменных $c_1 \ldots, c_{i-1},\ c_{i+1}, \ldots, c_n$ существует единственное наилучшее для него значение «собственной» переменной c_i; обозначим это значение через $\hat{c}_i(\mathbf{c}) = \hat{c}_i(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1} \ldots, c_n)$. В частности, если мерой «качества» ситуации с точки зрения i-го игрока служит платежная функция $K_i(\mathbf{c})$, то при $c_i = \hat{c}_i(\mathbf{c})$ достигается $\max\limits_{c_i} K_i(\mathbf{c})$. При изучении взаимодействия индивидуумов, преследующих собственные цели, часто представляет интерес факт достижения ситуации равновесия по Нэшу, т.е. такой точки $\mathbf{c}^*$, в которой каждый игрок достигает оптимума по собственной переменной при данных значениях чужих переменных. В принятых нами обозначениях точка Нэша характеризуется условием $c_i^* = \hat{c}_i(\mathbf{c}^*)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Функцию $\delta_i(\mathbf{c})$ будем называть функцией-индикатором i-го игрока, если при $c_i < \hat{c}_i(\mathbf{c})$ имеет место $\delta_i(\mathbf{c}) > 0$, а при $c_i > \hat{c}_i(\mathbf{c})$ $\delta_i(\mathbf{c}) < 0$. Функция-индикатор указывает игроку, в какую сторону ему следует изменять собственную переменную, чтобы достичь оптимума при существующих значениях чужих переменных [1]. Примером индикатора является функция $\delta_i(\mathbf{c}) = \hat{c}_i(\mathbf{c}) - c_i$.

Будем предполагать, что функции-индикаторы $\delta_i(\mathbf{c})$ существуют для всех игроков $(i = 1, \ldots, n)$, непрерывны и обладают следующими свойствами.

---

[1] В определении функции-индикатора не предполагается, что $\delta_i(\mathbf{c}) = 0$ при $c_i = \hat{c}_i$. Например, функция-индикатор $\delta_i(\mathbf{c})$ может быть везде положительна; в этом случае точка оптимума $\hat{c}_i$ совпадает с правым концом отрезка $[a_i, b_i]$.

А. При каждом $i = 1, \ldots, n$ функция $\delta_i(\mathbf{c})$ убывает (строго) по собственной переменной и не убывает по совокупности чужих переменных [1].

Такое свойство будем называть контрамонотонностью.

Б. Для любого подмножества I множества индексов $\{i\} = \{1, \ldots, n\}$ функция

$$\delta_I = \sum_{i \in I} \delta_i(\mathbf{c})$$

убывает по совокупности собственных переменных c_i, $i \in I$, и не убывает по совокупности чужих переменных c_j, $j \in \bar{I}$ ($\bar{I}$ — дополнение I).

Свойство Б представляет собой своеобразное обобщение свойства А применительно к группам игроков; в этом случае нужные условия налагаются на сумму функций-индикаторов отдельных членов группы. Можно назвать такое свойство «групповой контрамонотонностью» в отличие от «индивидуальной контрамонотонности», определяемой свойством А. Разумеется, свойство А заведомо вытекает из Б.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} |\delta_i(\mathbf{c})|. \tag{1}$$

Лемма 1. Пусть $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}'$ — две точки из C, $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}'$, и пусть $(c_i' - c_i)\delta_i(\mathbf{c}) \leqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\Phi(\mathbf{c}) < \Phi(\mathbf{c}')$.

Теорема 1. Для того чтобы точка $\mathbf{c} \in C$ была точкой Нэша, необходимо и достаточно, чтобы она была точкой минимума функции $\Phi(\mathbf{c})$ на множестве C. Если такая точка существует, то она единственна.

Доказательство леммы 1 и теоремы 1 приведены в приложении I.

Таким образом, вопрос о существовании точки Нэша сводится к вопросу о существовании минимума функции $\Phi(\mathbf{c})$ на C. Если замкнутая область C изменения переменных $\mathbf{c}$ ограничена, то в силу непрерывности $\Phi(\mathbf{c})$ искомый минимум заведомо существует. Если же эта область не ограничена, минимум может и не достигаться; этот вопрос решается исследованием конкретной функции $\Phi(\mathbf{c})$. Например, существование

[1] Здесь понятия убывания и неубывания (т.е. нестрогого возрастания) функции по одной переменной распространены на случай многих переменных следующим образом. Будем говорить, что функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$ убывает по совокупности переменных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, если для любых $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ таких, что $x_k' \leqslant x_k''$ для всех $k = 1, \ldots, n$ и $x_k' < x_k''$ хотя бы для одного $\mathbf{x}$, имеет место неравенство $f(\mathbf{x}') > f(\mathbf{x}'')$; $f(\mathbf{x})$ не убывает по $\mathbf{x}$, если $f(\mathbf{x}') \leqslant f(\mathbf{x}'')$. Легко видеть, что функция $f(\mathbf{x})$ убывает (или не убывает) по $\mathbf{x}$ в том и только в том случае, если она убывает (соответственно не убывает) по каждой переменной $\mathbf{x}$ при любых фиксированных значениях остальных переменных $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m$.

$\min\Phi(\mathbf{c})$ гарантируется равномерным ростом $\Phi(\mathbf{c})$ на бесконечности [1]. Более тонкий признак существования $\min\Phi(\mathbf{c})$, полезный для приложений, дается следующей леммой.

Лемма 2. Пусть существует точка $\mathbf{c}^1 \in C$ такая, что $\delta_i(\mathbf{c}^1) \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, и точка $\mathbf{c}^2 \in C$ такая, что $\delta_i(\mathbf{c}^2) \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда функция $\Phi(\mathbf{c})$ на C достигает своего минимума.

Лемма 2 может быть усилена, если заменить в ее формулировке $\delta_i(\mathbf{c})$ на «модифицированную функцию-индикатор» $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})$ (см. (2)).

Доказательство этой леммы в усиленной форме также дано в Приложении I.

Приступим к описанию автоматов, приспособленных для роли «игрока», и к исследованию процесса их взаимодействия в игре рассматриваемого класса. Принцип действия автомата, осуществляющего разумный выбор величины c_i, подсказывается самим определением функции-индикатора $\delta_i(\mathbf{c})$: автомат должен увеличивать c_i при $\delta_i(\mathbf{c}) > 0$ и уменьшать c_i при $\delta_i(\mathbf{c}) < 0$. Конечно, при этом предполагается, что автомату доступна информация о текущей величине $\delta_i(\mathbf{c})$. Отметим, однако, что этим и ограничивается вся нужная автомату информация о текущей ситуации $\mathbf{c}$; автомат может быть не осведомлен не только о выборе $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n$, осуществленном другими участниками игры, но даже и о числе этих участников.

Для того чтобы дать формальное описание тактики автомата-игрока, нужно прежде всего доопределить способ поведения i-го игрока на концах интервала $[a_i, b_i]$. С этой целью удобно несколько видоизменить функцию-индикатор:

$$\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) = \begin{cases} 0, \text{ если } \ c_i = a_i, \delta_i(\mathbf{c}) < 0 \text{ или } c_i = b_i, \delta_i(\mathbf{c}) > 0, \\ \delta_i(\mathbf{c}) \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Модифицированная функция-индикатор (2) по-прежнему положительна при $c_i < \hat{c}_i(\mathbf{c})$ и отрицательна при $c_i > \hat{c}_i(\mathbf{c})$, но к тому же (в отличие от $\delta_i(\mathbf{c})$) функция $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})$ всегда обращается в нуль при $c_i = \hat{c}_i(\mathbf{c})$. Поэтому точка $\mathbf{c}^*$ является точкой Нэша в том и только в том случае, если $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}^*) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Теперь можно записать тактику i-го автомата–игрока в форме простейшего дифференциального соотношения

$$\dot{c}_i(t) = \overline{\delta}_i(\mathbf{c}(t)). \tag{$*$}$$

Вид функции (2) гарантирует, что переменная $c_i(t)$ никогда не выйдет за пределы допустимого интервала $[a_i, b_i]$. Система уравнений $(*)$ для $i = 1, \ldots, n$ описывает процесс взаимодействия автоматов в игре.

[1] А именно, как нетрудно видеть, $\min\Phi(\mathbf{c})$ достигается в конечной точке $\mathbf{c}^*$, если для любого A существует $R = R(A)$ такое, что $\Phi(\mathbf{c}) \geqslant A$ при $\|\mathbf{c}\| \geqslant R$.

Легко видеть, что точка $\mathbf{c}$ является стационарной точкой этой системы в том и только в том случае, если $\mathbf{c}$ есть точка Нэша.

Следующая теорема утверждает, что такая точка (единственная в силу теоремы 1) глобально устойчива [1].

Теорема 2. Если точка Нэша $\mathbf{c}^*$ существует, то все траектории системы $(*)$ сходятся к $\mathbf{c}^*$.

Доказательство этой теоремы приведено в приложении II.

Можно также показать, что если точка Нэша не существует, то все траектории $\mathbf{c}(t)$ системы $(*)$ уходят в бесконечность:

$$\|\mathbf{c}(t)\| \to \infty \ \text{ при } \ t \to \infty.$$

Отметим, что динамический процесс $(*)$ во многом подобен известным итеративным (дискретно-шаговым или непрерывным) процедурам поиска (в частности, градиентному алгоритму Эрроу–Гурвица поиска седловой точки [26]).

2. Примеры: модель рынка и модель системы массового обслуживания

Рассмотрим теперь применение изложенных результатов к некоторым модельным задачам о взаимодействии в коллективах. Для начала обсудим с этой точки зрения модель процесса установления цен на рынке, описанную в [79]. Схема этой модели такова. Имеется n продавцов, торгующих одинаковым товаром; i-й продавец характеризуется двумя величинами: q_i — количеством товара, которое у него имеется для сбыта в единицу времени, и c_i — ценой, по которой он продает свой товар $(i = 1, \ldots, n)$. Величина $q_i > 0$ фиксирована, а величина c_i может назначаться продавцом по его усмотрению $(0 \leqslant c_i < \infty)$. Максимальное количество денег, которое может выручить i-й продавец в единицу времени — при условии, что он распродает свой товар полностью — равно $\varkappa_i = c_i q_i$. Однако это возможно лишь в том случае, если покупательский спрос π_i, которым пользуется в единицу времени товар этого продавца, не ниже его «предложения» $\varkappa_i$. С учетом того, что спрос может быть и ниже предложения, выручка продавца в единицу времени может быть представлена как $\min\{\pi_i, \varkappa_i\}$.

[1] Под глобальной устойчивостью здесь понимается сходимость решений системы дифференциальных уравнений к точке равновесия при произвольных допустимых начальных данных. Из доказательства теоремы 2 видно, что система $(*)$ также и асимптотически устойчива в целом (т.е. не только глобально устойчива, но и устойчива по Ляпунову).

В [79] рассматриваются некоторые простейшие модельные представления о механизме формирования покупательского спроса. На основе этих представлений получены выражения для покупательского спроса как функции рыночных цен. Например, покупательская тактика «попарного сравнения цен» порождает спрос у i-го продавца, определяемый выражением

$$\pi_i(\mathbf{c}) = \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \psi(c_j - c_i), \tag{3}$$

где α — постоянная, $\psi(t)$ — непрерывная возрастающая функция, такая, что $\psi(-\infty) = 0$, $\psi(+\infty) = 1$, $\psi(x) + \psi(-x) = 1$.

Тактика продавца, рассмотренная в [79], связывает изменение цены продавцом с величиной избыточного спроса (разностью между спросом π_i и предложением $\varkappa_i$), а именно

$$\dot{c}_i = \pi_i(\mathbf{c}) - \varkappa_i(\mathbf{c}). \tag{4}$$

Модель процесса регулирования цен, основанного на величине избыточного спроса, в общей форме исследуется в [26]. В этой модели принят подход, основанный на постулировании определенных свойств спроса как функции рыночных цен. Поступая подобным же образом, сформулируем некоторые требования к функциям спроса и построим на их основе «игровую» модель рынка, в известном смысле обобщающую модель из [79].

Рассмотрим n игроков-«продавцов», и пусть снова в единицу времени i-й продавец поставляет на рынок количество товара q_i и продает его по цене c_i. Пусть спрос, которым пользуется (в единицу времени) товар i-го продавца, составляет величину $\pi_i = \pi_i(\mathbf{c})$. Будем предполагать, что $\pi_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$ — неотрицательные непрерывные функции, удовлетворяющие требованиям индивидуальной и групповой контрамонотонности. Содержательный смысл этих требований состоит в следующем. Контрамонотонность функции спроса $\pi_i(\mathbf{c})$ означает, что спрос покупателей на товар у i-го продавца уменьшается при повышении цены на товар, но во всяком случае не уменьшается при повышении цены на товар у другого продавца [1].

Аналогично, групповая контрамонотонность функций спроса $\pi_i(\mathbf{c})$ означает, что суммарный спрос $\pi_I(\mathbf{c})$ на товары какой-либо группы продавцов I может только увеличиться, если продавцы, не входящие

[1] Последнее условие не кажется чрезмерно стеснительным, даже если учесть, что разные продавцы торгуют разными товарами (в этом случае предполагается «валовая заменимость» товаров [26]).

в эту группу, повысят свои цены, но этот спрос уменьшится, если будут повышены цены внутри группы [1].

Легко убедиться, что функция избыточного спроса $\delta_i(\mathbf{c}) = \pi_i(\mathbf{c}) - \varkappa_i(\mathbf{c})$ ($\varkappa_i(\mathbf{c}) = c_i q_i$) также обладает всеми свойствами контрамонотонности [2].

Заметим теперь, что $\delta_i(\mathbf{c})$ может рассматриваться как функция-индикатор для i-го игрока. Действительно, платежной функцией для i-го игрока-продавца служит выручка $K_i(\mathbf{c}) = \min\{\pi_i(\mathbf{c}), \varkappa_i(\mathbf{c})\}$. Поскольку функция $\pi_i(\mathbf{c})$ убывает по c_i, а $\varkappa_i(\mathbf{c})$ возрастает по c_i, то, как нетрудно видеть, максимум величины $K_i(\mathbf{c})$ по c_i при любых $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n$ соответствует тому значению $\hat{c}_i = \hat{c}_i(c_1, \ldots$ $\ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n)$, при котором $\pi_i(\mathbf{c}) = \varkappa_i(\mathbf{c})$. Далее, при $c_i < \hat{c}_i(\mathbf{c})$ $\pi_i(\mathbf{c}) > \varkappa_i(\mathbf{c})$, а при $c_i > \hat{c}_i(\mathbf{c})$ $\pi_i(\mathbf{c}) > \varkappa_i(\mathbf{c})$. Все это и означает, что $\delta_i(\mathbf{c}) = \pi_i(\mathbf{c}) - \varkappa_i(\mathbf{c})$ является функцией-индикатором i-го игрока (и, более того, совпадает с модифицированной функцией-индикатором $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})$).

Чтобы доказать существование и единственность точки Нэша в построенной игре, исследуем поведение функции $\Phi(\mathbf{c}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |\delta_i(\mathbf{c})|$ на бесконечности. В силу групповой контрамонотонности функций $\pi_i(c)$ полный покупательский спрос на рынке $\pi(\mathbf{c}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i(\mathbf{c})$ удовлетворяет условию $\pi(\mathbf{c}) \leqslant \pi(\mathbf{0})$ для всех $\mathbf{c} \geqslant 0$. С учетом этого имеем цепочку неравенств

$$\Phi(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} |\pi_i(\mathbf{c}) - c_i q_i| \geqslant \sum_{i=1}^{n} c_i q_i - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\mathbf{c}) \geqslant q_{\text{мин}} \sum_{i=1}^{n} c_i - \pi(\mathbf{0}).$$

Приняв в качестве нормы вектора $\|\mathbf{c}\| = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i$, получаем, что $\Phi(\mathbf{c})$ равномерно стремится к бесконечности при $\mathbf{c} \to \infty$, откуда, как уже отмечалось, следует существование точки минимума $\mathbf{c}^*$ у функции $\Phi(\mathbf{c})$. По теореме 1 $\mathbf{c} = \mathbf{c}^*$ является единственной точкой Нэша в данной игре, т. е. единственной точкой, в которой $\delta_i(\mathbf{c}) = 0$ ($i = 1, \ldots, n$). Поскольку в данной игре $\delta_i(\mathbf{c}) \equiv \overline{\delta}_i(\mathbf{c})$, то $\mathbf{c}^*$ является единственной точкой, в которой $\delta_i(\mathbf{c}) = 0$ ($i = 1, \ldots, n$). Это означает, что

[1] Нетрудно проверить, что функции спроса (3) удовлетворяют всем перечисленным требованиям, за исключением случая, когда выделенная группа включает в себя всех n продавцов: в этом случае $\pi_I(\mathbf{c}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i(\mathbf{c}) = \text{const}$.

[2] Это утверждение справедливо для функций (3) уже без каких-либо оговорок.

$\mathbf{c}^* = (c_1^*, \ldots, c_n^*)$ представляет собой единственную систему цен, которая обеспечивает равенство спроса и предложения у каждого продавца. Далее, согласно теореме 2, к точке $\mathbf{c}^*$ сходится процесс регулирования цен $(*)$. В силу сказанного $c^* = (c_1^*, \ldots, c_n^*)$ может быть названа системой равновесных цен. Таким образом, установление равновесных цен в модели рынка, предусматривающей использование продавцами лишь ограниченной, локальной информации, может быть понято с «игровой» точки зрения.

Перейдем от модели рынка к другой модели, связанной с коллективным взаимодействием, — к системе массового обслуживания, состоящей из нескольких параллельно работающих устройств. Пусть к i-му обслуживающему устройству идет непрерывный поток клиентов [1] с интенсивностью $\pi_i \geqslant 0$, а пропускная способность этого устройства равна $\varkappa_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ (величины π_i и $\varkappa_i$ имеют размерность числа клиентов в единицу времени). Пусть $\pi_i = \pi_i(t)$ и $\varkappa_i = \varkappa_i(t)$. Тогда длина очереди (число ожидающих клиентов) у i-го обслуживающего устройства равна

$$c_i(t) = c_i(0) + \int_0^t \overline{[\pi_i(t) - \varkappa_i(t)]} dt, \tag{5}$$

где

$$\overline{[\pi_i(t) - \varkappa_i(t)]} = \begin{cases} 0, & \text{если } c_i(t) = 0 \text{ и } \pi_i(t) - \varkappa_i(t) < 0, \\ \pi_i(t) - \varkappa_i(t) & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Предположим, что мгновенная интенсивность потока клиентов, встающих в очередь к i-му обслуживающему устройству, представляет собой функцию от текущих длин всех очередей: $\pi_i = \pi_i(c_1, \ldots, c_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Это представление является полным аналогом представления о мгновенных функциях спроса, зависящих от рыночных цен. Можно представить себе механизм выбора обслуживающего устройства клиентом, например, сходным с механизмом выбора продавца покупателем в [79]; в частности, тактика типа «попарного сравнения длин очередей» приводит к интенсивности потока клиентов вида (3).

Отвлекаясь, как и ранее, от способа образования функций $\pi_i(\mathbf{c})$, вновь наложим на эти функции требования индивидуальной и групповой контрамонотонности, истолкование которых совершенно аналогично истолкованию этих требований в модели рынка. Кроме того, дополнительно постулируем еще одно условие: для каждого i $\pi_i(\mathbf{c}) \to 0$ при $c_i \to \infty$ равномерно по $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n$. Содержательный

[1] Идеализированное представление о непрерывном потоке — потоке покупателей — использовалось в [79] при описании механизма покупательского спроса.

смысл этого условия состоит в том, что клиентам приписывается определенная «нетерпеливость»: клиент не только предпочитает, вообще говоря, более короткую очередь более длинной, но и может вообще отказаться от обслуживания из-за слишком длинных очередей. Наконец, будем считать для простоты $\varkappa_i = \mathrm{const} = \varkappa_i^0$ для каждого $i = 1, \ldots, n$.

Дадим теперь игровую интерпретацию рассматриваемой модели массового обслуживания. Построим формальную игру n лиц, в которой i-й игрок выбирает значения собственной переменной c_i на интервале $[0, \infty]$, стремясь добиться наибольшей близости величины $\pi_i(\mathbf{c})$ к $\varkappa_i^0$. Легко видеть, что функцией-индикатором i-го игрока может служить функция $\delta_i(\mathbf{c}) = \pi_i(\mathbf{c}) - \varkappa_i^0$ и что совокупность этих функций для $i = 1, \ldots, n$ обладает свойством групповой контрамонотонности. Введем модифицированную функцию-индикатор

$$\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) = \begin{cases} 0 & \text{при } c_i = 0 \text{ и } \pi_i(\mathbf{c}) < \varkappa_i^0, \\ \pi_i(\mathbf{c}) - \varkappa_i^0 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases} \tag{6}$$

и рассмотрим процесс игры

$$\dot{c}_i = \overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

По предположению $\pi_i(\mathbf{c}) \to 0$ при $c_i \to 0$ равномерно по чужим переменным и, следовательно, для каждого $i = 1, \ldots, n$ существует $\tilde{c}_i$ такое, что при $c_i = \tilde{c}_i$ $\delta_i(\mathbf{c}) = \pi_i(\mathbf{c}) - \varkappa_i^0 \leqslant 0$. Заметим теперь, что условия усиленной леммы 2 выполняются, если положить $\mathbf{c}^1 = \mathbf{0}$ и $\mathbf{c}^2 = \mathbf{c} = (\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n)$. В силу леммы 2, теорем 1 и 2 отсюда вытекает существование, единственность и глобальная устойчивость точки Нэша $\mathbf{c}^*$. Отметим, что, очевидно, $\pi_i(\mathbf{c}^*) \leqslant \varkappa_i^0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Возвращаясь к задаче о параллельно работающих обслуживающих устройствах, представим себе, что i-му устройству сопоставлен игрок, ответственный за его работу и стремящийся обеспечить реальную загрузку π_i этого устройства, наиболее близкую к номинальной загрузке $\varkappa_i^0$. Этот игрок пытается добиться своей цели, сообщая клиентам значение величины $c_i(t)$, изменяющейся в соответствии с соотношениями (7), (6).

Из проведенного формального анализа игры вытекает, что, следуя тактике (7), каждый игрок в пределе приходит к равновесию, добившись либо в точности номинальной загрузки своего устройства ($\pi_i = \varkappa_i^0$), либо частичной загрузки ($\pi_i < \varkappa_i^0$), увеличить которую он уже не может (в последнем случае $c_i^* = 0$). Более того, возникающая ситуация равновесия в игре в определенном смысле целесообразна с точки зрения системы в целом: в точке $\mathbf{c}^*$ достигается минимум «суммы невязок» $\Phi(\mathbf{c}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |\pi_i(\mathbf{c}) - \varkappa_i^0|$.

Уравнения (6), (7) представляют собой не что иное, как уравнения длин очередей в исходной системе массового обслуживания. Поэтому «аппарат очередей» как раз и является тем механизмом, который как бы реализует целенаправленную тактику (6), (7), ведущую к упорядочению распределения клиентов между отдельными обслуживающими устройствами. В результате получается загрузка системы, наиболее близкая к номинальной (в смысле минимума суммы невязок $\sum_{i=1}^{n} |\pi_i - \varkappa_i^0|$). Следует, однако, помнить, что это справедливо лишь в рамках указанного выше механизма поведения клиентов, ориентирующегося на длины очередей ($\pi_i = \pi_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$). Перераспределение потоков с помощью «аппарата очередей» может приводить к неоправданным потерям клиентов, которые покинут систему необслуженными, хотя часть обслуживающих устройств будет оставаться загруженной не полностью.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Доказательство леммы 1. В силу условий леммы можно разбить множество индексов $\{i\} = \{1, \ldots, n\}$ на два подмножества $I_{\geqslant}$ и $I_{\leqslant}$ таким образом, что

$$\begin{array}{llll} \text{при } i \in I_{\geqslant} & c_i \geqslant c_i' & \text{и} & \delta_i(\mathbf{c}) \geqslant 0, \\ \text{при } i \in I_{\leqslant} & c_i \leqslant c_i' & \text{и} & \delta_i(\mathbf{c}) \leqslant 0. \end{array}$$

Рассмотрим сначала подмножество $I_{\geqslant}$. Очевидно,

$$\sum_{i \in I_{\geqslant}} \delta_i(\mathbf{c}) = \sum_{i \in I_{\geqslant}} |\delta_i(\mathbf{c})|. \tag{П.1}$$

В силу групповой контрамонотонности функций $\delta_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$\sum_{i \in I_{\geqslant}} \delta_i(\mathbf{c}) \leqslant \sum_{i \in I_{\geqslant}} \delta_i(\mathbf{c}'), \tag{П.2}$$

причем, если хотя бы для одного i $c_i > c_i'$, то в (П.2) имеет место строгое неравенство. Наконец,

$$\sum_{i \in I_{\geqslant}} \delta_i(\mathbf{c}') \leqslant \sum_{i \in I_{\geqslant}} |\delta_i(\mathbf{c}')|. \tag{П.3}$$

Сопоставляя (П.1), (П.2) и (П.3), получим

$$\sum_{i\in I_{\geqslant}} |\delta_i(\mathbf{c})| \leqslant \sum_{i\in I_{\geqslant}} |\delta_i(\mathbf{c}')|, \tag{П.4}$$

причем, если хотя бы для одного i $c_i > c_i'$, то неравенство (П.4) — строгое. Аналогичным образом получаем

$$\sum_{i\in I_{\leqslant}} |\delta_i(\mathbf{c})| = -\sum_{i\in I_{\leqslant}} \delta_i(\mathbf{c}) \leqslant -\sum_{i\in I_{\leqslant}} \delta_i(\mathbf{c}') \leqslant \sum_{i\in I_{\leqslant}} |\delta_i(\mathbf{c}')|, \tag{П.5}$$

что совместно с (П.4) дает

$$\sum_{i=1}^{n} |\delta_i(\mathbf{c})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\delta_i(\mathbf{c}')|, \tag{П.6}$$

причем, если $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}'$, и, значит, хотя бы для одного i либо $c_i > c_i'$, либо $c_i < c_i'$, то неравенство (П.6) — строгое, т. е. $\Phi(\mathbf{c}) < \Phi(\mathbf{c}')$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathbf{c}^*$ — точка Нэша, т. е. $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) = 0$ (через $\overline{\boldsymbol{\delta}}$ обозначаем вектор с компонентами $\overline{\delta}_1, \ldots, \overline{\delta}_n$). Тогда для любой точки $\mathbf{c} \in C$ выполняются неравенства $(c_i - c_i^*)\delta_i(\mathbf{c}^*) \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Действительно, если $\delta_i(\mathbf{c}^*) > 0$ для некоторого i, то согласно определению точки Нэша при этом $c_i^* = b_i$ и, значит, заведомо $c_i \leqslant c_i^*$; аналогично, если $\delta_i(\mathbf{c}^*) < 0$, то $c_i \geqslant c_i^*$. Следовательно, в силу леммы 1 при $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}^*$ $\Phi(\mathbf{c}) > \Phi(\mathbf{c}^*)$. Это и означает, что точка $\mathbf{c}^*$ есть единственная точка минимума функции $\Phi(\mathbf{c})$ в C.

Обратно, пусть $\mathbf{c}^*$ — точка минимума $\Phi(\mathbf{c})$. Допустим, что $\mathbf{c}^*$ не является точкой Нэша, т. е. $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) \neq 0$. Возьмем $\Delta\mathbf{c} = \alpha\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*)$, где $\alpha > 0$, и выберем α столь малым, что $\mathbf{c} = \mathbf{c}^* + \Delta\mathbf{c} \in C$ и (в силу непрерывности $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c})$) $\delta_i(\mathbf{c})\delta_i(\mathbf{c}^*) \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда и $\delta_i(\mathbf{c})\overline{\delta}_i(\mathbf{c}^*) \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, откуда $\delta_i(\mathbf{c})\Delta c_i \geqslant 0$, т. е. $(c_i^* - c_i)\delta_i(\mathbf{c}) \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. В силу леммы 1 $\Phi(\mathbf{c}^*) > \Phi(\mathbf{c})$, что противоречит предположению о минимальности $\Phi(\mathbf{c}^*)$.

Таким образом, точка минимума функции $\Phi(\mathbf{c})$ есть точка Нэша, а точка Нэша есть точка минимума $\Phi(\mathbf{c})$, причем точка минимума $\Phi(\mathbf{c})$ единственна.

Теорема доказана.

Доказательство леммы 2. Покажем сначала, что $c_i^1 \leqslant c_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$. Допустим противное и обозначим через I_0 множество всех тех индексов i, для которых $c_i^1 > c_i^2$. Так как при $i \in I_0$ заведомо

$c_i^1 > a_i$ и $c_i^2 < b_i$, то при этом из $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}^1) \geqslant 0$ следует $\delta_i(\mathbf{c}^1) \geqslant 0$, а из $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}^2) \leqslant 0$ следует $\delta_i(\mathbf{c}^2) \leqslant 0$. Поэтому

$$\sum_{i \in I_0} \delta_i(\mathbf{c}^1) \geqslant \sum_{i \in I_0} \delta_i(\mathbf{c}^2),$$

что противоречит групповой контрамонотонности функций $\delta_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Таким образом, $\mathbf{c}^1 \leqslant \mathbf{c}^2$; обозначим через S непустое подмножество $S = \{\mathbf{c} \colon \mathbf{c}^1 \leqslant \mathbf{c} \leqslant \mathbf{c}^2\}$ множества C. Пусть $\mathbf{c}$ — произвольная точка из C; поставим ей в соответствие точку $\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{c}}(\mathbf{c})$ из S следующим образом:

$$\begin{array}{ll} \overline{c}_i = c_i^1 & \text{при } c_i < c_i^1 \ \ (i \in I_<), \\ \overline{c}_i = c_i & \text{при } c_i^1 \leqslant c_i \leqslant c_i^2 \ \ (i \in I_=), \\ \overline{c}_i = c_i^2 & \text{при } c_i > c_i^2 \ \ (i \in I_>), \end{array}$$

одновременно введя соответствующее разбиение индексов $I_<$, $I_=$, $I_>$. Рассмотрим случай $i \in I_<$. Учитывая, что для выделенного индекса i $\overline{c}_i = c_i^1$, а для всех остальных индексов $j \neq i$ $\overline{c}_j \geqslant c_j^1$, в силу индивидуальной контрамонотонности функции $\delta_i(\mathbf{c})$ имеем $\delta_i(\overline{\mathbf{c}}) \geqslant \delta_i(\mathbf{c}^1)$. Далее, так как при $i \in I_<$ заведомо $c_i^1 > a_i$, то $\delta_i(\mathbf{c}^1) \geqslant \overline{\delta}_i(\mathbf{c}^1)$. А поскольку по условию леммы $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}^1) \geqslant 0$ для любого i, то окончательно получаем, что при любом $i \in I_<$ $\delta_i(\overline{\mathbf{c}}) \geqslant 0$. Аналогично, при любом $i \in I_>$ $\delta_i(\overline{\mathbf{c}}) \leqslant 0$.

Теперь легко видеть, что при всех $i = 1, \ldots, n$ выполняется условие $(c_i - \overline{c}_i)\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \leqslant 0$, откуда по лемме 1 $\Phi(\mathbf{c}) \geqslant \Phi(\overline{\mathbf{c}})$. Значит, и подавно $\Phi(\mathbf{c}) \geqslant \Phi^*$, где $\Phi^* = \min\limits_{\hat{c} \in S} \Phi(\mathbf{c}) = \Phi(\mathbf{c}^*)$ — минимум непрерывной функции $\Phi(\mathbf{c})$ на замкнутом ограниченном множестве S, достигающийся в некоторой точке $\mathbf{c}^* \in S \subset C$. В силу произвольности точки $\mathbf{c} \in C$ отсюда заключаем, что минимальное значение функции $\Phi(\mathbf{c})$ на всем множестве C существует, равно Φ^* и достигается в точке $\mathbf{c}^*$.

Лемма доказана.

II. Рассмотрим систему

$$\dot{c}_i = \overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{$*$}$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathbf{c}^*$ — точка Нэша или, что то же самое, точка покоя системы $(*)$. Рассмотрим функцию $F(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^n |c_i - c_i^*|$. Возьмем произвольную точку $\mathbf{c} \in C$ и построим для нее разбиение множества индексов $\{i\}$ на три подмножества $I_>, I_<, I_=$ следующим образом:

$$\begin{array}{ll} i \in I_>, & \text{если } c_i > c_i^* \text{ или } c_i = c_i^*,\ \overline{\delta}_i(\mathbf{c}) > 0, \\ i \in I_<, & \text{если } c_i < c_i^* \text{ или } c_i = c_i^*,\ \overline{\delta}_i(\mathbf{c}) < 0, \\ i \in I_=, & \text{если } c_i = c_i^*,\ \overline{\delta}_i(\mathbf{c}) = 0. \end{array} \tag{П.7}$$

Выпустим из точки $\mathbf{c}$ траекторию системы $(*)$ $\mathbf{c}(t)$ $(\mathbf{c}(0) = \mathbf{c})$ и рассмотрим изменение функции $F(\mathbf{c})$ вдоль этой траектории: $F = F(\mathbf{c}(t))$. Нетрудно видеть, что правосторонние производные величин $|c_i - c_i^*|$ по времени в силу системы $(*)$ существуют и равны в точке $t = 0$ соответственно

$$\frac{d}{dt}|c_i - c_i^*| = \begin{cases} \dot{c}_i & \text{при } i \in I_>, \\ -\dot{c}_i & \text{при } i \in I_<, \\ 0 & \text{при } i \in I_=. \end{cases}$$

Поэтому правосторонняя производная функция $F(\mathbf{c}(t))$ по времени существует и равна при $t = 0$

$$\dot{F}(\mathbf{c}) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}|c_i - c_i^*| = \sum_{i\in I_>}\dot{c}_i - \sum_{i\in I_<}\dot{c}_i = \sum_{i\in I_>}\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) - \sum_{i\in I_<}\overline{\delta}_i(\mathbf{c}). \quad (\text{П.8})$$

Рассмотрим подмножество индексов $I_>$. При $i \in I_>$ либо $c_i > c_i^*$ и, значит, заведомо $c_i > a_i$, и поэтому согласно определению функций $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})$ $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \leqslant \delta_i(\mathbf{c})$, либо $c_i = c_i^*$, но тогда $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) > 0$ и, значит, $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) = \delta_i(\mathbf{c})$. Следовательно,

$$\sum_{i\in I_>}\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \leqslant \sum_{i\in I_>}\delta_i(\mathbf{c}). \quad (\text{П.9})$$

Далее, в силу групповой контрамонотонности функций $\delta_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$\sum_{i\in I_>}\delta_i(\mathbf{c}) \leqslant \sum_{i\in I_>}\delta_i(\mathbf{c}^*), \quad (\text{П.10})$$

причем, если хотя бы для одного i $c_i > c_i^*$, то неравенство (П.10) — строгое. Наконец, при $i \in I_>$ заведомо $c_i^* < b_i$ и, значит, $\delta_i(\mathbf{c}^*) \leqslant 0$ (согласно определению точки Нэша $\mathbf{c}^*$), так что

$$\sum_{i\in I_>}\delta_i(\mathbf{c}^*) \leqslant 0. \quad (\text{П.11})$$

Объединяя (П.9), (П.10), и (П.11), получаем

$$\sum_{i\in I_>}\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \leqslant \sum_{i\in I_>}\delta_i(\mathbf{c}) \leqslant \sum_{i\in I_>}\delta_i(\mathbf{c}^*) \leqslant 0, \quad (\text{П.12})$$

причем, если хотя бы для одного i имеем $c_i > c_i^*$, то среднее неравенство в (П.12) — строгое.

Аналогичным образом получаем

$$\sum_{i\in I_<}\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \geqslant \sum_{i\in I_<}\delta_i(\mathbf{c}) \geqslant \sum_{i\in I_<}\delta_i(\mathbf{c}^*) \geqslant 0, \tag{П.13}$$

причем, если хотя бы для одного i имеет место $c_i < c_i^*$, то среднее неравенство в (П.13) — строгое. Подставляя (П.12) и (П.13) в (П.8) и учитывая, что при $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}^*$ хотя бы для одного i либо $c_i > c_i^*$, либо $c_i < c_i^*$ и, значит, по крайней мере одно из средних неравенств (П.12), (П.13) — строгое, получаем

$$\dot{F}(\mathbf{c}) \leqslant \sum_{i\in I_>}\delta_i(\mathbf{c}) - \sum_{i\in I_<}\delta_i(\mathbf{c}) < 0 \text{ при } \mathbf{c} \neq \mathbf{c}^*. \tag{П.14}$$

Таким образом, функция $F(\mathbf{c})$ (которая служит мерой отклонения точки $\mathbf{c}$ от $\mathbf{c}^*$) убывает вдоль любой траектории $\mathbf{c}(t)$ системы $(*)$ при $\mathbf{c}(t) \neq \mathbf{c}^*$. Для того чтобы доказать, что, более того, $F(\mathbf{c}(t)) \to 0$, т.е. $\mathbf{c}(t) \to \mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$, нужно усилить [1] оценку (П.14) производной $\dot{F}(\mathbf{c})$. Согласно (П.14)

$$\dot{F}(\mathbf{c}) \leqslant \Psi(\mathbf{c}), \tag{П.15}$$

где

$$\Psi(\mathbf{c}) = \sum_{i\in I_>}\delta_i(\mathbf{c}) - \sum_{i\in I_<}\delta_i(\mathbf{c}), \tag{П.16}$$

причем $\Psi(\mathbf{c}) > 0$ при $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}^*$. Подчеркнем, что разбиение множества индексов (П.7) зависит от точки $\mathbf{c}$: $I_> = I_>(\mathbf{c})$, $I_< = I_<(\mathbf{c})$, $I_= = I_=(\mathbf{c})$; значит, зависимость функции (П.16) от $\mathbf{c}$ обусловлена не только функциями $\delta_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$, но и зависимостью разбиения $I_>$, $I_<$, $I_=$ от $\mathbf{c}$. Поэтому функция $\Psi(\mathbf{c})$, вообще говоря, разрывна, что препятствует непосредственному применению теоремы Ляпунова для установления сходимости $\mathbf{c}(t) \to \mathbf{c}^*$. Однако можно обнаружить следующее достаточное для доказательства сходимости $\mathbf{c}(t) \to \mathbf{c}^*$ свойство функции $\Psi(\mathbf{c})$: для любой области $C_{\alpha,\beta} = \{\mathbf{c}\colon \alpha \leqslant F(\mathbf{c}) \leqslant \beta\}$, где $\alpha > 0$ и $\beta < \infty$, существует $\gamma > 0$ такое, что $\Psi(\mathbf{c}) \leqslant -\gamma$ для всех $\mathbf{c} \in C_{\alpha,\beta}$.

Допустим противное: для некоторой области $C_{\alpha,\beta}$ $(\alpha > 0, \beta < \infty)$ найдется последовательность точек $\{\mathbf{c}^k\}$, $\mathbf{c}^k \in C_{\alpha,\beta}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, для которой $\Psi(\mathbf{c}^k) \to 0$ при $k \to \infty$. Рассмотрим соответствующую последовательность разбиений множества индексов (П.7) $\{I_>(\mathbf{c}^k), I_<(\mathbf{c}^k), I_=(\mathbf{c}^k)\}$. Так как число различных разбиений множества индексов $\{1, \ldots\ldots, n\}$ на три подмножества $I_>$, $I_<$, $I_=$ конечно, то хотя бы одно разбиение повторяется в этой последовательности бесконечно много

[1] Если предположить непрерывную зависимость решений системы $(*)$ от начальных данных, то оценки (П.14) достаточно для установления сходимости $\mathbf{c}(t) \to \mathbf{c}^*$ на основании известной теоремы об асимптотической устойчивости (см., например, [12]).

раз. Обозначим такое разбиение через $\tilde{I}_>$, $\tilde{I}_<$, $\tilde{I}_=$. А так как $\mathbf{c}^k \in C_{\alpha,\beta}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $C_{\alpha,\beta}$ — замкнутая ограниченная область, то из $\{\mathbf{c}^k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\tilde{\mathbf{c}}^k\}$ такую, что а) $I_>(\tilde{\mathbf{c}}^k) \equiv \equiv \tilde{I}_>$, $I_<(\tilde{\mathbf{c}}^k) \equiv \tilde{I}_<$, $I_=(\tilde{\mathbf{c}}^k) \equiv \tilde{I}_=$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ и б) существует $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\mathbf{c}}^k = \tilde{c} \in C_{\alpha,\beta}$.[1] Рассматривая условия, фигурирующие в определении разбиения (П.7), полагая в (П.7) $\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}}^k$ и переходя к пределу по $k \to \infty$, получаем, что

$$\begin{aligned}
&\tilde{c}_i \geqslant c_i^* \qquad \text{при} \quad i \in \tilde{I}_>,\\
&\tilde{c}_i \leqslant c_i^* \qquad \text{при} \quad i \in \tilde{I}_<,\\
&\tilde{c}_i = c_i^* \qquad \text{при} \quad i \in \tilde{I}_=.
\end{aligned}$$

Рассуждая, как и ранее при выводе правого неравенства в (П.14) (учитывая, что $\mathbf{c} \in C_{\alpha,\beta}$ и, значит, $\tilde{\mathbf{c}} \neq \mathbf{c}^*$), получаем

$$\sum_{i\in\tilde{I}_<} \delta_i(\tilde{\mathbf{c}}) - \sum_{i\in\tilde{I}_<} \delta_i(\tilde{\mathbf{c}}) < 0. \tag{П.17}$$

Введем обозначение

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{c}) = \sum_{i\in\tilde{I}_>} \delta_i(\mathbf{c}) - \sum_{i\in\tilde{I}_<} \delta_i(\mathbf{c}). \tag{П.18}$$

Функция (П.18) отличается от (П.16) тем, что в (П.18) разбиение $\tilde{I}_>$, $\tilde{I}_<$, $\tilde{I}_=$ фиксировано, и поэтому $\tilde{\Psi}(\mathbf{c})$, очевидно, непрерывная функция. Заметим, что $\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{c}}^k) = \Psi(\tilde{\mathbf{c}}^k)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{c}}^k) = \lim_{k\to\infty} \Psi(\tilde{\mathbf{c}}^k) = 0. \tag{П.19}$$

Но в силу непрерывности $\tilde{\Psi}(\mathbf{c})$

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{c}}^k) = \tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{c}}). \tag{П.20}$$

Из (П.19) и (П.20)

$$\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{c}}) = 0,$$

что противоречит (П.17). Следовательно, принятое допущение неверно, и для любых α и β, $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$, существует $\gamma = \gamma(\alpha, \beta) > 0$ такое, что $\Psi(\mathbf{c}) \leqslant -\gamma$ для всех $\mathbf{c} \in C_{\alpha,\beta}$.

Завершим теперь доказательство теоремы, показав, что для произвольной траектории $\mathbf{c}(t)$ системы $(*)$ $\mathbf{c}(t) \to \mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$. Допустим противное; тогда $F(\mathbf{c}(t)) \not\to 0$ при $t \to \infty$ для некоторой траектории

[1] Однако нельзя гарантировать, что $I_>(\tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{I}_>$, $I_<(\tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{I}_<$, $I_=(\tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{I}_=$.

$\mathbf{c}(t)$, а так как $F(\mathbf{c}(t))$ убывает по t, то найдется $\alpha > 0$ такое, что $\alpha \leqslant F(\mathbf{c}(t)) \leqslant F(\mathbf{c}(0))$ при всех $t \geqslant 0$. Положим $\beta = F(\mathbf{c}(0))$ и возьмем $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$; тогда $\dot{F}(\mathbf{c}(t)) \leqslant \Psi(\mathbf{c}(t)) \leqslant -\gamma$ при всех $t \geqslant 0$ и, значит, $F(\mathbf{c}(t)) \leqslant F(\mathbf{c}(0)) - \gamma t \to -\infty$ при $t \to \infty$, что невозможно уже из-за неотрицательности $F(\mathbf{c})$.

Теорема полностью доказана.

Модель хаотического обмена ресурсами и аналогии между термодинамикой и экономикой [1]

Достаточно широким и интересным классом процессов, протекающих в экономических, социологических, биологических и физических системах, являются процессы обмена, распределения и перераспределения ресурсов. Задача выявления общих механизмов обмена и распределения, свойственных объектам различной природы, до настоящего времени в явной форме не ставилась, хотя именно наличием таких механизмов можно объяснить, например, возможность физического моделирования некоторых задач линейного и нелинейного программирования и математической экономики [24, 74]. К сожалению, известные экономико-математические модели обмена и распределения ресурсов (см., например, [26]) имеют чисто феноменологический характер, проявляющийся, в частности, в том, что существование так называемых «функций полезности» просто постулируется, а не обосновывается свойствами структуры взаимодействия между элементами системы. Кроме того, в этих моделях рассматривались лишь процессы экономического обмена, а отдельные попытки установления аналогий между экономическими и термодинамическими процессами (см., например, [161]) хотя и интересны, но не могут быть признаны полностью удавшимися: во-первых, эти аналогии не продвинуты настолько далеко, чтобы можно было считать аналогичными сами механизмы процессов, и, во-вторых, они также имеют чисто феноменологический характер. Что касается процессов обмена ресурсами в биологии и социологии, то формализованных моделей таких процессов почти нет;

[1] V Всесоюзное совещание по проблемам управления. Рефераты докладов.—М., 1971.—С. 207–209 (в соавторстве с *Л.И.Розоноэром*).

здесь можно выделить интересные результаты для одного модельного социологического процесса обмена, полученные Б.Г.Питтелем в [68].

Процессы обмена, в которых распределение ресурсов полностью децентрализовано и осуществляется исключительно в актах случайных локальных взаимодействий между элементами системы, можно назвать процессами хаотического обмена ресурсами. Уравнения, описывающие такие процессы на микроскопическом уровне (т.е. на уровне взаимодействия между элементами), должны отражать, во-первых, факт сохранения полных количеств ресурсов (т.е. иметь «интегралы движения») и, во-вторых, отражать «хаотический характер» взаимодействия между элементами. Поэтому процессы хаотического обмена ресурсами во многих отношениях аналогичны процессам, рассматриваемым в статистической физике (где роль ресурсов играют такие сохраняющиеся экстенсивные величины, как энергия, число частиц и т.п.). Целью настоящей работы является выявление тех общих черт хаотических процессов обмена и распределения, которые свойственны как физическим процессам, так и процессам иной природы. Естественно поэтому, что в работе используются понятия и методы статистической физики и термодинамики (см., например, [30]).

В первой части работы рассмотрена модель процесса хаотического обмена ресурсами, основанная на предположении о том, что элементы «соглашаются на обмен» с вероятностью, пропорциональной некоторым априорно заданным «предпочтениям» этих элементов (идея о существовании такого рода предпочтений высказана и использована в [68]). Поведение такой системы описывается марковским случайным процессом; показывается, что финальное распределение вероятностей этого процесса аналогично известному в статистической физике микроканоническому распределению. Далее изучается равновесное состояние системы, вводится энтропия финального распределения и известными в статистической физике методами показывается, что равновесное распределение ресурсов по элементам максимизирует энтропию при заданных значениях полных количеств ресурсов. Вводится понятие оценки ресурса системой (цены) как производной равновесной энтропии по количеству ресурса и показывается, что при контакте двух систем оценки ресурсов этими системами выравниваются, а суммарная энтропия систем достигает максимума. Этим завершается переход от микроскопического описания системы к макроскопическому («термодинамическому») описанию. Оценка (цена) ресурса оказывается тем самым аналогичной таким интенсивным величинам в термодинамике, как величина, обратная температуре, химический потенциал и т. п.

Результаты, полученные в первой части работы, могут рассматриваться как «микроскопическая основа» для построений аналогий между термодинамикой и феноменологическими моделями, изучаемыми в математической экономике. Установлению таких аналогий посвящена вторая часть работы. Исходным пунктом здесь является аналогия между основным предположением экономических моделей о максимизации полного дохода (или функции полезности), с одной стороны, и, с другой стороны, термодинамическим принципом, согласно которому суммарная равновесная энтропия систем, находящихся в контакте, максимизируется при заданных полных значениях экстенсивных величин.

В предлагаемой системе аналогий доход (или значение функции полезности) соответствует равновесной энтропии; подлежащие производству, обмену или распределению ресурсы (товары) — экстенсивным величинам в термодинамике; оценки (цены) товаров — интенсивным величинам. Прибыль, получаемая в процессе распределения ресурсов (или производства товаров), соответствует термодинамическому потенциалу (с обратным знаком); максимизация прибыли при фиксированных ценах в условиях бесконечно емкого рынка соответствует минимизации термодинамического потенциала системы, находящейся в термостате. Равновесие фаз в термодинамике интерпретируется экономически как равновесие между различными способами производства; равенство химических потенциалов фаз означает при этом равенство прибылей, приходящихся на одну производственную ячейку.

Аналогия между термодинамикой и моделями обмена может быть существенно углублена, если рассмотреть некоторый выделенный («базисный») товар, сопоставить его энергии и ввести понятие «экономической работы» как количества «базисного товара», отданного системой окружающей среде в процессе его обмена на другие товары. При этом количество тепла (в отличие от работы) соответствует количеству «базисного товара», переданного системе из внешней среды за счет его обмена на некоторые «неучтенные товары». Использование аналогов известных в термодинамике утверждений о коэффициенте полезного действия термодинамического цикла позволяет дать оценку максимального количества «базисного товара», которое может быть извлечено из системы путем обмена лишь за счет изменения макроскопической обстановки, без нарушения хаотического характера взаимодействия внутри системы.

Дальнейшие феноменологические аналогии обнаруживаются при сопоставлении условий равновесия в термодинамической системе и в экономической модели типа модели многопродуктового рынка. Совокупность величин, описывающих подобную систему, распадается на пары взаимно двойственных (экстенсивных и интенсивных) переменных. Условием устойчивости равновесия является монотонная зависимость между переменными в каждой такой паре при фиксации во всех остальных парах по одной переменной. Это условие в дифференциальной форме сводится к знакоопределенности главных миноров соответствующей функциональной матрицы. Последнее для термодинамической системы эквивалентно вогнутости энтропии как функции состояния, а для рыночной модели известно как условие «совершенной устойчивости» по Хиксу [11] и сводится к вогнутости целевых функций спроса и предложения (без «бюджетных ограничений»). Для таких систем при надлежащей формулировке оказывается справедливым известный в физике принцип Ле-Шателье [30] (принцип компенсации возмущений).

Результаты работы могут быть использованы в тех областях теории и практики управления, в которых рассматриваются процессы обмена и распределения ресурсов, содержащие элемент стихийности. В частности, эти результаты проясняют механизмы формирования функций полезности и оценок ресурсов, а также устанавливают верхнюю границу количества ресурсов, которое может быть извлечено из системы чисто макроскопическим управлением без вмешательства во внутренние акты взаимодействия между элементами.

Модели совместного функционирования многих целенаправленных элементов. I [1]

Рассматривается формализованная схема функционирования взаимосвязанных элементов, преследующих индивидуальные цели. Эта схема охватывает ряд моделей теории игр и поведения автоматов, математической экономики, распределения ресурсов, массового обслуживания. В первой части работы формулируется общая модель и вводятся основные предположения о характере взаимодействия элементов в системе. Устанавливаются теоремы о существовании и единственности равновесия в модели и о его асимптотической достижимости в процессах независимого целенаправленного поведения элементов.

[1] Автоматика и телемеханика.—1972.—№11.—С. 92–110.

Введение

Системы, изучаемые в теории управления и в смежных областях, нередко можно рассматривать как совокупности взаимосвязанных элементов, каждый из которых наделен собственной целью. Отдельный элемент обычно характеризуется некоторым стандартным правилом (алгоритмом) целенаправленного поведения, основанным на использовании ограниченной информации о системе в целом. Если несколько таких элементов функционируют одновременно, причем между ними имеются достаточно сильные взаимодействия, то стандартные правила индивидуального целенаправленного поведения элементов могут не обеспечивать им достижения искомых целей. Возникает вопрос: при каких условиях все же можно гарантировать в такой системе достижимость целей всех элементов?

Подобная постановка в той или иной форме возникала уже в задачах управления техническими объектами — в теории многосвязного регулирования [61]. Сходные задачи часто появляются в таких областях, как теория игр и коллективное поведение автоматов [16, 26, 66, 77], математическая экономика и задачи распределения ресурсов [16, 26, 34, 66, 198], системы массового обслуживания [34, 66] и др. Настоящая работа посвящена анализу некоторых характерных для этих областей типов взаимодействий между целенаправленными элементами, при которых обеспечивается их успешное совместное функционирование, хотя каждый элемент преследует свою цель и пользуется лишь косвенной информацией о состоянии всей системы.

В основу общей модели, используемой в этой работе, положено представление о «функции-индикаторе» целенаправленного элемента, опирающееся на одно из основных понятий теории автоматического регулирования — управление по рассогласованию. Рассмотрим систему управления техническим многомерным статическим объектом с n регулирующими воздействиями c_i и n соответствующими регулируемыми параметрами объекта $f_i = f_i(\mathbf{c})$, где $\mathbf{c}$ — вектор $(c_1, \ldots, c_n)$. Пусть назначение i-го регулятора, с которого на объект поступает воздействие c_i, состоит в поддержании заданного значения f_i^0 параметра f_i $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда можно считать i-й регулятор целенаправленным элементом, целью которого является обращение в нуль величины рассогласования $\delta_i(\mathbf{c}) = f_i^0 - f_i(\mathbf{c})$. Если $\partial f_i(\mathbf{c})/\partial c_i > 0$, то $\delta_i(\mathbf{c})$ представляет собой сигнал отрицательной обратной связи для регулятора c_i и принцип действия регулятора по рассогласованию сводится к увеличению c_i при $\delta_i(\mathbf{c}) > 0$ и к уменьшению c_i при $\delta_i(\mathbf{c}) < 0$; для астатического регулятора соответствующее простейшее динамическое уравнение имеет вид $\dot{c}_i = \delta_i(\mathbf{c})$. Основные вопросы при изучении системы n независимо действующих регуляторов (связанных между собой через объект управления) такого типа — это вопросы о существовании состояния равновесия $\delta_i(\mathbf{c}) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и об устойчивости динамического процесса $\dot{c}_i = \delta_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$.

В описанном примере каждый i-й элемент-регулятор характеризуется величиной рассогласования — функцией $\delta_i(\mathbf{c})$; будем называть ее функцией-индикатором i-го элемента, имея в виду, что цель этого элемента сводится к обращению $\delta_i(\mathbf{c})$ в нуль, а текущая величина $\delta_i(\mathbf{c})$ (по существу, ее знак) указывает i-му элементу, каким образом для этого нужно изменять c_i. Приведем примеры систем иной природы, которые можно представить как системы из целенаправленных элементов такого же типа.

Рассмотрим экономическую систему, в которой циркулируют n типов продуктов; объем потребления i-го продукта равен π_i, а объем выпуска — $\varkappa_i$. Пусть π_i и $\varkappa_i$ зависят от n управляющих параметров $c_1, \ldots, c_n$ (роль c_i может играть, например, интенсивность производства i-го продукта либо его цена); предположим, что при увеличении c_i «избыточный спрос» $\pi_i(\mathbf{c}) - \varkappa_i(\mathbf{c})$ на i-й продукт уменьшается. Пусть цель управляющего органа, распоряжающегося выбором c_i, заключается в обеспечении равенства спроса и предложения по i-му продукту. Тогда этот орган можно представить как целенаправленный элемент с функцией-индикатором $\delta_i(\mathbf{c}) = \pi_i(\mathbf{c}) - \varkappa_i(\mathbf{c})$.

Еще один пример: рассмотрим игру n лиц, в которой каждый i-й игрок распоряжается выбором числовой переменной c_i, стремясь увеличить свой выигрыш $K_i = K_i(\mathbf{c})$. Предположим, что платежная функция $K_i(\mathbf{c})$ гладкая и при любых фиксированных c_j $(j \neq i)$ имеет единственный максимум по c_i; точка максимума определяет положение цели i-го игрока (его наилучший ответ $\hat{c}_i$ на действия партнеров c_j $(j \neq i)$). Очевидно, что цель i-го игрока здесь также можно, подобно предыдущему, описать функцией-индикатором $\delta_i(\mathbf{c}) = \partial K_i(\mathbf{c})/\partial c_i$.

Во всех приведенных примерах целенаправленный элемент можно рассматривать как автомат, стремящийся обратить в нуль числовую функцию-индикатор. Если единственный вид информации о системе, доступный i-му элементу, — это текущее значение его функции-индикатора δ_i (ни точное положение его цели $\hat{c}_i$, ни состояния c_j других элементов $j \neq i$ ему не известны), то успешность совместного функционирования таких элементов будет зависеть от того, как изменяется каждая функция-индикатор при изменении состояний элементов, взаимодействующих с данным. Оказывается, что многие модели из самых разных областей, несходные внешне, но обладающие однотипным характером взаимодействий между элементами, поддаются анализу (по крайней мере, в простых формах) едиными методами. Исследованию соответствующей общей модели с приложением к анализу конкретных примеров и посвящена настоящая работа.

1. Постановка задачи

Пусть каждому i-у элементу ($i = 1, \ldots, n$) сопоставлена числовая переменная c_i — состояние этого элемента или непосредственно управляемая им величина. Состояние системы в целом описывается вектором $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$. Будем считать, что цель i-го элемента заключается в том, чтобы обратить в нуль некоторую числовую величину δ_i, зависящую, вообще говоря, от состояния всех элементов системы: $\delta_i = \delta_i(c_1, \ldots, c_n) = \delta_i(\mathbf{c})$. Величину $\hat{c}_i$ такую, что $\delta_i(c_1, \ldots, c_{i-1}, \hat{c}_i, c_{i+1}, \ldots, c_n) = 0$, будем называть положением цели i-го элемента; очевидно, $\hat{c}_i$ зависит, вообще говоря, от состояний c_j всех остальных элементов $j \neq i$, так что $\hat{c}_i = \hat{c}_i(\mathbf{c})$. Будем предполагать далее, что величина $\delta_i(\mathbf{c})$ как функция от «своей» переменной c_i при любых фиксированных «чужих» переменных c_j ($j \neq i$) имеет следующий характер:

$$\delta_i(\mathbf{c}) \begin{cases} > 0 & \text{при} \quad \hat{c}_i(\mathbf{c}) > c_i, \\ < 0 & \text{при} \quad \hat{c}_i(\mathbf{c}) < c_i. \end{cases} \tag{1}$$

Такая функция названа в [34] функцией-индикатором [1]. Знак $\operatorname{sign} \delta_i(\mathbf{c})$ указывает i-му элементу направление к цели на оси c_i; абсолютную величину $|\delta_i(\mathbf{c})|$ можно рассматривать как меру удаленности i-го элемента от цели.

Приняв функцию-индикатор $\delta_i(\mathbf{c})$ в качестве описания целенаправленного элемента i, предусмотрим возможность того, что $\delta_i(\mathbf{c})$ не будет обращаться в нуль на всем допустимом интервале изменения переменной c_i. Пусть c_i выбирается из замкнутого интервала $[a_i, b_i]$, конечного или бесконечного. Предположим, что при некотором наборе c_j ($j \neq i$) величина $\delta_i(\mathbf{c})$ как функция от c_i положительна (и, значит, предписывает i-му элементу увеличивать c_i) всюду на $[a_i, b_i]$. При этом естественно различать два случая: 1) в случае конечного b_i примем за положение цели i-го элемента $\hat{c}_i(\mathbf{c})$ точку b_i — крайнюю из допустимых точек; 2) в случае $b_i = +\infty$ будем считать, что цель i-го элемента вообще недостижима.

Аналогично, если величина $\delta_i(\mathbf{c})$ отрицательна всюду на $[a_i, b_i]$ как функция от c_i, то в случае $a_i > -\infty$ будем считать, что $\hat{c}_i(\mathbf{c}) = a_i$, а в случае $a_i = -\infty$ — что цель i-го элемента недостижима. В соответствии с этим соглашением введем модифицированную функцию-индикатор $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})$:

[1] Функция $\delta_i(\mathbf{c})$ заведомо удовлетворяет условию (1), если она монотонно убывает по c_i при любых фиксированных c_j ($j \neq i$).

$$\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) = \begin{cases} 0, & \text{если } c_i = a_i,\ \delta_i(\mathbf{c}) < 0 \text{ или } c_i = b_i,\ \delta_i(\mathbf{c}) > 0, \\ \delta_i(\mathbf{c}) & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Положение цели $\hat{c}_i(\mathbf{c})$ при этом всегда определяется как решение уравнения $\overline{\delta}_i(c_1, \dots, c_{i-1}, \hat{c}_i, c_{i+1}, \dots, c_n) = 0$ относительно $\hat{c}_i$.

Пусть задано замкнутое прямоугольное множество допустимых состояний системы

$$C = \{\mathbf{c} | a_i \leqslant c_i \leqslant b_i \quad (i = 1, \dots, n)\}; \tag{3}$$

здесь $-\infty \leqslant a_i < b_i \leqslant +\infty$ $(i = 1, \dots, n)$. Назовем состоянием равновесия системы такое состояние $\mathbf{c} \in C$, в котором достигаются цели всех элементов: $c_i = c_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \dots, n)$, т.е. [1]

$$\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \tag{$\circ$}$$

Вопрос о существовании и единственности состояния равновесия в рассматриваемой системе целенаправленных элементов сводится к вопросу о существовании [2] и единственности решения системы алгебраических уравнений ($\circ$) на множестве C.

Перейдем теперь к динамическому поведению целенаправленных элементов. Приведем стандартные правила изменения c_i на $[a_i, b_i]$, которые используют лишь доступные элементу сведения — текущее значение функции-индикатора $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}(t))$ или даже только его знак. Эти правила реализуют естественный с точки зрения каждого отдельного элемента принцип движения «в направлении своей цели» по своей переменной c_i на допустимом интервале $[a_i, b_i]$. Простейшее правило такого рода задается дифференциальными уравнениями

$$\dot{c}_i = \overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \quad (i = 1, \dots, n). \tag{$*$}$$

---

[1] Далее в статье рассматриваются несколько тесно связанных друг с другом уравнений, ссылки на которые имеют символьный вид (прим. составителей).

[2] Факт существования равновесия иногда можно установить стандартным приемом — представив состояние равновесия как неподвижную точку отображения $\hat{\mathbf{c}}(\mathbf{c})\colon C \to C$. В самом деле, пусть каждая функция $\delta_i(\mathbf{c})$ непрерывна и монотонно убывает по c_i; тогда вектор-функция $\mathbf{c}(\mathbf{c}) = (\hat{c}_1(\mathbf{c}), \dots, \hat{c}_n(\mathbf{c}))$ определена и непрерывна на C. Если при этом замкнутое множество C (3) ограничено, то в силу теоремы Брауэра [26, 198] искомая неподвижная точка отображения $\hat{\mathbf{c}}(\mathbf{c})\colon C \to C$ существует. Однако в случае неограниченного множества C, важном для приложений, это рассуждение теряет силу.

Простой одномерный пример: $n = 1$, $C = (-\infty, \infty) = R^1$, $\delta(c) = e^{-c}$ показывает, что на неограниченном множестве C равновесие действительно может не существовать (в этом примере $\hat{c}$ не определено). Двумерный пример $n = 2$, $C = R^2$, $\delta_1(\mathbf{c}) = -c_1 + c_2 + 1$, $\delta_2(\mathbf{c}) = c_1 - c_2$ показывает, что равновесие может не существовать даже в том случае, если все функции $\hat{c}_i(\mathbf{c})$ определены на всем множестве C.

Правило $(*)$ предусматривает однозначную количественную зависимость между абсолютными величинами функции-индикатора $|\overline{\delta}_i(\mathbf{c})|$ и скоростью движения $|\dot{c}_i|$. Для содержательных задач такое требование нередко является слишком жестким, так как не все фигурирующие в модели величины могут быть измеримы количественно или управляемы в соответствии с количественным правилом (это особенно относится к биологическим, экономическим и другим моделям, включающим описание поведения человека). Поэтому в общей модели важно иметь возможность использовать «качественную» реализацию принципа движения в направлении цели, связывающую лишь знаки величин $\dot{c}_i(t)$ и $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}(t))$, но не их модули:

$$\operatorname{sign}\dot{c}_i = \operatorname{sign}\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{$**$}$$

Систему динамических уравнений $(**)$ можно переписать эквивалентным образом как систему «уравнений в контингенциях»

$$\dot{c}_i \in \Delta_i(\mathbf{c}) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\Delta_i(\mathbf{c}) = (0, \infty)$, если $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) > 0$; $\Delta_i(\mathbf{c}) = \{0\}$, если $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) = 0$, и $\Delta_i(\mathbf{c}) = (-\infty, 0)$, если $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) < 0$.

По-видимому, для описания систем, содержащих некоторый фактор «произвола», «гибкие» уравнения $(**)$ могут быть приспособлены лучше, чем «жесткие» уравнения $(*)$; последние более пригодны для описания детерминированных систем типа технических объектов [1].

При исследовании системы целенаправленных элементов, заданных своими функциями-индикаторами, встают два основных вопроса: 1) о существовании и единственности равновесия; 2) о достижимости равновесия при стандартных правилах поведения элементов. Первый вопрос в рамках принятой модели сводится к исследованию системы алгебраических уравнений $(\circ)$, а второй — к исследованию системы динамических уравнений $(*)$ или $(**)$. Ответы зависят от свойств рассматриваемых функций-индикаторов (1), (2) на допустимом множестве (3), т.е. в конечном счете от характера взаимодействий между элементами. Изучению свойств функций-индикаторов с этой точки зрения посвящены дальнейшие разделы работы.

В разделе 2 данной статьи вводятся три основные условия, налагаемые на функции-индикаторы и имеющие смысл своеобразных ограни-

---

[1] Можно рассматривать и другие типы «жестких» уравнений, более общие, чем $(*)$, например,

$$\dot{c}_i = f_i(\overline{\delta}_i(\mathbf{c})), \tag{$*'$}$$

где f_i — функции, «сохраняющие знак»: $\operatorname{sign} f_i(x) = \operatorname{sign} x$. Очевидно, $(*')$ сводится к весьма частному случаю системы $(**)$.

чений на степень взаимного влияния элементов. Далее в статье устанавливаются теоремы статики (существование и единственность равновесия — решения системы (○)) и теоремы динамики (сходимость к равновесию процессов (∗) и (∗∗)). Общие теоремы части I данной работы будут применены в части II к анализу примеров из различных областей, в том числе указанных во введении.

2. Условия на функции-индикаторы

Далее в этой работе рассматриваются наборы непрерывных функций-индикаторов $\delta_1(\mathbf{c}), \ldots, \delta_n(\mathbf{c})$, удовлетворяющие одному из формулируемых ниже условий I–III. В приводимых формулировках $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}$ — произвольные точки из C, а $\Delta\delta_i(\mathbf{c}) = \delta_i(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}) - \delta_i(\mathbf{c})$.

Условие I. Пусть $\Delta\mathbf{c} \neq 0$. Возьмем разбиение множества индексов $\{1, \ldots, n\}$ на два подмножества $I_\geqslant$ и $I_\leqslant$ такое, что если $i \in I_\geqslant$, то $\Delta c_i \geqslant 0$, а если $i \in I_\leqslant$, то $\Delta c_i \leqslant 0$. Тогда должно выполняться неравенство

$$\sum_{i \in I_\geqslant} \Delta\delta_i(\mathbf{c}) - \sum_{i \in I_\leqslant} \Delta\delta_i(\mathbf{c}) < 0 \quad (\Delta\mathbf{c} \neq 0). \tag{4}$$

В данной формулировке условия I разбиение на подмножества $I_\geqslant$ и $I_\leqslant$, вообще говоря, неоднозначно: каждый индекс i такой, что $\Delta c_i = 0$, можно отнести к любому из этих подмножеств. Если же взять другое, однозначное разбиение множества индексов для данного $\Delta\mathbf{c} \neq 0$ — теперь уже на три подмножества $I_>$, $I_=$, $I_<$: $i \in I_> \leftrightarrow \Delta c_i > 0$, $i \in I_= \leftrightarrow \Delta c_i = 0$, $i \in I_< \leftrightarrow \Delta c_i < 0$, то условие I можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\sum_{i \in I_>} \Delta\delta_i(\mathbf{c}) - \sum_{i \in I_<} \Delta\delta_i(\mathbf{c}) + \sum_{i \in I_=} |\Delta\delta_i(\mathbf{c})| < 0 \quad (\Delta\mathbf{c} \neq 0). \tag{5}$$

Еще одну эквивалентную запись условия I, удобную для дальнейшего применения, можно получить, если воспользоваться многозначной функцией $\operatorname{Sign} x$, которая совпадает с однозначной функцией $\operatorname{sign} x$ при всех $x \neq 0$ (а именно равна $+1$ при $x > 0$ и -1 при $x < 0$) и отличается от $\operatorname{sign} x$ только при $x = 0$: $\operatorname{Sign} 0$, по определению, принимает все значения из интервала $[-1, 1]$ (тогда как $\operatorname{sign} 0 = 0$). Теперь условие I можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\delta_i(\mathbf{c}) \operatorname{Sign} \Delta c_i < 0 \quad (\Delta\mathbf{c} \neq 0) \tag{6}$$

(имеется в виду, что неравенство должно выполняться при всех возможных значениях фигурирующих в нем многозначных функций).

Условие II. Пусть $\Delta\mathbf{c} \neq 0$ и пусть $|\Delta c_k| = \max\limits_i |\Delta c_i|$. Тогда должно выполняться неравенство

$$\Delta\delta_k(\mathbf{c})\Delta c_k < 0 \quad (\Delta\mathbf{c} \neq 0). \tag{7}$$

Условие III. Пусть $\Delta\mathbf{c} \neq 0$. Тогда должно выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\delta_i(\mathbf{c})\Delta c_i < 0 \quad (\Delta\mathbf{c} \neq 0). \tag{8}$$

В дальнейшем, говоря об условии I, или II, или III, будем подразумевать, что оно выполняется в каждой точке $\mathbf{c} \in C$ (если не оговорено другое).

Введенные условия I–III определяют три соответствующих класса наборов функций-индикаторов $(\delta_1(\mathbf{c}), \ldots, \delta_n(\mathbf{c}))$. Проанализируем, чем характерны выделенные таким образом классы. Прежде всего, легко видеть, что каждое из условий I–III предусматривает, в частности, монотонное убывание функции $\delta_i(\mathbf{c})$ по c_i $(i = 1, \ldots, n)$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно положить в соответствующем неравенстве (6), (7) или (8) $\Delta\mathbf{c} = (0, \ldots, 0, \Delta c_i, 0, \ldots, 0)$, $\Delta c_i \neq 0$, что сразу даст $\Delta\delta_i(\mathbf{c})\Delta c_i < 0$. Каждое из условий I, II, III, взятое в полном объеме, можно рассматривать как вариант понятия монотонного убывания функции, обобщенного на случай вектор-функции $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c})$, т.е. набора n функций от n переменных $(\delta_1(c_1, \ldots, c_n), \ldots, \delta_n(c_1, \ldots, c_n))$.

Дифференциальные варианты условий. Дальнейшее разъяснение характера условий I–III можно получить, дополнительно предположив гладкость функций-индикаторов и перейдя к «дифференциальным» вариантам «конечных» условий I–III. Будем далее обозначать через $[a_{ij}]$ $(n \times n)$-мерную матрицу с компонентами a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$, а через $\det[a_{ij}]_{i_1,\ldots,i_k}$ — ее произвольный главный минор k-го порядка. Рассмотрим матрицу частных производных $[\partial\delta_i(\mathbf{c})/\partial c_j]$ в некоторой точке $\mathbf{c} \in C$. (В важном частном случае линейных функций-индикаторов

$$\delta_i(\mathbf{c}) = \sum_j \alpha_{ij}c_j + \beta_i, \quad \alpha_{ij}, \beta_i = \mathrm{const} \quad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

матрица $[\partial\delta_i/\partial c_j] \equiv [\alpha_{ij}]$ постоянна на C.) Введем дифференциальные условия

$$\mathrm{I}_{\text{д}}: \qquad \frac{\partial\delta_i(\mathbf{c})}{\partial c_i} + \sum_{j=1,\,\neq i}^{n} \left|\frac{\partial\delta_j(\mathbf{c})}{\partial c_i}\right| < 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

$$\mathrm{II}_{\text{д}}: \qquad \frac{\partial\delta_i(\mathbf{c})}{\partial c_i} + \sum_{j=1,\,\neq i}^{n} \left|\frac{\partial\delta_i(\mathbf{c})}{\partial c_j}\right| < 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{11}$$

$$\mathrm{III}_{д}: \quad \text{Все } \det\left[-\left(\frac{\partial\delta_i(\mathbf{c})}{\partial c_j}+\frac{\partial\delta_j(\mathbf{c})}{\partial c_i}\right)\right]_{i_1,\ldots,i_k} > 0 \quad (k=1,\ldots,n). \quad (12)$$

Через $\mathrm{I}'_{д}$, $\mathrm{II}'_{д}$, $\mathrm{III}'_{д}$ будем обозначать ослабленные варианты условий $\mathrm{I}_{д}$, $\mathrm{II}_{д}$, $\mathrm{III}_{д}$, получаемые заменой строгих неравенств (10), (11), (12) соответственно на нестрогие.

Теорема 1. Пусть функции $\delta_i(\mathbf{c})$ непрерывно дифференцируемы на C. Тогда для того чтобы набор функций $\delta_1(\mathbf{c}),\ldots,\delta_n(\mathbf{c})$ удовлетворял на C условию I, или II, или III, достаточно, чтобы этот набор удовлетворял на C соответствующему дифференциальному условию $\mathrm{I}_{д}$, $\mathrm{II}_{д}$, $\mathrm{III}_{д}$, и необходимо, чтобы он удовлетворял на C соответствующему ослабленному дифференциальному условию $\mathrm{I}'_{д}$, $\mathrm{II}'_{д}$, $\mathrm{III}'_{д}$. Более того, если функции $\delta_i(\mathbf{c})$ линейны, то каждое дифференциальное условие $\mathrm{I}_{д}$, $\mathrm{II}_{д}$, $\mathrm{III}_{д}$ в точности эквивалентно соответствующему конечному условию I, II, III.

Доказательство теоремы 1 приводится в приложении.

Условия $\mathrm{I}_{д}$ и $\mathrm{II}_{д}$ представляют собой варианты «условий доминирующей диагонали» для матрицы $[\partial\delta_i/\partial c_j]$ [26, 198]. Согласно этим условиям каждый диагональный компонент матрицы $[\partial\delta_i/\partial c_j]$ отрицателен, а его модуль превышает сумму модулей остальных, внедиагональных компонентов в данном столбце (условие $\mathrm{I}_{д}$) или в строке (условие $\mathrm{II}_{д}$). Условие $\mathrm{III}_{д}$ также предполагает отрицательность диагональных компонентов $\partial\delta_i/\partial c_i$ и в определенном смысле их главенство среди всех остальных (во всяком случае при достаточно малых по сравнению с ними внедиагональных компонентах $\partial\delta_i/\partial c_j$ $(j \neq i)$ условие $\mathrm{III}_{д}$ заведомо выполнено). Таким образом, *каждое из условий $\mathrm{I}_{д}$, $\mathrm{II}_{д}$, $\mathrm{III}_{д}$ указывает на ограниченность взаимного влияния элементов системы,* на определенное превосходство «внутриэлементных» воздействий над «межэлементными».

Интерпретация условий. Проявление ограниченности межэлементных влияний можно усмотреть и в исходной, конечной форме условий I–III, если привлечь соответствующую интерпретацию этих условий. Изложим одну такую интерпретационную схему, объединяющую многие содержательные примеры и позволяющую пояснить происхождение и качественный характер условий I–III. В предлагаемой интерпретации взаимодействие между несколькими целенаправленными элементами представляет собой состязание элементов-потребителей за получение некоторого нужного им ресурса. Пусть c_i есть величина усилий i-го элемента по привлечению ресурса, а $\delta_i(\mathbf{c})$ — величина дефицита ресурса (если $\delta_i < 0$, то $|\delta_i|$ — величина избытка) у i-го элемента в сложившейся ситуации $\mathbf{c}$. Тогда монотонность

$\delta_i(\mathbf{c})$ по c_i, предусматриваемая каждым из условий I–III, означает возможность саморегулирования каждого отдельного элемента, так как гарантирует уменьшение дефицита ресурса у i-го элемента при увеличении его собственных усилий (и обратно). Рассмотрим теперь, что означают условия I–III в целом для системы таких элементов.

Условие I в данной интерпретации означает следующее. Пусть группа $I_{\geqslant}$ состоит из элементов, увеличивших или во всяком случае не уменьшивших свои усилия по привлечению ресурса, а группа $I_{\leqslant}$ — наоборот, из элементов, уменьшивших (не увеличивших) свои усилия. Тогда согласно условию I суммарный дефицит $\sum \delta_i$ у первой группы уменьшится по сравнению со второй группой. Это можно трактовать как предпосылку для возможности группового саморегулирования таких элементов.

В аналогичной ситуации условие II означает, что дефицит δ_i заведомо изменится в ожидаемую сторону у того элемента, который предпринял максимальное изменение своего усилия $|\Delta c_i|$. Наконец, условие III можно истолковать подобно условию I, если рассмотреть «взвешенное» изменение общего дефицита $\sum \Delta\delta_i \Delta c_i$.

Все три условия I–III в той или иной форме отражают сохранение способности к саморегулированию в системе элементов, взаимное влияние которых ограничено. Подробному анализу того, как соотносятся между собой условия I–III (путем выявления случаев, когда они охватывают друг друга), и анализу конкретных примеров посвящена вторая часть работы.

3. Статические свойства модели

Исследуем условия существования и единственности точки равновесия, т.е. решения системы алгебраических уравнений (○) на множестве C (3). Предполагая выполненными поочередно условия I–III, будем пользоваться вспомогательными функциями «степени неравновесия» вида

$$\Phi_{\mathrm{I}}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} |\delta_i(\mathbf{c})| \text{ и } \overline{\Phi}_{\mathrm{I}}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} |\overline{\delta}_i(\mathbf{c})|,$$

$$\overline{\Phi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{c}) = \max_i |\overline{\delta}_i(\mathbf{c})|, \quad \overline{\Phi}_{\mathrm{III}}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{\delta}_i(\mathbf{c}))^2$$

соответственно (по существу, используя три различные нормы в δ-пространстве); при явном рассмотрении точки равновесия $\mathbf{c}^*$ будем также использовать непосредственную меру удаленности точки $\mathbf{c} \in C$ от $\mathbf{c}^*$ вида

$$F_{\mathrm{I}}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} |c_i - c_i^*|, \;\; F_{\mathrm{II}}(\mathbf{c}) = \max_i |c_i - c_i^*|, \;\; F_{\mathrm{III}}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_i^*)^2$$

соответственно (нормы в **c**-пространстве).

Теорема 2. Пусть на C выполнено условие I (или II, или III). Тогда для того чтобы точка $\mathbf{c}^*$ была точкой равновесия, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{c}^*$ была точкой минимума на C функции $\overline{\Phi}_{\mathrm{I}}(\mathbf{c})$ (или $\overline{\Phi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{c})$, или $\overline{\Phi}_{\mathrm{III}}(\mathbf{c})$ соответственно). Если такая точка существует, то она единственна.

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении; там же показано, что при условии I в теореме 2 можно взять функцию Φ_{I} вместо $\overline{\Phi}_{\mathrm{I}}$. Запишем окончательное утверждение в виде схемы:

Пусть выполнено условие	I	II	III
Тогда равновесие на C эквивалентно			
(единственному) минимуму на C функции	Φ_{I} и $\overline{\Phi}_{\mathrm{I}}$	$\overline{\Phi}_{\mathrm{II}}$	$\overline{\Phi}_{\mathrm{III}}$

Такой краткой табличной записью формулировок утверждений будем пользоваться и далее.

Теорема 2 сводит вопрос о существовании равновесия к вопросу о существовании минимума соответствующей функции $\overline{\Phi}$ (или Φ) на C и позволяет получить как непосредственное следствие ряд достаточных условий существования и единственности равновесия.

Следствия. Пусть на C выполнено условие I (или II, или III). Тогда:

Следствие 1. Если множество C ограничено, то точка равновесия на C существует и единственна.

Следствие 2. Если существует ограниченное подмножество $S \subset C$, обладающее тем свойством, что для любой точки $\mathbf{c} \in C$ можно указать точку $\tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{c}) \in S$ такую, что $\Phi_{\mathrm{I}}(\tilde{\mathbf{c}}) \leqslant \Phi_{\mathrm{I}}(\mathbf{c})$ (соответственно $\overline{\Phi}_{\mathrm{II}}(\tilde{\mathbf{c}}) \leqslant \overline{\Phi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{c})$ или $\overline{\Phi}_{\mathrm{III}}(\tilde{\mathbf{c}}) \leqslant \overline{\Phi}_{\mathrm{III}}(\mathbf{c})$), то точка равновесия на C существует, единственна и принадлежит S. В частности:

Следствие 2а. Если $\|\overline{\delta}(\mathbf{c})\| \to \infty$ равномерно по $\mathbf{c} \in C$ при $\|\mathbf{c}\| \to \infty$, то точка равновесия на C существует и единственна.

Следствие 3. Пусть существуют точки $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2 \in C$ такие, что $c_i^1 \leqslant c_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$ и определяемое ими прямоугольное множество

$$S = \{\mathbf{c} | c_i^1 \leqslant c_i \leqslant c_i^2 \quad (i = 1, \ldots, n)\}$$

таково, что для каждого $i = 1, \ldots, n$: а) $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \geqslant 0$ при всех $\mathbf{c} \in S$ таких, что $c_i = c_i^1$, б) $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \leqslant 0$ при всех $\mathbf{c} \in S$ таких, что $c_i = c_i^2$. Тогда точка равновесия на C существует, единственна и принадлежит S[1].

Следствия 1–3 наиболее легко устанавливаются при условии I, так как тогда можно непосредственно пользоваться теоремой о существо-

[1] Смысл условий следствия 3 — существование в C «ящика S с непроницаемыми (изнутри) стенками». Подобное условие часто будет встречаться в дальнейшем.

вании минимума непрерывной функции $\Phi_{\mathrm{I}}(\mathbf{c})$ на соответствующем замкнутом ограниченном множестве. В случае условий II и III нужно предварительно перейти от однозначных, но разрывных функций $\overline{\Phi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{c})$ и $\overline{\Phi}_{\mathrm{III}}(\mathbf{c})$ к соответствующим многозначным, но замкнутым (аналог непрерывности [198]) функциям. Полный вывод следствий 1–3 приведен в приложении.

Замечание. Следствие 2а позволяет, в частности, получить дополнительное следствие.

Следствие для линейного случая. Если функции $\delta_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$ линейны и выполнено какое-либо из условий I–III, то точка равновесия на C существует и единственна.

Действительно, требование $\|\overline{\delta}(\mathbf{c})\| \to \infty$ при $\|c\| \to \infty$ на C, как нетрудно убедиться, в линейном случае (9) всегда выполнено в силу невырожденности матрицы $[\partial\delta_i/\partial c_j] = [\alpha_{ij}]$, вытекающей из теоремы 1.

Следствие 2а аналогичным образом применимо и к любой системе, которая, помимо условия I, II или III, удовлетворяет требованию $\|\Delta\overline{\delta}\| \to \infty$ при $\|\Delta\mathbf{c}\| \to \infty$. Легко усилить формулировки самих условий I–III так, что это требование будет выполнено автоматически. Например, если взять дифференциальные формулировки $\mathrm{I}_{\text{д}}$–$\mathrm{III}_{\text{д}}$, то достаточно предположить, что соответствующие выражения в (10)–(12) не только знакоопределены, но и отделены от нуля некоторыми константами на C. Для таких систем равновесие всегда будет существовать.

4. Динамические свойства модели

Будем называть траекторией процесса $(*)$ или $(**)$ всякую непрерывную вектор-функцию $\mathbf{c}(t)$, определенную при всех $0 \leqslant t < \infty$ со значениями $\mathbf{c}(t) \in C$, имеющую всюду на $[0, \infty)$ правостороннюю производную $\dot{c}(t)$ и удовлетворяющую уравнениям $(*)$ или $(**)$ соответственно. Исследуем при различных условиях сходимость траекторий $\mathbf{c}(t)$ процессов $(*)$ и $(**)$ к равновесию $\mathbf{c}$ [1] при $t \to \infty$ при произвольных начальных состояниях $\mathbf{c}(0) \in C$ (не обязательно предполагая заранее, что точка равновесия существует). Сразу же отметим, что уравнения $(**)$, определяющие лишь знаки скоростей $\dot{c}_i$, но не их абсолютные величины $|\dot{c}_i|$, сами по себе допускают сколь угодно малые $|\dot{c}_i|$ всюду на C. Поэтому среди траекторий процесса $(**)$ можно найти и такие «вырождающиеся» траектории $\mathbf{c}(t)$, которые сходятся к «ложным равновесиям»: $\mathbf{c}(t) \to \mathbf{c}$ при $t \to \infty$, но $\overline{\delta}(\mathbf{c}) \neq 0$. Чтобы получать более

[1] См., например, доказательство леммы П.7 в приложении.

содержательные утверждения о сходимости траекторий $\mathbf{c}(t)$ к истинному равновесию $\mathbf{c}^*$: $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) = 0$, нужно исключить указанные случаи «вырожденности». Для этого достаточно ограничиться рассмотрением траекторий следующего типа. Назовем траекторию $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$ невырожденной, если для нее выполнено следующее условие.

Условие невырожденности. Не существует такого индекса i и такой последовательности моментов времени $\{t_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, что $\dot{c}_i(t_\nu) \to 0$, но $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}(t_\nu)) \not\to 0$ при $\nu \to \infty$.

Нетрудно убедиться, что для всякой невырожденной траектории $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$ из $\mathbf{c}(t) \to \mathbf{c}$ при $t \to \infty$ следует $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\tilde{\mathbf{c}}) = 0^*$. Условию невырожденности удовлетворяет, в частности, любая траектория процесса $(*)$ (очевидно, являющаяся также траекторией процесса $(**)$)[1]. В дальнейшем условие невырожденности, если оно потребуется, будет оговариваться явно.

Лемма 1

Пусть выполнено условие	I	II	III
и пусть существует точка равновесия $\mathbf{c}^*$.			
Тогда функция	$F_{\text{I}}(\mathbf{c})$	$F_{\text{II}}(\mathbf{c})$	$F_{\text{III}}(\mathbf{c})$
монотонно убывает на любой траектории			
$\mathbf{c}(t)$ процесса	$(*)$	$(**)$	$(*)$
до тех пор, пока $\mathbf{c}(t) \neq \mathbf{c}^*$.			

Следующая лемма в отличие от леммы 1 не предполагает обязательного существования точки равновесия.

Лемма 2

Пусть выполнено условие	I	II	$\text{III}_{\text{Д}}$
Тогда функция	$\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c})$ и $\overline{\Phi}_{\text{I}}(\mathbf{c})$	$\overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c})$	$\overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c})$
монотонно убывает на любой траектории			
$\mathbf{c}(t)$ процесса	$(**)$	$(*)$	$(*)$
до тех пор, пока $\mathbf{c}(t) \neq \mathbf{c}^*$.			

Леммы 1 и 2 представляют определенный самостоятельный интерес, утверждая монотонность движения к равновесию в процессах $(*)$, $(**)$ по соответствующей «метрике» F, $\overline{\Phi}$ в пространствах $\mathbf{c}$ и $\boldsymbol{\delta}$, однако факта сходимости к равновесию они не гарантируют. Для того чтобы из этих лемм вытекала сходимость $\mathbf{c}(t) \to \mathbf{c}^*$, нужно их усилить, показав дополнительно, что на траекториях $\mathbf{c}(t)$ соответствующие функции $F(\mathbf{c})$ и $\overline{\Phi}(\mathbf{c})$ $(\Phi(\mathbf{c}))$ убывают до своего абсолютного минимума на C. Это усиление делается в следующих теоремах.

[1] Еще один пример заведомого выполнения условия невырожденности дает процесс $(*')$ (см. сноску на стр. 71) с неубывающими функциями f_i.

Теорема 3.

Пусть выполнено условие	I	II	III
и пусть существует точка равновесия $\mathbf{c}^*$.			
Тогда каждая невырожденная траектория			
$\mathbf{c}(t)$ процесса	$(*)$	$(**)$	$(*)$
сходится к $\mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$.			

Следующая теорема характеризует динамику системы без предварительного предположения о существовании точки равновесия.

Теорема 4.

Пусть выполнено условие ..	I	I	II	III
Тогда либо	некоторая данная	каждая	каждая	каждая
невырожденная траектория $\mathbf{c}(t)$ процесса	$(**)$	$(*)$	$(*)$	$(*)$
уходит в ∞, т.е. $\|\mathbf{c}(t)\| \to \infty$ при $t \to \infty$, и равновесие ...	может не существовать	не существует	не существует	не существует
либо точка равновесия $\mathbf{c}^*$ существует и	данная	каждая	каждая	каждая
невырожденная траектория $\mathbf{c}(\mathrm{t})$ процесса	$(**)$	$(*)$	$(**)$	$(*)$
сходится к $\mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$.				

Доказательства лемм 1, 2 и теорем 3, 4 приведены в приложении.

Следствие

Пусть выполнено условие............	I	II	III
Тогда каждая ограниченная			
невырожденная траектория процесса	$(**)$	$(*)$	$(*)$
(если таковая существует) сходится к точке равновесия.			

Замечание 1. В лемме 2 и в теореме 4 не предполагается заранее существование точки равновесия $\mathbf{c}^*$; наоборот, из них можно в качестве побочного результата выводить существование $\mathbf{c}^*$. Действительно, следствие из теоремы 4 гласит, что из факта ограниченности хотя бы одной траектории системы $(*)$ или $(**)$ при соответствующем условии I, II или III вытекает существование точки равновесия $\mathbf{c}^*$. Ограниченность траекторий процессов $(*)$ или $(**)$ нередко можно установить по виду

функций $\delta_i(\mathbf{c})$ и множества C (предполагая сам факт существования траекторий, вопрос о котором здесь не рассматривается). Простейший случай, когда ограниченность всех траекторий гарантирована, — это случай, когда само множество C ограничено. Другой случай заведомой ограниченности траекторий процессов $(**)$ (и тем более $(*)$) описывается следующей леммой.

Лемма 3. Пусть начальная точка $\mathbf{c}(0)$ траектории $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$ принадлежит множеству

$$S = \{\mathbf{c} | c_i^1 \leqslant c_i \leqslant c_i^2 \quad (i = 1, \dots, n)\} \subset C$$

такому, что для каждого $i = 1, \dots, n$: а) либо $c_i^1 = a_i$, либо $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) > 0$ при всех $\mathbf{c} \in S$ таких, что $c_i = c_i^1$; б) либо $c_i^2 = b_i$, либо $\overline{\delta}_j(\mathbf{c}) < 0$ при всех $\mathbf{c} \in S$ таких, что $c_i = c_i^2$. Тогда каждая траектория $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$ с начальным состоянием $\mathbf{c}(0) \in S$ целиком лежит в S: $\mathbf{c}(t) \in S$ при всех $t \geqslant 0$.

Смысл условий леммы 3 подобно условиям следствия 3 из теоремы 2 сводится к тому, что точку $\mathbf{c}(0)$ можно заключить в «ящик S с отражающими (внутрь) стенками». Доказательство этой леммы, достаточно простое и не связанное со специфическими условиями I–III для функций-индикаторов, здесь опускается.

Замечание 2. Возможность существования неограниченных траекторий процессов $(*)$ и $(**)$ при выполнении каждого из условий I, II, III иллюстрируется прежним одномерным примером: $C = (-\infty, \infty)$, $\delta(c) = e^{-c}$.

Замечание 3. Согласно замечанию из раздела 3 статьи в линейном случае условия I–III гарантируют свойство $\|\overline{\delta}(c)\| \to \infty$ и тем самым $\overline{\Phi}(c) \to \infty$ при $\|\mathbf{c}\| \to \infty$. Ввиду этого из теоремы 4 с леммой 2 вытекает такое следствие.

Следствие для линейного случая. Пусть функции $\delta(\mathbf{c})$ линейны и

пусть выполнено условие..................	I	II	III
Тогда каждая невырожденная траектория процесса..................................	$(**)$	$(**)$	$(*)$
сходится к точке равновесия.			

Аналогичным образом гарантируется сходимость процессов и для других систем, указанных в замечании в разделе 3 статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма П.1. Пусть $[a_{kl}]$ — $(n \times n)$-мерная матрица. Для того чтобы при всех $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$ имело место неравенство

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k \mathrm{Sign}\, x_l < 0 \quad (\text{либо } \leqslant 0), \tag{П.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись n неравенств

$$a_{kk} + \sum_{l=1,\, \neq k}^{n} |a_{kl}| < 0 \text{ (соответственно } \leqslant 0) \ \ (k = 1, \ldots, n). \tag{П.2}$$

Доказательство. Необходимость. Положим $x_k = 1$, $x_l = 0$ $(l \neq k)$ и придадим $\mathrm{Sign}\, x_l$ значение $\mathrm{sign}\, a_{kl}$ $(l \neq k)$. Подставив эти значения в (П.1), получим (П.2).

Достаточность. Пусть выполнено (П.2). Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \neq 0$ и положим $\sigma_l \in \{\mathrm{Sign}\, x_l\}$, т.е. $\sigma_l = \mathrm{sign}\, x_l$, если $x_l \neq 0$, и σ_l — произвольное число из $[-1, 1]$, если $x_l = 0$. Тогда

$$\sum_{k,l} a_{kl} x_k \sigma_l = \sum_k |x_k| \sum_l a_{kl} \sigma_k \sigma_l \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k |x_k| \Big(a_{kk} + \sum_{l \neq k} |a_{kl}| \Big) < 0 \text{ (соответственно } \leqslant 0), \tag{П.3}$$

что в силу произвольности выбора $\sigma_l \in \{\mathrm{Sign}\, x_l\}$ дает (П.1). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Положим для $\mathbf{c} \in C$ и некоторого $\mathbf{r}$

$$\Delta\mathbf{c}(\alpha) = \alpha \mathbf{r}, \ \ \mathbf{c}(\alpha) = \mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}(\alpha), \ \ \Delta\boldsymbol{\delta}(\alpha) = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}(\alpha)) - \boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}). \tag{П.4}$$

Тогда

$$\Delta\delta_i(\alpha) = \alpha \sum_j \frac{\partial \delta_i(\mathbf{c})}{\partial c_j} r_j + o(\alpha) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть выполнено условие I. Возьмем произвольную внутреннюю точку $\mathbf{c} \in C$; тогда для произвольного $\mathbf{r}$ при достаточно малых α имеем $\mathbf{c}(\alpha) \in C$. Подставляя в (6) $\Delta\mathbf{c}(\alpha)$ и $\Delta\boldsymbol{\delta}(\alpha)$ при достаточно малых $\alpha > 0$ и устремляя $\alpha \to 0$, получаем

$$\sum_{i,j} \frac{\partial \delta_i(\mathbf{c})}{\partial c_j} r_j \mathrm{Sign}\, r_i \leqslant 0, \tag{П.5}$$

откуда в силу леммы П.1 с учетом произвольности $\mathbf{r}$ получаем условие $\mathrm{I}'_{\text{д}}$ (нестрогое неравенство в (10)) для данной внутренней точки множества C. Ввиду непрерывности $\partial\delta_i(\mathbf{c})/\partial c_j$ это условие должно выполняться и в граничных точках C.

Обратно, пусть всюду на C выполнено условие $\mathrm{I}_{\text{д}}$ (неравенство (10)). Возьмем произвольные $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}$ из C, положим в (П.4) $\mathbf{r}=\Delta\mathbf{c}$ и выберем какие-нибудь $\sigma_i \in \{\operatorname{Sign} r_i\}$ $(i=1,\ldots,n)$. Тогда

$$\sum_i \Delta\delta_i(\mathbf{c})\sigma_i = \sum_i \int_0^1 \sum_j \frac{\partial\delta_i(\mathbf{c}(\alpha))}{\partial c_j} r_j \sigma_i d\alpha. \tag{П.6}$$

Применяя лемму П.1 к условию $\mathrm{I}_{\text{д}}$ (10), находим, что теперь неравенство (П.5) должно выполняться как строгое и, значит, подынтегральное выражение в (П.6) отрицательно. Отсюда следует условие I (6).

Пусть теперь выполнено условие II. Возьмем произвольную внутреннюю точку $\mathbf{c}$ множества C и произвольный вектор $\mathbf{p}$. Положим $r_i \in \{\operatorname{Sign} p_i\}$ $(i=1,\ldots,n)$ и возьмем $\Delta\mathbf{c}(\alpha)$, $\mathbf{c}(\alpha)$ и $\Delta\boldsymbol{\delta}(\alpha)$ из (П.4), так что снова $\mathbf{c}(\alpha)\in C$ при достаточно малых α. Тогда для всех i таких, что $p_i \neq 0$, имеем $|\Delta c_i| = \max\limits_j |\Delta c_j|$, так что в силу условия II (7) для этих i при достаточно малых $\alpha>0$ получаем $\Delta\delta_i(\alpha)\Delta c_i(\alpha)<0$, т. е. $\Delta\delta_i(\alpha)p_i<0$. В пределе по $\alpha\to 0$ получаем для этих i неравенства

$$\sum_j \frac{\partial\delta_i(\mathbf{c})}{\partial c_j} p_i r_j \leqslant 0. \tag{П.7}$$

Заметим теперь, что (П.7) тривиально выполняется и для тех i, для которых $p_i=0$. Суммируя неравенства (П.7) по всем $i=1,\ldots,n$ и подставляя вместо каждого r_i его общее значение $\operatorname{Sign} p_i$, имеем

$$\sum_{i,j} \frac{\partial\delta_i(\mathbf{c})}{\partial c_j} p_i \operatorname{Sign} p_j \leqslant 0. \tag{П.8}$$

Применяя лемму П.1, получаем из (П.8) условие $\mathrm{II}'_{\text{д}}$ (нестрогое неравенство в (11)) для каждой внутренней и по непрерывности для каждой граничной точки множества C.

Обратно, пусть на C выполнено условие $\mathrm{II}_{\text{д}}$. Пусть заданы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}$ из C, $\Delta\mathbf{c}\neq 0$. Возьмем $\mathbf{r}=\Delta\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}(\alpha)$ из (П.4). Пусть $|\Delta c_i| = \max_j |\Delta c_j|$. Тогда в силу условия $\mathrm{II}_{\text{д}}$ (11) имеем

$$\Delta\delta_i(\mathbf{c})\Delta c_i = \int_0^1 \sum_j \frac{\partial\delta_i(\mathbf{c}(\alpha))}{\partial c_j} r_j r_i d\alpha = r_i^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial\delta_i(\mathbf{c}(\alpha))}{\partial c_i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j\neq i} \frac{\partial\delta_i(\mathbf{c}(\alpha))}{\partial c_j}\frac{r_j}{r_i}\right) d\alpha \leqslant r_i^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial\delta_i(\mathbf{c}(\alpha))}{\partial c_i} + \sum_{i\neq j}\left|\frac{\partial\delta_i(\mathbf{c}(\alpha))}{\partial c_j}\right|\right) d\alpha < 0.$$

Таким образом, выполняется условие II (7).

Аналогичным путем получаем, что для выполнения условия III необходимо выполнение на C (нестрогого) неравенства

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \delta_i(\mathbf{c})}{\partial c_j} r_i r_j \leqslant 0 \tag{П.9}$$

при всех $\mathbf{r}$ и достаточно выполнения неравенства (П.9) при всех $\mathbf{r} \neq 0$ как строгого. Применяя известный критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы, получаем утверждение теоремы, относящееся к условию III.

Утверждения теоремы для линейного случая следуют из того, что при $\mathbf{r} \neq 0$ ($\mathbf{p} \neq 0$) неравенства (П.5), (П.7), (П.9), очевидно, с необходимостью выполняются при условиях I–III как строгие.

Теорема полностью доказана.

Лемма П.2. Для любых двух точек $\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}'' \in C$ и для каждого индекса $i = 1, \ldots, n$ справедливы соотношения

$$\delta_i(\mathbf{c}')(c_i'' - c_i') \leqslant \overline{\delta}_i(\mathbf{c}')(c_i'' - c_i'), \tag{П.10}$$

$$(\overline{\delta}_i(\mathbf{c}'') - \overline{\delta}_i(\mathbf{c}'))(c_i'' - c_i') \leqslant (\delta_i(\mathbf{c}'') - \delta_i(\mathbf{c}'))(c_i'' - c_i'), \tag{П.11}$$

$$(\overline{\delta}_i(\mathbf{c}'') - \overline{\delta}_i(\mathbf{c}'))\operatorname{sign}(c_i'' - c_i') \leqslant (\delta_i(\mathbf{c}'') - \delta_i(\mathbf{c}'))\operatorname{sign}(c_i'' - c_i'), \tag{П.12}$$

и

$$\text{если } c_i' = c_i'', \text{ то } |\overline{\delta}_i(\mathbf{c}'') - \overline{\delta}_i(\mathbf{c}')| \leqslant |\delta_i(\mathbf{c}'') - \delta_i(\mathbf{c}')|. \tag{П.13}$$

Доказательство соотношений (П.10)–(П.13) получается путем рассмотрения всех возможных соотношений между δ_i и $\overline{\delta}_i$ в точках $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$. Докажем, например, (П.10). Если $c_i' = c_i''$, то (П.10) очевидно. Пусть $c_i' < c_i''$; тогда и $c_i' < b_i$ и, значит, $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}') \geqslant \delta_i(\mathbf{c}')$. Пусть теперь $c_i'' < c_i'$; тогда и $a_i < c_i'$ и, значит, $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}') \leqslant \delta_i(\mathbf{c}')$. В обоих случаях выполняется (П.10).

Заменив в (П.10) $\mathbf{c}'$ на $\mathbf{c}''$ и $\mathbf{c}''$ на $\mathbf{c}'$, получим неравенство, вычитая из которого неравенство (П.10), получим (П.11).

Аналогичным образом выводятся соотношения (П.12) и (П.13).

Лемма П.3. Пусть выполнено условие I. Пусть $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})\Delta c_i \leqslant 0$ ($i = 1, \ldots, n$) и $\Delta\mathbf{c} \neq 0$. Тогда $\Delta\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}) > 0$ и $\Delta\overline{\Phi}_{\text{I}}(\mathbf{c}) > 0$.

Пусть выполнено условие II. Пусть для некоторого индекса k такого, что $|\delta_k(\mathbf{c})| \geqslant \max_i |\overline{\delta}_i(\mathbf{c})|$, имеем $|\Delta c_k| = \max_i |\Delta c_i|$, $\overline{\delta}_k(\mathbf{c})\Delta c_k \leqslant 0$ и $\Delta\mathbf{c} \neq 0$. Тогда $\Delta\overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c}) > 0$.

Пусть выполнено условие III. Пусть $\Delta c_i = -\lambda\delta_i(\mathbf{c})$ ($i = 1, \ldots, n$), где $\lambda > 0$, и $\Delta\mathbf{c} \neq 0$. Тогда $\Delta\overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c}) > 0$.

Доказательство. Условие I. Выпишем очевидное соотношение

$$\Delta|\delta_i(\mathbf{c})| = |\delta_i(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c})| - |\delta_i(\mathbf{c})| \geqslant -|\delta_i(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}) - \delta_i(\mathbf{c})| = -|\Delta\delta_i(\mathbf{c})|. \tag{П.14}$$

Воспользуемся (П.14) для оценки тех слагаемых в $\Delta\Phi_{\mathrm{I}}(\mathbf{c}) = \sum_i \Delta|\delta_i(\mathbf{c})|$, которым соответствует $\Delta c_i = 0$. Для тех i, для которых $\Delta c_i \neq 0$, дадим другую оценку. Во-первых, учитывая, что $|\mathrm{sign}\,\Delta c_i| = 1$, имеем

$$|\delta_i(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c})| \geqslant -\delta_i(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c})\mathrm{sign}\,\Delta c_i. \tag{П.15}$$

Во-вторых, в силу условия леммы при $\Delta c_i \neq 0$ и $\delta_i(\mathbf{c}) \neq 0$ имеем $\mathrm{sign}\,\delta_i(\mathbf{c}) = -\mathrm{sign}\,\Delta c_i$, так что при $\Delta c_i \neq 0$

$$|\delta_i(\mathbf{c})| = \delta_i(\mathbf{c})\mathrm{sign}\,\delta_i(\mathbf{c}) = -\delta_i(\mathbf{c})\mathrm{sign}\,\Delta c_i. \tag{П.16}$$

Из (П.15) и (П.16) получаем

$$\Delta|\delta_i(\mathbf{c})| \geqslant -\Delta\delta_i(\mathbf{c})\mathrm{sign}\,\Delta c_i, \ \text{если} \Delta c_i = 0. \tag{П.17}$$

Из (П.14) и (П.17) находим

$$\Delta\Phi_{\mathrm{I}}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta|\delta_i(\mathbf{c})| = \sum_{i:\Delta c_i \neq 0} \Delta|\delta_i(\mathbf{c})| + \sum_{i:\Delta c_i = 0} \Delta|\delta_i(\mathbf{c})| \geqslant$$
$$\geqslant -\Big(\sum_{i:\Delta c_i \neq 0} \Delta\delta_i(\mathbf{c})\mathrm{sign}\,\Delta c_i + \sum_{i:\Delta c_i = 0} |\Delta\delta_i(\mathbf{c})|\Big), \tag{П.18}$$

так что в силу условия I (см. (5)) $\Delta\Phi_{\mathrm{I}}(\mathbf{c}) > 0$. Точно также для $\Delta\overline{\Phi}_{\mathrm{I}}(\mathbf{c})$ устанавливается неравенство, аналогичное (П.18) (с $\Delta\overline{\delta}_i$ вместо $\Delta\delta_i$), откуда в силу (П.12), (П.13) и условия I $\Delta\overline{\Phi}_{\mathrm{I}}(\mathbf{c}) > 0$.

Условие II. Согласно (П.10) для данного индекса k имеем

$$\delta_k(\mathbf{c})\Delta c_k \leqslant \overline{\delta}_k(\mathbf{c})\Delta c_k \leqslant 0. \tag{П.19}$$

По условию II

$$\Delta\delta_k(\mathbf{c})\Delta c_k < 0, \tag{П.20}$$

что вместе с (П.19) дает $\delta_k(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c})\Delta c_k < 0$, откуда с учетом (П.10)

$$\overline{\delta}_k(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c})\Delta c_k \leqslant \delta_k(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c})\Delta c_k < 0. \tag{П.21}$$

Из (П.19), (П.20) и (П.21) находим, что

$$|\overline{\delta}_k(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c})| \geqslant |\delta_k(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c})| > |\delta_k(\mathbf{c})|. \tag{П.22}$$

Но по условию леммы $|\delta_k(\mathbf{c})| \geqslant \overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c})$; очевидно также, что $\overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}) \geqslant |\overline{\delta}_k(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c})|$; поэтому из (П.22) получаем

$$\Delta\overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c}) > 0. \tag{П.23}$$

Условие III. Имеем

$$\Delta\overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c}) = \Delta\sum_i (\overline{\delta}_i(\mathbf{c}))^2 = 2\sum_i \overline{\delta}_i(\mathbf{c})\Delta\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) + \sum_i (\Delta\overline{\delta}_i(\mathbf{c}))^2. \tag{П.24}$$

Здесь

$$\sum_i \overline{\delta}_i(\mathbf{c})\Delta\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) = -\frac{1}{\lambda}\sum_i \Delta\overline{\delta}_i(\mathbf{c})\Delta c_i \geqslant -\frac{1}{\lambda}\sum_i \Delta\delta_i(\mathbf{c})\Delta c_i > 0 \tag{П.25}$$

по условию III. Из (П.24) и (П.25) сразу получаем

$$\Delta\overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c}) > \sum_i (\Delta\overline{\delta}_i(\mathbf{c}))^2 > 0. \tag{П.26}$$

Лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Условие 1. Пусть $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) = 0$. Тогда, очевидно, $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}^*)\Delta c_i \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ для любых $\Delta\mathbf{c}$, так что при $\Delta\mathbf{c} \neq 0$ в силу леммы П.3.I $\Delta\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}^*) > 0$ (и $\Delta\overline{\Phi}_{\text{I}}(\mathbf{c}^*) > 0$). Следовательно, $\mathbf{c}^*$ — точка минимума функции Φ_{I} (и $\overline{\Phi}_{\text{I}}$) на C, притом единственная.

Обратно, пусть $\mathbf{c}^*$ — точка минимума $\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c})$ $(\overline{\Phi}_{\text{I}}(\mathbf{c}))$ на C. Допустим, что $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) \neq \mathbf{0}$. Возьмем $\lambda > 0$ столь малое, что приращение $\Delta\mathbf{c} = \lambda\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) \neq 0$ таково, что $\mathbf{c} = \mathbf{c}^* + \Delta\mathbf{c} \in C$ и $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})\delta_i(\mathbf{c}^*) \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$; это всегда возможно в силу непрерывности функций $\delta_i(\mathbf{c})$ и определения (2) функций $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})$. Тогда $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})(c_i^* - c_i) \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\mathbf{c}^* \neq \mathbf{c}$, так что по лемме П.3.I $\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}) < \Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}^*)$ $(\overline{\Phi}_{\text{I}}(\mathbf{c}) < \overline{\Phi}_{\text{I}}(\mathbf{c}^*))$ вопреки минимальности $\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}^*)$ $(\overline{\Phi}_{\text{I}}(\mathbf{c}^*))$ на C.

Условие II. Необходимость сразу видна из того, что если $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) = 0$, то $\overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c}^*) = 0$ — заведомый минимум функции $\overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c}) \geqslant 0$. Докажем единственность точки $\mathbf{c}^*$, указанной выше. Пусть $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}^*$. Тогда по условию II с учетом (П.11) для некоторого индекса k имеем

$$\Delta\overline{\delta}_k\Delta c_k \leqslant \Delta\delta_k\Delta c_k < 0 \quad (\Delta\mathbf{c} = \mathbf{c} - \mathbf{c}^*),$$

откуда $\overline{\delta}_k(\mathbf{c}) = \overline{\delta}_k(\mathbf{c}) - \overline{\delta}_k(\mathbf{c}^*) = \Delta\overline{\delta}_k \neq 0$, так что $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}) \neq 0$ и $\overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c}) > 0$.

Докажем достаточность. Пусть $\mathbf{c}^*$ — точка минимума функции $\overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c})$ на C; допустим, что $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) \neq 0$. Возьмем $\Delta\mathbf{c} = \lambda\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*)$, где $\lambda > 0$ столь мало, что $\mathbf{c} = \mathbf{c}^* + \Delta\mathbf{c} \in C$ и для некоторого индекса k одновременно выполнены три условия:

$$|\overline{\delta}_k(\mathbf{c})| = \max_i |\overline{\delta}_i(\mathbf{c})| = \overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c}), \tag{П.27}$$

$$|\overline{\delta}_k(\mathbf{c}^*)| = \max_i |\overline{\delta}_i(\mathbf{c}^*)| = \overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c}^*), \tag{П.28}$$

$$\overline{\delta}_k(\mathbf{c})\overline{\delta}_k(\mathbf{c}^*) > 0. \tag{П.29}$$

Существование такого λ следует из непрерывности $\delta_k(\mathbf{c})$ и определения $\overline{\delta}_k(\mathbf{c})$. Далее, при этом по построению имеем

$$|\Delta c_k| = \max_i |\Delta c_i| > 0 \tag{П.30}$$

и

$$\delta_k(\mathbf{c})(c_k^* - c_k) < 0, \tag{П.31}$$

так что из (П.27), (П.30) и (П.31) в силу леммы П.3.II получаем $\overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c}) < < \overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c}^*)$ вопреки предположению о минимальности $\overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c}^*)$ на C.

Условие III. Необходимость снова следует из того, что если $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) = = 0$, то $\overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c}^*) = 0$ — очевидный минимум функции $\overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c}) \geqslant 0$. Покажем, что такая точка $\mathbf{c}^*$ единственна. Пусть $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}^*$; тогда в силу условия III с учетом (П.11) получаем

$$\sum_i \overline{\delta}_i(\mathbf{c})(c_i - c_i^*) = \sum_i (\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) - \overline{\delta}_i(\mathbf{c}^*))(c_i - c_i^*) \leqslant \\ \leqslant \sum_i (\delta_i(\mathbf{c}) - \delta_i(\mathbf{c}^*))(c_i - c_i^*) < 0,$$

так что $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}) \neq 0$ и, значит, $\overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c}) > 0$.

Докажем достаточность. Пусть $\mathbf{c}^*$ — точка минимума функции $\Phi_{\text{III}}(\mathbf{c})$ на C; допустим, что $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) \neq 0$. В силу непрерывности $\delta_i(\mathbf{c})$ и определения $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})$ можно выбрать $\gamma > 0$ такое, что для каждого вектора $\mathbf{z}$, удовлетворяющего условиям $\mathbf{c}^* + \mathbf{z} \in C$ и $\|\mathbf{z}\| \leqslant \gamma$, имеет место $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^* + \mathbf{z}) \neq 0$. Положим

$$\Delta c_i(\mathbf{z}) = \begin{cases} 0, \text{ если } c_i^* = a_i, z_i < 0 \text{ или } c_i^* = b_i, z_i > 0, \\ z_i \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{П.32}$$

Очевидно, вектор-функция $\Delta\mathbf{c} = \Delta\mathbf{c}(\mathbf{z})$ с компонентами (П.32) непрерывна, причем если $\|\mathbf{z}\| \leqslant \gamma$, то

$$\|\Delta\mathbf{c}(\mathbf{z})\| \leqslant \gamma, \quad \mathbf{c}^* + \Delta\mathbf{c}(\mathbf{z}) \in C \text{ и } \overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^* + \Delta\mathbf{c}(\mathbf{z})) \neq 0. \tag{П.33}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \frac{\gamma}{\|\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}^* + \Delta\mathbf{c}(\mathbf{z}))\|}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}^* + \Delta\mathbf{c}(\mathbf{z})). \tag{П.34}$$

Обозначим через D_γ замкнутый шар радиуса γ с центром 0. Очевидно, функция $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ определяет непрерывное отображение шара D_γ в себя. Поэтому в силу теоремы Брауэра о неподвижной точке должна существовать точка $\mathbf{z}^* \in D_\gamma$ такая, что $\mathbf{g}(\mathbf{z}^*) = \mathbf{z}^*$ и, значит, $\mathbf{z}^* = \alpha\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}^* + \Delta\mathbf{c}(\mathbf{z}^*))$, где $\alpha > 0$. При этом в силу (П.32) и (П.33)

$$\Delta\mathbf{c}(\mathbf{z}^*) = \alpha\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^* + \Delta\mathbf{c}(\mathbf{z}^*)) \neq 0. \tag{П.35}$$

Применяя лемму П.3.III к векторам $\mathbf{c} = \mathbf{c}^* + \Delta\mathbf{c}(\mathbf{z}^*)$ и $\Delta\mathbf{c} = -\Delta\mathbf{c}(\mathbf{z}^*)$, получаем $\overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c}^* + \Delta\mathbf{c}(\mathbf{z}^*)) < \overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c}^*)$, что противоречит предположению о минимальности $\overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c}^*)$ на C.

Теорема полностью доказана.

Вывод следствия из теоремы 2. Покажем сначала, что в теореме 2 можно заменить однозначные функции $\overline{\Phi}_{\text{I}}$, $\overline{\Phi}_{\text{II}}$, $\overline{\Phi}_{\text{III}}$ соответствующими замкнутыми функциями $\overline{\overline{\Phi}}_{\text{I}}$, $\overline{\overline{\Phi}}_{\text{II}}$, $\overline{\overline{\Phi}}_{\text{III}}$.

Напомним, что многозначная функция $y(\mathbf{x})$ на замкнутом множестве $X \subset R^n$, ставящая в соответствие каждой точке $x \in X$ множество $Y(\mathbf{x})$ числовых значений y, называется замкнутой, если ее график

$$V = \{(y, \mathbf{x}) | y \in Y(x),\ \mathbf{x} \in X\} \tag{П.36}$$

представляет собой замкнутое множество в $(n+1)$-мерном пространстве R^{n+1} [198].

Для получения $\overline{\overline{\Phi}}$ возьмем выражение для соответствующей функции $\overline{\Phi}$ и заменим в нем $\overline{\delta}_i$ на многозначные функции $\overline{\overline{\delta}}_i$, получаемые из $\overline{\delta}_i$ замыканием их графиков и принимающие в каждой точке $\mathbf{c} \in C$ два значения: $\delta_i(\mathbf{c})$ и $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})$, которые различаются между собой только в точках разрыва функции $\delta_i(\mathbf{c})$, где $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) = 0$, но $\delta_i(\mathbf{c}) \neq 0$. Отсюда видно, что $|\overline{\overline{\delta}}_i(\mathbf{c})| \geqslant |\overline{\delta}_i(\mathbf{c})|$ для всех точек $\mathbf{c} \in C$ и всех $i = 1, \ldots, n$, так что $\overline{\overline{\Phi}}(\mathbf{c}) \geqslant \overline{\Phi}(\mathbf{c})$ для всех $\mathbf{c} \in C$, причем в каждой точке $\mathbf{c} \in C$ одно из значений многозначной функции $|\overline{\overline{\delta}}_i(\mathbf{c})|$ $(i = 1, \ldots, n)$ (а значит, и $\overline{\overline{\Phi}}(\mathbf{c})$) совпадает со значением соответствующей функции $|\overline{\delta}_i(\mathbf{c})|$ ($\overline{\Phi}(\mathbf{c})$).

Это рассуждение показывает, что минимумы одноименных функций $\overline{\Phi}(\mathbf{c})$ и $\Phi(\mathbf{c})$ на C либо достигаются в одной и той же точке $\mathbf{c}^* \in C$, либо не достигаются на C вообще. Поэтому в теореме 2 можно заменить каждую функцию $\overline{\Phi}(\mathbf{c})$ на соответствующую функцию $\overline{\overline{\Phi}}(\mathbf{c})$ и воспользоваться следующей леммой.

Лемма П.4. Пусть $y(\mathbf{x})$ — замкнутая многозначная скалярная функция на замкнутом ограниченном множестве $X \subset R^n$ и множество ее значений $\{y | y \in Y(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X\}$ ограничено. Тогда функция $y(\mathbf{x})$ достигает на X своего минимума, т.е. существует точка $\mathbf{x}^* \in X$ такая, что число $y^* = \min\{y | y \in \ \in Y(\mathbf{x}^*)\}$ определено и

$$y^* \leqslant y \text{ для всех } y \in Y(\mathbf{x}), x \in X. \tag{П.37}$$

Справедливость этой леммы ясна из рассмотрения непрерывной однозначной функции $f(y, \mathbf{x}) \equiv y$ на замкнутом ограниченном множестве V (П.36).

Установим теперь следствия 1–3 из теоремы 2, в которой вместо $\overline{\Phi}$ подставлены соответствующие функции $\overline{\overline{\Phi}}$ (ради единообразия не будем особо выделять условие I, при котором можно было бы пользоваться однозначной непрерывной функцией Φ_{I}).

Следствие 1 получается применением леммы П.4 к соответствующей функции $\overline{\overline{\Phi}}(\mathbf{c})$, чем и доказывается достижимость $\min \overline{\Phi}(\mathbf{c})$ $(= \min \overline{\overline{\Phi}}(\mathbf{c}))$ на C.

Следствие 2 получается применением леммы П.4 к соответствующей функции $\overline{\overline{\Phi}}$ на множестве S, которое без ограничения общности можно считать замкнутым (так как в противном случае можно взять его замыкание, также, очевидно, удовлетворяющее условиям следствия 2). Этим доказывается достижимость $\min \overline{\Phi}(\mathbf{c})$ на S в некоторой точке $\mathbf{c}^* \in S$; а так как $\overline{\Phi}(\mathbf{c}^*) \leqslant \overline{\Phi}(\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{c})) \leqslant \overline{\Phi}(\mathbf{c})$ для любой точки $\mathbf{c} \in C$, то $\mathbf{c}^*$ доставляет $\min \overline{\Phi}(\mathbf{c})$ на C.

Следствие 2а получается как частный случай следствия 2, если положить $S = \{\mathbf{c} | \overline{\Phi}(\mathbf{c}) \leqslant A\}$, где A столь велико, что S не пусто.

Следствие 3 получается применением леммы П.4 к $\overline{\overline{\Phi}}$ на S, чем доказывается достижимость $\min \overline{\Phi}(\mathbf{c})$ на S в некоторой точке $\mathbf{c}^* \in$ $\in S$. Теперь остается заметить, что если образовать функции $\overline{\delta}_i^{\text{нов}}(\mathbf{c})$ из $\delta_i(\mathbf{c})$ на множестве $C^{\text{нов}} = S$ по формальному правилу (2), то в силу условий следствия 3 окажется $\overline{\delta}_i^{\text{нов}}(\mathbf{c}) \equiv \delta_i(\mathbf{c})$ на S и, значит, $\mathbf{c}^*$ доставляет минимум соответствующей функции $\overline{\Phi}^{\text{нов}}(\mathbf{c})$ на $C^{\text{нов}}$. Тогда по теореме 2 $\overline{\boldsymbol{\delta}}^{\text{нов}}(\mathbf{c}^*) = 0$, т. е. $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) = 0$.

Доказательство леммы 1. Условие I. Вычислим правостороннюю производную функции $F_{\text{I}}(\mathbf{c}(t))$ по t в произвольной точке $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}^*$ траектории $\mathbf{c}(t)$ процесса $(*)$:

$$\frac{d}{dt} F_{\text{I}}(\mathbf{c}) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} |c_i - c_i^*| = \sum_{i: c_i \neq c_i^*} \dot{c}_i \operatorname{sign}(c_i - c_i^*) + \sum_{i: c_i = c_i^*} |\dot{c}_i| =$$
$$= \sum_{i: c_i \neq c_i^*} (\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) - \overline{\delta}_i(\mathbf{c}^*)) \operatorname{sign}(c_i - c_i^*) + \sum_{i: c_i = c_i^*} |\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) - \overline{\delta}_i(\mathbf{c}^*)|.$$

Применяя лемму П.2 (соотношения (П.12), (П.13)) и условие I, имеем

$$\frac{d}{dt} F_{\text{I}}(\mathbf{c}) \leqslant \sum_{i: c_i \neq c_i^*} (\delta_i(\mathbf{c}) - \delta_i(\mathbf{c}^*)) \operatorname{sign}(c_i - c_i^*) + \sum_{i: c_i = c_i^*} |\delta_i(\mathbf{c}) - \delta_i(\mathbf{c}^*)| < 0, \tag{П.38}$$

откуда и следует убывание $F_{\text{I}}(\mathbf{c}(t))$ по t.

Условие II. Пусть $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t) \neq \mathbf{c}^*$. Обозначим через K множество всех индексов k таких, что

$$|c_k - c_k^*| = \max_i |c_i - c_i^*| \quad (> 0).$$

Тогда правосторонняя производная функции $F_{\text{II}}(\mathbf{c}(t))$ по t равна

$$\frac{d}{dt}F_{\text{II}}(\mathbf{c}) = \frac{d}{dt}\max_i |c_i - c_i^*| = \max_{k\in K}\frac{d}{dt}|c_k - c_k^*| = \max_{k\in K}[\dot c_k \operatorname{sign}(c_k - c_k^*)].$$

Для всех $k \in K$ согласно условию II с учетом (П.11) получаем

$$\overline{\delta}_k(\mathbf{c})(c_k - c_k^*) = (\overline{\delta}_k(\mathbf{c}) - \overline{\delta}_k(\mathbf{c}^*))(c_k - c_k^*) \leqslant (\delta_k(\mathbf{c}) - \delta_k(\mathbf{c}^*))(c_k - c_k^*) < 0,$$

причем на траектории $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$ всегда $\overline{\delta}_k(\mathbf{c})\dot c_k > 0$, так что в итоге получаем $\dot c_k(c_k - c_k^*) < 0$. Поэтому $\dot c_k \operatorname{sign}(c_k - c_k^*) = -|\dot c_k| < 0$ для всех $k \in K$, откуда

$$\frac{d}{dt}F_{\text{II}}(\mathbf{c}) = \max_{k\in K}(-|\dot c_k|) = -\min_{k\in K}|\dot c_k| < 0, \tag{П.39}$$

так что $F_{\text{II}}(\mathbf{c})$ убывает вдоль траектории $\mathbf{c}(t)$, пока $\mathbf{c}(t) \neq \mathbf{c}^*$.

Условие III. Доказательство, аналогичное предыдущему, следует из

$$\frac{d}{dt}F_{\text{III}}(\mathbf{c}) = \frac{d}{dt}\sum_i (c_i - c_i^*)^2 \leqslant 2\sum_i (c_i - c_i^*)(\delta_i(\mathbf{c}) - \delta_i(\mathbf{c}^*)) < 0. \tag{П.40}$$

Лемма П.5. Пусть $H(\mathbf{c})$ — непрерывная функция на C, $H(\mathbf{c}) > 0$ при $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}^*$ и $H(\mathbf{c}^*) = 0$. Пусть $\mathbf{c}(t)$ — ограниченная непрерывная кривая в C и $H(\mathbf{c}) \leqslant 0$ всюду на $\mathbf{c}(t)$. Пусть для любого замкнутого ограниченного множества $\sum \subset C$, не содержащего $\mathbf{c}^*$, из $\mathbf{c}(t) \in \sum$ следует $\dot H(\mathbf{c}(t)) \leqslant \gamma < 0$ (где $\gamma = \gamma(\sum)$). Тогда $\mathbf{c}(t) \to \mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$.

Эта лемма — вариант известных теорем Ляпунова (см., например, работу [12]).

Доказательство теоремы 3. Условие I. Заметим, что каждая траектория $\mathbf{c}(t)$ процесса $(*)$ в силу леммы 1.I целиком лежит в ограниченной области $\{\mathbf{c}|F_{\text{I}}(\mathbf{c}) \leqslant F_{\text{I}}(\mathbf{c}(0))\}$. Из (П.38) видно, что производная $\dot F_{\text{I}}(\mathbf{c})$ мажорируется значениями многозначной функции

$$\Psi(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n}(\delta_i(\mathbf{c}) - \delta_i(\mathbf{c}^*))\operatorname{Sign}(c_i - c_i^*), \tag{П.41}$$

которая на любом ограниченном замкнутом множестве $\sum$, как замкнутая многозначная функция, достигает своего максимального значения ψ^* (см. лемму П.4). Если $\mathbf{c}^* \notin \sum$, то $\Psi(\mathbf{c}) < 0$ при всех $\mathbf{c} \in \sum$

в силу условия I. Поэтому $\psi^* = \max\limits_{c\in\Sigma}\Psi(\mathbf{c}) < 0$ и, значит, все значения ψ, принимаемые функцией $\Psi(\mathbf{c})$ на $\sum$, удовлетворяют условию $\psi \leqslant \psi^* < 0$. Следовательно, производная $\dot{F}_{\text{I}}(\mathbf{c})$ на каждом множестве $\sum \not\ni \mathbf{c}^*$ мажорируется отрицательной константой: $\dot{F}_{\text{I}}(\mathbf{c}) \leqslant \text{const} < 0$. Применяя теперь лемму П.5, заключаем, что $\mathbf{c}(t) \to \mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$.

Условие II. Снова прежде всего заметим, что каждая траектория процесса $(**)$ в силу условия II леммы 1 целиком лежит в ограниченной области $\{\mathbf{c}|F_{\text{II}}(\mathbf{c}) \leqslant F_{\text{II}}(\mathbf{c}(0))\}$. Заметим также, что в каждой ограниченной замкнутой области $\sum$, не содержащей точку $\mathbf{c}^*$, функции $\overline{\delta}_k(\mathbf{c})$, $k \in K$, где множество индексов $K = K(\mathbf{c})$ введено в доказательстве утверждения II леммы 1, отделены от нуля в совокупности, т. е. для каждой такой области $\sum$ можно указать число $\gamma > 0$ такое, что $|\overline{\delta}_k(\mathbf{c})| \geqslant \gamma$ при $k \in K(\mathbf{c})$, $\mathbf{c} \in \sum$. Тогда в силу условия невырожденности траектории $\mathbf{c}(t)$ можно указать такое число $\beta > 0$, что $|\dot{c}_k(t)| \geqslant \beta$ для всех $k \in K(\mathbf{c}(t))$ при всех t таких, что $c(t) \in \sum$. Используя теперь оценку (П.39) и применяя лемму П.5, заключаем, что $\mathbf{c}(t) \to \mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$.

Условие III. Достаточно применить лемму П.5 к оценке (П.40) производной $\dot{F}_{\text{III}}(\mathbf{c})$ сверху непрерывной отрицательной вне $\mathbf{c}^*$ функцией с учетом ограниченности траектории $\mathbf{c}(t)$ в силу утверждения III леммы 1.

Теорема полностью доказана.

Лемма П.6. Пусть $f(t)$ — функция, заданная на $(0, \bar{t})$, и пусть для каждого $t \in (0, \bar{t})$ существует $\tau(t) > 0$ такое, что $f(\theta) > f(t)$ при всех $\theta \in (t - \tau(t), t)$. Тогда $f(t)$ убывает на $(0, \bar{t})$.

Доказательство немедленно вытекает из леммы 19.3 в [198].

Доказательство леммы 2. Условие I. Рассмотрим произвольную траекторию $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$ и покажем, что функция $\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}(t))$ монотонно убывает на интервале $[0, t^*)$, где t^* (возможно, равное $+\infty$) определяется как $t^* = \sup\{t|\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}(t)) \neq 0\}$. Возьмем $t \in (0, t^*)$ и положим $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$. При этом $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}^*$, т. е. $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}) \neq 0$. В силу непрерывности $\mathbf{c}(t)$ по t и $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c})$ по $\mathbf{c}$ и определения $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c})$ можно выбрать $\tau = \tau(t) > 0$ столь малое, что при всех $\theta \in (t - \tau, t)$ будет $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}(\theta))\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, причем хотя бы для одного k будет $\overline{\delta}_k(\mathbf{c}(\theta))\overline{\delta}_k(\mathbf{c}) > 0$. Поэтому на траектории системы $(**)$ всюду $\dot{c}_i(\theta)\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, причем хотя бы для одного k имеем $\dot{c}_k(\theta)\overline{\delta}_k(\mathbf{c}) > 0$. Отсюда, интегрируя $\dot{c}_i$ по времени от $\theta \in (t - \tau, t)$ до t, получаем

$$\overline{\delta}_i(\mathbf{c})(c_i(\theta) - c_i) \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{П.42}$$

причем $\mathbf{c}(\theta) \neq \mathbf{c}$. Отсюда по утверждению I леммы П.3. $\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}(\theta)) > \Phi_{\text{I}}(\mathbf{c})$.

Тем самым показано, что для каждого $t \in (0, t^*)$ существует $\tau(t) > 0$ такое, что при всех $\theta \in (t - \tau, t)$ $\Phi_{\mathrm{I}}(\mathbf{c}(\theta)) > \Phi_{\mathrm{I}}(\mathbf{c}(t))$. Это согласно лемме П.6 означает, что $\Phi_{\mathrm{I}}(\mathbf{c}(t))$ убывает на $(0, t^*)$. Точно так же рассматривается $\overline{\Phi}_{\mathrm{I}}(\mathbf{c}(t))$ на $(0, t^*)$. Нетрудно видеть, что интервал $(0, t^*)$ здесь можно замкнуть слева. Итак, функции $\Phi_{\mathrm{I}}(\mathbf{c})$ и $\overline{\Phi}_{\mathrm{I}}(\mathbf{c})$ убывают на траектории $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$ от $t = 0$ до тех пор, пока $\mathbf{c}(t) \neq \mathbf{c}^*$.

Условие II. Возьмем $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t) \neq \mathbf{c}^*$. Тогда в силу непрерывности $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})$ и определения $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})$ можно указать окрестность B точки $\mathbf{c}$ в C столь малую, что если $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \neq 0$, то $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}')$ совпадает с $\delta_i(\mathbf{c}')$ при всех $\mathbf{c}' \in B$ и, значит, является на B непрерывной функцией. Поэтому если для некоторого индекса k

$$|\overline{\delta}_k(\mathbf{c})| = \max_i |\overline{\delta}_i(\mathbf{c})| = \alpha > 0,$$

то для любого β $(0 < \beta < \alpha)$ получим в достаточно малой окрестности B

$$|\overline{\delta}_k(\mathbf{c}')| > \beta \text{ и } \overline{\delta}_k(\mathbf{c}')\overline{\delta}_k(\mathbf{c}) > 0, \quad \mathbf{c}' \in B. \tag{П.43}$$

С другой стороны, можно указать такое β $(0 < \beta < \alpha)$ и столь малую окрестность B точки $\mathbf{c}$, что если $|\delta_j(\mathbf{c})| < \max_i |\overline{\delta}_i(\mathbf{c})| = \alpha$, то $|\delta_j(\mathbf{c}')| < \beta$ при всех $\mathbf{c}' \in B$; значит, и подавно

$$|\overline{\delta}_j(\mathbf{c}')| > \beta, \quad \mathbf{c}' \in B. \tag{П.44}$$

Учитывая непрерывность $\mathbf{c}(t)$ по t, из (П.43) и (П.44) заключаем, что можно найти число $\tau = \tau(t) > 0$, удовлетворяющее следующему условию. Рассмотрим приращение $\Delta\mathbf{c}$ вдоль данной траектории $\mathbf{c}(t)$ процесса $(*)$ «вспять»:

$$\Delta c_i = c_i(t - \Delta t) - c_i(t) = -\int\limits_{t-\Delta t}^{t} \overline{\delta}_i(\mathbf{c}(\theta))d\theta \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда при любом Δt таком, что $0 < \Delta t < \tau$, из

$$|\Delta c_k| = \max_i |\Delta c_i|$$

следует, что либо $|\overline{\delta}_k(\mathbf{c})| = \max_i |\delta_i(\mathbf{c})|$, либо $\overline{\delta}_k(\mathbf{c}) = 0$, но $|\delta_k(\mathbf{c})| \geqslant \max_i |\overline{\delta}_i(\mathbf{c})|$, причем в любом случае $\overline{\delta}_k(\mathbf{c})\Delta c_k \leqslant 0$.

Таким образом, выполняются условия пункта II леммы П.3; поэтому $\overline{\Phi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}) > \overline{\Phi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{c})$, т.е. $\overline{\Phi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{c}(t - \Delta t)) > \overline{\Phi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{c}(t))$ для всех $\Delta t \in (0, \tau(t))$. Применяя лемму П.6, заключаем, что функция $\overline{\Phi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{c})$

монотонно убывает на траектории $\mathbf{c}(t)$ процесса $(*)$[1], если только $\mathbf{c}(t) \neq \mathbf{c}^*$.

Условие $III_Д$. Ввиду того что на траектории процесса $(*)$ $\dfrac{d}{dt}\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \neq$ $\neq \dfrac{d}{dt}\delta_i(\mathbf{c})$ только тогда, когда $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) = 0$, имеем

$$\frac{d}{dt}\overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c}(t)) = \frac{d}{dt}\sum_i(\overline{\delta}_i(\mathbf{c}(t)))^2 = 2\sum_i \overline{\delta}_i(\mathbf{c}(t))\frac{d}{dt}\overline{\delta}_i(\mathbf{c}(t)) =$$

$$= 2\sum_i \overline{\delta}_i(\mathbf{c}(t))\frac{d}{dt}\delta_i(\mathbf{c}(t)) = 2\sum_i \overline{\delta}_i(\mathbf{c})\frac{\partial \delta_i(\mathbf{c})}{\partial c_j}\overline{\delta}_j(\mathbf{c}). \tag{П.45}$$

В силу условия $III_{\text{Д}}$ и критерия Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы величина (П.45) при $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}^*$ отрицательна (и, более того, в силу непрерывной дифференцируемости $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})$ и определения $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})$ она отделена от нуля на любом ограниченном замкнутом множестве $\sum \subset C$, не содержащем $\mathbf{c}^*$). Отсюда сразу следует монотонное убывание $\overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c}(t))$ до тех пор, пока $\mathbf{c}(t) \neq \mathbf{c}^*$.

Лемма 2 полностью доказана.

Лемма П.7. Пусть $\mathbf{c}(t)$ — невырожденная траектория процесса $(**)$; пусть для некоторой последовательности $\{t_\nu\}$ такой, что $t_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$, существует $\lim \mathbf{c}(t_\nu) = \tilde{\mathbf{c}}$, и пусть $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\tilde{\mathbf{c}}) \neq 0$. Тогда можно указать такую шаровую окрестность точки $\tilde{\mathbf{c}}$ в C радиуса r

$$B_r = \{\mathbf{c} | \mathbf{c} \in C,\ \ \|\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}}\| \leqslant r\} \tag{П.46}$$

и такую пару последовательностей $\{t'_\nu\}$ и $\{t''_\nu\}$, что: а) моменты t'_ν и t''_ν чередуются: $t'_1 < t''_1 < t'_2 < t''_2 < \ldots$, причем $t'_\nu \to \infty$, $t''_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$; б) существует $\lim \mathbf{c}(t''_\nu) = \tilde{\mathbf{c}}$; в) существует $\lim \mathbf{c}(t'_\nu) = \tilde{\mathbf{c}}'$, $\tilde{\mathbf{c}}' \in S_r$, где S_r — сферическая часть границы области B_r: $S_r = \{\mathbf{c} | \mathbf{c} \in$ $\in C, \|\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}}\| = r\}$; г) $\mathbf{c}(t) \in B_r$ при $t \in [t'_\nu, t''_\nu]$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Возьмем $r > 0$ столь малым, что для некоторого k при всех $\mathbf{c} \in B_r$ будем иметь $\overline{\delta}_k(\mathbf{c})\overline{\delta}_k(\tilde{\mathbf{c}}) > 0$ и $|\overline{\delta}_k(\mathbf{c})| \geqslant \alpha >$ > 0. Последнее ввиду невырожденности траектории $\mathbf{c}(t)$ гарантирует, что $|\dot{c}_k(t)| \geqslant \gamma > 0$ при $\mathbf{c}(t) \in B_r$; очевидно также, что при этом $\dot{c}_k(t)\overline{\delta}_k(\tilde{\mathbf{c}}) > 0$, так что $\dot{c}_k$ не меняет знака при пребывании точки $\mathbf{c}(t)$ в

[1] Лемма 2.II справедлива и для любой траектории $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$, на которой соблюдается условие «иерархии скоростей»:

если $$|\overline{\delta}_k(\mathbf{c}(t))| > |\overline{\delta}_i(\mathbf{c}(t))|, \text{ то } |\dot{c}_k(t)| > |\dot{c}_i(t)|.$$

В частности, это справедливо для всех траекторий процесса вида $\dot{c}_i = f(\overline{\delta}_i(\mathbf{c}(t)))$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $f(x)$ — монотонно возрастающая функция, сохраняющая знак.

B_r. Отсюда следует, что точка $\mathbf{c}(t)$ всякий раз, оказавшись в области B_r, покинет ее не позже, чем через время $2r/\gamma$. Последующий приход точки $\mathbf{c}(t)$ в B_r связан с обязательным пересечением S_r. Ввиду этого можно указать последовательность «моментов прихода» точки $\mathbf{c}(t)$ в B_r, обозначаемую через $\{t'_\nu\}$, такую, что $\mathbf{c}(t'_\nu) \in S_r$ и $\mathbf{c}(t'_\nu) \in B_r$ при $t \in [t'_\nu, t''_\nu]$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Легко видеть, что, выделяя соответствующие подпоследовательности, можно получить пару последовательностей $\{t'_\nu\}$ и $\{t''_\nu\}$, удовлетворяющую условию «а». При этом в силу ограниченности и замкнутости множества S_r последовательность $\{\mathbf{c}(t'_\nu)\}$ можно без ограничения общности предполагать сходящейся к некоторой точке $\tilde{\mathbf{c}}'$, так что выполнено и условие «в». Условия «б» и «г» выполнены по построению.

Доказательство теоремы 4. Условие I. Пусть $\mathbf{c}(t)$ — траектория системы $(**)$, не уходящая в бесконечность: $\|\mathbf{c}(t)\| \not\to \infty$ при $t \to \infty$. Тогда можно указать последовательность $\{t_\nu\}$ такую, что $t_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$, но все точки $\mathbf{c}(t_\nu)$ лежат в некоторой ограниченной области. Выделяя, если нужно, подпоследовательность, всегда получим последовательность точек $\{\mathbf{c}(t_\nu)\}$, сходящуюся к некоторой точке $\tilde{\mathbf{c}} \in C$. Докажем, что $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\tilde{\mathbf{c}}) = 0$.

Допустим противное: $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\tilde{\mathbf{c}}) \neq 0$. Тогда выполнены условия леммы П.7. Радиус r в этой лемме можно подчинить дополнительному требованию, чтобы в B_r выполнялись условия $\overline{\delta}_i(\mathbf{c})\overline{\delta}_i(\tilde{\mathbf{c}}) \geqslant 0$, $\mathbf{c} \in B_r$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда с учетом леммы П.7г получим подобно (П.42)

$$\overline{\delta}_i(\tilde{\mathbf{c}})(c_i(t'_\nu) - c_i(t''_\nu)) \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

для каждого $\nu = 1, 2, \ldots$, откуда в пределе по $\nu \to \infty$ с учетом леммы П.7б,в получаем

$$\overline{\delta}_i(\tilde{\mathbf{c}})(\tilde{\mathbf{c}}' - \tilde{\mathbf{c}}) \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

причем $\tilde{\mathbf{c}}' \neq \tilde{\mathbf{c}}$. Отсюда по утверждению I леммы П.3 $\Phi_{\text{I}}(\tilde{\mathbf{c}}') > \Phi_{\text{I}}(\tilde{\mathbf{c}})$. Но тогда в силу непрерывности функции $\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c})$ можно указать $\varkappa > 0$ и номер $\nu_0 = \nu_0(\varkappa)$ такие, что при всех $\nu \geqslant \nu_0$

$$\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}(t'_\nu)) - \Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}(t''_\nu)) \geqslant \varkappa.$$

Таким образом, на оси времени имеется последовательность точек $t'_{\nu_0} < t''_{\nu_0} < t'_{\nu_0+1} < t''_{\nu_0+1} < \ldots$ такая, что при всех $\nu \geqslant \nu_0$ $\Delta_\nu \Phi_{\text{I}} = \Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}(t''_\nu)) - \Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}(t'_\nu)) \leqslant -\varkappa < 0$. Поэтому с учетом монотонного убывания $\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}(t))$ согласно лемме 2.I получаем $\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}(t''_\nu)) \leqslant \Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}(t''_{\nu_0})) - (\nu - \nu_0)\varkappa$ при $\nu \geqslant \nu_0$, откуда $\Phi_{\text{I}}(\mathbf{c}(t''_\nu)) \to -\infty$ при $\nu \to \infty$ вопреки неотрицательности Φ_{I}. Это противоречие доказывает, что $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\tilde{\mathbf{c}}) = 0$, т.е. что $\tilde{\mathbf{c}}$ является точкой равновесия, единственной по теореме 2.I.

Докажем, что $\mathbf{c}(t) \to \tilde{\mathbf{c}}$ при $t \to \infty$. Допустим противное: $\mathbf{c}(t) \not\to \tilde{\mathbf{c}}$. Тогда, как легко видеть, траектория $\mathbf{c}(t)$ должна иметь помимо $\tilde{\mathbf{c}}$ еще хотя бы одну предельную точку $\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}$. Но тогда для $\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}$ совершенно аналогично получаем $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}) = 0$, что противоречит единственности точки равновесия.

Наконец, пусть $\mathbf{c}(t) \not\to \infty$ — траектория процесса $(*)$. Тогда, по только что доказанному, точка равновесия существует, и по теореме 3.I к ней сходится каждая траектория процесса $(*)$.

Условие II. Аналогично предыдущему с использованием лемм П.7, П.3. (утверждение II) и утверждению II леммы 2 для оценки убывания функции $\overline{\Phi}_{\text{II}}(\mathbf{c}(t))$ показывается, что если некоторая траектория $\mathbf{c}(t)$ процесса $(*)$ не уходит в ∞, то существует точка равновесия; к этой точке согласно утверждению II теоремы 3 сходится каждая невырожденная траектория процесса $(**)$.

Условие $III_Д$. Снова аналогично случаю условия I с использованием леммы П.7 и утверждению III леммы 2 (соотношение (П.45)) для оценки убывания функции $\overline{\Phi}_{\text{III}}(\mathbf{c}(t))$ показывается, что если некоторая траектория процесса $(*)$ не уходит в ∞, то существует точка равновесия; к ней по утверждению III теоремы 3 сходится каждая траектория процесса $(*)$.

Доказательство теоремы 4 завершено.

Модели совместного функционирования многих целенаправленных элементов. II [1]

Рассматриваются системы, состоящие из взаимосвязанных элементов с индивидуальными целями (*см.* [41]). *Исследуется степень общности введенных в* [41] *условий успешного функционирования таких систем. В рамках общей теоретической схемы из* [41] *анализируется серия примеров из различных областей: модели распределения физических, экономических и других ресурсов, системы массового обслуживания, модели экономического равновесия, некоторые задачи теории игр и поведения автоматов.*

[1] Автоматика и телемеханика.—1972.—№12.—С. 108–128.

1. Сравнительный анализ условий, налагаемых на функции-индикаторы

В первой части работы (см. [41]) рассмотрены три различных условия I, II, III (а также их дифференциальные варианты $\mathrm{I}_{\text{д}}$, $\mathrm{II}_{\text{д}}$, $\mathrm{III}_{\text{д}}$), налагаемые на наборы функций-индикаторов $\delta_1(\mathbf{c}), \ldots, \delta_n(\mathbf{c})$:

I. $\sum\limits_i \Delta\delta_i(\mathbf{c}) \operatorname{sign} \Delta c_i < 0 \quad (\Delta\mathbf{c} \neq 0)$.

II. $\Delta\delta_i(\mathbf{c})\Delta c_i < 0$ для i таких, что $|\Delta c_i| = \max |\Delta c_k| > 0$.

III. $\sum\limits_i \Delta\delta_i(\mathbf{c})\Delta c_i < 0 \quad (\Delta\mathbf{c} \neq 0)$.

Показано, что выполнение каждого из этих условий обеспечивает (при некоторых дополнительных требованиях) успешное функционирование системы, а именно обеспечивает существование равновесия

$$\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (\circ)$$

и сходимость к нему всех траекторий процесса

$$\dot{c}_i = \overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (*)$$

или, даже сильнее, всех невырожденных траекторий процесса

$$\operatorname{sign} \dot{c}_i = \operatorname{sign} \overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (**)$$

Возникает вопрос: насколько широки классы систем, определяемые условиями I–III, и каковы возможности «подгонки» заданной системы под эти условия. Обсуждению этого вопроса и посвящен настоящий раздел статьи. Далее будет выяснено, как соотносятся между собой условия I–III в общем случае, а также в характерном частном случае — «линейном» и «контрамонотонном»; на примере последнего случая будет показано, насколько эти условия — достаточные условия успешного функционирования — близки к необходимым. Здесь же рассматривается еще одно полезное условие «групповой контрамонотонности». В пункте 2 полученные результаты используются при анализе конкретных примеров.

Масштабы переменных и связь между условиями I–III. Пусть система задана своим множеством допустимых состояний C и набором функций-индикаторов $\delta_1(\mathbf{c}), \ldots, \delta_n(\mathbf{c})$. Если эта система непосредственно не подпадает ни под одно из условий I–III, то можно попытаться изменить заданную форму ее описания. Ограничимся здесь рассмотрением изменений масштабов по осям; прием «подбора масштабов» оказывается, с одной стороны, достаточно действенным при анализе конкретных примеров, а с другой стороны, позволяет установить взаимосвязи между условиями I–III. Простейшее, линейное изменение масштабов представляет собой переход к новым фиксированным единицам измерения и сводится к замене переменных c_i на $c_i^{\text{нов}} = \lambda_i c_i$, δ_i на $\delta_i^{\text{нов}} = \mu_i \delta_i$, где λ_i, μ_i — положительные константы ($i = 1, \ldots, n$). Могут также оказаться полезными и более общие, нелинейные изменения масштабов, т.е. замены c_i на $c_i^{\text{нов}} = \varphi_i(c_i)$, δ_i на $\delta_i^{\text{нов}} = \psi_i(\delta_i)$, где φ_i, ψ_i — монотонно возрастающие функции [1].

Имея в виду указанные замены переменных, естественно рассматривать условия I–III и их дифференциальные варианты $\mathrm{I}_{\text{д}}$–$\mathrm{III}_{\text{д}}$ с точностью до подбора масштабов по осям c_i, δ_i. Используя теорему 1 из [41], выпишем соответствующие модифицированные дифференциальные условия:

$$\mathrm{I}_{\text{дм}}\colon \begin{cases} \mu_i \dfrac{\partial \delta_i}{\partial c_i} + \displaystyle\sum_{j \neq i} \mu_j \left| \dfrac{\partial \delta_j}{\partial c_i} \right| < 0 \quad (i = 1, \ldots, n), & (1) \\ \text{при некоторых } \mu_1, \ldots, \mu_n > 0, & (2) \end{cases}$$

$$\mathrm{II}_{\text{дм}}\colon \begin{cases} \nu_i \dfrac{\partial \delta_i}{\partial c_i} + \displaystyle\sum_{j \neq i} \nu_j \left| \dfrac{\partial \delta_i}{\partial c_j} \right| < 0 \quad (i = 1, \ldots, n), & (3) \\ \text{при некоторых } \nu_1, \ldots, \nu_n > 0, & (4) \end{cases}$$

$$\mathrm{III}_{\text{дм}}\colon \begin{cases} \text{все } \det\Big[-\Big(\mu_i \dfrac{\partial \delta_i}{\partial c_j} \nu_j + \mu_j \dfrac{\partial \delta_j}{\partial c_i} \nu_i\Big)\Big]_{i_1, \ldots, i_k} > 0 \quad (k = 1, \ldots, n), & (5) \\ \text{при некоторых } \mu_1, \ldots, \mu_n, \nu_1, \ldots, \nu_n > 0. & (6) \end{cases}$$

При $\mu_1, \ldots, \mu_n, \nu_1, \ldots, \nu_n = 1$ условия $\mathrm{I}_{\text{дм}}$–$\mathrm{III}_{\text{дм}}$ представляют собой условия $\mathrm{I}_{\text{д}}$–$\mathrm{III}_{\text{д}}$ из [41]; вообще, условия $\mathrm{I}_{\text{дм}}$–$\mathrm{III}_{\text{дм}}$ превращаются в $\mathrm{I}_{\text{д}}$–$\mathrm{III}_{\text{д}}$ соответственно при переходе к $c_i^{\text{нов}} = \dfrac{1}{\nu_i} c_i$, $\delta_i^{\text{нов}} = \mu_i \delta_i$. Условия $\mathrm{I}_{\text{дм}}$–$\mathrm{III}_{\text{дм}}$ имеют локальный характер; коэффициенты μ_i, ν_i здесь могут зависеть от $\mathbf{c}$. Если же μ_i, ν_i — константы, не зависящие от $\mathbf{c}$, то указанные замены переменных осуществимы сразу на всем множестве C, и в новых переменных $c_i^{\text{нов}}$, $\delta_i^{\text{нов}}$ всюду на C будет выполнено соответствующее условие $\mathrm{I}_{\text{д}}$–$\mathrm{III}_{\text{д}}$ [2]. Это рассуждение, в частности,

[1] Легко видеть, в частности, что изменения масштабов c_i влияют на выполнение условий II и III, но не условия I, а изменения масштабов δ_i — на выполнение условий I и III, но не II.

[2] Отметим, что в [26] исследовались динамические процессы вида (∗) с функциями δ_i, удовлетворяющими дифференциальным условиям вида $\mathrm{I}_{\text{дм}}$–$\mathrm{III}_{\text{дм}}$ с постоянными коэффициентами μ_i, ν_i, и был доказан ряд утверждений о сходимости траекторий этих процессов к равновесию (без явного доказательства существования

всегда применимо к линейным функциям-индикаторам, для которых $\partial\delta_i/\partial c_j = \text{const}$ на C и, значит, можно полагать μ_i, $\nu_i = \text{const}$ на C.

Теорема 1. Условия $\mathrm{I}_{\text{дм}}$ и $\mathrm{II}_{\text{дм}}$ эквивалентны друг другу и влекут за собой условие $\mathrm{III}_{\text{дм}}$.

Доказательство теоремы 1 приводится в приложении. Ввиду того, что в линейном случае конечные условия I–III эквивалентны дифференциальным условиям $\mathrm{I}_{\text{д}}$–$\mathrm{III}_{\text{д}}$ соответственно (теорема 1 в [41]), получаем следующее следствие.

Следствие. На классе линейных функций-индикаторов условие I сводится подбором масштабов к условию II, условие II — к условию I и каждое из условий I и II — к специальному случаю условия III.

В общем случае условия I–III непосредственно не сопоставимы; классы функций-индикаторов, выделяемые этими условиями, пересекаются и ни один из них не включает другой (в этом легко убедиться уже на линейном примере при $n = 2$). Однако «локальную» теорему 1 можно интерпретировать как указание на то, что условия I и II, так сказать, «одинаково жестки», а условие III «мягче» первых двух. В линейном случае эти качественные утверждения получают четкий смысл, сформулированный выше в следствии из теоремы 1.

Условие контрамонотонности. Более тонкая связь между условиями I–III выявляется при рассмотрении класса «контрамонотонных» функций-индикаторов [34] — функций $\delta_i(\mathbf{c})$, убывающих по c_i и неубывающих по $c_j (j \neq i)$. Ввиду важности этого класса, в том числе для приложений, сформулируем новое, самостоятельное условие «групповой контрамонотонности», выделяющее тот подкласс класса контрамонотонных систем, для которого обеспечивается успешное функционирование (в прежнем смысле). Это условие обобщает условие «аддитивной групповой контрамонотонности» (АГК) из [34], которое мы здесь приведем в следующей форме:

Условие АГК. Для любого разбиения множества индексов $\{1, \ldots, n\}$ на две группы $I_{\geqslant}$ и $I_{\leqslant}$ такого, что если $i \in I_{\geqslant}$, то $\Delta c_i \geqslant 0$, а если $i \in I_{\leqslant}$, то $\Delta c_i \leqslant 0$, должны выполняться неравенства

$$\sum_{i\in I_{\geqslant}} \Delta\delta_i(\mathbf{c}) \leqslant 0, \qquad \sum_{i\in I_{\leqslant}} \Delta\delta_i(\mathbf{c}) \geqslant 0,$$

причем если хотя бы одно $\Delta c_i > 0\,(< 0)$, то левое (соответственно правое) неравенство — строгое.

равновесия). Так, например, в [26] при условии $\mathrm{I}_{\text{ДМ}}$ (1), (2) доказано монотонное убывание функции $\Phi_{\mathrm{I}}(\mathbf{c})$ в процессе $(*)$, откуда при дополнительном предположении о непрерывной зависимости траекторий процесса $(*)$ от начальных данных делается вывод о сходимости к равновесию траекторий, не уходящих в бесконечность.

Условие АГК, как легко видеть, эквивалентно следующей паре условий:

А. Каждая функция $\delta_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$ контрамонотонна.

Б. Если $\Delta\mathbf{c} \geq 0$ [1], то $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\delta_i(\mathbf{c}) < 0$.

Легко убедиться, что на классе контрамонотонных функций $\delta_i(\mathbf{c})$ условие АГК совпадает с условием I, так что условие I можно рассматривать как обобщение условия АГК, получаемое путем отказа от контрамонотонности при сохранении соответствующего общего неравенства для сумм $\sum \Delta\delta_i$. Вводимое ниже условие групповой контрамонотонности (ГК) обобщает условие АГК в другом направлении, постулируя неравенства не для сумм $\sum \Delta\delta_i$ по соответствующим группам, а лишь для некоторых их членов, но при этом сохраняя требование контрамонотонности.

Условие ГК. Пусть $I_>$ — множество всех i таких, что $\Delta c_i > 0$, а $I_<$ — множество всех i таких, что $\Delta c_i < 0$. Тогда, если $I_>$ не пусто, то $\Delta\delta_k(\mathbf{c}) < 0$ для некоторого $k \in I_>$, и если $I_<$ не пусто, то $\Delta\delta_k(\mathbf{c}) > 0$ для некоторого $k \in I_<$.

С учетом непрерывности функций $\delta_i(\mathbf{c})$ условие ГК можно представить в следующей эквивалентной форме:

А. Функции $\delta_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$ контрамонотонны.

Б. Если $\Delta\mathbf{c} \geq 0$, то $\Delta\delta_k(\mathbf{c}) < 0$ для некоторого k.

Теорема 2. Пусть на C выполняется условие ГК, и пусть можно указать множество [2]

$$S = \{\mathbf{c} | c_i^1 \leqslant c_i \leqslant c_i^2 \;\; (i = 1, \ldots, n)\} \subset C \tag{7}$$

такое, что

$$c_i^1 < c_i^2, \quad \overline{\delta}_i(\mathbf{c}^1) \geqslant 0, \quad \overline{\delta}_i(\mathbf{c}^2) \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Тогда на C существует единственная точка равновесия $\mathbf{c}^*$, причем $\mathbf{c}^* \in S$. Далее, каждая невырожденная траектория $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$ при любом начальном состоянии $\mathbf{c}(0) \in S$ целиком лежит в S: $\mathbf{c}(t) \in S$, $t \geqslant 0$, и сходится к $\mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$.

[1] Запись $\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}$ для векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ равносильна системе покомпонентных нестрогих неравенств, а запись $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ означает, что $\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

[2] На самом деле существование множества S вида (7), (8) при условии ГК не только достаточно, но и необходимо для существования точки равновесия. Это утверждение в несколько более слабой форме, а именно существование окрестности $S \subset C$ (7), (8) точки равновесия $\mathbf{c}^*$ в случае, когда $\mathbf{c}^*$ — внутренняя точка множества C, устанавливается и используется в доказательстве теоремы 5.

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

Приведем теперь дифференциальный вариант условия ГК.

Условие ГК$_Д$. А. Функции $\delta_i(\mathbf{c})$ непрерывно дифференцируемы, и $\partial\delta_i(\mathbf{c})/\partial c_j \geqslant 0$ $(j \neq i; i, j = 1, \ldots, n)$.

$$\text{Б. Все } \det[-\partial\delta_i(\mathbf{c})/\partial c_j]_{i_1,\ldots,i_k} > 0 \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Через ГК$'_{\text{Д}}$ будем обозначать условие ГК$_{\text{Д}}$, ослабленное путем замены строгих неравенств в (9) нестрогими.

Теорема 3. Пусть функции $\delta_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывно дифференцируемы на C. Тогда для того чтобы набор функций $\delta_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворял на C условию ГК, достаточно, чтобы он удовлетворял на C дифференциальному условию ГК$_{\text{Д}}$, и необходимо, чтобы он удовлетворял на C ослабленному дифференциальному условию ГК$'_{\text{Д}}$. Если функции $\delta_i(\mathbf{c})$ линейны, то условия ГК и ГК$_{\text{Д}}$ эквивалентны друг другу.

Доказательство теоремы 3 приведено в приложении.

Связь между условиями ГК и I–III в контрамонотонном случае. На классе контрамонотонных функций каждое из условий I, II, III, как легко видеть, влечет за собой условие ГК, т. е. является частным случаем последнего. Ниже устанавливается более глубокая связь между этими условиями.

Теорема 4. На классе контрамонотонных функций-индикаторов условия I$_{\text{ДМ}}$, II$_{\text{ДМ}}$, III$_{\text{ДМ}}$, ГК$_{\text{Д}}$ эквивалентны друг другу.

Доказательство теоремы 4 дано в приложении.

Следствие. На классе линейных контрамонотонных функций-индикаторов каждое из условий I, II, III, ГК сводится подбором масштабов к каждому из остальных.

Для завершения характеристики условий I, II, III, ГК рассмотрим их как достаточные условия сходимости к равновесию в процессах $(*)$, $(**)$ и проверим, насколько они близки к необходимым.

Теорема 5. Рассмотрим класс систем с непрерывно дифференцируемыми контрамонотонными функциями-индикаторами на C; пусть каждая система этого класса имеет единственную точку равновесия, внутреннюю для C. Для систем данного класса выполнение условия ГК$_{\text{Д}}$ всюду на C является достаточным, а выполнение условия ГК$'_{\text{Д}}$ (в линейном случае ГК$_{\text{Д}}$) в точке равновесия — необходимым для сходимости всех невырожденных траекторий процессов $(*)$ и $(**)$ на C к точке равновесия при всех достаточно близких к этой точке начальных состояниях (локальная устойчивость).

Доказательство теоремы 5 дано в приложении. С учетом теоремы 1 из [41], теорем 3 и 4, а также факта эквивалентности локальной и глобальной устойчивости линейных систем на R^n получаем следующее следствие.

Следствие. На классе линейных контрамонотонных функций-индикаторов на $C = R^n$ каждое из условий I, II, III, ГК достаточно и с точностью до подбора масштабов необходимо для сходимости всех траекторий процессов $(*)$ и $(**)$ к точке равновесия.

Следствия из теорем 4 и 5 показывают, в частности, что условия I–III как достаточные условия успешного функционирования систем не слишком узки, поскольку на таком нетривиальном классе, как класс линейных контрамонотонных систем, эти достаточные условия по существу сомкнулись с необходимым (в данном случае) условием успешного функционирования — условием ГК.

2. Примеры анализа систем целенаправленных элементов

В этом пункте приводится серия модельных примеров, многие из которых известны из литературы; эти примеры, относящиеся к самым различным областям, анализируются здесь с помощью общих теорем настоящей работы. Примеры сгруппированы по трем подразделам статьи, иллюстрирующим применение условий I, II и III соответственно; впрочем, некоторые примеры подпадают более чем под одно условие. Для условия ГК нет надобности в специальных примерах, поскольку многие системы, рассматриваемые как иллюстрации к условиям I, II, III, оказываются контрамонотонными и, следовательно, удовлетворяют также и условию ГК.

Условие I. Характерная область приложения условия I — это системы целенаправленных элементов, состязающихся за получение некоторого ресурса. Об этом уже говорилось вкратце в разделе 2 первой части работы (см. [41]); изложим соответствующую общую схему более подробно. Пусть c_i — количественная мера «усилий» i-го элемента по привлечению ресурса, π_i — количество ресурса, достающееся i-му элементу, а $\varkappa_i$ — его потребность в ресурсе; здесь $\pi_i = \pi_i(\mathbf{c})$ и $\varkappa_i = \varkappa_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$\delta_i(\mathbf{c}) = \varkappa_i(\mathbf{c}) - \pi_i(\mathbf{c}) \tag{10}$$

представляет собой величину дефицита ресурса (или, с обратным знаком, величину избытка ресурса) у i-го элемента. Обычно величину (10) можно рассматривать как функцию-индикатор для i-го элемента, если цель этого элемента заключается в удовлетворении своей потребности в ресурсе. В таких задачах набор функций $\delta_i(\mathbf{c})$ (10) $(i = 1, \ldots, n)$ часто оказывается удовлетворяющим условию I; а именно: в модельных примерах потребность $\varkappa_i$ обычно либо постоянная, либо монотонно возрастающая функция $\varkappa_i(c_i)$ от величины усилия i-го элемента c_i, а набор функций $\{-\pi_i(\mathbf{c})\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяет условию I (возможно, в ослабленном варианте — с нестрогими неравенствами). Условие I здесь означает, что если сравнить группу $I_{\geqslant}$ элементов, увеличивших (во всяком случае, не уменьшивших) свои усилия по привлечению ресурса, и группу $I_{\leqslant}$ элементов, не увеличивших свои усилия, то первая группа получит заведомо не меньшее, чем вторая группа, дополнительное суммарное количество ресурса (которое, впрочем, может оказаться и отрицательным [1]).

Выполнение условия I часто обеспечивается самой природой распределительной системы. Для того чтобы обосновать это утверждение, мы рассмотрим простые физические процессы распределения материальных потоков. Начнем с простейшего примера линейной электрической цепи (системы распределения токов), поддающейся непосредственному аналитическому расчету.

Пример 1. Пусть имеются n потребителей тока, соединенные параллельно; i-й потребитель характеризуется величиной проводимости σ_i, которую он может устанавливать в диапазоне $0 \leqslant \sigma_i \leqslant \sigma_{i\,\text{макс}}$. Вся эта группа потребителей подключена к источнику ЭДС величины E с внутренним сопротивлением R. Ток i-го потребителя, как легко видеть, при этом равен

$$I_i = I_i(\boldsymbol{\sigma}) = E\sigma_i \Big/ (1 = R \sum_k \sigma_k). \tag{11}$$

Если предположить, что каждый i-й потребитель регулирует свою нагрузку, т.е. проводимость σ_i, с целью, чтобы ток I_i сравнялся с заданным значением $I_i^0 \geqslant 0$, то, очевидно, разность $I_i^0 - I_i(\boldsymbol{\sigma})$ будет служить для него функцией-индикатором (здесь σ_i играет роль c_i, I_i^0 — роль $\varkappa_i$, а $I_i(\boldsymbol{\sigma})$ — роль $\pi_i(\mathbf{c})$ из описанной выше общей схемы). Легко проверить, что система функций $I_i^0 - I_i(\boldsymbol{\sigma}) = \delta_i(\boldsymbol{\sigma})$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяет условию I. [2] Поэтому в силу следствия 1 из теоремы 2 в [41] в такой системе всегда существует единственное состояние равновесия $\boldsymbol{\sigma}^*$ на допустимом множестве $\Sigma = \{\boldsymbol{\sigma} |\ 0 \leqslant \sigma_i \leqslant \sigma_{i\,\text{макс}}\ (i = 1, \ldots, n)\}$; в равновесии для каждого i либо $I_i(\sigma^*) = I_i^0$, либо же $I_i(\sigma^*) < I_i^0$ и

---

[1] При контрамонотонности функций $\{-\pi_i(\mathbf{c})\}$, т. е. при «чистой состязательности» элементов, это дополнительное количество всегда неотрицательно.

[2] Кроме того, эта система функций контрамонотонна и, следовательно, удовлетворяет также условию ГК.

$\sigma_i^* = \sigma_{i\,\text{макс}}$ (неустранимая недогрузка). Это равновесие $\boldsymbol{\sigma}^*$, согласно теореме 4 из [41], достигается [1] при любом начальном состоянии в процессе независимого регулирования нагрузок потребителей по правилу типа (∗∗):

$$\operatorname{sign} \dot{\sigma}_i = \operatorname{sign} \overline{\delta}_i(\boldsymbol{\sigma}) = \operatorname{sign} \overline{(I_i^0 - I_i(\boldsymbol{\sigma}))} \quad (i = 1, \dots, n) \tag{12}$$

(уменьшение проводимости при избыточном токе и увеличение при недостаточном). Отметим также, что согласно лемме 2 из [41] в процессе (12) происходит монотонное убывание «суммы невязок» $\sum\limits_i |I_i^0 - I_i(\boldsymbol{\sigma})|$ (функция Φ_{I}) до своего абсолютного минимума на допустимом множестве Σ.

Пример 2. В примере 1 можно было получить аналитические выражения для функций-индикаторов и проверить выполнение условия I путем непосредственных вычислений. Покажем теперь, что на самом деле для физической (технической) распределительной системы выполнение условия I вытекает из общих достаточно грубых качественных предпосылок. Возьмем сначала такую же электрическую цепь, что и в примере 1, но уже с нелинейными проводимостями σ_i и сопротивлением R. Пусть характеристика «напряжение — ток» i-го потребителя имеет вид

$$I_i = \varphi_i(U, \sigma_i),$$

где U — напряжение, σ_i — параметр проводимости. В случае линейной проводимости $\varphi_i = U\sigma_i$; в общем случае будем лишь предполагать, что функция φ_i возрастает по U и по σ_i. Внутреннее сопротивление источника также будем в общем случае считать непостоянным, так что напряжение $U = U(I)$, где $I = \sum I_i$, есть некоторая невозрастающая нелинейная функция (в линейном случае, в примере 1, $U = E - RI$, где $R = \text{const}$). Таким образом, установившиеся в цепи токи должны удовлетворять системе нелинейных алгебраических уравнений

$$I_i = \varphi_i(U(I), \sigma_i), \quad I = \sum_i I_i,$$

т.е.

$$I_i = \psi_i\Bigl(\sum I_k, \sigma_i\Bigr) \quad (i = 1, \dots, n), \tag{13}$$

где $\psi_i(x, y) \equiv \varphi_i(U(x), y)$ — функция, невозрастающая по x и возрастающая по y. Такое же рассуждение можно провести, например, для системы параллельно включенных потребителей потоков жидкости или

[1] Здесь и далее под достижимостью равновесия в динамическом процессе подразумевается сходимость к равновесию невырожденных траекторий этого процесса.

газа; обозначая через I_i величину потока у i-го потребителя, а через σ_i — параметр его проводимости (например, степень открытия крана на трубопроводе), снова получим систему вида (13).

Итак, пусть задана система потоков, описываемая уравнениями (13). Исследуем возможности достижения заданных величин потоков I_i^0 на допустимом множестве $\Sigma = \{\boldsymbol{\sigma} | \sigma_{i\,\text{мин}} \leqslant \sigma_i \leqslant \sigma_{i\,\text{макс}}\ (i = 1, \ldots, n)\}$. Относительно функций $\psi_i(x, y)$ в (13) будем предполагать лишь, что они непрерывные, неотрицательные, невозрастающие по x и возрастающие по y $(x, y \geqslant 0)$. При этом система (13) при любых фиксированных $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \geqslant 0$ определяет единственное решение $I_1, \ldots, I_n \geqslant 0$. Действительно, функция $\sum_i \psi_i(I, \sigma_i)$ не возрастает по I и, значит, уравнение $I = \sum_i \psi_i(I, \sigma_i)$ имеет при любых $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \geqslant 0$ единственное решение $I = I(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \geqslant 0$, что дает однозначные величины $I_i = \psi_i(I(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \sigma_i)$, которые, очевидно, непрерывно зависят от $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Покажем, что набор функций $f_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = -I_i = -\psi_i(I(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \sigma_i)$ удовлетворяет условию I. Возьмем $\Delta\boldsymbol{\sigma} = (\Delta\sigma_1, \ldots, \Delta\sigma_n) \neq 0$; разобьем множество индексов $\{1, \ldots, n\}$ на три подмножества $K_>$, $K_=$, $K_<$ так, что при $k \in K_>$ $\Delta\sigma_k > 0$, при $k \in K_=$ $\Delta\sigma_k = 0$, при $k \in K_<$ $\Delta\sigma_k < 0$. Для данного $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ могут осуществиться три случая: $\Delta I > 0$, $\Delta I = 0$ и $\Delta I < 0$. Рассмотрим их поочередно.

Случай 1: $\Delta I > 0$. В силу невозрастания $\psi_i(I, \sigma_i)$ по I и возрастания по σ_i в этом случае имеем заведомо $\Delta I_k \leqslant 0$ для всех $k \in K_< \bigcup K_=$. Но так как $\Delta I = \Delta(\sum I_k) > 0$, то отсюда заключаем, что $K_>$ заведомо не пусто и

$$\Delta \sum_{k \in K_>} I_k > \sum_{k \in K_< \bigcup K_=} |\Delta I_k| \geqslant 0,$$

так что

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta I_k \operatorname{sign} \Delta\sigma_k > 0. \tag{14}$$

Случай 2: $\Delta I < 0$ совершенно аналогично дает (14).

Случай 3: $\Delta I = 0$ дает, очевидно, $\Delta I_k = 0$ для $k \in K_=$, $\Delta I_k > 0$ для $k \in K_>$ и $\Delta I_k < 0$ для $k \in K_<$. Так как хотя бы одно из множеств $K_>$ и $K_<$ не пусто в силу условия $\Delta\boldsymbol{\sigma} \neq 0$, то снова получаем (14).

Итак, для данной распределительной системы набор функций $\{-I_i(\boldsymbol{\sigma})\}$, а значит, и $\{I_i^0 - I_i(\boldsymbol{\sigma})\}$ всегда удовлетворяет условию I.[1] Поэтому остаются в силе выводы о существовании и единственно-

[1] Можно также убедиться, что эти функции, как и в частном случае (11), контрамонотонны и, значит, выполнено и условие ГК.

сти состояния равновесия в такой системе и о его достижимости при регулировании потоков по правилу (12).

Проиллюстрировав естественность условия I для систем с распределением «физического» ресурса, приведем теперь примеры из других областей, где условие I иногда будем просто постулировать.

Пример 3. Пусть имеется система n обслуживающих устройств; i-е устройство обладает заданной пропускной способностью $\varkappa_i$. Величина потока клиентов к i-му устройству π_i зависит от его «усилия» c_i (например, от качества обслуживания или от расходов на рекламу и т. п.), а также и от «чужих усилий» c_j $(j \neq i)$. Если цель i-го участника состоит в том, чтобы обеспечить загрузку i-го обслуживающего устройства, равную номинальной $\varkappa_i$ или как можно более близкую к ней, то функция $\delta_i(\mathbf{c})$ (10) является для него функцией-индикатором.

Предположим, что система функций $\delta_i(\mathbf{c})$ (10) (здесь $\varkappa_i = \mathrm{const}$) удовлетворяет условию I. Предположим также, что допустимая величина усилия c_i лежит в некотором конечном интервале $[a_i, b_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда согласно следствию 1 из теоремы 2 в [41] существует единственное состояние равновесия $(c_1^*, \ldots, c_n^*)$ такое, что для каждого i-го обслуживающего устройства его загрузка $\pi_i(\mathbf{c}^*)$ либо а) равна его номинальной загрузке $\varkappa_i$; либо б) превышает номинальную загрузку: $\pi_i(\mathbf{c}^*) > \varkappa_i$, хотя i-й участник применяет минимум усилий для привлечения клиентов $(c_i^* = a_i)$; либо, наконец, в) реальная загрузка ниже номинальной: $\pi_i(\mathbf{c}^*) < \varkappa_i$, хотя i-й участник применяет максимум усилий $(c_i^* = b_i)$. В этом состоянии равновесия, согласно теореме 2 из [41], достигается минимум суммы невязок по загрузке $\sum |\varkappa_i - \pi_i(\mathbf{c})|$, что говорит об удовлетворительности такого режима для системы в целом. Наконец, если каждый участник в динамике руководствуется естественным правилом (**) изменения усилий по привлечению клиентов в зависимости от их избытка или недостатка, то согласно лемме 2 и теореме 4 из [41] система достигает указанного состояния равновесия из любого начального состояния, причем в этом процессе сумма невязок $\sum |\varkappa_i - \pi_i(\mathbf{c})|$ монотонно убывает до своего абсолютного минимума на $C = \{\mathbf{c} | a_i \leqslant c_i \leqslant b_i \ (i = 1, \ldots, n)\}$.

Отметим, что здесь, в отличие от [34], не делается никаких предположений о знаке взаимного влияния различных участников. Увеличивая свои усилия по привлечению клиентов, каждый участник может как «перехватывать» клиентов у партнеров (случай «контрамонотонного» влияния [34]), так и, наоборот, способствовать увеличению потока клиентов не только к себе, но и к партнерам; справедливость полученных результатов (если только выполнено условие I) от этого не зависит.

Пример 4. Рассмотрим непосредственное обобщение модели установления рыночных цен из [34]. Пусть на рынке имеется n видов товаров, цена на i-й товар равна c_i ($0 \leqslant c_i < \infty$), спрос на него равен $\pi_i(\mathbf{c})$, а предложение — $\varkappa_i(\mathbf{c})$. Рассмотрим функцию избыточного спроса на i-й товар $\delta_i(\mathbf{c}) = \pi_i(\mathbf{c}) - \varkappa_i(\mathbf{c})$, которую будем предполагать непрерывной и убывающей по c_i. Функция $\delta_i(\mathbf{c})$ является функцией-индикатором для продавца i-го товара, который стремится установить цену, выравнивающую спрос и предложение π_i и $\varkappa_i$ [26, 34, 79, 198].

Этот пример подходит под изложенную выше общую схему, если покупательский спрос рассматривать как «ресурс», делимый между продавцами, цену c_i, взятую с обратным знаком, — как меру «усилия» i-го продавца по привлечению ресурса, а предложение $\varkappa_i$ i-го продавца — как его потребность в ресурсе. Пусть система функций $\delta_i(\mathbf{c}) = \pi_i(\mathbf{c}) - \varkappa_i(\mathbf{c})$ удовлетворяет условию I, и предположим также, что для каждого товара i найдется столь высокий уровень цены $\tilde{c}_i$, что при $c_i \geqslant \tilde{c}_i$ избыточный спрос $\delta_i(\mathbf{c})$ на этот товар отрицателен, каковы бы ни были цены c_j на остальные товары $j \neq i$. Тогда выполнены условия следствия 3 из теоремы 2, а также леммы 3 в [41] (достаточно положить $\mathbf{c}^1 = 0$, $\mathbf{c}^2 = \tilde{\mathbf{c}}$). Следовательно, равновесные цены $c_1^*, \ldots, c_n^*$ такие, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ либо $\delta_i(\mathbf{c}^*) = 0$, либо $\delta_i(\mathbf{c}^*) < 0$, $c_i^* = 0$, существуют и единственны. В соответствии с леммой 3 и теоремой 4 из [41] заключаем, что эти цены устанавливаются в процессе независимого регулирования цены каждого товара на основании знака избыточного спроса на этот товар (**). В отличие от [34] здесь не делается предположений о «валовой заменимости» товаров — о контрамонотонном характере зависимости избыточного спроса на данный товар от цен на остальные товары.

Интересно отметить, что функции избыточного спроса, порождаемые покупательской тактикой «попарного сравнения цен» [34, 79]:

$$\delta_i(\mathbf{c}) = A \sum_{j \neq i} \psi(c_j - c_i) - \varkappa_i(c_i) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

($A = \mathrm{const}$, $\psi(x)$, $\varkappa_i(y)$ ($y \geqslant 0$) — положительные монотонно возрастающие функции, $\psi(x) + \psi(-x) = \mathrm{const}$), удовлетворяют условию I, а также каждому из условий II, III и ГК.

Пример 5. Рассмотрим пример другого рода, в котором группа взаимодействующих участников решает общую задачу. Этот пример — простейшая модельная задача распределения экономического ресурса между несколькими потребителями с неизвестными характеристиками; изложим ее в форме, близкой к [16], где рассматривался один вариант коллективного поведения автоматов при решении подобной задачи. Пусть задано ограниченное количество R некоторого ресурса и имеются n потребителей этого ресурса. Каждый i-й потребитель перерабатывает получаемый ресурс в конечный продукт, объем выпуска которого при переработке x единиц ресурса равен $\varphi_i(x)$. «Производственная функция» $\varphi_i(x)$ предполагается неотрицательной, определенной при всех $x \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемой и в соответствии с обычным представлением об убывающей «предельной эффективности» $\varphi_i'(x)$ $(= d\varphi_i(x)/dx)$ — строго вогнутой. Пусть общая цель системы состоит в том, чтобы произвести максимум суммарного конечного продукта. Тогда в идеале нужно было бы дать i-му участнику такое количество ресурса x_i^*, чтобы достигнуть

$$\max_{x_1+\ldots+x_n=R} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i).$$

Но если функции $\varphi_i(x)$ неизвестны заранее, то возникает необходимость в организации поиска наилучшего (или хотя бы достаточно удовлетворительного) режима работы.

Используя подход Корнаи–Липтака (см., например, [18]), будем предполагать, что каждый i-й потребитель сообщает держателю ресурса свою собственную оценку этого ресурса c_i. Держатель ресурса распределяет его таким образом, чтобы подавляющая часть его шла тем потребителям, которые предлагают наибольшие оценки и тем самым обещают наибольшую эффективность его использования.

Пусть $\rho_i(\mathbf{c})$ — количество ресурса, которое отдает i-му потребителю держатель ресурса в случае, если набор предложенных оценок есть $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$. Относительно функций $\rho_i(\mathbf{c})$ будем предполагать, что они непрерывны и что набор $\{\rho_i(\mathbf{c})\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяет следующему требованию: потребителям, повысившим свои оценки, передается часть ресурса, предназначавшегося потребителям, которые теперь понизили или, по крайней мере, не повысили свои оценки. Примером правила распределения ресурса, удовлетворяющего этому требованию, может служить следующее правило:

$$\rho_i(\mathbf{c}) = Rg_i(c_i) \Big/ \sum_{k=1}^{n} g_k(c_k) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{15}$$

где $g_i(x)$ — положительные непрерывные возрастающие функции от $x \geqslant 0$. Если функции $g_i(x)$ растут по x достаточно быстро, например, $g_i(x) \sim x^N$, где $N \gg 1$, то правило (15) сколь угодно точно аппроксимирует правило «отдавать весь ресурс тому (тем), кто дает максимальные оценки». Легко видеть, что набор функций $\{-\rho_i(\mathbf{c})\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющий вышеуказанным требованиям, тем самым удовлетворяет условию типа I (вообще говоря, в нестрогом варианте).

Опишем теперь правила поведения потребителей. Предполагаем, что каждый i-й потребитель стремится сообщать держателю ресурса свою истинную оценку эффективности для него этого ресурса $c_i = \varphi'_i$. Однако мы допускаем, что i-й потребитель не знает точного значения своей эффективности $\varphi'_i(x_i)$ даже в текущей рабочей точке $x_i = \rho_i(\mathbf{c})$, а способен лишь выяснить, завышена объявленная им оценка эффективности c_i по сравнению с истинной текущей эффективностью $\varphi'_i(\rho_i(c))$, или занижена, или в точности равна ей. Легко видеть, что при этом можно принять разность $\varphi'_i(\rho_i(c)) - c_i$ за функцию-индикатор i-го потребителя и предписать ему соответствующее правило $(**)$ изменения своей оценки c_i.

Для удобства анализа подменим функцию-индикатор $\varphi'_i(\rho_i(c)) - c_i$ другой, эквивалентной функцией, которую построим следующим образом. Заметим, что в процессе $(**)$ при $\delta_i(\mathbf{c}) = \varphi'_i(\rho_i(\mathbf{c})) - c_i$ можно без существенного ограничения общности считать, что $c_i(t) \in [\alpha_i, \beta_i]$, где

$$\alpha_i = \min_{0 \leqslant x \leqslant R} \varphi'_i(x) = \varphi'_i(R), \quad \beta_i = \max_{0 \leqslant x \leqslant R} \varphi'_i(x) = \varphi'_i(0).$$

Действительно, с помощью леммы 3 из [41] (полагая в ней $c_i^1 = \alpha_i - \varepsilon$, $c_i^2 = \beta_i + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало) легко видеть, что если $c_i(0) \in [\alpha_i, \beta_i]$, то $c_i(t) \in [\alpha_i, \beta_i]$ при всех $t \geqslant 0$ в этом процессе. Определим теперь для каждого $c_i \in [\alpha_i, \beta_i]$ число $\hat{x}_i(c_i)$ как точку максимума функции $\rho_i(x_i) - c_i x_i$ по x_i [1]. Как следует из строгой вогнутости и непрерывной дифференцируемости функции $\varphi_i(x)$, функция $\hat{x}_i(c_i)$ взаимно однозначно и непрерывно отображает $[\alpha_i, \beta_i]$ на $[0, R]$. При этом $c_i \equiv \varphi'_i(\hat{x}_i(c_i))$, так что

$$\operatorname{sign}(\varphi'_i(x_i) - c_i) \equiv \operatorname{sign}(\hat{x}_i(c_i) - x_i)$$

тождественно по $x_i \in [0, R]$ и $c_i \in [\alpha_i, \beta_i]$. Это означает, что функция $x_i(c_i) - \rho_i(\mathbf{c})$ эквивалентна функции $\varphi'_i(\rho_i(\mathbf{c})) - c_i$ в роли функции-индикатора i-го потребителя. Более того, ввиду непрерывности, а значит, и взаимной непрерывности отображения $c_i \leftrightarrow \hat{x}_i(c_i)$ функция $\hat{x}_i(c_i) - x_i$ отделена от нуля одновременно с функцией $\varphi'_i(x_i) - c_i$, т.е. если $|\varphi'_i(x_i) - c_i| \geqslant \text{const} > 0$, то и $|\hat{x}_i(c_i) - x_i| \geqslant \text{const} > 0$, и обратно. В силу всего сказанного можно вместо процесса $(**)$ с

[1] Функцию $\varphi_i(x_i) - c_i x_i$ можно интерпретировать как прибыль i-го потребителя при переработке им количества ресурса x_i, закупленного по цене c_i, в количество $\varphi_i(x_i)$ продукта, имеющего единичную цену. Тогда $\hat{x}_i(c_i)$ — это объем закупок ресурса i-м потребителем по цене c_i, максимизирующий его прибыль при этой цене.

$\delta_i(\mathbf{c}) = \varphi_i'(\rho_i(\mathbf{c})) - c_i$ рассматривать процесс $(**)$ с $\delta_i(\mathbf{c}) = \hat{x}_i(c_i) - \rho_i(\mathbf{c})$; каждая невырожденная траектория исходного процесса будет в то же время невырожденной траекторией «подмененного» процесса, и обратно.

Так как функции $\hat{x}_i(c_i)$, очевидно, строго убывают по своим переменным c_i, а набор функций $\{-\rho_i(\mathbf{c})\}$ удовлетворяет нестрогим неравенствам из условия I, то набор функций-индикаторов $\delta_i(\mathbf{c}) = \hat{x}_i(c_i) - \rho_i(\mathbf{c})$ $(i = 1, \ldots, n)$ уже полностью удовлетворяет условию I (а также в силу контрамонотонности и условию ГК). Применяя следствие 3 из теоремы 2 в [41] при $c_i^1 = \alpha_i$, $c_i^2 = \beta_i$, получаем, что существует единственный равновесный набор оценок $\mathbf{c}^* = (c_1^*, \ldots, c_n^*)$ такой, что $\hat{x}_i(c_i^*) = \rho_i(\mathbf{c}^*)$ или, что то же самое, $\varphi_i'(\rho_i(\mathbf{c}^*)) = c_i^*$ $(i = 1, \ldots, n)$. В силу леммы 3 и теоремы 4 из [41] это равновесное состояние достигается в процессе $(**)$.

Отметим, что если правило распределения ресурса близко к правилу «отдать тому, кто дает максимальную оценку», например, применяется правило вида (15) с $g_i(x) \sim x^N$, $N \gg 1$, то равновесные оценки окажутся почти совпадающими: $c_1^* \approx c_2^* \approx \ldots \approx c_n^*$, финальное распределение ресурса $\rho_1(\mathbf{c}^*), \ldots, \rho_n(\mathbf{c}^*)$ будет близким к оптимальному распределению $x_1^*, \ldots, x_n^*$, а суммарный выпуск продукта будет близок к максимально возможному выпуску $\sum \varphi_i(x_i^*)$.

Условие II. Рассмотрим сначала достаточно общий формальный тип моделей, удовлетворяющих условию II. Это модели, в которых функции-индикаторы имеют вид (10) и порождаются следующим образом. Пусть заданы n функций $\pi_i(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, «однородные по сдвигу переменных»:

$$\pi_i(c_0, c_1, \ldots, c_n) \equiv \pi_i(c_0 + s, c_1 + s, \ldots, c_n + s) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{16}$$

К этому же виду приводятся функции «однородные нулевой степени»

$$\begin{gathered}\pi_i(c_0, c_1, \ldots, c_n) \equiv \pi_i(\lambda c_0, \lambda c_1, \ldots, \lambda c_n) \\ (\lambda, c_0, c_1, \ldots, c_n > 0,\ i = 1, \ldots, n)\end{gathered} \tag{17}$$

путем замены переменных $c_j^{\text{нов}} = \ln c_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$. Пусть каждая функция π_i (16) является неубывающей по переменным $c_j, j \neq i$, причем строго возрастающей по c_o. Зафиксируем некоторое значение $c_0 = c_0^*$ и положим

$$\delta_i(c_1, \ldots, c_n) = \pi_i(c_0^*, c_1, \ldots, c_n) - \varkappa_i(c_i) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{18}$$

где $\varkappa_i$ — неубывающая функция от c_i. Пусть $\Delta\mathbf{c} = (\Delta c_1, \ldots, \Delta c_n) \neq 0$ и $|\Delta c_k| = \max\limits_i |\Delta c_i|$; пусть для определенности $s = \Delta c_k > 0$. Тогда, учитывая, что $\Delta c_j \leqslant \Delta c_k$ для всех $j = 1, \ldots, n$, получаем

$$\delta_k(\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}) = \pi_k(c_0^*, c_1 + \Delta c_1, \ldots, c_n + \Delta c_n) - \varkappa_k(c_k + \Delta c_k) <$$
$$< \pi_k(c_0^* + s, c_1 + s, \ldots, c_n + s) - \varkappa_k(c_k) = \pi_k(c_0^*, c_1, \ldots, c_n) - \varkappa_k(c_k) = \delta_k(\mathbf{c}).$$

Аналогично, если $\Delta c_k < 0$, то $\delta_k(\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c}) > \delta_k(\mathbf{c})$. Это и означает выполнение условия II. (В то же время функции $\delta_i(\mathbf{c})$ контрамонотонны, так что выполнено и условие ГК.)

Пример 6. Рассмотрим обслуживание одним прибором потока разнотипных требований с «θ-приоритетами» [28]. Пусть имеется l типов требований; разным типам $i = 1, \ldots, l$ приписываются «приоритетные параметры» — числа θ_i такие, что если обслуживания ожидают требования нескольких типов, то первым обслуживается требование с меньшим значением $\theta + t$, где t — время прихода требования. Пусть $m_i(\theta_1, \ldots, \theta_l)$ — показатель качества обслуживания требований i-го типа, например, среднее время обслуживания. Очевидно,

$$m_i(\theta_1, \ldots, \theta_l) \equiv m_i(\theta_1 + \tau, \ldots, \theta_l + \tau). \tag{19}$$

Кроме того, при определенных предположениях можно считать, что каждая функция m_i является неубывающей по θ_j $(j \neq i)$ [28]. Выделим n типов требований $1, \ldots, n$ и предположим, что все остальные требования обладают фиксированными приоритетами со средним значением $\theta_{\text{ср}}$. Тогда можно считать, что качество обслуживания требования i-го выделенного типа определяется функцией $m_i(\theta_{\text{ср}}, \theta_1, \ldots, \theta_n)$, однородной по сдвигу (19), неубывающей по θ_j $(j \neq i)$ и возрастающей по $\theta_{\text{ср}}$. Поэтому при фиксированном $\theta_{\text{ср}}$ система функций

$$\mu_i(\theta_1, \ldots, \theta_n) = m_i(\theta_{\text{ср}}, \theta_1, \ldots, \theta_n) - T_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{20}$$

где $T_i = \text{const}$, в силу доказанного выше удовлетворяет условию II. Функции (20) могут служить функциями-индикаторами при регулировании приоритетов θ_i с целью добиться заданных показателей T_i обслуживания требований типов $i = 1, \ldots, n$. Выполнение условия II позволяет (при дополнительном предположении о существовании θ^1 и θ^2 таких, что $\theta_i^1 < \theta_i^2$, $\mu_i(\theta^1) > 0$, $\mu_i(\theta^2) < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$) в силу следствия 3 из теоремы 2 и теоремы 3 в [41] установить существование и единственность равновесия и сходимость к нему в процессе независимого регулирования приоритетов вида $(**)$. Подобный процесс исследован, в частности, в [28]. Эти выводы сохраняют силу и без предположения о неубывании m_i по θ_j $(j \neq i)$, если выполнение условия II постулируется отдельно.

Пример 7. Обратимся снова к модели регулирования цен из примера 4. Рассмотрим n функций избыточного спроса (разностей спроса и предложения) на n товаров из общего числа $l = n + 1$ товаров:

$$\omega_i(c_0, c_1, \ldots, c_n) = \pi_i(c_0, c_1, \ldots, c_n) - \varkappa_i(c_0, c_1, \ldots, c_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{21}$$

Обычно в таких моделях считается, что цены c_j определены с точностью до единицы измерения, так что от умножения всех c_j ($j = 0, 1, \ldots, n$) на одно и то же число $\lambda > 0$ значения функций (21) не изменяются (однородность нулевой степени) [26, 198]. При этом можно выделить «базисный» товар 0, зафиксировать цену на него $c_0 \equiv 1$ и измерять цены на остальные n товаров уже в единицах «базисного» [26, 198]. Это приводит к функциям-индикаторам избыточного спроса вида

$$\delta_i(c_1, \ldots, c_n) \equiv \omega_i(1, c_1, \ldots, c_n) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Если предположить, что товары $0, 1, \ldots, n$ обладают «валовой заменимостью» [26, 198]: $\omega_i(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ не убывает по c_j $(j \neq i)$, причем возрастает по c_0, то после нелинейного преобразования масштабов по типу (17) $\to$ (16) путем замены c_i на $c_i^{\text{нов}} = \ln c_i$ для получаемого набора функций-индикаторов $\{\delta_i(\mathbf{c}^{\text{нов}})\}$ будет выполнено условие II (а также ГК). Поэтому для данной модели останутся в силе выводы из примера 4. Разумеется, то же будет, если просто постулировать выполнение условия II, не предполагая контрамонотонности, т.е. валовой заменимости товаров, либо если, наоборот, постулировать «усиленную валовую заменимость», эквивалентную условию ГК: если цены на товары некоторой группы $I_>$ возросли, а на все остальные не возросли, то избыточный спрос хотя бы на один товар группы $I_>$ должен уменьшиться.

Пример 8. Рассмотрим модель межотраслевого баланса [26, 198]. Пусть имеется n отраслей; i-я отрасль выпускает продукт i в количестве $x_i \geqslant 0$ и на выпуск единицы этого продукта расходует a_{ij} единиц продукта j, где $a_{ij} \geqslant 0$ — постоянные коэффициенты $(i, j = 1, \ldots, n)$. Чистый (конечный) выпуск i-го продукта y_i равен

$$y_i = y_i(\mathbf{x}) = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{22}$$

Пусть требуется получить чистые выпуски $y_i^0 > 0$, для чего нужно найти соответствующие величины полных выпусков $x_i > 0$ ($i = 1, \ldots, n$). При такой цели функцией-индикатором для i-й отрасли может служить (при очевидном условии $a_{ii} < 1$) функция $f_i(\mathbf{x}) = y_i^0 - y_i(\mathbf{x})$ или эквивалентным образом функция $g_i(\mathbf{x}) = (y_i^0 - y_i(\mathbf{x}))/x_i$, т.е.

$$g_i(\mathbf{x}) = \Big(y_i^0 + \sum_j a_{ij} x_j\Big)\Big/ x_i - 1 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{23}$$

Замечая, что функция (23) однородна нулевой степени, перейдем к новым переменным $c_i = \ln x_i$ $(x_i > 0)$, в которых функции-индикаторы (23) приобретают вид

$$\delta_i(\mathbf{c}) = y_i^0 e^{-c_i} + \sum_j a_{ij} e^{c_j - c_i} - 1 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{24}$$

Легко видеть, что набор функций (24) удовлетворяет условию II; это сразу следует из анализа однородных по сдвигу функций, проведенного в начале настоящего подпункта — достаточно положить в (24) $y_i^0 = a_{i0} e^{c_0^*}$, считая $c_0^* = 0$ и $a_{i0} = y_i^0$, и сопоставить (24) с (18).

Будем предполагать, что модель (22) «продуктивна» [26, 198], т.е. что система (22) допускает $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) > 0$ хотя бы при одном $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) > 0$. Очевидно, что при любом достаточно малом $\mathbf{x}^1 > 0$ будет $\mathbf{f}(\mathbf{x}^1) > 0$ (и $\mathbf{g}(\mathbf{x}^1) > 0$); в то же время продуктивность согласно [198] гарантирует в линейной модели (22) существование сколь угодно большого вектора $\mathbf{x}^2 > 0$ такого, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}^2) < 0$ (и $\mathbf{g}(\mathbf{x}^2) < 0$). Переходя к соответствующим векторам в пространстве $\mathbf{c}$, заключаем, что для функций-индикаторов (24) выполнены условия следствия 3 из теоремы 2 (а также леммы 3) из [41], и, следовательно, точка равновесия $\mathbf{c}^*$ существует, единственна и в силу теоремы 3 достигается в процессе $(**)$. Возвращаясь в пространство $\mathbf{x}$, обнаруживаем, что существует единственный набор полных выпусков $x_i^* = e^{c_i^*}$, дающий требуемые чистые выпуски y_i^0 $(i = 1, \ldots, n)$. Поскольку каждой невырожденной траектории $\mathbf{x}(t)$ исходного процесса

$$\operatorname{sign} \dot{x}_i = \operatorname{sign} f_i(\mathbf{x})\, (= \operatorname{sign} g_i(\mathbf{x})) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ограниченной в силу леммы 3 из [41], соответствует невырожденная траектория $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$ с функциями (24), то этот исходный процесс будет сходиться к $\mathbf{x}^*$ при любом $\mathbf{x}(0) > 0$.

Подчеркнем, что в этом примере функции $f_i(\mathbf{x})$ (и $g_i(\mathbf{x})$) контрамонотонны. Нетрудно показать, что набор функций $f_i(\mathbf{x})$ (а значит, и $g_i(\mathbf{x})$) удовлетворяет условию ГК в том и только в том случае, если модель (22) продуктивна [1]. Отсюда с учетом существования сколь угодно малого $\mathbf{x}^1 > 0$ и сколь угодно большого $\mathbf{x}^2 > 0$, для которых $\mathbf{f}(\mathbf{x}^1)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}^1) > 0$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x}^2)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}^2) < 0$, находим, что для продуктивной линейной модели (22) существование и единственность равновесия $\mathbf{x}^*$ и его достижимость в процессе типа $(**)$ при функциях-индикаторах

[1] Достаточно применить теорему 3 к матрице $[-\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j] = \mathbf{E} - \mathbf{A}$ системы (22) и воспользоваться леммой П.1 из приложения.

$f_i(\mathbf{x})$ или $g_i(\mathbf{x})$ гарантируется теоремой 2. Условие ГК позволяет рассмотреть и более общую, нелинейную модель межотраслевого баланса

$$y_i(\mathbf{x}) = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x})x_j \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{25}$$

где предполагается, что функции $y_i(\mathbf{x})$ непрерывны и контрамонотонны. Условие ГК для модели (25) можно назвать условием «продуктивности в приращениях», так как из него вытекает, что для любого $\mathbf{x} > 0$ можно указать $\Delta\mathbf{x} > 0$ такое, что $\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{y}(\mathbf{x}) > 0$ [1]. Дополним условие ГК следующим предположением «неограниченной продуктивности»: для всякого $\tilde{\mathbf{y}}$ существует $\mathbf{x} > 0$ такое, что $\mathbf{y}(\mathbf{x}) > \tilde{\mathbf{y}}$. Тогда теорема 2, как и в линейном случае, гарантирует существование, единственность и динамическую достижимость равновесия — искомых выпусков $\dot{x}_1^*, \ldots, \dot{x}_n^*$ — в процессе типа (∗∗) с функциями-индикаторами $f_i(\mathbf{x}) = y_i^0 - y_i(\mathbf{x})$ («небалансы»).

Пример 9. Приведем теперь модель регулировки мощностей в коллективе радиостанций из [77]. Рассматриваются n радиостанций; каждая i-я радиостанция характеризуется мощностью $\varepsilon_i > 0$ и качеством слышимости (отношением шум/сигнал), определяемым выражением

$$\lambda_i = \Big(\sum_{j \neq i} a_{ij}\varepsilon_j + N_i\Big)\Big/ a_{ii}\varepsilon_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $a_{ij} \geqslant 0$, $N_i > 0$ — постоянные. В одной из постановок задачи [77] требуется независимо регулировать мощность каждого i-го передатчика так, чтобы λ_i приняло заданное значение $\lambda_i^0 > 0$. Легко видеть, что при этом разность $\lambda_i(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)/\lambda_i^0 - 1$ можно принять в качестве функции-индикатора i-го передатчика. Заметим, что эта функция имеет такой же вид, что и (23) в примере 8. Поэтому при выполнении аналога «условия продуктивности» для этой системы [2] набор функций-индикаторов $\delta_i(\mathbf{c}) = \lambda_i/\lambda_i^0 - 1$, где $c_i = \ln \varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, будет, как и в примере 8, удовлетворять условию II (и ГК), а также условиям следствия 3 из теоремы 2 и леммы 3 из [41], так что будут справедливы выводы о существовании, единственности и достижимости искомого состояния равновесия в процессе независимой регулировки мощностей по правилу (∗∗). Аналогично примеру 8 можно рассмотреть нелинейное обобщение этой модели при соблюдении условия ГК.

Условие III. Условие III, как будет видно из примеров, связано с понятием выпуклости функций и его обобщениями. В примерах 10 и

---

[1] См. лемму П.5 в приложении.

[2] Соответствующие детерминантные условия как раз и даны в [77].

11 рассматриваются системы, равновесие в которых соответствует минимуму выпуклой функции или минимаксу (седлу) выпукло-вогнутой функции. Ввиду того, что такие ситуации достаточно изучены (в частности, в задачах математической экономики [26]), в примерах 10 и 11 дается лишь краткий формальный анализ их на языке общей модели настоящей работы. Более специфический пример 12 из теории игр анализируется подробнее.

Пример 10. Пусть величины $\mathbf{c}$ и $\boldsymbol{\delta}$ связаны соотношением

$$\delta_i(\mathbf{c}) = -\partial U(\mathbf{c})/\partial c_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{26}$$

где $U(\mathbf{c})$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция на C. Можно интерпретировать c_i как обобщенные координаты, а δ_i — как соответствующие обобщенные силы; при этом $U(\mathbf{c})$ имеет смысл потенциала. Условие III для системы $\delta_1(\mathbf{c}), \ldots, \delta_n(\mathbf{c})$ (26) эквивалентно строгой выпуклости потенциала $U(\mathbf{c})$ на C (см., например, [151]). При этом условии каждая функция $\delta_i(\mathbf{c})$ непрерывна и монотонно убывает по c_i, так что ее действительно можно принять в качестве функции-индикатора i-го элемента. Далее, при этом условии точка $\mathbf{c}^*$ является точкой равновесия в том и только в том случае, если $\mathbf{c}^*$ есть точка минимума функции $U(\mathbf{c})$ на C. Это утверждение, дающее для данного примера дополнительную (помимо теоремы 2 из [41]) характеристику точки равновесия, следует из определения этой точки как решения системы уравнений ($\circ$) на C и из неравенства

$$U(\mathbf{c}^2) - U(\mathbf{c}^1) > \sum_i \frac{\partial U(\mathbf{c}^1)}{\partial c_i}(c_i^2 - c_i^1), \tag{27}$$

справедливого в случае строгой выпуклости функции $U(\mathbf{c})$ для любых двух различных точек $\mathbf{c}^1$, $\mathbf{c}^2 \in C$ [26, 151, 198].

Если указанная точка $\mathbf{c}^*$ существует, то процесс ($*$) сходится к ней при $t \to \infty$ в силу теоремы 3 из [41]. Более того, в данном примере можно гарантировать сходимость к $\mathbf{c}^*$ каждой невырожденной траектории процесса ($**$), так как этот процесс реализует монотонный спуск по функции $U(\mathbf{c})$ («под острым углом к антиградиенту»).

Пример 11. Пусть $\mathbf{c}$ и $\boldsymbol{\delta}$ связаны соотношением

$$\delta_i(\mathbf{c}) = \begin{cases} -\dfrac{\partial K(\mathbf{c})}{\partial c_i} & (i = 1, \ldots, m), \\ +\dfrac{\partial K(\mathbf{c})}{\partial c_i} & (i = m+1, \ldots, n), \end{cases} \tag{28}$$

где функция $K(\mathbf{c})$ непрерывно дифференцируема на C. Тогда для того, чтобы набор функций $\{\delta_i(\mathbf{c})\}$ удовлетворял условию III, необходимо и достаточно, чтобы функция $K(\mathbf{c})$ была строго выпукла по совокупности переменных $(c_1, \ldots, c_m)$ и строго вогнута по $(c_{m+1}, \ldots, c_n)$ [151]. При этом условии $\delta_i(\mathbf{c})$ можно рассматривать как функцию-индикатор, а $\mathbf{c}^*$ является точкой равновесия в том и только в том случае, если $\mathbf{c}^*$ есть седловая точка выпукло-вогнутой функции $K(\mathbf{c})$, т. е. подвектор $(c_1^*, \ldots, c_m^*)$ доставляет минимум $K(c_1, \ldots, c_m, c_{m+1}^*, \ldots, c_n^*)$, а подвектор $(c_{m+1}^*, \ldots, c_n^*)$ доставляет максимум $K(c_1^*, \ldots, c_m^*, c_{m+1}, \ldots, c_n)$ на соответствующем допустимом множестве (проекции C) [1]. Это утверждение вытекает из строгой выпукло-вогнутости $K(\mathbf{c})$ с применением соответствующих неравенств типа (27). Наконец, если точка равновесия $\mathbf{c}^*$ существует, то к ней, согласно теореме 3 из [41], сходится каждая траектория процесса $(*)$, который в данном случае представляет собой известный градиентный процесс Эрроу–Гурвица поиска седловой точки выпукло-вогнутой функции [26].

Пример 11 описывает, в частности, антагонистическую игру двух лиц с платежной функцией $-K(\mathbf{c})$, где первый игрок выбирает подвектор $(c_1, \ldots, c_m)$, а второй — подвектор $(c_{m+1}, \ldots, c_n)$. Разберем теперь более сложный пример игры многих лиц из [215] (формальное описание которого включает предыдущие примеры как частные случаи).

Пример 12. Рассмотрим игру l лиц, в которой k-й игрок выбирает вектор $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k)$ размерности n_k; состоянием игры является вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^l)$ размерности $n = n_1 + \ldots + n_l$, и платежной функцией k-го игрока является непрерывно дифференцируемая функция $\varphi_k(\mathbf{x})$. Будем предполагать, что игрок может измерять частные производные $\partial\varphi_k(\mathbf{x})/\partial x_j^k$ $(j = 1, \ldots, n_k)$ своей платежной функции.

Для каждого k введем в рассмотрение n_k-мерный вектор

$$\nabla_k \varphi_k(\mathbf{x}) = \Big(\frac{\partial\varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_1^k}, \ldots, \frac{\partial\varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_{n_k}^k}\Big) \tag{29}$$

и рассмотрим следующее условие [215]: для некоторого набора положительных чисел $r_1, \ldots, r_l$ и для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$ из допустимой прямоугольной области X выполняется

$$\sum_{k=1}^{l} r_k(\nabla_k\varphi_k(\mathbf{y}) - \nabla_k\varphi_k(\mathbf{x}))(\mathbf{y}^k - \mathbf{x}^k) < 0. \tag{30}$$

Условие (30) можно рассматривать как условие III для системы n функций-индикаторов $\delta_j^k(\mathbf{x}) = r_k\partial\varphi_k(\mathbf{x})/\partial x_j^k$ $(j = 1, \ldots, n_k; k =$

[1] Факт существования седловой точки не так легко проверить, как факт существования минимума в предыдущем примере. Поэтому теорема 2 и следствие из нее в [41] могут быть полезны для выяснения самого этого факта.

$= 1, \ldots, l)$ [1]. Из (30), в частности, следует строгая вогнутость каждой функции $\varphi_k(\mathbf{x})$ по совокупности «своих» переменных $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k)$. Пусть X — замкнутое прямоугольное множество, и пусть на X выполнено условие (30); тогда соответствующие следствия из теоремы 2 из [41] позволяют устанавливать существование и единственность равновесия $\mathbf{x}^*$ для построенной системы n элементов и тем самым решения игры в смысле Нэша. В самом деле, в равновесии $\mathbf{x}^*$ подвектор $\mathbf{x}^{k*}$ таков, что для каждого $j = 1, \ldots, n_k$ либо $\partial\varphi_k(\mathbf{x}^*)/\partial x_j^k = 0$, либо $\partial\varphi_k(\mathbf{x}^*)/\partial x_j^k > 0$ и $x_j^k = b_j^k$ (выход на ограничение сверху), либо $\partial\varphi_k(\mathbf{x}^*)/\partial x_j^k < 0$ и $x_j^k = a_j^k$ (выход на ограничение снизу). Отсюда с учетом вогнутости $\varphi_k(\mathbf{x})$ по $\mathbf{x}^k$ и соотношения типа (30) следует, что

$$\varphi_k(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}^k} \varphi_k(\mathbf{x}^{1*}, \ldots, \mathbf{x}^{k-1*}, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1*}, \ldots, \mathbf{x}^{l*}),$$

т.е. что $\mathbf{x}^*$ является равновесным состоянием игры (решением) в смысле Нэша. Наконец, если $\mathbf{x}^*$ существует, то динамический процесс

$$\dot{x}_j^k = \overline{\delta_j^k}(\mathbf{x}) = r_k \overline{\frac{\partial\varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_j^k}} \quad (j = 1, \ldots, n_k;\ k = 1, \ldots, l), \tag{31}$$

рассматривавшийся в [215] и представляющий собой процесс вида $(*)$ в данной системе, при выполнении условия (30) сходится в силу теоремы 3 из [41] к состоянию равновесия $\mathbf{x}^*$.

Конкретным примером игры, удовлетворяющей условию (30) и, значит, условию III, может служить игра l лиц с платежными функциями «попарно-антагонистического» вида

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1,\neq k}^{l} f_{kj}(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^i), \tag{32}$$

где $f_{kj}(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^j) = -f_{jk}(\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k)$ и функции $f_{kj}(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^j)$ строго вогнуты по $\mathbf{x}^k$ и строго выпуклы по $\mathbf{x}^j$ $(j, k = 1, \ldots, l;\ j \neq k)$ (см. [151, 215]). Такая игра представляет собой прямое обобщение антагонистической выпукло-вогнутой игры двух лиц (пример 11) на случай l лиц. Пусть $X = \{\mathbf{x} | -\infty < a_i^k \leqslant x_i^k \leqslant b_i^k < -\infty \quad i = 1, \ldots, n_k;\ k = 1, \ldots, l\}$; тогда для набора функций (32) выполнено условие (30) (при $r_k \equiv 1$), так что решение данной игры (в смысле Нэша) существует, единственно и достигается в процессе (31) асимптотически при $t \to \infty$.

[1] Таким образом, если $n_k = 1$, то игрок k рассматривается как элемент с функцией-индикатором $\nabla_k\varphi_k = \partial\varphi_k(\mathbf{x})/\partial x^k$. Если же $n_k > 1$, то игроку k ставятся в соответствие n_k самостоятельных элементов с функциями-индикаторами $\partial\varphi_k(\mathbf{x})/\partial x_1^k, \ldots, \partial\varphi_k(\mathbf{x})/\partial x_{n_k}^k$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Будем называть здесь M-матрицей (матрицей Минковского–Метцлера [26]) $(n \times n)$-матрицу $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ такую, что $d_{ii} > 0$, $d_{ij} \leqslant 0$ $(j \neq i;\ i, j = 1, \ldots, n)$. Из класса M-матриц выделим подкласс *MX*-матриц (Метцлера–Хикса), характеризуемый выполнением каждого из трех эквивалентных условий, приведенных в следующей лемме.

Лемма П.1. Пусть $\mathbf{D}$ — M-матрица. Тогда следующие три условия эквивалентны:

а) существует вектор $\mathbf{z} > 0$ такой, что $\mathbf{Dx} = \mathbf{z}$, где $\mathbf{x} > 0$;

б) все главные миноры матрицы $\mathbf{D}$ положительны;

в) все собственные значения матрицы $\mathbf{D}$ имеют положительные вещественные части.

Доказательство эквивалентности этих условий друг другу (а также некоторым другим) можно найти в [26, 198]. Заметим также, что сам вид условий б) и в) показывает, что если $\mathbf{D}$ — *MX*-матрица, то и ее транспозиция $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$ — также *MX*-матрица.

Лемма П.2. Для любой матрицы $\mathbf{A}$ справедливо одно и только одно из следующих двух утверждений:

1) существует вектор $\mathbf{x} \geq 0$ такой, что $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leqq 0$;

2) существует вектор $\mathbf{y} > 0$ такой, что $\mathbf{Ay} > 0$.

Эта лемма — один из вариантов известных «теорем об альтернативах» (см., например, [78]).

Лемма П.3. Пусть $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ — M-матрица. Тогда следующие четыре условия эквивалентны друг другу:

(I) $\displaystyle\sum_j \mu_j d_{ji} > 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$ при некоторых $\mu_1, \ldots, \mu_n > 0$;

(II) $\displaystyle\sum_j \nu_j d_{ij} > 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$ при некоторых $\nu_1, \ldots, \nu_n > 0$;

(III) все $\det[\mu_i d_{ij} \nu_j + \mu_j d_{ji} \nu_i]_{i_1, \ldots, i_k} > 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$ при некоторых $\mu_1, \ldots, \mu_n,\ \nu_1, \ldots, \nu_n > 0$;

(IV) все $\det[d_{ij}]_{i_1, \ldots, i_k} > 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$.

Эта лемма дает еще три эквивалентных условия (I), (II), (III) того, что M-матрица $\mathbf{D}$ является *MX*-матрицей (IV). Доказательство ее проведем по такой логической схеме:

$$
(\mathrm{IV}) \begin{array}{l} \nearrow (\mathrm{I}) \\ \searrow (\mathrm{II}) \end{array} \Bigg\} \to (\mathrm{III}) \to (\mathrm{IV}).
$$

(IV)$\to$(I), (II). Пусть выполнено (IV), т. е. согласно лемме П.1 $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}^{\text{т}}$ являются MX-матрицами и, значит, существуют две пары положительных векторов $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{v}$ такие, что

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{v} > 0, \quad \mathbf{D}^{\text{т}}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{u} > 0, \tag{П.1}$$

т.е. выполнены условия (I) и (II).

(I) и (II)$\to$(III). Введем диагональные матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ с ii-и компонентами μ_i и ν_i соответственно ($i = 1, \ldots, n$). Тогда $\boldsymbol{\mu}$=$\mathbf{Me}$ и $\boldsymbol{\nu}$=$\mathbf{Ne}$, где $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)$, и из (П.1) имеем $\mathbf{DNe} > 0$, $\mathbf{D}^{\text{т}}\mathbf{Me} > 0$, откуда далее получаем

$$\mathbf{MDNe} > 0, \quad \mathbf{ND}^{\text{т}}\mathbf{Me} > 0. \tag{П.2}$$

Положим $\mathbf{MDN} = \mathbf{A}$; тогда $\mathbf{A}^{\text{т}} = \mathbf{N}^{\text{т}}\mathbf{D}^{\text{т}}\mathbf{M}^{\text{т}} = \mathbf{ND}^{\text{т}}\mathbf{M}$, так что (П.2) можно записать в виде пары неравенств $\mathbf{Ae} > 0$, $\mathbf{A}^{\text{т}}\mathbf{e} > 0$, суммируя которые, получаем

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\text{т}})\mathbf{e} > 0. \tag{П.3}$$

Очевидно, симметрическая матрица $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\text{т}}$ является, как $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$, M-матрицей. Поэтому из (П.3) с учетом леммы П.1 заключаем, что все главные миноры матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\text{т}}$ положительны — условие (III).

(III)$\to$(IV). Условие (III) согласно критерию Сильвестра для симметрической матрицы означает положительную определенность матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\text{т}}$. Это далее означает положительную квазиопределенность матрицы $\mathbf{A}$, т. е. $\mathbf{x}^{\text{т}}\mathbf{Ax} > 0$ при всех $\mathbf{x} \neq 0$. Поэтому ни для какого вектора $\mathbf{x} \geq 0$ невозможно $\mathbf{A}^{\text{т}}\mathbf{x} \leqq 0$. Отсюда по лемме П.2 существует $\mathbf{y} > 0$ такой, что $\mathbf{Ay} > 0$, т.е. $\mathbf{MDNy} > 0$ и, значит, $\mathbf{Du} > 0$, где $\mathbf{u} = \mathbf{Ny} > 0$. Последнее в силу леммы П.1 означает, что $\mathbf{D}$ — MX-матрица, так что $\mathbf{D}$ удовлетворяет условию (IV). Лемма полностью доказана.

Лемма П.4. Пусть $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ и $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ — матрицы, связанные соотношениями $a_{ii} = b_{ii}$, $a_{ij} = -|b_{ij}|$ ($j \neq i$; $i, j = 1, \ldots, n$). Тогда если матрица $\mathbf{A}$ положительно квазиопределенная (т.е. $\mathbf{x}^{\text{т}}\mathbf{Ax} > 0$ при всех $\mathbf{x} \neq 0$), то и матрица $\mathbf{B}$ положительно квазиопределенная.

Доказательство дается цепочкой соотношений

$$\mathbf{x}^{\text{т}}\mathbf{Bx} = 2\sum_i b_{ii}x_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} b_{ij}x_ix_j \geqslant 2\sum_i b_{ii}|x_i|^2 -$$

$$-\sum_i \sum_{j \neq i} |b_{ij}||x_i||x_j| = \mathbf{y}^{\text{т}}\mathbf{Ay} > 0 \quad (y_i = |x_i|,\ i = 1, \ldots, n;\ \mathbf{x} \neq 0).$$

Лемма П.5. Пусть набор $\delta_i(\mathbf{c}), \ldots, \delta_n(\mathbf{c})$ удовлетворяет условию ГК на C, и пусть $\mathbf{c}$ — внутренняя точка C. Тогда для каждого достаточно малого $\alpha > 0$ можно указать точки $\mathbf{c}'(\alpha)$, $\mathbf{c}''(\alpha) \in C$ такие, что $\mathbf{c}'(\alpha) < \mathbf{c} < \mathbf{c}''(\alpha)$, $\|\mathbf{c}'(\alpha) - \mathbf{c}\| = \|\mathbf{c}''(\alpha) - \mathbf{c}\| = \alpha$ и $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}'(\alpha)) > \boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}) > \boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}''(\alpha))$.

Доказательство. Отображение $\mathbf{c} \to \boldsymbol{\delta}(\mathbf{c})$ взаимно однозначно на C, что видно из формулировки условия ГК; кроме того, оно непрерывно на C. Поэтому $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c})$ гомеоморфно отображает множество $C \subset R^n$ на его образ $\boldsymbol{\delta}(C) \subset R^n$ и, следовательно, переводит внутреннюю точку $\mathbf{c} \in C$ во внутреннюю точку $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}) \in \boldsymbol{\delta}(C)$ в R^n [198]. Ввиду этого для данной внутренней точки $\mathbf{c}$ и ее образа $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c})$ можно указать пару точек $\boldsymbol{\delta}'$, $\boldsymbol{\delta}''$ таких, что $\boldsymbol{\delta}' > \boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}) > \boldsymbol{\delta}''$ и $\boldsymbol{\delta}'$, $\boldsymbol{\delta}'' \in \boldsymbol{\delta}(C)$, т.е. $\boldsymbol{\delta}' = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}')$ и $\boldsymbol{\delta}'' = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}'')$ для некоторых $\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}'' \in C$. Более того, очевидно, для любого достаточно малого $\alpha > 0$ точки $\boldsymbol{\delta}'$, $\boldsymbol{\delta}''$ можно подобрать так, что $\|\mathbf{c}' - \mathbf{c}\| = \|\mathbf{c}'' - \mathbf{c}\| = \alpha$. Наконец, с учетом условия ГК легко убедиться, что указанные точки $\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}''$ должны удовлетворять соотношению $\mathbf{c}' < \mathbf{c} < \mathbf{c}''$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теорем из раздела 1 статьи.

Доказательство теоремы 1. Пусть $d_{ii} = -\partial\delta_i/\partial c_i > 0$, $d_{ij} = -|\partial\delta_i/\partial c_j|$ $(i \neq j)$. Применяя к M-матрице $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ лемму П.3, устанавливаем эквивалентность условий $\mathrm{I}_{\text{ДМ}}$ и $\mathrm{II}_{\text{ДМ}}$ друг другу и условию положительности всех главных миноров матрицы $\mathbf{MDN} + \mathbf{ND}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$ ($\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ — диагональные матрицы с ii-ми компонентами $\mu_i, \nu_i > 0$). Последнее по критерию Сильвестра означает положительную определенность этой матрицы и тем самым положительную квазиопределенность матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{MDN}$. Введем матрицу $\mathbf{B}$ с компонентами $b_{ij} = -\mu_i \dfrac{\partial\delta_i}{\partial c_i}\nu_j$. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ удовлетворяют условиям леммы П.4; поэтому матрица $\mathbf{B}$ должна быть положительно квазиопределенной и, значит, матрица $\mathbf{B} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ — положительно определенная, что, опять по критерию Сильвестра, дает условие $\mathrm{III}_{\text{ДМ}}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 проведем в четыре этапа.

а. Существование и единственность равновесия. Пусть существует множество S (7), (8). Рассмотрим множества

$$P^1 = \{\mathbf{c} | \mathbf{c} \in S, \overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}) \geqq 0\}, \quad P^2 = \{\mathbf{c} | \mathbf{c} \in S, \overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}) \leqq 0\}.$$

Эти множества не пусты, так как они содержат точки $\mathbf{c}^1$ и $\mathbf{c}^2$ соответственно; ограничены, так как S ограничено; замкнуты ввиду замкнутости S, непрерывности $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c})$ и определения $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c})$. Поэтому функция $\varphi(\mathbf{c}) = \sum c_i$ должна достигать на P^1 своего максимума и на P^2 — своего минимума. Рассмотрим P^1 и точку $\mathbf{c}^*$, доставляющую $\max \sum c_i$ на P^1. Покажем, что на самом деле $\mathbf{c}^*$ доставляет одновременно максимум на P^1 каждому компоненту c_i, т.е. $\mathbf{c}^* \geqq \mathbf{c}$ для всех

$\mathbf{c} \in P^1$. Допустим противное: найдется $\mathbf{c}' \in P^1$, не мажорируемый вектором $\mathbf{c}^*$; пусть без ограничения общности $c_i' > c_i^*$ при $i = 1, \ldots, k$ и (если $k < n$) $c_i' \leqslant c_i^*$ при $i = k+1, \ldots, n$. Покажем, что тогда $\mathbf{c}'' = (c_1', \ldots, c_k', c_{k+1}^*, \ldots, c_n^*) \in P^1$. Очевидно, $\mathbf{c}'' \in S$; далее, в силу контрамонотонности $\delta_i(\mathbf{c})$ имеем $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}'') \geqslant \overline{\delta}_i(\mathbf{c}') \geqslant 0$ при $i = 1, \ldots, k$ и $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}'') \geqslant \overline{\delta}_i(\mathbf{c}^*) \geqslant 0$ при $i = k+1, \ldots, n$. Таким образом, $\mathbf{c}'' \in P^1$ и $\mathbf{c}'' \geq \mathbf{c}^*$, что противоречит определению $\mathbf{c}^*$.

Покажем теперь, что $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) = 0$. Действительно, в противном случае $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) \geq 0$; пусть, например, $\overline{\delta}_1(\mathbf{c}^*) > 0$. При этом заведомо $c_1^* < c_1^2$, так как из $c_1^* = c_1^2$, $c_i^* \leqslant c_i^2$ $(i = 2, \ldots, n)$ и $\overline{\delta}_1(\mathbf{c}^*) > 0$ с учетом контрамонотонности $\delta_1(\mathbf{c})$ получалось бы противоречие с условием $\overline{\delta}_1(\mathbf{c}^2) \leqslant 0$. Ввиду этого при достаточно малом увеличении c_1 до $c_1' > c_1^*$ мы получим точку $\mathbf{c}'' = (c_1', c_2^*, \ldots, c_n^*) \in S$ такую, что все еще $\overline{\delta}_1(\mathbf{c}'') \geqslant 0$ и ввиду контрамонотонности $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \geqslant 0$ для $i = 2, \ldots, n$. Полученный результат $\mathbf{c}'' \in P^1$, $\mathbf{c}'' \geq \mathbf{c}^*$ противоречит определению $\mathbf{c}^*$. Следовательно, $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^*) = 0$, так что $\mathbf{c}^* \in S$ представляет собой точку равновесия на C.

Аналогично показывается, что на множестве P^2 существует точка $\mathbf{c}^{**}$, доставляющая минимум сразу всем компонентам c_i ($\mathbf{c}^{**} \leqq \mathbf{c}$ для всех $\mathbf{c} \in P^2$) и являющаяся точкой равновесия ($\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^{**}) = 0$).

Докажем теперь единственность точки равновесия на C (и тем самым, в частности, равенство $\mathbf{c}^* = \mathbf{c}^{**}$). Действительно, допустим, что $\mathbf{c}', \mathbf{c}'' \in C$, $\overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}') = \overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}'') = 0$ и $\mathbf{c}' \neq \mathbf{c}''$. Пусть для определенности множество $I_>$ индексов i таких, что $c_i'' > c_i'$, не пусто; тогда по условию ГК $\delta_i(\mathbf{c}'') < \delta_i(\mathbf{c}')$ для некоторого $i \in I_>$. Так как для этого i должно быть $a_i \leqslant c_i' < c_i'' \leqslant b_i$, то отсюда и $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}'') < \overline{\delta}_i(\mathbf{c}')$. Противоречие доказывает единственность точки равновесия на C.

б. Непроницаемость «S-ящика». Докажем, что если $\mathbf{c}(t)$ — траектория процесса $(**)$ и $\mathbf{c}(0) \in S$, то эта траектория целиком лежит в S: $\mathbf{c}(t) \in S, 0 \leqslant t < \infty$. Для этого воспользуемся леммой 3 из [41]. Случай $c_i^1 = a_i$, $c_i^2 = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ тривиален. Рассмотрим другой крайний случай: $a_i < c_i^1 < c_i^2 < b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. В этом случае $\mathbf{c}^1$ и $\mathbf{c}^2$ — внутренние точки множества C, так что согласно (8) $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}^1) = \overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^1) \geqq 0$ и $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}^2) = \overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{c}^2) \leqq 0$ и, далее согласно лемме П.5 можно указать точки $\mathbf{c}'(\alpha)$ для $\mathbf{c}^1$ и $\mathbf{c}''(\alpha)$ для $\mathbf{c}^2$ такие, что $\mathbf{c}'(\alpha) < \mathbf{c}^1 < \mathbf{c}^2 < \mathbf{c}''(\alpha)$, $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}'(\alpha)) > \boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}^1) \geqq 0$, $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}''(\alpha)) < \boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}^2) \leqq 0$. При этом ввиду контрамонотонности функций $\delta_i(\mathbf{c})$ множество

$$S(\alpha) = \{\mathbf{c} | \mathbf{c}'(\alpha) \leqq \mathbf{c} \leqq \mathbf{c}''(\alpha)\} \subset C \qquad (\text{П.4})$$

удовлетворяет условиям леммы 3 из [41], и, следовательно, траектория $\mathbf{c}(t)$ целиком лежит в $S(\alpha)$, если $\mathbf{c}(0) \in S(\alpha)$. По построению $S(\alpha) \supset$

$\supset S$ $(\alpha > 0)$, и $S(\alpha)$ сжимается в S (т.е. $\mathbf{c}'(\alpha) \to \mathbf{c}^1$, $\mathbf{c}''(\alpha) \to \mathbf{c}^2$) при $\alpha \to 0$. Отсюда следует, что если $\mathbf{c}(0) \in S$, то траектория $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$ целиком лежит в S.

Возьмем теперь промежуточный случай, когда при различных $i = 1, \ldots, n$ может быть и $c_i^1 = a_i$, и $c_i^1 > a_i$; и $c_i^2 = b_i$, и $c_i^2 < b_i$. Рассмотрим, например, точку $\mathbf{c}^1$; пусть, без ограничения общности, $c_i^1 > a_i$ при $i = 1, \ldots, k$ и $c_i^1 = a_i$ при $i = k+1, \ldots, n$. Легко видеть, что набор k функций $\delta_i(c_1, \ldots, c_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$ от k переменных $c_1, \ldots, c_k$ удовлетворяет условию ГК на k-мерной проекции $C^{(k)} = \{(c_1, \ldots, c_k) | a_i \leqslant c_i \leqslant b_i \ (i = 1, \ldots, k)\}$ множества C на соответствующее подпространство R^k, и точка $\mathbf{c}^{1(k)} = (c_1^1, \ldots, c_k^1)$ является внутренней точкой этого множества $C^{(k)}$ в R^k (так как $a_i < c_i^1 < c_i^2 \leqslant b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$). Поэтому, применяя лемму П.5, как и выше, получаем k-мерный вектор $\mathbf{c}'^{(k)}(\alpha) = (c_1'(\alpha), \ldots, c_k'(\alpha))$ и соответствующий n-мерный вектор $\mathbf{c}'(\alpha) = (c_1'(\alpha), \ldots, c_k'(\alpha), a_{k+1}, \ldots, a_n)$ такой, что $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}'(\alpha)) = \delta_i(\mathbf{c}'(\alpha)) > 0$ для $i = 1, \ldots, k$. Рассмотрев аналогичным образом точку $\mathbf{c}^2$ и приняв во внимание контрамонотонность функций $\delta_i(\mathbf{c})$, находим, что для достаточно малых $\alpha > 0$ можно указать точки $\mathbf{c}'(\alpha)$, $\mathbf{c}''(\alpha)$ и соответствующее множество $S(\alpha)$ (П.4), удовлетворяющее условиям леммы 3 из [41]. Отсюда ввиду произвольной малости $\alpha > 0$, как и выше, заключаем, что траектория $\mathbf{c}(t)$ целиком лежит в S, если $\mathbf{c}(0) \in S$.

в. Построение «объемлющего ящика» $S(\mathbf{c})$. Возьмем произвольную точку $\mathbf{c} \in S$ и рассмотрим множества

$$Q^1(\mathbf{c}) = \{\mathbf{s} | \mathbf{c}^1 \leqq \mathbf{s} \leqq \mathbf{c},\ \overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{s}) \geqq 0\}, \quad Q^2(\mathbf{c}) = \{\mathbf{s} | \mathbf{c} \leqq \mathbf{s} \leqq \mathbf{c}^2,\ \overline{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{s}) \leqq 0\}.$$

Эти множества, очевидно, не пусты, ограничены и замкнуты. Рассуждая, как и в п. «а», заключаем, что множества $Q^1(\mathbf{c})$ и $Q^2(\mathbf{c})$ содержат соответственно точку $\mathbf{s}^1(\mathbf{c})$ и точку $\mathbf{s}^2(\mathbf{c})$, максимальную (минимальную) по всем компонентам одновременно на $Q^1(\mathbf{c})$ (на $Q^2(\mathbf{c})$). Кроме того, аналогично п. «а» находим, что

$$\begin{aligned} &1)\overline{\delta}_i(\mathbf{s}^1(\mathbf{c})) \neq 0 \text{ (а именно} > 0\text{), только если } \mathbf{s}_i^1(\mathbf{c}) = c_i, \\ &2)\overline{\delta}_i(\mathbf{s}^2(\mathbf{c})) \neq 0 \text{ (а именно} < 0\text{), только если } \mathbf{s}_i^2(\mathbf{c}) = c_i. \end{aligned} \tag{П.5}$$

Далее, в силу соотношений $Q^1(\mathbf{c}) \subset P^1$, $Q^2(\mathbf{c}) \subset P^2$ и характеристики точки $\mathbf{c}^*$ в п. «а» как максимальной в P^1 и минимальной в P^2 по всем координатам имеем

$$\mathbf{s}^1(\mathbf{c}) \leqq \mathbf{c}, \quad \mathbf{c}^* \leqq \mathbf{s}^2(\mathbf{c}). \tag{П.6}$$

Построим множество $S(\mathbf{c}) = \{\mathbf{s}|\mathbf{s}^1(\mathbf{c}) \leqq \mathbf{s} \leqq \mathbf{s}^2(\mathbf{c})\}$; очевидно, точки $\mathbf{s}^1(\mathbf{c})$, $\mathbf{s}^2(\mathbf{c})$ и множество $S(\mathbf{c})$ удовлетворяют условиям (7), (8) теоремы 2 в качестве $\mathbf{c}^1$, $\mathbf{c}^2$ и S соответственно.

Рассмотрим траекторию $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$ при $\mathbf{c}(0) \in S$ и соответствующее переменное по t множество $S(\mathbf{c}(t)) \subset S$. В силу п. «б» «хвост» траектории $\{\mathbf{c}(\tau)|\tau \geqslant t\}$ целиком лежит в множестве $S(\mathbf{c}(t))$. Поэтому при $\tau \geqslant t$ множества $Q^1(\mathbf{c}(\tau))$ и $Q^2(\mathbf{c}(\tau))$ заведомо содержат точки $\mathbf{s}^1(\mathbf{c}(t))$ и $\mathbf{s}^2(\mathbf{c}(t))$ соответственно, так что

$$\mathbf{s}^1(\mathbf{c}(t)) \leqq \mathbf{s}^1(\mathbf{c}(\tau)) \leqq \mathbf{c}^* \leqq \mathbf{s}^2(\mathbf{c}(\tau)) \leqq \mathbf{s}^2(\mathbf{c}(t)). \qquad (\text{П}.7)$$

Таким образом, $S(\mathbf{c}(\tau)) \subset S(\mathbf{c}(t))$ при $\tau \geqslant t$, т.е. множество $S(\mathbf{c}(t))$, содержащее и точку $\mathbf{c}(t)$, и точку $\mathbf{c}^*$, может с течением времени t только сжиматься. Остается показать, что множество $S(\mathbf{c}(t))$ действительно сжимается до точки $\mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$, т.е. что $\mathbf{s}^1(\mathbf{c}(t)) \to \mathbf{c}^*$, $\mathbf{s}^2(\mathbf{c}(t)) \to \mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$.

г. Сжатие $S(\mathbf{c}(t))$ в точку $\mathbf{c}^*$. С учетом (П.6) и контрамонотонности δ_i находим, что в (П.5) в случае 1) $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \geqslant \overline{\delta}_i(\mathbf{s}^1(\mathbf{c})) > 0$, и в случае 2) $\overline{\delta}_i(\mathbf{c}) \leqslant \overline{\delta}_i(\mathbf{s}^2(\mathbf{c})) < 0$. Поэтому в случае 1) $\dot{c}_i(t) > 0$ и в случае 2) $\dot{c}_i(t) < 0$, причем всегда

$$|\overline{\delta}_i(\mathbf{s}^1(\mathbf{c}))| \leqslant |\overline{\delta}_i(\mathbf{c})|, \quad |\overline{\delta}_i(\mathbf{s}^2(\mathbf{c}))| \leqslant |\overline{\delta}_i(\mathbf{c})| \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (\text{П}.8)$$

Пусть дана траектория $\mathbf{c}(t)$ процесса $(**)$. Покажем, что точки $\mathbf{s}^1(\mathbf{c}(t))$ и $\mathbf{s}^2(\mathbf{c}(t))$ движутся таким образом, что

$$\text{если } \overline{\delta}_i(\mathbf{s}^1(\mathbf{c}(t))) \neq 0, \text{ то существует } \dot{s}_i^1(\mathbf{c}(t)) = \dot{c}_i(t) > 0, \qquad (\text{П}.9)$$
$$\text{если } \overline{\delta}_i(\mathbf{s}^2(\mathbf{c}(t))) \neq 0, \text{ то существует } \dot{s}_i^2(\mathbf{c}(t)) = \dot{c}_i(t) < 0. \qquad (\text{П}.10)$$

В самом деле, при любом достаточно малом $\Delta t > 0$ точка $\mathbf{s}' = (s_1', \ldots, s_n')$:

$$s_i' = \begin{cases} c_i(t + \Delta t), & \text{если } \overline{\delta}_i(\mathbf{s}^1(\mathbf{c}(t))) > 0, \\ c_i(t), & \text{если } \overline{\delta}_i(\mathbf{s}^1(\mathbf{c}(t))) = 0 \end{cases}$$

в силу (П.5)–(П.7) и непрерывности и контрамонотонности $\delta_i(\mathbf{c})$ принадлежит множеству $Q^1(\mathbf{c}(t + \Delta t))$ и, значит, $\mathbf{s}^1(\mathbf{c}(t + \Delta t)) \geqq \mathbf{s}'$. С учетом (П.6) отсюда находим, что $s_i^1(\mathbf{c}(t + \Delta t)) = c_i(t + \Delta t)$, если $\overline{\delta}_i(\mathbf{s}^1(\mathbf{c}(t))) \neq 0$ и $\Delta t > 0$ достаточно мало, что и доказывает (П.9). Аналогично устанавливается (П.10).

Используя (П.7)–(П.10) нетрудно заметить, что множество $S(\mathbf{c}(t))$ монотонно сжимается, причем в случае невырожденности траектории $\mathbf{c}(t)$ оно сжимается в точку $\mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$, а именно $\mathbf{s}^1(\mathbf{c}(t)) \to \mathbf{c}^*$, $\mathbf{s}^2(\mathbf{c}(t)) \to \mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$. Отсюда с учетом (П.6) следует, что $\mathbf{c}(t) \to \mathbf{c}^*$ при $t \to \infty$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Достаточность. Контрамонотонность функций $\delta_i(\mathbf{c})$ при условии ГК$_{\text{Д}}$ очевидна. Поэтому нужно лишь доказать, что если $\mathbf{c}$, $\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c} \in C$, $\Delta\mathbf{c} \geq 0$, то $\Delta\delta_i(\mathbf{c}) < 0$ хотя бы для одного i. Докажем это сначала «в малом», при достаточно малых $\Delta\mathbf{c}$. Возьмем $\mathbf{r} \geq 0$ и положим $\Delta\mathbf{c}(\alpha) = \alpha\mathbf{r}$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\Delta\delta_i(\mathbf{c}) = \alpha \sum_j \frac{\partial\delta_i(\mathbf{c})}{\partial c_j} r_j + o(\alpha). \qquad (\text{П.11 })$$

Согласно условию ГК$_{\text{Д}}$ и лемме П.1 матрица $\mathbf{D} = [-\partial\delta_i(\mathbf{c})/\partial c_j]$ и, значит, $\mathbf{D}^{\text{т}}$ является MX-матрицей, и для некоторого $\mathbf{y} > 0$ имеем $\mathbf{D}^{\text{т}}\mathbf{y} > 0$. Следовательно, по лемме П.2 ни для какого $\mathbf{x} \geq 0$ не может быть $\mathbf{Dx} \leqq 0$. Поэтому должно быть $\sum_j \Big(-\dfrac{\partial\delta_i(\mathbf{c})}{\partial c_j}\Big) r_j > 0$ хотя бы для одного i, откуда согласно (П.11) $\Delta\delta_i(\mathbf{c}) < 0$ при достаточно малом $\alpha >$ > 0, что в силу произвольности $\mathbf{r} \geq 0$ означает «локальное» выполнение условия ГК.

Проверим теперь выполнение условия ГК при произвольном допустимом $\Delta\mathbf{c} \geq 0$. Допустим противное: $\Delta\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}) \geqq 0$, и рассмотрим множество

$$L = \{\mathbf{s} | \mathbf{c} \leqq \mathbf{s} \leqq \mathbf{c} + \Delta\mathbf{c},\ \boldsymbol{\delta}(\mathbf{s}) \geqq \boldsymbol{\delta}(\mathbf{c})\}.$$

Очевидно, L не пусто (оно содержит $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}$), ограничено и замкнуто. Поскольку $\mathbf{c}$ является изолированной точкой в L ввиду «локальной» выполнимости условия ГК, то множество $L' = L \setminus \{\mathbf{c}\}$ также не пусто (содержит $\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}$), ограничено и замкнуто. Поэтому в L' имеется вектор $\tilde{\mathbf{c}}$, минимизирующий $\sum c_i$ на L'.

По построению $\tilde{\mathbf{c}} \geq \mathbf{c}$; пусть для определенности $\tilde{c}_i > c_i$ при $i = 1, \ldots, k$ и $\tilde{c}_i = c_i$ при $i = k + 1, \ldots, n$ (возможно, $k = n$). Система k функций $\delta_i(s_1, \ldots, s_k, \tilde{c}_{k+1}, \ldots, \tilde{c}_n)$ от $s_1, \ldots, s_k$ $(i = 1, \ldots, k)$ удовлетворяет условию ГК$_{\text{Д}}$, так что матрица $\mathbf{D}^{(k)} = [-\partial\delta_i/\partial s_j]_1^k$, вычисленная в точке $\tilde{\mathbf{c}}$, является MX-матрицей, и по лемме П.1 можно указать вектор $\mathbf{p}^{(k)} = (p_1, \ldots, p_k) > 0$ такой, что $\mathbf{D}^{(k)}\mathbf{p} > 0$. Положим $\mathbf{c}(\alpha) = (\tilde{c}_1 - \alpha p_1, \ldots, \tilde{c}_k - \alpha p_k, \tilde{c}_{k+1}, \ldots, \tilde{c}_n)$; тогда при достаточно малом $\alpha > 0$ получаем $\delta_i(\mathbf{c}(\alpha)) \geqslant \delta_i(\mathbf{c})$ для $i = 1, \ldots, k$, а в силу контрамонотонности и для $i = k + 1, \ldots, n$.

Таким образом, при достаточно малом $\alpha > 0$ имеем $\mathbf{c} \leqq \mathbf{c}(\alpha) \leqq \mathbf{c} +$ $\Delta\mathbf{c}$ и $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}(\alpha)) \geqq \boldsymbol{\delta}(\tilde{\mathbf{c}})$, так что $\mathbf{c}(\alpha) \in L'$; в то же время $\mathbf{c}(\alpha) \leqq \mathbf{c}$ вопреки определению $\tilde{\mathbf{c}}$. Это доказывает достаточность ГК$_{\text{Д}}$ для ГК.

Необходимость. Возьмем произвольную внутреннюю точку $\mathbf{c} \in C$, произвольный вектор $\mathbf{r} > 0$ и положим $\Delta\mathbf{c} = \alpha\mathbf{r}$, где $\alpha > 0$ столь мало, что $\mathbf{c}+\Delta\mathbf{c} \in C$. Тогда по условию ГК $\Delta\delta_i(\mathbf{c}) < 0$ для некоторого i, так что из (П.11) в пределе по $\alpha \to 0$ получаем

$$\sum_j \frac{\partial \delta_i}{\partial c_j} r_j \leq 0 \text{ для некоторого } i, \text{ причем } r_i > 0. \tag{П.12 }$$

Возьмем $\mathbf{D} = [-\partial\delta_i/\partial c_j]$ и $\mathbf{D}(\varepsilon) = \mathbf{D} + \varepsilon\mathbf{E}$, где $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{E}$ — единичная матрица; очевидно, $\mathbf{D}(\varepsilon)$ — M-матрица. Согласно (П.12) i-й компонент вектора $\mathbf{D}(\varepsilon)\mathbf{r}$ положителен, откуда ввиду произвольности $\mathbf{r} \geq 0$ согласно лемме П.2 получаем, что $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\mathbf{y} > 0$ для некоторого $\mathbf{y} > 0$. Отсюда по лемме П.1 $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)$ и $\mathbf{D}(\varepsilon)$ — MX-матрицы, и все главные миноры матрицы $\mathbf{D}(\varepsilon)$ положительны. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем, что все $\det[-\partial\delta_i/\partial c_j]_{i_1,\ldots,i_k}$ неотрицательны, так что условие $\text{ГК}'_{\text{Д}}$ выполняется в произвольной внутренней точке $\mathbf{c} \in C$, а с учетом непрерывности $\partial\delta_i(\mathbf{c})/\partial c_j$ — и в каждой граничной точке множества C.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4 сводится к непосредственному приложению леммы П.3 к матрице $\mathbf{D} = [-\partial\delta_i/\partial c_j]$.

Доказательство теоремы 5. Достаточность. Пусть $\mathbf{c}^*$ — точка равновесия, внутренняя для C. Тогда $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}^*) = 0$, и по лемме П.5 найдутся точки $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2$, удовлетворяющие условиям (7), (8) теоремы 2, что и гарантирует сходимость каждой невырожденной траектории $\mathbf{c}(t)$ процесса (∗∗) (и подавно (∗)) при $\mathbf{c}^1 \leqq \mathbf{c}(0) \leqq \mathbf{c}^2$ к $\mathbf{c}^*$.

Необходимость. Для сходимости в процессе (∗∗) необходима, в частности, сходимость всех траекторий процесса (∗), необходимым условием чего является (локальная) асимптотическая устойчивость точки равновесия $\mathbf{c}^*$ процесса (∗). Поскольку $\mathbf{c}^*$ — внутренняя точка множества C, вопрос сводится к асимптотической устойчивости точки равновесия $\mathbf{c}^*$ в процессе $\dot{\mathbf{c}} = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{c})$. Необходимым условием последней является неположительность (а для линейной системы — отрицательность) вещественных частей всех собственных значений матрицы $[\partial\delta_i(\mathbf{c}^*)/\partial c_j]$ [12] и, значит, положительность вещественных частей всех собственных значений матрицы

$$[-\partial\delta_i(\mathbf{c}^*)/\partial c_j] + \varepsilon\mathbf{E}, \quad \varepsilon > 0.$$

Применяя лемму П.1 к M-матрице $[-\partial\delta_i(\mathbf{c}^*)/\partial c_j] + \varepsilon\mathbf{E}$ (в линейном случае к $[-\partial\delta_i(\mathbf{c}^*)/\partial c_j]$) и устремляя $\varepsilon \to 0$, находим, что для указанной асимптотической устойчивости необходимо выполнение условия $\text{ГК}'_{\text{Д}}$ (в линейном случае $\text{ГК}_{\text{Д}}$).

Теорема доказана.

Взаимодействие элементов в системе с распределением ответственности [1]

При изучении сложной системы нередко оказывается полезным рассматривать ее как совокупность взаимосвязанных элементов, каждый из которых является в определенном смысле самостоятельным, индивидуализированным объектом управления. «Индивидуальность» такого элемента проявляется в первую очередь в том, что для него можно указать «индивидуальную цель» управления, которая присуща этому элементу по самой его природе либо специально сконструирована и предписана ему как частная подцель общей цели системы. Управление системой, состоящей из таких элементов, часто можно представить как совокупность отдельных управляющих воздействий, идущих к различным элементам. Если каждое такое управляющее воздействие всегда согласуется с частной целью соответствующего элемента, т.е. представляется целесообразным с точки зрения элемента, а не только (и даже не обязательно) с точки зрения системы в целом, то о такой системе будем условно говорить здесь как о «системе с распределением ответственности».

При «распределении ответственности» за управление отдельными элементами важно быть уверенным в том, что при этом действительно возможно добиться одновременного достижения всех частных целей элементов, а значит, и общей цели системы. Однако легко привести целый ряд примеров, когда попытки одновременного решения нескольких управленческих задач по схеме «распределения ответственности» не приводят к успеху. Дело в том, что при чисто локальном управлении отдельным элементом принимается во внимание лишь непосредственно ожидаемый результат данного управляющего действия, т.е. тот результат, который был бы получен, если бы данный элемент в действительности был изолирован от остальных элементов системы (или, как часто говорят, «при прочих равных условиях» для данного элемента). При таком подходе принципиально не могут быть учтены в полной мере те отдаленные, вторичные последствия принимаемого управленческого решения, которые проистекают из взаимосвязанности всех элементов системы и могут непредвиденным образом сказаться на данном элементе. В действительности же эти непредвиденные «вторичные» эффекты могут привести к итоговым результатам, прямо противоположным первоначальным намерениям.

Для иллюстрации этого положения начнем с примера, на первый

[1] Проблемы планирования и управления экономическими целенаправленными системами.—Новосибирск, 1972.—С. 113–124.

взгляд от экономики весьма далекого, но, по-видимому, достаточно хорошо поясняющего суть дела. Представим себе врача, который хочет воздействовать на определенный физиологический параметр пациента (например, добиться повышения давления крови) и вводит с этой целью дозу соответствующего лекарства. Как прямой результат этого действия, давление крови повысится, но побочным результатом может оказаться нежелательное изменение какого-то другого параметра. Желая устранить этот побочный эффект, врач попытается ввести другое, компенсирующее лекарство. Может оказаться, что тогда побочный эффект будет устранен (или смягчен), но давление крови снова упадет, причем до уровня более низкого, чем первоначальный. Таким образом, итогом разрозненных действий, каждое из которых преследует свою частную цель, может быть полная неудача в выполнении исходного намерения.

Подобные ситуации нередко возникают и в экономических моделях. Обратимся, например, к распространенному модельному представлению о положительной зависимости выпуска (предложения, или избыточного предложения) некоторого продукта от устанавливаемой на него цены. Из этого представления вытекает, что повышение цены «при прочих равных условиях» увеличит предложение продукта, и в этом смысле цена может служить рычагом управления выпуском (предложением) продукта. Однако если «прочие равные условия» не соблюдаются — например, одновременно увеличиваются цены и на другие продукты, — то в конечном счете предложение некоторых (а возможно, даже всех) продуктов не только не увеличится, но даже уменьшится. (Подобные явления, в частности, исследовались в известной модели рыночного равновесия Хикса.) Подчеркнем, что отмеченный «аномальный» эффект возможен несмотря на исходное предположение о том, что повышение цены на отдельный продукт всегда увеличивает его предложение.

Еще один пример возможной неэффективности «распределения ответственности» в экономической модели обнаруживается при анализе схемы межотраслевого баланса (типа известной модели «затраты — выпуск» Леонтьева). Пусть экономическая система состоит из n отраслей, выпускающих n различных продуктов. Будем считать целью системы увеличение чистого выпуска (т.е. выпуска за вычетом производственных затрат) всех продуктов, а частной целью — увеличение чистого выпуска одного продукта. Естественно предписать каждую такую частную цель той отрасли, которая выпускает данный продукт, и пытаться для достижения этой цели увеличивать интенсивность (полный выпуск) данной отрасли. Но учтем теперь, что увеличение интенсивности отрасли сопряжено с увеличением затрат продуктов, потребляемых этой отраслью. Чтобы воспрепятствовать нежелательному уменьшению *чистого* выпуска этих продуктов, придется одновременно с увеличением интенсивности первой, исходной отрасли увеличить интенсивности ее отраслей-поставщиков (а также отраслей-поставщиков этих отраслей и т.д.). А так как отрасли-поставщики, в свою очередь, могут расходовать продукт первой отрасли, то в конечном счете чистый выпуск продукта первой отрасли может даже уменьшиться (и это действительно возможно в так называемом «непродуктивном» режиме работы экономической модели).

На этих примерах видно, что попытки решения взаимосвязанных управленческих задач по схеме «распределения ответственности» в некоторых случаях приводят к «аномальным» эффектам, когда получаемые результаты оказываются в противоречии с исходными целями. Однако в других случаях, чему также имеется много примеров, схема «распределения ответственности» является вполне работоспособной. Последнее утверждение заведомо справедливо в том тривиальном случае, когда управляемая система на самом деле состоит из не связанных между собой элементов. Естественно предположить, что если элементы системы связаны между собой в каком-то смысле достаточно слабо — настолько, что исключены вышеупомянутые «аномальные» эффекты, — то управление в ней по схеме «распределения ответственности» принципиально допустимо. И действительно, далее мы опишем формальную модель, в рамках которой это предположение доказывается как теорема, причем условие «достаточно слабого», или, лучше сказать, «не слишком сильного», взаимодействия элементов приобретает точный смысл и может быть выражено в форме эффективно проверяемого критерия.

Дадим сначала общее, качественное описание предлагаемой модели. Рассмотрим систему, каждый элемент которой описывается статической функциональной зависимостью «действие — результат». Частная цель, или подзадача, стоящая перед элементом, допускает количественную меру ее выполнения — «результат», который «зависит от (количественно измеряемого) действия» данного элемента, причем на вид этой зависимости влияют как параметры действия и остальных элементов. Предположим, что каждый отдельный элемент всегда может найти такое действие, которое, при условии «бездействия» всех остальных элементов, заведомо приведет к достижению его частной цели (в том смысле, что «результат» будет принадлежать требуемой области значений).

Если несколько элементов одновременно предпримут действия, направленные на достижение своих частных целей, то из-за наличия «перекрестных» связей между ними, вообще говоря, не все они достигнут нужных результатов. Более того, может оказаться, что *ни один* из элементов не достигнет своей цели; примеры подобных ситуаций как раз и приводились выше. Возможность или невозможность появления таких «аномальных» эффектов в системе положена в основу классификации систем по «силе взаимосвязей» между элементами — классификации на «натуральные» и «ненатуральные» системы. *Натуральной будем называть систему, если есть гарантия, что хотя бы один из элементов, предпринявших целенаправленное действие, получит (качественно) ожидаемый результат.* И наоборот, *система ненатуральна, если в ней возможен аномальный эффект, когда все элементы, предпринявшие некоторые целенаправленные действия, получают результаты, (качественно) противоположные ожидаемым.* Здесь под ожидаемым подразумевается тот результат, который был бы получен при изоляции данного элемента от остальных.

Условие, выделяющее натуральные системы, на первый взгляд может показаться слишком слабым, так как каждый раз требуется достижение цели *только одним* элементом. Однако в рамках формальной модели ниже будет показано, что в классе натуральных систем, в отличие от ненатуральных, всегда можно добиться одновременного достижения целей *всех* элементов (в смысле получения качественно желаемых результатов).

Опишем теперь формальную модель (не стремясь здесь к полной общности и строгости изложения). Пусть система состоит из n элементов, где каждый i-й элемент описывается парой числовых переменных: x_i — «действие» и y_i — «результат». «Результат» y_i связан статической функциональной зависимостью с «действием» x_i этого элемента и, кроме того, с «действиями» x_j других элементов $j \neq i$: $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \equiv f_i(x)$, где функции f_i $(i = 1, \ldots, n)$ предполагаются непрерывными и (для простоты) определенными при всех x. Примем, что цель i-го элемента состоит в том, чтобы получить «результат» $y_i > 0$; для этого элемент может выбрать любое «действие» $x_i \geqslant 0$. Предполагается, что для изолированного элемента i эта цель достигается при любом ненулевом «действии»: если все $x_j = 0$, $j \neq i$, а $x_i > 0$, то $y_i > 0$, т.е. $f_i(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) > 0$ при любом $x_i > 0$.

Рассмотрим произвольный набор допустимых действий $x = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) \geqslant 0$; здесь, вообще говоря, некоторые из действий x_i положительны, а некоторые равны нулю. Проанализируем соответствующий набор результатов $y = (y_1, \ldots, y_n)$, где $y_i = f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$; здесь некоторые из результатов y_i положительны, а некоторые могут быть отрицательны или равны нулю. Конкретизируя введенное выше понятие, *назовем систему натуральной, если для любого набора* $x \geqslant 0$ $(x \neq 0)$ *найдется хотя бы один индекс* i, *такой, что* $x_i > 0$ *и*

$y_i > 0$ (это и означает в данном случае, что полученный результат для i-го элемента качественно соответствует приложенному действию). И наоборот, система ненатуральна, если для некоторого вектора $x \geqslant 0$ $(x \neq 0)$ будем иметь $x_i y_i \leqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$ (все результаты не соответствуют действиям). Справедлива следующая *теорема о согласованных действиях:* если система натуральна, то можно указать набор $x = (x_1, \ldots, x_n) > 0$, такой, что соответствующий набор $y = (y_1, \ldots, y_n)$, где $y_i = f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, удовлетворяет условию $y > 0$.

Таким образом, в натуральной системе действия элементов всегда могут быть так согласованы по величине, что все элементы получат желаемые результаты (в качественном смысле). Это свойство обеспечивает принципиальную возможность «распределения ответственности» между элементами натуральных систем.

Используя различные варианты определения натуральности, соответственно получим ряд вариантов теоремы о согласованных действиях. Так, в этом определении и в теореме можно ограничиться рассмотрением наборов действий с заданной нормой $\|x\|$, в частности, с достаточно малой нормой («локальная натуральность»). Натуральность может быть рассмотрена по отношению к произвольному исходному начальному состоянию $x = x^0$, $y = y^0 = f(x^0)$ (не обязательно при $x^0 = 0$), причем роль величин x_i и y_i будут играть соответственно приращения Δx_i и Δy_i. В этом случае теорема о согласованных действиях гарантирует, что для любой точки x, в которой система натуральна, можно указать набор $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) > 0$, такой, что $\Delta y = (\Delta y_1, \ldots, \Delta y_n) > 0$, где $\Delta y_i = \Delta f_i(x) = f_i(x + \Delta x) - f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Наконец, полезно следующее усиление понятия натуральности. Рассмотрим в качестве возможных действий i-го элемента не только положительные, но и отрицательные приращения Δx_i и в качестве желаемых результатов произвольные знаки приращений Δy_i. *Назовем систему «полностью натуральной», если для любого набора действий $\Delta x \neq 0$ соответствующий набор результатов $\Delta y = \Delta f(x)$ таков, что хотя бы для одного элемента результат Δy_i качественно, по знаку соответствует действию Δx_i, т.е.* $\Delta x_i \Delta y_i > 0$. Из этого определения, в частности, непосредственно вытекает, что если i-й элемент рассматривается изолированно, т.е. если величины x_j $(j \neq i)$ фиксированы, то для получения заданного качественного результата — знака $\sigma_i = \operatorname{sign} \Delta y_i$ $(\sigma_i = +1$ или $-1)$ — нужно выбрать действие того же знака: $\operatorname{sign} \Delta x_i = \sigma_i$. Для полностью натуральной системы теорема о согласованных действиях принимает следующий вид.

Пусть задан произвольный набор желаемых знаков результатов $\sigma_1 = \operatorname{sign}\Delta y_1, \ldots, \sigma_n = \operatorname{sign}\Delta y_n$ ($\sigma_i = \pm 1$). Тогда существуют действия $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, каждое из которых обеспечило бы своему элементу в случае его изолированности желаемый знак результата, т.е. такие, что $\operatorname{sign}\Delta x_1 = \sigma_1, \ldots, \operatorname{sign}\Delta x_n = \sigma_n$, и эти действия совместно также обеспечат желаемые знаки результатов всем элементам: $\operatorname{sign}\Delta f_1(x) = \sigma_1, \ldots, \operatorname{sign}\Delta f_n(x) = \sigma_n$.

Теорема о согласованных действиях позволяет установить возможность управления натуральной системой и в более сложной задаче, чем получение «результатов» Δy_i заданных знаков. Так, для полностью натуральной системы можно организовать «согласованное движение» в заданную сторону, т.е. построить непрерывную кривую $x(t)$ (t — время), такую, что каждая координата $x_i(t)$ изменяется «в заданную сторону» σ_i (возрастает, если $\sigma_i = +1$, и убывает, если $\sigma_i = -1$), и при этом $y_i(t)$ изменяется в ту же сторону. Такое согласованное изменение помогает добиться выполнения «заданий» $f_i = \overline{y}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) (а если значения $f_i(x) = \overline{y}_i$ недостижимы при допустимых x, то наилучшего в определенном смысле приближения к ним). Можно также рассматривать и другие постановки целей системы и целей элементов, в частности, игровые постановки.

Мы не останавливаемся здесь на конструктивных методах отыскания согласованных действий и движений. Скажем только, что в их основе лежит достаточно простой принцип: самостоятельные целенаправленные действия элементов допускаются до тех пор, пока ни один из элементов не начнет получать нежелательный результат; в противном случае только этот элемент получит право на самостоятельные действия.

Совокупность полученных следствий и позволяет считать, что для натуральных систем достаточно широкий класс задач управления решается по схеме «распределения ответственности», когда каждый элемент совершает действие, целесообразное с точки зрения непосредственно ожидаемого результата (как если бы элемент был изолирован). Наличие межэлементного взаимодействия в натуральной системе, в отличие от ненатуральной, не искажает качественного характера частных задач, стоящих перед элементами, а требует лишь некоторого согласования действий этих элементов, остающихся локально целесообразными.

Возникает вопрос, насколько широк класс натуральных систем и как определить, является ли данная система натуральной. Несколько позже мы вернемся к примерам, приводившимся вначале, и покажем, что именно нарушение натуральности соответствующих систем и обусловило описывавшиеся там «аномальные эффекты». Сейчас мы рассмотрим формальные признаки натуральности (здесь и далее будем иметь в виду полную натуральность, обеспечивающую натуральность и в любом другом более слабом смысле).

Прежде всего заметим, что само определение натуральности в принципе позволило бы установить (давало бы «операционное» правило вывода), является ли данная система натуральной, если бы была возможность перебрать все векторы действий x (или Δx) и соответствующие векторы результатов $y = f(x)$ (или $\Delta y = \Delta f(x)$) и проверить, не встретится ли хотя бы один случай, когда $x_i y_i \leqslant 0$ (или $\Delta x_i \Delta y_i \leqslant 0$) для всех $i = 1, \ldots, n$; если не встретится — система натуральна. Однако при этом пришлось бы перебрать бесконечно много векторов x и даже векторов направлений $x/\|x\|$. Можно показать, что на самом деле допустимо ограничиться перебором значительно суженного множества векторов x (так что, если ограничиться несколько усиленным определением полной натуральности, множество перебираемых векторов направлений $x/\|x\|$ будет конечным).

Здесь мы приведем другой критерий натуральности, который имеет аналитическую форму. Предположим дополнительно, что функции $f_i(x)$ дифференцируемы, и рассмотрим матрицу частных производных $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Тогда положительность всех главных миноров этой матрицы

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} > 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_i} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{vmatrix} > 0 \quad (i, k = 1, \ldots, n,\ i \neq k),$$

$$\vdots$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} > 0$$

является достаточным условием полной натуральности системы. Неотрицательность главных миноров — необходимое условие полной натуральности (положительность миноров дает необходимое условие для несколько усиленного варианта полной натуральности).

Отметим интересный частный случай симметричности матрицы

$\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$. Существует скалярная функция — «потенциал» $\Phi(x)$, такая, что $f_i(x) = \dfrac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i}$, а указанный выше критерий натуральности эквивалентен строгой выпуклости функции Φ. Поэтому, в частности, физические и экономические модели, которые описываются совокупностью «прямых» переменных x_i и «сопряженных» переменных $y_i = \dfrac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i}$ со строго выпуклым потенциалом $\Phi(x)$, представляют собой натуральные системы.

Из соображений непрерывности очевидно следует, что достаточные условия натуральности заведомо выполнены, если матрица $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ «хорошо диагонализирована», т.е. если внедиагональные компоненты $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i \neq j)$, характеризующие межэлементные связи, достаточно малы по сравнению с диагональными компонентами $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} > 0$, характеризующими внутриэлементную зависимость «действие — результат». Это дает формальное подтверждение подсказываемого интуицией факта, что в системе со слабыми межэлементными связями не может быть «аномальных эффектов», выводящих систему из класса натуральных систем.

Вернемся теперь к примерам, с которых начиналось наше изложение, и посмотрим, как интерпретируются отмеченные в них эффекты с помощью формальных терминов натуральности и ненатуральности соответствующих систем. Отождествим дозы лекарств с «действиями» Δx_i; значения параметра организма, на которые призваны воздействовать (для определенности — в сторону увеличения) эти лекарства, отождествим с «результатами» Δy_1. Тогда в случае натуральности системы «лекарства — параметры» согласно теореме о согласованных действиях всегда можно добиться изменения данного параметра y_1 в нужную сторону, подобрав дозу соответствующего лекарства x_1 и, если понадобится, дозы вспомогательных лекарств x_j, компенсирующие побочные изменения других параметров y_j $(j = 2, \ldots, n)$. И наоборот, наличие «аномального» эффекта в этом примере означает, что система «лекарства — параметры» была ненатуральной (побочные параметры y_j $(j = 2, \ldots, n)$ в конечном счете остались прежними, а основной параметр y_1 изменился в сторону, противоположную желаемой), или, другими словами, перекрестные связи $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}, j \neq i\right)$ оказались «сильнее» прямых $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)$.

Проанализируем теперь примеры экономических систем. Первый из этих примеров относится к модели регулирования избыточного предложения товаров с помощью цен. Пусть x_i — цена i-го товара, а $y_i = f_i(x)$ — его избыточное предложение (превышение предложения над спросом). Предположим, что $f_i(x)$ монотонно возрастает по x_i при неизменных x_j $(j \neq i)$. Тогда «аномальная» ситуация, когда одновременное увеличение всех x_i приводит к уменьшению всех $y_i = f_i(x)$, означает ненатуральность системы. Предположим теперь, что система полностью натуральна, т.е. что, увеличив цены x_i на товары некоторой группы I_+ и уменьшив цены x_j на товары некоторой группы I_-, мы всегда получим увеличение избыточного предложения y_i хотя бы для одного $i \in I_+$ или уменьшение y_j хотя бы для одного $j \in I_-$. Формально достаточно предположить выполнение детерминантных условий натуральности, которые в данном примере «цены — избыточные предложения» совпадают с «условиями Хикса». Тогда в силу теоремы о согласованных действиях всегда можно, например, найти такие согласованные приращения цен $\Delta x_i > 0$, что в результате будет увеличено избыточное предложение y_i каждого из товаров.

Рассмотрим более подробно пример управления предложением продукта, которое основано на регулировании режима производства, а именно на целенаправленном изменении интенсивности функционирования соответствующей отрасли. Пусть x_i — интенсивность i-й отрасли, т.е. объем полного выпуска продукта i, а y_i — объем «чистого» выпуска этого продукта. Величина y_i меньше x_i на величину g_i суммарного потребления продукта i во всех производственных отраслях; g_i зависит от интенсивности функционирования этих отраслей: $g_i = g_i(x)$, так что $y_i = x_i - g_i(x) \equiv f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$. В линейной модели межотраслевого баланса («затраты — выпуск») леонтьевского типа

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,$$

где a_{ij} — постоянные технологические коэффициенты, так что

$$y_i = f_i(x) \equiv x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,$$

или в матричной форме

$$y = f(x) \equiv x - Ax = (E - A)x,$$

где $A = (a_{ij})$ — технологическая матрица, E — единичная матрица. В более общей модели вектор-функция $f(x)$ может быть нелинейной.

Возникает вопрос, возможен ли вообще в данной модели одновременный выпуск всех продуктов в положительных количествах (вопрос о «продуктивности» модели). Формально он сводится к вопросу о существовании положительных «действий» — таких интенсивностей (полных выпусков) отраслей x_i, при которых будут обеспечены положительные «результаты» — чистые выпуски $y_i = f_i(x) > 0$. Если система «интенсивности — чистые выпуски» натуральна, ответ на этот вопрос утвердителен. Более того, если система полностью натуральна, то всегда существуют не только указанные «согласованные интенсивности» $x_i > 0$, но и «согласованные приращения интенсивностей» $\Delta x_i > 0$, обеспечивающие увеличение чистых выпусков одновременно во всех отраслях: $\Delta y_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

В линейной модели матрица $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ имеет вид матрицы $E - A$; необходимым и достаточным условием полной натуральности такой системы является положительность всех главных миноров матрицы $E - A$. Но это условие совпадает с известным необходимым и достаточным условием продуктивности линейной модели Леонтьева «затраты — выпуск» (условие Хокинса–Саймона). Таким образом, в линейном случае натуральность модели «затраты — выпуск» эквивалентна ее продуктивности.

В нелинейной модели «затраты — выпуск» $y = f(x)$ (где нелинейность обусловлена зависимостью технологических коэффициентов от интенсивностей производства) критерий натуральности дает достаточное условие ее продуктивности и одновременно необходимое условие «локальной продуктивности» в каждой точке x (под локальной продуктивностью мы подразумеваем возможность получения положительных приращений чистых выпусков $\Delta y_i > 0$ во всех отраслях за счет положительных приращений их интенсивностей $\Delta x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$). Это позволяет рассматривать критерий натуральности модели — условие положительности главных миноров матрицы $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ — как обобщение условия продуктивности (Хокинса–Саймона) на нелинейный случай.

Таким образом, «аномальный эффект», обсуждавшийся в этом примере, можно рассматривать с двух эквивалентных точек зрения: как нарушение натуральности модели и как ее локальную непродуктивность. При ненатуральности (локальной непродуктивности) модели нельзя добиться увеличения чистых выпусков продуктов таким, казалось бы, очевидным путем, как увеличение интенсивностей (полных выпусков) отраслей-производителей; наоборот, заведомо придется уменьшить интенсивности. Этот вывод еще раз показывает, что в ненатуральной системе нельзя рассчитывать на возможность решения общесистемной задачи путем решения частных задач отдельных элементов теми действиями, которые кажутся естественными для каждого из элементов в отдельности; в такой системе приходится использовать централизованное управление. В то же время наличие свойства натуральности позволяет, по крайней мере, в простейших модельных примерах, решать общую задачу путем такого согласования действий элементов, которое не нарушает факта локальной целенаправленности этих действий для отдельных элементов.

Натуральные системы [1]

Анализируются возможные типы реакций произвольной системы на совокупность одновременных входных воздействий. Выделяются случаи, когда наблюдаемая совокупность реакций полностью противоположна (в определенном смысле) ожидаемым реакциям на одиночные воздействия. Системы, в которых такие случаи невозможны, названы натуральными. При достаточно общих предположениях доказывается, что для натуральной системы всегда существует совокупность воздействий, приводящая к совокупности ожидаемых результатов. Рассматриваются примеры.

1. Введение

Одна из общих задач анализа систем состоит в изучении связи между поведением системы в целом и поведением отдельных ее элементов (подсистем), в выявлении «системных» эффектов, обусловленных взаимодействием элементов. Примером такой задачи является изучение реакций некоторого объекта на совокупность входных воздействий при условии, что реакции этого объекта на одиночные воздействия известны или могут быть хотя бы качественно охарактеризованы, и требуется предсказать или описать реакции объекта на целые наборы одновременно поступающих на него воздействий. Эта задача возникает, в частности, в связи с управлением сложными объектами и с многоцелевым управлением.

Рассмотрим некоторый объект управления и предположим, что каждой входной переменной (скалярной или векторной) — «действию» — сопоставлена некоторая выходная переменная (скалярная

---

[1] Автоматика и телемеханика.—1973.—№11.—С. 42–57.

или векторная) — «результат», приписываемый этому действию. Будем предполагать, что каждое отдельное «направленное действие» на входе объекта обеспечивает некоторый «ожидаемый результат» на выходе. Поставим вопрос: что произойдет при восприятии объектом сразу нескольких направленных действий; будут ли при этом получены все ожидаемые результаты, или только некоторые, или ни одного?

Естественно ожидать, что ответ на этот вопрос должен зависеть как от характеристики каждой отдельной элементарной пары «i-е действие — i-й результат», так и от характера взаимосвязей между этими элементарными парами, т.е. от влияния каждого i-го действия на j-е результаты ($j \neq i$). Исследованию этого вопроса путем анализа абстрактной системы элементарных пар «действия — результаты» посвящена настоящая работа.

С точки зрения управления важно не только то, достижимы ли все требуемые результаты, но и то, достижимы ли они с помощью «стереотипных» управляющих действий, тех самых, которые применяются для получения одиночных результатов и фигурируют как направленные действия в отдельных элементарных парах «действие — результат». Если характеристики элементарных пар «действие — результат», связанных в одну систему, остаются в каком-то смысле сходными с характеристиками этих элементарных пар, взятых изолированно, то можно надеяться, что для управления системой применимы прежние, «стереотипные» направленные действия, т.е. можно пытаться управлять отдельными элементами системы более или менее независимо, автономно, децентрализованным способом. В противном же случае, когда наличие «побочных влияний» i-х действий на j-е результаты ($j \neq i$) кардинально изменяет характеристики элементарных пар «i-е действие — i-й результат», в системе могут возникать своеобразные «неестественные ситуации», требующие существенно новых, по необходимости централизованных способов управления.

Для пояснения рассмотрим ряд примеров (особо отмечая роль «побочных влияний» и возможность «неестественных ситуаций»).

а. Лечение больного можно рассматривать как управление специфическим объектом — организмом. Если лечение заключается в применении лекарств, каждое из которых предназначено для изменения определенного физиологического показателя, то введение дозы данного i-го лекарства можно рассматривать как i-е «стереотипное» направленное действие, а улучшение соответствующего i-го симптома (показателя) — как i-й ожидаемый результат.

Данное i-е лекарство может обладать вредным побочным влиянием на некоторые j-е симптомы. Для устранения или смягчения этих побочных эффектов могут одновременно вводиться другие, компенсирующие лекарства; но они, в свою очередь, возможно, окажут вредное влияние на исходный, i-й симптом. В итоге может возникнуть «неестественная ситуация»: все подвергавшиеся лечебному воздействию симптомы стали хуже, чем до лечения. Это, очевидно означает, что стереотипные лечебные воздействия в данном случае неуместны.

б. Пусть имеется система из n производственных отраслей; каждая i-я отрасль выпускает свой i-й продукт и потребляет продукты других j-х отраслей. Естественно рассматривать функционирование i-й отрасли как действие, направленное на выпуск i-го продукта для внешних (непроизводственных) потребителей. Однако все желаемые результаты — положительные внешние выпуски всех продуктов — могут быть достигнуты только при условии «продуктивности» системы [198]; наоборот, в «непродуктивной» системе возможна такая ситуация, когда внутреннее (производственное) потребление столь интенсивно, что система потребляет каждого продукта больше, чем производит.

в. Рассмотрим простейшую систему стимулирования работников на производстве. Допустим, что рассматриваются два производственных показателя — условно говоря, «количество» и «качество» продукции. Действием, направленным на увеличение количества, служит, например, повышение расценок, а действием, направленным на повышение качества, — премирование за качество. Ясно, что каждый из этих стимулов может влиять на оба показателя, причем в противоположных направлениях. Можно представить себе ситуацию, когда совместное применение обоих этих стимулов способно привести не к улучшению, а к ухудшению обоих показателей.

Примеры, близкие к изложенным здесь, будут формально проанализированы в заключительном разделе этой работы.

Как показывают примеры, в системе, образованной взаимосвязанными элементарными парами «действие — результат», при достаточно сильных «мешающих» взаимодействиях возможна крайняя, неестественная ситуация: все направленные действия, будучи примененными одновременно, дают результаты, противоположные ожидаемым. Выделим теперь те системы, в которых такие неестественные ситуации невозможны, т.е. те системы, в которых каждый раз хотя бы одно из направленных действий приводит к ожидаемому результату. Будем называть такие системы натуральными. Крайним, тривиальным случаем натуральной системы является система, распадающаяся на несвязанные элементарные пары «действие — результат»; в такой системе, очевидно, каждое направленное действие всегда дает ожидаемый результат [1]. Для произвольной же натуральной системы заранее не ясно, существует ли для нее вообще хотя бы одна ситуация, когда все результаты оказываются ожидаемыми. В принципе могло бы быть так, что при любом наборе направленных действий наблюдается «смешанная» ситуация: хотя бы одно из них дает ожидаемый результат (в соответствии с определением натуральности), но в то же время хотя бы один результат не соответствует ожиданию.

Основной теоретический итог данной работы состоит в том, что в рамках рассматриваемой модели возможность существования в системе «действия — результаты» одних только смешанных ситуаций исключена. Оказывается (при определенных предположениях), что если система натуральна, то для нее всегда можно подобрать направленные действия, которые дадут сразу все ожидаемые результаты. Грубо говоря, если в системе невозможна ситуация «ни один результат не соответствует ожиданию», то в ней осуществима ситуация «все результаты являются ожидаемыми».

2. Предварительное описание модели и результатов анализа

Прежде чем привести все точные формальные определения и утверждения, изложим их на «описательном» уровне. Будем рассматривать системы, характеризуемые наборами из n «действий» $x^1, \ldots, x^n$ — точек в некоторых пространствах и n «результатов» $y^1, \ldots, y^n$ — точек в некоторых других пространствах, связанных зависимостями [1]

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1(x^1, \ldots, x^n), \\ &\vdots \\ y^n &= f^n(x^1, \ldots, x^n). \end{aligned} \tag{1}$$

Пару x^i, y^i будем рассматривать как i-й элемент системы (1). Вхождение переменных x^j $(j \neq i)$ в выражение для y^i отражает наличие

---

[1] В теории автоматического регулирования известна классическая задача об автономном регулировании, которая состоит в синтезе системы управления многомерным объектом, такой, что каждое i-е входное (управляющее) воздействие влияет только на одну i-ю выходную (управляемую) переменную объекта и не влияет на остальные j-е переменные [17, 62]. Такая система (если ее удается построить) может служить примером указанного выше тривиального случая натуральной системы. В настоящей работе рассматривается не задача синтеза, а задача анализа (в частности, анализа возможностей управления) для произвольной заданной натуральной системы, в которой влияние i-го действия на j-е результаты $(j \neq i)$ может быть существенным и неустранимым.

[1] Точки x^i и y^i могут быть, в частности, точками в функциональных пространствах — функциями времени, так что формально зависимостями вида (1) могут описываться не только статические, но и динамические системы.

связей между элементами. Удобно (хотя и не обязательно) считать, что точка $x^i = 0$ в пространстве x^i соответствует «бездействию» для i-го элемента, а зависимость

$$y^i = f^i(0, \ldots, 0, x^i, 0, \ldots, 0) \tag{2}$$

описывает i-й элемент в изолированном виде.

Выделим в пространстве действий x^i множество направленных действий X^i; считаем, что $0 \notin X^i$. В пространстве результатов y^i выделим множество Y^i, удовлетворяющее условию

$$f^i(0, \ldots, 0, x^i, 0, \ldots, 0) \in Y^i \quad \text{при всех } x^i \in X^i. \tag{3}$$

Назовем Y^i множеством ожидаемых результатов. Таким образом, по определению каждое направленное действие $x^i \in X^i$ применительно к изолированному элементу i дает ожидаемый результат $y^i \in Y^i$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда одновременно производится несколько направленных действий, т.е. когда $x^i \in X^i$ для всех i из некоторого (непустого) подмножества I множества индексов $\{1, \ldots, n\}$. Если при этом $y^i \notin Y^i$ для всех $i \in I$, будем говорить, что эта ситуация неестественная.

Будем называть систему «действия — результаты» натуральной, если в ней невозможна неестественная ситуация. Другими словами, система называется натуральной, если при любом наборе действий $(x^1, \ldots, x^n)$, содержащем направленные действия

$$x^i \in X^i,\ i \in I, \quad \text{и} \quad x^j \notin X^j,\ j \notin I,$$

хотя бы одному из направленных действий соответствует ожидаемый результат: $y^i \in Y^i$ для некоторого $i \in I$.

Отметим, что каждая подсистема натуральной системы (получаемая из (1) фиксацией $x^i = 0$ для элементов i, не входящих в подсистему) сама является натуральной системой. Отсюда, в частности, следует формальная необходимость выполнения условия (3) для каждого изолированного элемента натуральной системы.

Основная задача, изучаемая в этой работе, — можно ли добиться подбором действий, чтобы все результаты оказались ожидаемыми. Теорема 1, приведенная в следующем разделе, показывает, что при некоторых достаточно общих предположениях о типе множеств X^i, Y^i и функций f^i факта натуральности системы для этого достаточно. Однако эта теорема ничего не говорит о том, какие действия x^i нужно выбрать, чтобы получить ожидаемые результаты; может оказаться, что для этого необходимо хотя бы часть действий x^i взять не из множеств направленных действий X^i. С «управленческой» точки зрения это означает, что для достижения всех желаемых результатов придется отказаться от «стереотипных» управляющих действий, применяемых для управления изолированными элементами, и найти некоторое централизованное решение — набор таких управляющих действий $(x^1, \ldots, x^n)$, которые для некоторых элементов представятся «неестественными»: $x^i \notin X^i$.

Указанные «управленческие» соображения оправдывают выдвижение более сильного требования к решению задачи — искать действия, приводящие к ожидаемым результатам, только среди направленных действий. Назовем набор действий $(x^1, \ldots, x^n)$ согласованным набором действий, если 1) все эти действия — направленные: $x^i \in X^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и 2) все полученные результаты — ожидаемые: $y^i \in Y^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Теорема 2 в следующем разделе гласит, что при некоторых достаточно общих предположениях (несколько более сильных, чем в теореме 1) факта натуральности системы достаточно для существования согласованных действий. Таким образом, согласно этой теореме, если система натуральна, т.е. если

> при любом наборе действий $(x^1, \ldots, x^n)$ хотя бы одному
> направленному действию $x^i \in X^i$ из этого набора
> соответствует ожидаемый результат $y^i \in Y^i$,

то при некоторых общих предположениях

> существует хотя бы один набор направленных действий
> $x^1 \in X^1, \ldots, x^n \in X^n$, такой, что все соответствующие
> результаты — ожидаемые: $y^1 \in Y^1, \ldots, y^n \in Y^n$.

Эта теорема позволяет искать управляющие действия среди действий, «естественных» с точки зрения самих элементов.

В заключение этого предварительного обсуждения подчеркнем то важное обстоятельство, что в определении натуральности требуется не просто наличие хотя бы одного ожидаемого результата $y^i \in Y^i$, но требуется наличие его всегда среди именно тех результатов, которые соответствуют направленным действиям $x^i \in X^i$. Без этого последнего требования нельзя в общем случае рассчитывать на одновременное получение всех ожидаемых результатов. Простейшей иллюстрацией этого служит система, в которой все результаты — постоянные, вообще не зависящие от действий, причем некоторые из результатов — ожидаемые, а некоторые — нет. Таким образом, указанное требование, заложенное в определение натуральной системы (своего рода «закрепление ответственности» каждого i-го действия за сопоставляемый ему i-й результат), является существенно важным для обеспечения достижимости всех ожидаемых результатов.

3. Формальные определения и теоремы

Будем для простоты считать, что «действия» и «результаты» представляются точками в конечномерных векторных пространствах.

Пусть x^i — вектор в k_i-мерном пространстве (i-е действие), принимающий значения из множества возможных действий Q^i в этом пространстве. Пусть в этом же пространстве указано множество направленных действий X^i. Будем предполагать, что множество возможных действий Q^i линейно-связно [1] и имеет непустое пересечение с X^i, но не содержится в X^i целиком. Каждое множество X^i будем ради простоты предполагать либо замкнутым, либо открытым. Пусть y^i — вектор в l_i-мерном пространстве (i-й результат), и пусть в этом пространстве указано множество Y^i ожидаемых результатов. Наконец, пусть заданы соотношения $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Функции f^i будем предполагать непрерывными. Множества Q^i, X^i, Y^i и функции f^i $(i = 1, \ldots, n)$ определяют систему «действия — результаты».

Состояние системы описывается набором действий $(x^1, \ldots, x^n)$. Для начала будем рассматривать все без исключения наборы $(x^1, \ldots, x^n)$, составленные из возможных действий $x^i \in Q^i$ $(i = 1, \ldots, n)$; говоря формально, за множество R возможных наборов действий примем прямое произведение $Q = Q^1 \times Q^2 \times \ldots \times Q^n$. Наряду с этим в дальнейшем (при представлении действий в «стандартной форме») в качестве множеств возможных наборов действий будем рассматривать также некоторые специфические подмножества множества Q.

Определение 1. Система «действия — результаты» называется натуральной (на заданном множестве возможных наборов действий R), если при любом возможном наборе действий $(x^1, \ldots, x^n) \in R$, содержащем хотя бы одно $x^i \in X^i$, имеет место $f^k(x^1, \ldots, x^n) \in Y^k$ хотя бы для одного k, такого, что $x^k \in X^k$.

Из определения натуральности следует, в частности, что если x^{j0} — произвольная точка из Q^j, не принадлежащая X^j $(j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$, а x^i — произвольная точка из Q^i, то

$$f^i(x^{10}, \ldots, x^{(i-1)0}, x^i, x^{(i+1)0}, \ldots, x^{n0}) \in Y^i \text{ при всех } x^i \in X^i.$$

В разделе 2 предполагалось, что можно выделить специфические точки $x^{j0} = 0 \notin X^j$, соответствующие «бездействию» для j-го элемента $(j = 1, \ldots, n)$ (см. соотношение (3)). Это выделение точек «бездей-

[1] Множество A называется линейно-связным, если любые две его точки $a, b \in A$ можно соединить дугой, целиком лежащей в A, т.е. если существует непрерывное отображение φ отрезка $[0,1]$ в A такое, что $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ и $\varphi(\tau) \in A$ при всех $\tau \in [0,1]$.

ствия» полезно при анализе конкретных примеров, но в общей модели в этом нет необходимости.

Теорема 1. Пусть система «действия — результаты» натуральна на множестве возможных наборов действий $R = Q$ $(= Q^1 \times \ldots \times Q^n)$, и пусть множества ожидаемых результатов $Y^1, \ldots, Y^n$ все замкнуты либо все открыты. Тогда существует набор действий $(x^1, \ldots, x^n) \in Q$, такой, что $f^i(x^1, \ldots, x^n) \in Y^i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Отметим, что в теореме 1 не утверждается, что $x^i \in X^i$.

Определение 2. Возможный набор действий $(x^1, \ldots, x^n) \in R$ называется согласованным набором действий, если $x^i \in X^i$, $f^i(x^1, \ldots, x^n) \in \in Y^i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 дополнительно предполагается, что множества направленных действий $X^1, \ldots, X^n$ все замкнуты либо все открыты одновременно с множествами $Y^1, \ldots, Y^n$. Тогда существует согласованный набор действий.

В приведенных формулировках теорем 1 и 2 считались возможными любые наборы действий $(x^1, \ldots, x^n) \in Q^1 \times \ldots \times Q^n$. Оказывается, что достаточно рассматривать только определенную часть этих наборов; такое сужение множества возможных наборов действий R приводит к более сильным теоремам как за счет ослабления предположений (натуральность системы требуется на более узком множестве наборов действий), так и за счет усиления утверждений (дается дополнительная локализация искомого набора действий [1]).

Для того чтобы дать описание множества возможных наборов действий, рассматриваемого в дальнейшем, перейдем к стандартной форме представления действий. Пользуясь предположением о том, что каждое множество возможных действий Q^i линейно-связно и содержит как точки из X^i, так и точки не из X^i, построим параметриче-

---

[1] Без такой дополнительной локализации утверждения теорем 1 и 2, относящиеся к случаю замкнутых множеств $Y^1, \ldots, Y^n$ и (в теореме 2) $X^1, \ldots, X^n$, являются сравнительно слабыми: они допускают «тривиальное решение» $(x^1, \ldots, x^n)$, где каждая точка x^i лежит на границе множества X^i (можно убедиться, рассматривая малые вариации x^i с учетом непрерывности функций f^i и натуральности системы, что любой набор граничных точек x^i множеств X^i удовлетворяет в «замкнутом» случае утверждениям теорем 1 и 2). Усиление теорем 1 и 2, данное ниже в теоремах 1с и 2с, позволяет и в «замкнутом» случае гарантировать существование «нетривиального» набора $(x^1, \ldots, x^n)$: если множества $X^1, \ldots, X^n$ имеют непустые внутренности, то хотя бы один компонент x^i этого набора будет внутренней точкой для X^i. Нетривиальность этого набора $(x^1, \ldots, x^n)$ выражается в том, что из существования указанного набора как непосредственное следствие можно вывести лемму Шпернера о покрытии симплекса [72], из которой, в свою очередь, выводятся (см. Приложение) теоремы 1, 1с, 2, 2с.

Что касается утверждений теорем 1 и 2 для «открытого» случая, то они уже сами по себе гарантируют существование нетривиального (в том же смысле) набора $(x^1, \ldots, x^n)$.

скую кривую (дугу) $x^i(\tau_i)$, соединяющую в Q^i точку вне X^i с точкой в X^i. Итак, пусть $x^i(\tau_i)$ — непрерывная функция скалярного параметра τ_i, такая, что $x^i(\tau_i) \in Q^i$ при всех τ_i, $x^i(0) \notin X^i$ и $x^i(1) \in X^i$. Нетрудно видеть, что дугу $x^i(\tau_i)$ всегда можно выбрать так, что либо

$$1)\ \ x^i(\tau_i) \begin{cases} \notin X^i & \text{при } \tau_i \in [0, \delta_i), \text{ где } 0 < \delta_i \leqslant 1, \\ \in X^i & \text{при } \tau_i \in [\delta_i, 1], \end{cases}$$

либо

$$2)\ \ x^i(\tau_i) \begin{cases} \notin X^i & \text{при } \tau_i \in [0, \delta_i], \text{ где } 0 \leqslant \delta_i < 1, \\ \in X^i & \text{при } \tau_i \in (\delta_i, 1]. \end{cases}$$

Если множество X^i замкнуто, то реализуется случай 1, а если X^i открыто — случай 2. Подставляя параметрические выражения для действий x^i в функции f^j, считая теперь параметры действий τ_i новыми «действиями» и обозначая их x_i (взамен прежних действий x^i), получаем стандартную (по действиям) форму модели:

$$y^i = f^i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$x_i \in Q_i$, где Q_i — стандартное множество возможных действий — конечный или бесконечный интервал на числовой оси (обычно удобно включать $0 \in Q_i$), и $X_i = [\delta_i, \infty)$ (где обычно $\delta_i > 0$) либо $X_i = (\delta_i, \infty)$ (где $\delta_i \geqslant 0$) — стандартное множество направленных действий (причем $X_i \cap Q_i \neq \varnothing$) $(i = 1, \ldots, n)$.

Если исходная система натуральна, то и система, сведенная к форме модели со стандартными действиями, остается натуральной, поскольку она отличается от исходной фактически лишь сужением множества возможных наборов действий. Более того, система, не являвшаяся натуральной на исходном множестве возможных наборов действий R, может оказаться натуральной на суженном множестве R'. Это соображение можно использовать в конкретных задачах, выбирая множество R «достаточно экономно» и этим облегчая выполнение условий натуральности.

В качестве стандартного множества R возможных наборов действий $x = (x_1, \ldots, x_n)$ далее будем рассматривать множество $P^\Delta = \{x | \sum x_i = \Delta,\, x_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, n)\}$, где $\Delta > n\delta_{i\text{макс}}$.

Отметим, что в проведенном переходе от общей к стандартной модели скалярные параметры действий, вообще говоря, не имеют «количественного» смысла; они определены с точностью до произвольного непрерывного монотонного преобразования. Однако в содержательных задачах стандартному действию x_i бывает возможно придавать смысл количественной меры интенсивности i-го действия; в таком контексте множество P^{Δ} охватывает наборы действий с фиксированной суммарной интенсивностью Δ.

Приведем теперь усиления теорем 1 и 2 для систем «действия — результаты», представленных в форме модели со стандартными действиями (теоремы 1с и 2с).

Теорема 1с. Пусть модель со стандартными действиями x_i при $X_i = [\delta_i, \infty)$, $\delta_i > 0$ либо $X_i = (\delta_i, \infty)$, $\delta_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ натуральна на множестве возможных наборов действий $P^{\Delta} = \{x | \sum x_i = \Delta,\ x_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)\}$, где $\Delta > n\delta_{i\text{макс}}$, и пусть множества ожидаемых результатов $Y^1, \ldots, Y^n$ либо все замкнуты, либо все открыты. Тогда существует набор действий $(x_1, \ldots, x_n) \in P^{\Delta}$, такой, что $f^i(x_1, \ldots, x_n) \in \in Y^i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Теорема 2с. Пусть в условиях теоремы 1с дополнительно предполагается, что множества $X_1, \ldots, X_n$ все замкнуты (т.е. имеют вид $[\delta_i, \infty)$, $\delta_i > 0$) либо все открыты (т.е. имеют вид (δ_i, ∞), $\delta_i \geqslant 0$) одновременно с множествами $Y^1, \ldots, Y^n$. Тогда в P^{Δ} существует согласованный набор действий.

Доказательства теорем 1с и 2с даны в приложении. Поскольку каждая система «действия — результаты», удовлетворяющая предположениям настоящего раздела, может быть преобразована в систему со стандартными действиями, то тем самым доказаны и теоремы 1 и 2. Можно заметить, что в случае $n = 2$ утверждения всех этих теорем легко выводятся из соображений непрерывности, однако общий случай требует привлечения более сложного аппарата [1].

Замечание 1. Подчеркнем, что все основные понятия, используе-

---

[1] Математические утверждения настоящей работы связаны с одним известным топологическим свойством n-мерного пространства. Это свойство в различных, но в конечном счете эквивалентных формах выражено в таких (внешне несходных) теоремах, как лемма Шпернера о покрытии симплекса [72], теорема Брауэра о неподвижной точке [198], теорема Гейла–Никайдо–Дебре об избыточном спросе ([198], теорема 16.6 в «однозначном варианте»), теорема Карамардиана о разрешимости неравенств ([150], теорема 3) и некоторые другие. Каждую из этих теорем можно «непосредственно» (сравнительно просто) вывести из каждой другой, и в этом смысле указанные теоремы эквивалентны между собой (см., в частности, [198], теоремы 16.6 и 16.7).

Доказательство теорем 1, 1с, 2, 2с данной работы сводится к надлежащему применению одной (любой) из указанных эквивалентных теорем (в приложении для этого использована лемма Шпернера); в свою очередь, обратно, каждая из последних может быть выведена из теорем 1, 1с, 2, 2с. Таким образом, в чисто формальном аспекте теоремы 1, 1с, 2, 2с представляют собой лишь еще одну эквивалентную форму выражения известного математического факта. С другой стороны, эта форма в отличие от предыдущих специально приспособлена для непосредственного приложения к анализу объектов, описываемых системами вход-выходных соответствий.

мые в модели (принадлежность точки множеству, замкнутость и открытость множества, непрерывность функции), имеют не метрический (количественный), а множественно-топологический (качественный) характер. И действительно, теоремы 1 (1с) и 2 (2с) остаются в силе и для систем с более общими пространствами действий x^i и результатов y^i, чем конечномерные векторные: в качестве этих пространств можно брать произвольные метрические и даже произвольные топологические пространства (с сохранением требования линейной связности множеств Q^i); формулировки и доказательства теорем сохраняются при этом дословно. Тот факт, что данная модель целиком опирается не на метрические, а на топологические свойства системы (и, в частности, безразлична к любым непрерывным деформациям соответствующих пространств), позволяет с бóльшим основанием включать в эту модель «качественные» переменные, такие, как некоторые физиологические, психологические, социологические показатели, которым едва ли можно придать бесспорный «количественный» смысл.

Сказанное не противоречит тому, что в других содержательных задачах может быть удобно использовать «метрическую», количественную интерпретацию. Так, в модели со стандартными действиями x_i можно интерпретировать число x_i как меру интенсивности действия. При этом величина $\sum x_i$ интерпретируется как мера интенсивности всего набора действий, множество P^Δ — как множество наборов действий с заданной суммарной интенсивностью Δ. Из теорем 1с и 2с следует, что, задавшись любой достаточно большой интенсивностью набора действий Δ, при условии натуральности системы на множестве P^Δ всегда можно получить согласованный набор действий с указанной суммарной интенсивностью Δ. Далее, для метрических пространств результатов y^i можно ввести достаточно удобную числовую меру интенсивности результата как расстояние от точки y^i до границы множества Y^i, взятое со знаком плюс, если $y^i \in Y^i$ (т.е. если результат — ожидаемый), и со знаком минус в противном случае. Эти соображения показывают, что можно, сохранив достаточную степень общности[1], принять в качестве модели системы «действия — результаты» стандартную модель, описываемую n скалярными функ-

[1] С чисто формальной точки зрения можно было бы вообще ограничиться рассмотрением указанной стандартной модели, поскольку даже модель с самыми общими (топологическими) пространствами действий и результатов всегда может быть сведена к модели «скалярные действия x_i — скалярные результаты y_i» специальным формальным преобразованием (способ введения скаляров x_i указан выше, а в качестве y_i можно взять расстояние, с соответствующим знаком, от точки $x \in P^\Delta$ до границы множества ${f^i}^{-1}(Y^i \cap f^i(P^\Delta))$). Однако для приложений может быть полезной общая модель, включающая достаточно произвольные пространства действий и результатов.

циями $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ от n скалярных переменных x_i, изменяющихся в некоторых (конечных или бесконечных) интервалах [2]. При этом стандартные множества направленных действий X_i, как и выше, имеют вид полуосей $[\delta_i, \infty)$ либо (δ_i, ∞), а за стандартные множества ожидаемых результатов Y_i принимаются полуоси $[0, \infty)$ либо $(0, \infty)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Замечание 2. Требования одновременной замкнутости либо открытости всех множеств в условиях теорем 1 (1с) и 2 (2с) существенны. В самом деле, рассмотрим следующую стандартную модель «действия — результаты» для $n = 2$:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2, \\ y_2 &= x_2 - x_1, \end{aligned} \tag{4}$$

$$Q_1 = Q_2 = [0, \infty),\ \ X_1 = X_2 = (0, \infty),\ \ Y_1 = (0, \infty),\ \ Y_2 = [0, \infty). \tag{4a}$$

Эта система натуральна на $Q_1 \times Q_2$, однако оба ожидаемых результата ($y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$) не достигаются одновременно ни при каких x_1, x_2. В этом примере множество Y_1 открыто, а Y_2 замкнуто, что нарушает условие теоремы 1.

Рассмотрим другой пример:

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv 1, \\ y_2 &= -x_1, \end{aligned} \tag{5}$$

$$Q_1 = Q_2 = (-\infty, \infty),\ X_1 = X_2 = [0, \infty),\ Y_1 = Y_2 = (0, \infty). \tag{5a}$$

Эта система натуральна на $Q_1 \times Q_2$ и, поскольку оба множества Y_1, Y_2 открыты, она удовлетворяет условиям теоремы 1. В соответствии с этой теоремой существует набор (x_1, x_2) возможных действий, дающий $y_1 \in Y_1$ и $y_2 \in Y_2$. Очевидно, в таком наборе с необходимостью $x_1 < 0$, т.е. $x_1 \notin X_1$; следовательно, в данной натуральной системе согласованных действий не существует.

В этом примере множества Y_1, Y_2 открыты, а X_1, X_2 замкнуты, что нарушает условие теоремы 2.

---

[2] Системы соотношений между скалярными величинами, свойства которых эквивалентны специфическим условиям натуральности, изучались в ряде работ, в частности, в связи с экономико-математическими задачами ([198], §16, 21), задачами о разрешимости систем линейных и нелинейных неравенств ([198], §20; [150]), условиями глобальной взаимной однозначности отображений ([198], §20) и др. Наиболее близкие к настоящей работе результаты содержатся в [150], где приведены достаточные условия разрешимости специальных систем нелинейных неравенств (теорема 3 в [150]), которые фактически включают утверждение теоремы 1с для того случая, когда результаты y_i (как и действия x_i) — числовые переменные («стандартная модель»), а множества X_i — открытые полуоси.

Эти два примера показывают, что в натуральной системе при «разнотипных» множествах $X^1, \dots, X^n$, $Y^1, \dots, Y^n$ могут не реализовываться согласованные действия и даже ожидаемые результаты. Однако нетрудно показать, что в любой натуральной системе на Q существует набор возможных действий $(x^1, \dots, x^n)$, являющийся «почти согласованным» в том смысле, что $x^i \in \overline{X}^i$ (где $\overline{X}^i$ — замыкание множества X^i), а $y^i \in \overline{Y}^i$ ($\overline{Y}^i$ — замыкание Y^i) $(i = 1, \dots, n)$.

4. Примеры

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих понятие натуральной системы и применение теоремы о согласованных действиях. Примеры 1 и 2 — формальные; они иллюстрируют возможность аналитической проверки факта натуральности. Примеры 3, 4 и 5 связаны с различными содержательными задачами.

Пример 1. Проведем полное исследование простейшей стандартной системы «действия — результаты», описываемой линейными соотношениями между двумя скалярными «действиями» x_1, x_2 и двумя скалярными «результатами» y_1, y_2:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть

$$Q_1 = Q_2 = (-\infty, \infty), \quad X_1 = X_2 = (0, \infty), \quad Y_1 = Y_2 = (0, \infty). \tag{6а}$$

Найдем необходимые и достаточные условия натуральности системы (6), (6а). Прежде всего, полагая поочередно $x_1 > 0$, $x_2 = 0$ и $x_1 = 0$, $x_2 > 0$, находим, что для натуральности необходимо условие

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0. \tag{7}$$

Это условие в данном случае — эквивалент общего условия (3), необходимого для натуральности. Далее, полагая поочередно $x_1 > 0$, $x_2 \to -\infty$ и $x_2 > 0$, $x_1 \to -\infty$, получаем еще одно необходимое условие натуральности:

$$a_{12} \leqslant 0, \quad a_{21} \leqslant 0. \tag{8}$$

Пусть условия (7), (8) выполнены. Тогда все определяется величиной произведения $a_{12}a_{21}$ ($\geqslant 0$) в сравнении с $a_{11}a_{22}$ (> 0): условие

$$a_{12}a_{21} < a_{11}a_{22} \tag{9}$$

оказывается при этом необходимым и достаточным для натуральности системы (6), (6а). Установим сначала достаточность: если (9) выполнено, то при положительности хотя бы одной из величин x_1, x_2 положительна (хотя бы одна) соответствующая величина y_1, y_2 (на самом деле здесь достаточно проверить только случай $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, так как в случае $x_1 > 0$, $x_2 \leqslant 0$ имеем $y_1 > 0$, а в случае $x_1 \leqslant 0$, $x_2 > 0$ имеем $y_2 > 0$ уже в силу условий (7), (8). Пусть (9) выполнено; случай $a_{12} = a_{21} = 0$ тривиален, поэтому без ограничения общности предполагаем $a_{21} \neq 0$. Тогда можно указать число $\gamma > 0$, такое, что

$$\frac{|a_{12}|}{a_{11}} < \gamma < \frac{a_{22}}{|a_{21}|}.$$

Теперь, если $x_1 \geqslant \gamma x_2$, причем $x_1 > 0$, то $y_1 > 0$, а если $x_1 \leqslant \gamma x_2$, причем $x_2 > 0$, то $y_2 > 0$. Отсюда следует, что в случае (7)–(9) система (6), (6а) натуральна. Значения x_1, x_2 такие, что $x_1 = \gamma x_2 > 0$, представляют собой согласованные действия.

Если же при условиях (7), (8) нарушено (9):

$$a_{12}a_{21} \geqslant a_{11}a_{22}, \tag{10}$$

то система (6), (6а) не натуральна. Действительно, в этом случае при $x_1 = 1/a_{11} > 0$, $x_2 = -1/a_{12} > 0$ имеем $y_1 = 0$ и $y_2 = a_{21}/a_{11} - a_{22}/a_{12} \leqslant 0$, т.е. $y_1 \notin Y_1$ и $y_2 \notin Y_2$. Легко также убедиться, что в этом случае при всех $x_1, x_2 > 0$ будем получать $y_1 \notin Y_1$ или $y_2 \notin Y_2$, откуда следует, что согласованного набора действий вообще не существует [1].

Наконец, если нарушено какое-либо из условий (7), (8), то система (6), (6а), как уже показано, не может быть натуральной. Однако при этом согласованный набор действий все-таки может существовать: например, если $a_{11} > 0$ и $a_{21} > 0$ (в нарушение условия (8)), то, очевидно, $x_1 = 1$, $x_2 = \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ — согласованные действия.

Итак, для натуральности системы (6), (6а) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (7)–(9). Эти условия не необходимы, но достаточны для существования согласованного набора действий (как это и гарантируется теоремой 2).

Видоизменим теперь рассмотренную систему, сузив множества возможных действий (так, что в каждом из них останется только по одному ненаправленному действию $x_i = 0$):

$$Q_1 = Q_2 = [0, \infty), \quad X_1 = X_2 = (0, \infty), \quad Y_1 = Y_2 = (0, \infty). \tag{6б}$$

[1] Впрочем, и в этом случае, если только система (6) не вырождена: $a_{12}a_{21} \neq a_{11}a_{22}$, — как нетрудно видеть, найдутся действия x_1, x_2, дающие ожидаемые результаты $y_1 \in Y_1$ и $y_2 \in Y_2$; однако при этом $x_1 \notin X_1$ и $x_2 \notin X_2$.

Тогда, как легко видеть, появляется дополнительный (к найденному выше) случай натуральности системы (6), (6б): это случай, когда условие (7) выполнено, а условие (8) не выполнено. Таким образом, система (6), (6б), удовлетворяющая необходимому условию натуральности (7), не является натуральной в том и только в том случае, если коэффициенты «перекрестных связей» a_{12} и a_{21} оба отрицательны и достаточно велики по модулю: $|a_{12}||a_{21}| \geqslant a_{11}a_{22}$. В этом случае никакими допустимыми действиями $x_1,\ x_2 \geqslant 0$ невозможно получить оба результата $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$. В противном случае система (6), (6б), (7) натуральна и обладает согласованными действиями.

Наконец, можно рассмотреть еще одну модификацию системы (6), (6а), заменив открытые множества в (6а) замкнутыми:

$$Q_i = (-\infty, \infty),\ \ X_i = [0, \infty),\ \ Y_i = [0, \infty)\ \ (i = 1, 2). \tag{6в}$$

Нетрудно убедиться аналогично предыдущему, что для натуральности системы (6), (6в) необходимо и достаточно выполнение «нестрогих» аналогов неравенств (7)–(9) [1].

Пример 2. Рассмотрим обобщение системы (6), (6а) на случай произвольного n:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} Q_1 = \ldots = Q_n = (-\infty, \infty), \quad X_1 = \ldots = X_n = (0, \infty), \\ Y_1 = \ldots = Y_n = (0, \infty). \end{gathered} \tag{11а}$$

Найдем условия натуральности этой системы. Прежде всего, как и в предыдущем примере, легко обнаруживаем, что для натуральности системы (11), (11а) необходимы условия

$$a_{ii} > 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

и

$$a_{ij} \leqslant 0 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Для продолжения анализа представим соотношения (11) в матричной форме:

$$y = Ax,\ \text{где}\ x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n),\ A = (a_{ij}) \tag{14}$$

[1] Если в (6в) положить $X_i = [\delta_i, \infty)$, где $\delta_i > 0$ (как это делается в стандартной модели для соблюдения «условия бездействия» $0 \notin X_i$), то указанные неравенства нужно дополнить еще такими: $\sum_j a_{ij}\delta_j \geqslant 0$, — что легко получить из предыдущего заменой x_i на $x_i - \delta_i$ $(i = 1, 2)$.

и воспользуемся следующими двумя теоремами о матрицах, заимствованными (в несколько измененной форме) из [78, 198].

Теорема об альтернативах [78]. Для каждой матрицы A имеет место одна из двух альтернатив: либо существует вектор $x \geq 0$, такой, что $Ax \leqq 0$, либо существует вектор $p > 0$, такой, что $A^{\mathrm{T}}p > 0$ [1].

Теорема Хокинса–Саймона [198]. Пусть A — квадратная матрица с неположительными внедиагональными компонентами. Тогда для того, чтобы существовали векторы $x > 0$ и $y > 0$, такие, что $y = Ax$, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A были положительны (условие Хокинса–Саймона). При этом условии для любого $y > 0$ решение x уравнения $y = Ax$ существует и положительно.

Для анализа системы (11) понадобится одно следствие из этих теорем.

Следствие. Пусть A — квадратная матрица с неположительными внедиагональными компонентами. Тогда следующие три утверждения эквивалентны между собой:

а) система неравенств

$$x \geq 0, \quad Ax \leqq 0 \tag{15}$$

не имеет решения;

б) система неравенств

$$x > 0, \quad Ax > 0 \tag{16}$$

имеет решение;

в) матрица A удовлетворяет условию Хокинса–Саймона (условию положительности всех главных миноров).

Доказательство. Эквивалентность утверждений б) и в) составляет первую часть теоремы Хокинса–Саймона. Ввиду этого достаточно доказать эквивалентность утверждений а) и в). По теореме об альтернативах неразрешимость системы неравенств (15) эквивалентна существованию вектора $p > 0$, такого, что $A^{\mathrm{T}}p > 0$, а это, согласно первой части теоремы Хокинса–Саймона, эквивалентно положительности всех главных миноров матрицы A^{T}, а значит, и матрицы A. Доказательство завершено.

Отметим, что разрешимость одной и только одной из двух систем неравенств (15) и (16), установленная в этом следствии, означает существование пары взаимоисключающих альтернатив, отличной от той, которая фигурирует в общей «теореме об альтернативах». Однако это

[1] Для вектора $z = (z_1, \ldots, z_n)$ запись $z \geqq 0$ означает $z_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, запись $z \geq 0$ означает $z \geqq 0$ и $z \neq 0$, запись $z > 0$ означает $z_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Матрица A^{T} — это транспозиция A.

относится только к матрицам с неположительными внедиагональными компонентами.

Рассмотрим теперь систему (11), (11а), взяв ее в матричной форме (14). По определению натуральности эта система не будет натуральной в том и только в том случае, если при некотором $x = (x_1, \ldots, x_n)$ получим $y_i \leqslant 0$ для всего (непустого) множества I компонент i, таких, что $x_i > 0$. Если для всех остальных компонент $j \notin I$ — таких, что $x_j \leqslant 0$ — положить $x_j = 0$, то для измененного таким образом набора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с учетом условия (13) будем иметь $y_i \leqslant 0$ уже для всех $i = 1, \ldots, n$ (т.е. $y \leqq 0$) и $x_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, причем $x_k > 0$ хотя бы для одного k (т.е. $x \geq 0$). Следовательно, система (11), (11а), (13) не является натуральной в том и только в том случае, если система неравенств (15) для ее матрицы A имеет некоторое решение x.

Таким образом, натуральность системы (11), (11а), (13) эквивалентна неразрешимости системы неравенств (15) (утверждение а) в доказанном выше следствии); с другой стороны, существование согласованного набора действий, очевидно, эквивалентно разрешимости системы неравенств (16) (утверждение б)). Установленная эквивалентность утверждений а) и б) означает, что натуральность системы (11), (11а) при условии (13) достаточна и в то же время необходима для существования согласованного набора действий в этой системе. Третье эквивалентное утверждение в) выдвигает условие Хокинса–Саймона в качестве критерия натуральности системы (11), (11а), (13). Заметим, что условие Хокинса–Саймона включает условие (12).

Вспомнив, что условие (13) само является необходимым для натуральности системы (11), (11а), окончательно получаем следующее утверждение.

Необходимыми и достаточными для натуральности системы (11), (11а) являются два условия:

1) неположительность всех внедиагональных компонент матрицы $A = (a_{ij})$ коэффициентов этой системы и

2) положительность всех главных миноров этой матрицы (условие Хокинса–Саймона).

В частном случае $n = 2$ эти условия, как это и должно быть, сводятся к найденным в примере 1 условиям натуральности системы (6), (6а): условие Хокинса–Саймона сводится к паре условий (7), (9), а условие (13) — к (8).

Отметим, что для натуральной системы (11), (11а) набор согласованных действий $x = (x_1, \ldots, x_n)$, согласно второй части теоремы Хокинса–Саймона, можно найти как $x = A^{-1}y$, где $y = (y_1, \ldots, y_n) > > 0$ — набор ожидаемых результатов.

Завершая этот пример, рассмотрим систему (11) при суженных множествах возможных действий, заменив (11а) на

$$\begin{gathered} Q_1 = \ldots = Q_n = [0, \infty), \quad X_1 = \ldots = X_n = (0, \infty), \\ Y_1 = \ldots = Y_n = (0, \infty) \end{gathered} \tag{11б}$$

(аналогично замене (6а) на (6б) в примере 1). Тогда, если оставить (13) как дополнительное предположение, то условие Хокинса–Саймона для матрицы A системы (11) останется необходимым и достаточным условием натуральности системы (11), (11б) и в то же время необходимым и достаточным условием существования согласованного набора действий.

Приведем теперь содержательные примеры, иллюстрирующие «управленческий» смысл понятий «натуральная система» и «согласованные действия». В этих примерах будут использоваться результаты формального анализа примеров 1 и 2.

Пример 3. Сведем к стандартной модели «действия — результаты» схему воздействия лекарств на организм, о которой говорилось во введении. Будем обозначать через y^i i-й физиологический показатель или комплекс показателей (симптомов), а через x^i — лекарство или комплекс лекарств (лечебных воздействий), предназначаемый для влияния на y^i. Предполагается, что различные воздействия x^i могут осуществляться независимо друг от друга [1].

Пусть X^i — множество тех точек в пространстве x^i (скажем, в пространстве лекарственных доз), которым соответствует «улучшение» комплекса симптомов y^i по сравнению с исходным при условии, что в организм вводится только x^i, но не x^j, $j \neq i$ (т.е. если $x^j = 0\,(\notin X^j)$, $j \neq i$). Обозначив множество улучшенных значений y^i через Y^i, можем записать это утверждение в виде

$$f^i(0, \ldots, 0, x^i, 0, \ldots, 0) \in Y^i \quad \text{при} \quad x^i \in X^i, \tag{17}$$

где $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — зависимость установившихся физиологических показателей от набора введенных лекарств. Здесь делается предположение, что такая зависимость существует, стационарна и непрерывна. Множества X^i и Y^i предполагаются открытыми (поскольку естественно считать, что точки, достаточно близкие к точке, соответствующей улучшению состояния по данному показателю, обладают тем же свойством).

Удобно перейти к стандартной форме действий в этой модели, приняв, что каждое i-е лечебное воздействие можно описать одним числовым параметром x_i (например, общей дозой данного комплекса лекарств, если они берутся в заданных пропорциях). Тогда по самому

[1] Что касается комплексов симптомов y^i, то они могут даже «перекрываться» между собой.

смыслу параметров всегда имеем $x_i \geqslant 0$; кроме того, масштабы измерения x_i всегда можно установить так, что все дозы $0 < x_i \leqslant 1$ будут «разумными» в смысле выполнения условия $f^i(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \in \in Y^i$; таким образом, $Q_i = [0, 1]$. При этом $x_i = 0$ соответствует «бездействию», а $x_i > 0$ — направленному действию для i-го элемента данной системы, так что формально можно положить $X_i = (0, \infty)$.

Рассмотрим в качестве допустимых (возможных) наборов действий все наборы вида $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \geqslant 0$, $\sum x_i = 1$, и проанализируем возможные последствия одновременного осуществления нескольких действий. Имеются две взаимоисключающие альтернативы: либо 1) возможна «неестественная» ситуация (типа описанной во введении), когда ни один из показателей, подвергаемых направленному лечебному воздействию, не улучшается, т.е. для некоторого допустимого набора $(x_1, \ldots, x_n)$ имеем

$$f^i(x_1, \ldots, x_n) \notin Y^i \quad \text{для всех } i, \text{ таких, что } x_i > 0,$$

либо 2) такие ситуации невозможны — каждый раз при введении допустимой комбинации лекарств хотя бы один соответствующий показатель улучшается, т.е. для каждого допустимого набора $(x_1, \ldots, x_n)$ имеем

$$f^i(x_1, \ldots, x_n) \in Y^i \text{ хотя бы для одного } i, \text{ такого, что } x_i > 0.$$

Если реализуется вторая альтернатива, т. е. если система «лекарства — симптомы» натуральна, то, согласно теореме 2с, существует согласованный набор действий $(x_1, \ldots, x_n)$, — такой, что

$$x_i > 0, \ \sum x_i = 1 \ \text{ и } \ f^i(x_1, \ldots, x_n) \in Y^i \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

Это означает, что подбором дозировок различных лекарств в этом случае заведомо можно добиться одновременного улучшения всех показателей.

Отметим, что качественный, топологический (а не количественный, метрический) характер модели позволяет включать в нее без потери строгости выводов и такие физиологические показатели, которым трудно или даже невозможно придать точный количественный характер (симптомы типа «утомление», «возбуждение» и т.п.). В то же время рассмотрение количественных показателей позволяет продвинуться в анализе такой системы далее. Рассмотрим простейший случай, когда имеются два лекарства в дозах x_1, x_2 и два количественных физиологических показателя y_1, y_2, и допустим, что (в некотором приближении) существует линейная зависимость

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2.$$

Предположим, что целью i-го лечебного воздействия является положительность i-го показателя ($i = 1, 2$), что означает его улучшение по сравнению с исходным нулевым значением. Привлекая результаты анализа примера 1 (система (6), (6б)), заключаем, что единственным случаем, когда невозможно подбором дозировок лекарств добиться улучшения обоих показателей, является случай, когда каждое лекарство обладает в этой системе вредным побочным действием (т.е. $a_{12} < 0$ и $a_{21} < 0$), причем произведение коэффициентов прямого действия $a_{11}a_{22}$ не превосходит произведения коэффициентов побочного действия $a_{12}a_{21}$. Если это не так, то искомый подбор дозировок всегда осуществим (см. пример 1, система (6), (6б)), т.е. найдутся дозы x_1, $x_2 > 0$, такие, что будут получены оба ожидаемых улучшения $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$.

Пример 4. Приведем теперь как пример системы «действия — результаты» один фрагмент из исследования системы образования в США, опубликованного в виде отчета РЭНД Корпорейшн [156]. В этой работе, в частности, изучалось, каким образом такие факторы, как заработная плата учителей и нагрузка, приходящаяся на учителя (число учеников в классе), влияют на качество обучения (успеваемость) и на величину расходов на обучение. Одно из статистических обследований, описанных в [156], показало, что увеличение зарплаты учителей на 5% при одновременном увеличении нагрузки на 8% в конечном счете привело к повышению качества обучения при неизменном бюджете. Проанализируем эти данные в терминах стандартной модели «действие — результаты».

Будем рассматривать повышение зарплаты учителей как действие, направленное на повышение качества обучения, а увеличение нагрузки на учителя — как действие, направленное на экономию бюджета. Пусть x_1 — изменение зарплаты учителя, x_2 — изменение нагрузки на учителя, y_1 — изменение качества обучения (здесь безразлично, в каких единицах оно измеряется), y_2 — величина экономии бюджета. Тогда формально множества направленных действий X_1, X_2 и множества ожидаемых результатов Y_1, Y_2 имеют вид $(0, \infty)$; будем считать, что множества возможных действий имеют вид $Q_i = [\alpha_i, \beta_i]$, $\alpha_i < 0 < \beta_i$. Снова допустим, что в линейном приближении существует зависимость

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2.$$

Здесь $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{12} < 0$, $a_{21} < 0$; как следует из анализа примера 1, такая система может как быть, так и не быть натуральной. Заметим теперь, что приведенный выше результат обследования означает существование $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, таких, что $y_1 > 0$ и $y_2 = 0$. Отсюда следует $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$, и, значит, данная система «действия — результаты» натуральна (см. пример 1). Следовательно, существуют согласованные действия (одновременное повышение зарплаты и нагрузки учителей), обеспечивающие и повышение качества обучения, и снижение расходов.

Подчеркнем, что если бы, наоборот, в качестве действия, направленного на повышение качества обучения, было выбрано снижение нагрузки на учителя, а в качестве действия, направленного на экономию бюджета, — снижение зарплаты, то, как снова вытекает из приведенных данных, такая система «действия — результаты» не была бы натуральной, и (как следует из соотношения $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$) эти действия невозможно было бы согласовать так, чтобы они привели к ожидаемым результатам. На этом примере можно видеть, что факт натуральности системы может служить показателем того, адекватно ли выбраны направленные действия и правильно ли между ними распределена ответственность за соответствующие результаты.

Пример 5. Рассмотрим простейшую многопродуктовую экономическую модель — схему межотраслевого баланса. Пусть имеются n взаимосвязанных отраслей (технологий); i-я отрасль производит i-й продукт в количестве x_i и затрачивает при этом количество $\alpha_{ji}(x_i) \geqslant 0$ каждого j-го продукта $(i, j = 1, \ldots, n)$. В классической линейной модели межотраслевого баланса Леонтьева [198] $\alpha_{ji}(x_i) = a_{ji}x_i$, где a_{ji} — постоянный технологический коэффициент. Величина x_i полного выпуска продукта i-й отрасли служит мерой интенсивности работы этой отрасли и с точки зрения управления экономической системой может рассматриваться как входная переменная — i-е действие. Будем предполагать для простоты, что величину x_i можно выбирать произвольно в пределах от 0 до ∞. За соответствующую выходную переменную y_i (результат) примем величину чистого выпуска i-го продукта, равную его полному выпуску минус суммарные производственные затраты, т.е. в линейной модели Леонтьева

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Естественно рассматривать положительную интенсивность x_i i-й отрасли как действие, направленное на достижение положительного чистого выпуска y_i. Таким образом, приходим к стандартной модели «действия — результаты» вида

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n),\ Q_i = [0, \infty),\ X_i = (0, \infty),\ Y_i = (0, \infty)\ (i = 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Рассмотрим вопрос о достижимости ожидаемых результатов в этой модели, т.е. о существовании набора интенсивностей $x = (x_1, \ldots, x_n)$, обеспечивающего положительные чистые выпуски всех продуктов $y_1, \ldots, y_n > 0$. Будем называть такой набор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ продуктивным режимом, а модель, для которой существует продуктивный режим, — продуктивной моделью. Заметим, что положительный чистый выпуск $y_i > 0$ возможен только при положительном полном выпуске $x_i > 0$; поэтому «продуктивный режим» — это синоним «согласованного набора действий» в данной модели. Тем самым отыскание условий продуктивности модели сводится к отысканию условий существования согласованного набора действий на множестве R возможных режимов $x \geqq 0$. Учитывая теперь, что, согласно теореме 2, натуральность системы вида (19) гарантирует существование в ней согласованного набора действий, немедленно получаем, что натуральность есть достаточное условие продуктивности модели Леонтьева (18).

Это утверждение в действительности можно усилить, воспользовавшись тем, что для линейной модели Леонтьева свойство продуктивности (изучавшееся в литературе в несколько иной, но эквивалентной формулировке [198]) достаточно полно характеризуется теоремой Хокинса–Саймона (см. пример 2). Возьмем линейную модель Леонтьева в матричной форме:

$$y = (E - A)x, \tag{20}$$

где E — единичная матрица, $A = (a_{ij})$ — матрица технологических коэффициентов. Применяя теорему Хокинса–Саймона к матрице $\tilde{A} = E - A$ системы (20), заключаем, что для продуктивности (20) необходима и достаточна положительность всех главных миноров матрицы $E - A$. Как следует из анализа системы (11), (11б) в примере 2, это же условие необходимо и достаточно для натуральности системы (20). Таким образом, для линейной модели «интенсивности — чистые выпуски» свойства продуктивности и натуральности полностью совпадают (натуральность не только достаточна, но и необходима для продуктивности); теорема Хокинса–Саймона дает аналитический критерий, позволяющий эффективно проверить выполнение этих свойств для данной линейной модели.

Для того чтобы пояснить экономический смысл понятия натуральности в системе «интенсивности — чистые выпуски», введем еще одно понятие — «абсолютно непродуктивный режим». Назовем набор интенсивностей $x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ (хотя бы одна из которых положительна) абсолютно непродуктивным режимом, если при этом все чистые выпуски неположительны: $y = (y_1, \ldots, y_n) \leqq 0$, т.е. если в этом режиме система потребляет каждого из продуктов не меньше, чем производит [1]. Легко видеть (снова приняв во внимание, что $y_i > 0$ может быть только при $x_i > 0$), что абсолютно непродуктивный режим существует в системе (18) в том и только в том случае, если эта система не является натуральной. Иначе говоря, натуральность системы «интенсивности — чистые выпуски» есть не что иное, как отсутствие в ней абсолютно непродуктивных режимов.

Таким образом, для линейной модели Леонтьева (18) следующие три свойства оказываются эквивалентными между собой: 1) отсутствие абсолютно непродуктивных режимов; 2) натуральность; 3) продуктивность. В частности, эквивалентность свойств 1 и 3 означает, что в линейной модели (18) продуктивный режим существует в том и только в том случае, если в ней невозможен абсолютно непродуктивный режим [2].

В заключение укажем, что для прямого нелинейного обобщения модели Леонтьева свойство натуральности остается достаточным (в силу теоремы 2) для продуктивности, но перестает быть необходимым — в одной и той же нелинейной системе могут существовать и продуктивный, и абсолютно непродуктивный (несовместимый с натуральностью) режим.

С другой стороны, как легко видеть, в нелинейной модели, как и в линейной, эквивалентом натуральности является отсутствие абсолютно непродуктивных режимов. Поэтому в нелинейном случае остается в силе утверждение: если в модели невозможен абсолютно непродуктивный режим, то в ней существует продуктивный режим (в линейном случае, как было показано, справедливо и обратное). Тем самым любое условие, гарантирующее в нелинейной модели невозможность абсолютно непродуктивного режима, является достаточным условием продуктивности. Этот результат позволяет получить некоторые новые условия продуктивности для нелинейной модели межотраслевого баланса; однако вывод этих условий выходит за рамки настоящего иллюстративного примера, предназначенного лишь для разъяснения самого́ понятия натуральности.

---

[1] Подчеркнем, что «абсолютно непродуктивный режим» — более сильное понятие, чем просто «непродуктивный режим» в смысле «режим, не являющийся продуктивным».

[2] Это утверждение можно также получить непосредственно, применяя следствие, приведенное в примере 2 (точнее, эквивалентность пунктов а) и б) в этом следствии), к матрице $\tilde{A} = E - A$ системы (20).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приводимое ниже доказательство теоремы 1с опирается на одну комбинаторно-топологическую лемму о нумерации вершин симплексов, обычно называемую леммой Шпернера [198], или, более непосредственно, на вытекающую из нее лемму о покрытии симплекса, приведенную в [72] также под названием «лемма Шпернера». Дадим сначала нужные определения, а затем формулировку этой леммы (в приспособленном для целей настоящей работы виде).

Рассмотрим n-мерное пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Множество $P_n = \{x | \sum x_i = 1, \, x_i \geqslant 0 \; (i = 1, \ldots, n)\}$ называется стандартным симплексом. Точки $x^1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $x^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,$\ldots$,$x^n = (0, \ldots, 0, 1)$ называются вершинами симплекса P_n. Каждое подмножество вида $\{x | x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_s} = 1, \, x_{i_1} \geqslant 0, x_{i_2} \geqslant 0, \ldots, x_{i_s} \geqslant 0\}$ называется гранью симплекса, натянутой на вершины $x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_s}$, и обозначается $\overline{x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_s}}$. В частности, сам симплекс P_n является своей (несобственной) гранью, натянутой на все n вершин: $P_n = \overline{x^1 x^2 \ldots x^n}$.

Назовем семейство n множеств $H^1, \ldots, H^n$ натуральным покрытием симплекса P_n, если каждая грань $\overline{x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_s}}$ целиком лежит в объединении одноименных множеств $H^{i_1} \cup H^{i_2} \cup \ldots \cup H^{i_s}$.

Лемма Шпернера [72]. Пусть n замкнутых множеств $H^1, \ldots, H^n$ образуют натуральное покрытие симплекса P_n. Тогда эти множества имеют общую точку.

Множество $A \subset P_n$ называется открытым в P_n («в относительной топологии»), если для каждой точки $x \in A$ пересечение некоторой окрестности точки x с множеством P_n целиком лежит в A. Покажем, что лемма Шпернера остается в силе, если в ней вместо замкнутых множеств $H^1, \ldots, H^n$ будут фигурировать открытые в P_n множества $H^1, \ldots, H^n$.

Для этого, очевидно, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма. Пусть n открытых в P_n множеств $H^1, \ldots, H^n$ образуют натуральное покрытие симплекса P_n. Тогда можно указать замкнутые подмножества $G^1 \subset H^1, \ldots, G^n \subset H^n$, также образующие натуральное покрытие P_n.

Доказательство. Пусть H_c — дополнение к множеству H в P_n, т.е. множество точек из P_n, не принадлежащих H. Семейство n множеств $H^1, \ldots, H^n$ согласно определению является натуральным покрытием симплекса P_n в том и только в том случае, если каждая грань $\overline{x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_s}}$ не пересекается с пересечением одноименных множеств $H_c^{i_1} \cap H_c^{i_2} \cap \ldots \cap H_c^{i_s}$. Обозначим через $\sigma(H_c)^{i_1 i_2 \ldots, i_s}$ расстояние от $\overline{x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_s}}$ до $H_c^{i_1} \cap H_c^{i_2} \cap \ldots \cap H_c^{i_s}$. Рассмотрим множества

$H^1, \ldots, H^n$ из условия леммы; так как эти множества открыты в P_n, то их дополнения в P_n — множества $H_c^1, \ldots, H_c^n$ — замкнуты. Поэтому все расстояния $\sigma(H_c)^{i_1 i_2 \ldots i_s}$ положительны. Возьмем минимальное из этого конечного набора расстояний и обозначим его ε; очевидно, $\varepsilon > 0$.

Построим для каждого множества H_c^i его открытое δ-расширение в P_n, т.е. множество всех точек в P_n, находящихся на расстоянии от H_c^i, меньшем, чем $\delta > 0$; обозначим это множество через G_c^i, а дополнение к нему в P_n — через G^i. Очевидно, что множество G_c^i — открытое в P_n, а G^i — замкнутое, причем $G^i \subset H^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Каждая грань $\overline{x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_n}}$ при достаточно малом $\delta > 0$ не пересекается с пересечением одноименных множеств $G_c^{i_1} \cap G_c^{i_2} \cap \ldots \cap G_c^{i_s}$, и, значит, множества $G^1, \ldots, G^n$ образуют натуральное покрытие симплекса P_n. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1с. Без ограничения общности считаем, что система натуральна на множестве $P_n = \{x | x_i = 1,\, x_i \geqslant 0\}$, а множества X_i имеют вид (δ_i, ∞) или $[\delta_i, \infty)$, где $\delta_i < 1/n$, причем $0 \notin X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Легко видеть, что если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in$ $\in \overline{x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_s}}$, т.е. если $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_s} = 1$, то $x_i \in X_i$ хотя бы для одного $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ и $x_j \notin X_i$ для всех $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$. Поэтому в силу натуральности системы имеем $y^i \in Y^i$ хотя бы для одного $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$.

Обозначим через H^i множество всех точек $x \in P^n$, таких, что $y^i = f^i(x_1, \ldots, x_n) \in Y^i$. Согласно непрерывности f^i, если множество Y^i замкнуто, то и H^i замкнуто, а если Y^i открыто, то H^i открыто в P_n. Из доказанного выше следует, что если $x \in \overline{x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_s}}$, то $x \in H^i$ хотя бы для одного $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, т.е. $x \in H^{i_1} \cup H^{i_2} \cup \ldots \cup H^{i_s}$. Таким образом, семейство $H^1, \ldots, H^n$ является натуральным покрытием симплекса P_n.

Если множества $Y^1, \ldots, Y^n$ все замкнуты либо все открыты, то и множества $H^1, \ldots, H^n$ все замкнуты либо все открыты в P_n. Поэтому в силу леммы Шпернера множества $H^1, \ldots, H^n$ должны иметь общую точку $x^* \in P_n$. По построению получаем $f^i(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in Y^i$ $(i =$ $= 1, \ldots, n)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2с. Возьмем в качестве i-го результата вместо y^i пару (x_i, y^i), приняв в качестве i-го множества ожидаемых результатов прямое произведение $X_i \times Y^i$. Полученная система, как и исходная, натуральна на P^Δ; кроме того, новые множества ожидаемых результатов либо все замкнуты, либо все открыты. Поэтому по теореме 1с существует набор $(x_1, \ldots, x_n) \in P^\Delta$ такой, что $(x_i, y^i) \in X_i \times Y^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Очевидно, это и есть искомый согласованный набор действий.

Свойство бесконфликтности в системах упорядоченных разбиений [1]

Системы упорядоченных разбиений множеств фигурируют во многих задачах — от группировки объектов по нескольким порядковым признакам до согласования индивидуальных предпочтений на множестве альтернатив. В таких задачах часто рассматривается, в явной или неявной форме, вопрос о построении единого упорядоченного разбиения как некоторой «композиции» исходных разбиений, естественно согласованной с ними и соединяющей в себе их «общие черты». Прототипом этого является классическая модель К.Эрроу согласования предпочтений в терминах бинарных отношений упорядочения [63, 95]. В [63] установлена применимость подхода Эрроу к согласованию существенно иных типов структур в задачах групповых решений — в частности, к согласованию бинарных отношений эквивалентности и порождаемых ими классификаций на множестве объектов (обычных, т.е. неупорядоченных, разбиений [82]). Аксиоматизация этой задачи в [63] оказалась допускающей такое решение, которое «равноправным образом» учитывает все исходные классификации; этим решением служит комбинационная группировка, т.е. совокупность всех пересечений исходных классов. В противоположность этому задача о согласовании упорядочений не имеет подобного универсального «симметричного» решения, а приводит к «диктаторским» [63, 95] или, в усиленной форме, «лексикографически-диктаторским» [163] правилам согласования. По такому правилу решение о «согласованном» упорядочении объектов принимается согласно одному лишь «главному» (первому по важности) среди исходных упорядочений, и только при безразличии по первому упорядочению решение принимается согласно второму и т.д.

В настоящей работе предметом изучения являются наборы упорядоченных разбиений, т.е. упорядочений, описываемых в «целостных» терминах подмножеств исходного множества, а не в «локальных» терминах бинарных отношений (хотя они взаимопереводимы). Рассматривается задача построения единого упорядоченного разбиения, по возможности согласованного с исходными разбиениями. Задача не формулируется здесь аксиоматически, в стиле Эрроу, но исследуемые пути ее решения подсказаны вышеупомянутыми результатами для модели Эрроу: вводится аналог правила «лексикографического диктата» (в терминах структуры упорядоченного разбиения), универсально применимого, но нарушающего требование равноправия; вводится пра-

[1] Анализ данных и экспертные оценки в организационных системах.—М.: Институт проблем управления, 1985.—С. 22–30.

вило «симметричной» композиции упорядоченных разбиений, которое удовлетворяет требованию равноправия, но не универсально. Далее очерчивается область применимости «симметричного» правила, которая характеризуется простым критерием согласованности исходных упорядоченных разбиений — условием «бесконфликтности», причем оказывается, что в этой области симметричное правило эквивалентно лексикографическому.

Ради простоты далее изложение ведется применительно к «двумерному» случаю (системы из двух упорядоченных разбиений), но результаты без большого труда распространяются и на многомерный случай.

Далее всюду рассматривается фиксированное конечное множество U. Приведем необходимые определения, и в том числе напомним некоторые известные понятия, относительно которых имеются разночтения (см., например, [63, 64, 82, 134]). *Разбиением* множества U называется семейство $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\ldots,N}$ подмножеств множества U такое, что

$$\bigcup_{i=1,\ldots,N} U_i = U \text{ и } U_i \cap U_k = \varnothing \quad \text{при } i \neq k, \tag{1}$$

причем

$$U_i \neq \varnothing, \ \ i = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Будем, однако, допускать к рассмотрению и такие семейства $\mathcal{U}$, в которых выполнено (1), но не обязательно — (2); будем называть их *неочищенными разбиениями*. Разбиение, полученное из такого $\mathcal{U}$ выбрасыванием членов $U_i = \varnothing$ (с возможной переиндексацией оставшихся членов $U_k \neq \varnothing$), будем называть *ректификатом* неочищенного разбиения $\mathcal{U}$ и обозначать $\operatorname{rect}\mathcal{U}$.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\ldots,N}$ и $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j=1,\ldots,M}$ — два разбиения множества U. *Произведением* $\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}$ разбиений $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ будем называть разбиение

$$\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} = \operatorname{rect}\{U_i \cap V_j\}_{i=1,\ldots,N;\, j=1,\ldots,M}. \tag{3}$$

Очевидно, произведение двух разбиений (3) действительно является разбиением, и оно коммутативно: $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$.

Разбиение $\mathcal{W} = \{W_k\}_{k=1,\ldots,Q}$ называется *измельчением* разбиения $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j=1,\ldots,M}$, а $\mathcal{V}$ — *укрупнением* $\mathcal{W}$, если

$$V_j = \bigcup_{k \in K_j} W_k, \ \ j = 1, \ldots, M,$$

для некоторого разбиения $\mathcal{K} = \{K_j\}_{j=1,\ldots,M}$ множества индексов $K = \{1, \ldots, Q\}$. Очевидно, произведение $\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}$ является измельчением как разбиения $\mathcal{U}$, так и разбиения $\mathcal{V}$:

$$U_i = \bigcup_{j=1,\ldots,M} (U_i \cap V_j), \quad V_j = \bigcup_{i=1,\ldots,N} (U_i \cap V_j) \tag{4}$$

(реально суммирование в (4) идет только по индексам, которые соответствуют непустым множествам-членам в (3)).

Для описания «структуры» операции умножения разбиений и других операций далее будет удобно для пары разбиений $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ рассматривать пары индексов (i, j), $i = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, M$. Пару индексов (i, j) назовем *связью* в паре разбиений $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, если $U_i \cap V_j \neq \varnothing$. Введем множество P всех связей в паре $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и отметим некоторые его простейшие свойства. Прежде всего, не любое подмножество $P \subset \subset \{(i, j)\}_{i=1,\ldots,N;j=1,\ldots,M}$ может быть реализовано как множество связей в какой-либо паре разбиений; это вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Если P — множество связей, то для каждого $i = 1, \ldots, N$ существует j (и обратно, для каждого $j = 1, \ldots, M$ существует i) такое, что $(i, j) \in P$.

В самом деле, как вытекает из требования $\bigcup\limits_j V_j = U$ в определении разбиения $\mathcal{V}$, каждое $U_i \subseteq U$ должно пересекаться хотя бы с одним $V_j \in \mathcal{V}$; аналогично — обратное.

Из леммы 1, в частности, вытекает для числа T элементов множества P нижняя граница $\max\{M, N\}$ в дополнение к очевидной верхней границе MN:

$$\max\{M, N\} \leqslant T \leqslant MN. \tag{5}$$

Перенесем теперь понятия, введенные выше для обычных, «неупорядоченных», разбиений, на новый объект — упорядоченные разбиения. Будем называть *упорядоченным разбиением* множества U и обозначать символом $\vec{\mathcal{U}}$ последовательность $\langle U_1, U_2, \ldots, U_N \rangle$ подмножеств множества U такую, что $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1,\ldots,N}$ есть разбиение множества U. Иначе говоря, упорядоченное разбиение $\vec{\mathcal{U}}$ — это разбиение $\mathcal{U}$ с линейным упорядочением его членов U_i согласно натуральному порядку индексов[1] $i = 1, \ldots, N$.

Составом упорядоченного разбиения $\vec{\mathcal{U}}$, обозначаемым через $|\vec{\mathcal{U}}|$, будем называть соответствующее неупорядоченное разбиение $\mathcal{U}$. Аналогично неупорядоченному случаю будем рассматривать также неочищенные упорядоченные разбиения $\vec{\mathcal{U}}$ (с неочищенным составом $|\vec{\mathcal{U}}| = = \mathcal{U}$) и их ректификаты $\operatorname{rect}\vec{\mathcal{U}}$. Два упорядоченных разбиения $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$ будем считать равными в том и только в том случае, если совпадают и их составы, и их упорядочения этого общего состава.

[1] Ввиду конечности разбиений здесь достаточно целочисленной индексации.

Будем называть упорядоченное разбиение $\vec{\mathcal{U}} = \langle U_1, \ldots, U_N\rangle$ *укрупнением* упорядоченного разбиения $\overrightarrow{\mathcal{W}} = \langle W_1, \ldots, W_Q\rangle$, а $\overrightarrow{\mathcal{W}}$ — *измельчением* $\vec{\mathcal{U}}$, если члены $\vec{\mathcal{U}}$ представимы в виде

$$U_i = \bigcup_{k_{i-1}+1 \leqslant k \leqslant k_i} W_k, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{6}$$

при некоторых

$$k_0 < k_1 < \ldots < k_N, \quad \text{где } \ k_0 = 1,\, k_N = Q. \tag{7}$$

Из (6), (7) очевидно, что $\vec{\mathcal{U}}$ является укрупнением $\overrightarrow{\mathcal{W}}$ в том и только в том случае, когда состав $|\vec{\mathcal{U}}|$ есть укрупнение $|\overrightarrow{\mathcal{W}}|$ и из $W_{k'}, W_{k''} \subseteq U_i$ следует $W_k \subseteq U_i$ для всех индексов k между k' и k''.

Теперь можно приступить к основной цели этой работы — к введению и анализу операции «композиции» двух упорядоченных разбиений наподобие определенной выше операции «умножения» двух неупорядоченных разбиений. В отличие от неупорядоченного случая, желаемая операция не имеет естественно-однозначного определения; далее вводятся различные ее версии.

Лексикографическим произведением $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$ двух упорядоченных разбиений $\vec{\mathcal{U}} = \langle U_1, \ldots, U_N\rangle$ и $\vec{\mathcal{V}} = \langle V_1, \ldots, V_M\rangle$ множества U назовем упорядоченное разбиение

$$\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}} = \operatorname{rect} \langle U_1 \cap V_1, U_1 \cap V_2, \ldots, U_1 \cap V_M, U_2 \cap V_1, \ldots, U_N \cap V_M\rangle. \tag{8}$$

Очевидно, выражение (8) действительно дает упорядоченное разбиение; упорядоченное — в силу самóй его записи, а разбиение — поскольку его состав есть разбиение: $|\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}| = |\vec{\mathcal{U}}| \cdot |\vec{\mathcal{V}}|$.

Однако лексикографическое произведение в общем случае некоммутативно: $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}} \neq \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$. Пусть, например,

$$U = \{a, b, c\}, \;\; \vec{\mathcal{U}} = \langle \{a, b\}, \{c\}\rangle, \;\; \vec{\mathcal{V}} = \langle \{a, c\}, \{b\}\rangle. \tag{9}$$

Тогда

$$\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}} = \langle \{a\}, \{b\}, \{c\}\rangle, \;\; \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}} = \langle \{a\}, \{c\}, \{b\}\rangle. \tag{10}$$

Структурные свойства произведений упорядоченных разбиений особенно удобно изучать на языке связей. Пусть снова $[(i, j) \in P] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [U_i \cap V_j \neq \varnothing]$. Тогда последовательность членов $U_i \cap V_j$ $(\neq \varnothing)$ в лексикографическом произведении $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$ задается последовательностью пар их индексов $(i, j) \in P$, и эта последовательность упорядочена лексикографически — в смысле обычной «векторной» лексикографии [134]:

$$[(i, j) \text{ строго предшествует } (k, l)] \Leftrightarrow [i < k \text{ или } (i = k \text{ и } j < l)]. \tag{11}$$

Эту последовательность пар индексов лексикографического произведения $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$ можно наглядно представить как результат «прочтения» матрицы связей $\|(i,j)\|$ обычным способом — по строке слева направо и затем с переходом к следующей строке, тогда как произведению $\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$ соответствует прочтение той же матрицы «японским» способом — по столбцам сверху вниз.

Лемма 2. Лексикографическое произведение $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$ является измельчением упорядоченного разбиения $\vec{\mathcal{U}}$, а $\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$ — измельчением $\vec{\mathcal{V}}$.

Эта лемма немедленно вытекает из определений лексикографического произведения и измельчения упорядоченных разбиений.

В противоположность «неупорядоченному» случаю, в лемме 2 оба разбиения, $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$, остаются каждый раз неравноправными: $\vec{\mathcal{U}}$, в отличие от $\vec{\mathcal{V}}$, может не быть укрупнением произведения $\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$, а $\vec{\mathcal{V}}$ — не быть укрупнением $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$ (см. пример (9)–(10)). Разумеется, в свете леммы 2 это возможно тогда и только тогда, когда $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}} \neq \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$; если же эти лексикографические произведения совпадают, то оба упорядоченных разбиения $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$ оказываются двумя разными укрупнениями одного и того же «базового» упорядоченного разбиения $\vec{g} = \vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$. Далее будет показано (см. теорему 3), что верно и обратное: если $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$ являются укрупнениями какого-либо одного, пусть произвольного, «базового» упорядоченного разбиения $\vec{g}$, то тогда $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$ лексикографически коммутируют и в качестве $\vec{g}$ можно взять общее значение $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$.

Учитывая, однако, что в общем случае лексикографическое произведение $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$ некоммутативно, введем иное определение произведения упорядоченных разбиений, предусматривающее «равноправие сомножителей». Будем называть *совершенным произведением* двух упорядоченных разбиений $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$ множества U упорядоченную последовательность непустых множеств вида

$$\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}} = \langle U_{i_1} \cap V_{j_1}, U_{i_2} \cap V_{j_2}, \dots, U_{i_T} \cap V_{j_T} \rangle \tag{12}$$

при условии, что ее состав $|\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}| = \{U_{i_t} \cap V_{j_t}\}_{t=1,\dots,T}$ есть разбиение множества U, а члены в (12) упорядочены по неубыванию индексов:

$$i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_T, \; j_1 \leqslant j_2 \leqslant \dots \leqslant j_T. \tag{13}$$

Условие неубывания (13) удобно переписать для пар индексов:

$$(i_1, j_1) \leqq (i_2, j_2) \leqq \dots \leqq (i_T, j_T), \tag{14}$$

заменив его эквивалентным образом на условие «полустрогого» возрастания:

$$(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2) \leq \dots \leq (i_T, j_T), \tag{15}$$

где $\leqq$ означает нестрогое, а $\leq$ — полустрогое покомпонентное («векторное») неравенство, т.е.

$$[(i,j) \leqq (i',j')] \Leftrightarrow [i \leqslant i' \text{ и } j \leqslant j'],$$
$$[(i,j) \leq (i',j')] \Leftrightarrow [(i,j) \leqq (i',j') \text{ и } (i,j) \neq (i',j')].$$

Усиление формы неравенств (14) до формы (15) возможно потому, что члены выражения (12) не могут повторяться в силу определения разбиения.

Лемма 3. Определению совершенного произведения (12), (13) для фиксированных $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$ может удовлетворять не более одного упорядоченного разбиения множества U.

Действительно, состав $|\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}|$ разбиения (12) заведомо является подсоставом разбиения $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$ и, значит, должен совпадать с ним. Следовательно, (12) представляет собой специальное упорядочение разбиения $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$ — а именно, удовлетворяющее условию (15). Если бы существовало другое упорядочение того же разбиения $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$, удовлетворяющее тому же условию (15), то оно должно было бы отличаться от первого перестановкой хотя бы одной пары членов, что невозможно в силу (15).

Итак, если совершенное произведение $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$ существует, то оно единственно; в этом смысле его определение (12), (13) корректно. Легко видеть, что это произведение коммутативно:

$$\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}} \odot \vec{\mathcal{U}}. \tag{16}$$

Соотношение (16) следует понимать в том смысле, что если существует левая часть в (16), то правая также существует, однозначно определена и совпадает с левой, и обратно (произведение $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$ также ассоциативно, как и $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$, и $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$, что важно для корректного определения n-кратного произведения).

Теорема 1. Совершенное произведение $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$ двух упорядоченных разбиений $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$ множества U существует тогда и только тогда, когда их лексикографическое произведение коммутативно:

$$\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}. \tag{17}$$

Более того, при этом

$$\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}. \tag{18}$$

Доказательство.

1. Пусть $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$ существует. Тогда, с учетом совпадения составов $|\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}|$, $|\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}|$ и $|\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}|$, из сопоставления определения (12), (13) с (8) следует (18).

2. Пусть выполнено (17). Рассмотрим

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}} &= \operatorname{rect} \langle U_1 \cap V_1, U_1 \cap V_2, \ldots, U_N \cap V_M \rangle = \\ &= \langle U_{i_1} \cap V_{j_1}, U_{i_2} \cap V_{j_2}, \ldots, U_{i_T} \cap V_{j_T} \rangle. \end{aligned} \tag{19}$$

В силу определения лексикографии (8) здесь $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_T$. С другой стороны, упорядоченное разбиение (19) должно совпадать с $\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$ в силу (17), откуда вновь в силу определения лексикографии $j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant j_T$. Таким образом, упорядоченное разбиение (19) удовлетворяет условиям (13) и, следовательно, оно является совершенным произведением $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$. Теорема доказана.

Дадим теперь критерий существования совершенного произведения $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$ на языке связей в паре $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$. Скажем, что в множестве связей P имеется конфликт [1], если найдутся две пары

$$(p, r),\ (q, s) \in P \tag{20}$$

индексов p, q, r, s таких, что

$$p < q \ \text{ и } \ r > s. \tag{21}$$

Лемма 4. Для того чтобы совершенное произведение $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$ существовало, необходимо и достаточно, чтобы в множестве связей P для системы $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$ не было конфликтов.

Доказательство. Пусть совершенное произведение $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$ (12), (13) существует. Тогда, если в (20) $(p, r) = (i_t, j_t)$, $(q, s) = (i_\tau, j_\tau)$, то в силу (13) из (21) вытекает одновременно и $t < \tau$, и $t > \tau$. Следовательно, конфликт (20), (21) невозможен. Обратно, пусть конфликтов вида (20), (21) в P нет. Тогда для любых двух пар (p, r), $(q, s) \in P$ необходимо $(p, r) \leqq (q, s)$ или $(q, s) \leqq (p, r)$, что позволяет линейно упорядочить множество P в виде последовательности (15). Лемма доказана.

Характеризация последовательности связей (i_t, j_t) (15), упорядочивающей множество P, дается следующей леммой.

Лемма 5. Последовательность связей (i_t, j_t), $t = 1, \ldots, T$, для совершенного произведения $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$ упорядоченных разбиений $\vec{\mathcal{U}} = \langle U_1, \ldots, U_N \rangle$ и $\vec{\mathcal{V}} = \langle V_1, \ldots, V_M \rangle$ удовлетворяет следующим условиям.

1). Условие «неразрывности»:

$$(0, 0) \leqq (i_{t+1}, j_{t+1}) - (i_t, j_t) \leqq (1, 1). \tag{22}$$

[1] В [64] подобная ситуация названа «строгой несогласованностью».

2). Краевые значения:

$$(i_1, j_1) = (1, 1);\ (i_T, j_T) = (N, M). \tag{23}$$

3). Условие «узости». Для всякого c найдется не более одного t такого, что $i_t + j_t = c$.

4). Длина последовательности T заключена в границах

$$\max\{M, N\} \leqslant T \leqslant M + N - 1. \tag{24}$$

Доказательство.

1. Левое неравенство в (22) равносильно (15). Рассмотрим правое неравенство в (22) и допустим, что оно нарушено — для определенности, пусть $i_{t+1} > i_t + 1$. Тогда в силу (13) значение $i_\tau = i_t + 1$ не достигается ни при каком $\tau = 1, \ldots, T$, а это противоречит лемме 1.

2. Допустим, что $(i_1, j_1) \neq (1, 1)$ — для определенности, $i_1 > 1$. Тогда в силу (13) $i_t > 1$ для всех $t = 1, \ldots, T$, вопреки лемме 1. Аналогично доказывается второе равенство в (23).

3. Это условие следует из (15).

4. Нижняя граница (24) уже дана в (5), а верхняя следует из сопоставления условий 2 и 3. Лемма полностью доказана.

Для иллюстрации рассмотрим множество связей для некоторой пары $\vec{\mathcal{U}} = \langle U_1, \ldots, U_5 \rangle$, $\vec{\mathcal{V}} = \langle V_1, \ldots, V_8 \rangle$ с (5×8)-матрицей $\|(i, j)\|$ вида

$$\begin{array}{c|cccccccc|}
 & \multicolumn{8}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}^{j}} \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
i\ 1 & \times & \times & & & & & & \\
2 & & & \times & & & & & \\
3 & & & \times & \times & \times & & & \\
4 & & & & & \times & \times & & \\
5 & & & & & & & \times & \times \\
\hline
\end{array} \tag{25}$$

Здесь 10 заполненных клеток обозначают связи из множества P. Очевидно, это множество P не содержит конфликтов и может быть сделано «равномерно» по i, j упорядоченным с помощью прохода из клетки $(1, 1)$ в клетку $(N, M) = (5, 8)$ «ходами шахматного короля» (см. (22)). Легко видеть, что в согласии с леммой 4 и теоремой 1 получаемая последовательность (i_t, j_t) соответствует последовательности членов $U_i \cap V_j$ и в совершенном произведении $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$, и в каждом из двух лексикографических произведений $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$ и $\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$ («европейский» и «японский» порядки прочтения заполненных клеток таблицы (25) очевидно совпадают).

Вернемся к произвольным упорядоченным разбиениям $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$ и переведем свойство «конфликтности» связей в P на язык разбиений. Систему $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$ назовем *бесконфликтной*, если не существует четверки множеств U_p, $U_q \in |\vec{\mathcal{U}}|$; V_r, $V_s \in |\vec{\mathcal{V}}|$ такой, что

$$U_p \cap V_r \neq \varnothing, \;\; U_q \cap V_s \neq \varnothing, \tag{26}$$

$$p < q, \;\; r > s. \tag{27}$$

Поскольку условия (26) и (27) совпадают с (20) и (21), определение бесконфликтности для пары $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$ равносильно определению отсутствия конфликта в множестве P. Ввиду этого из леммы 4 и теоремы 1 непосредственно получаем следующий результат.

Теорема 2. Для того чтобы у двух упорядоченных разбиений $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$ множества U существовало совершенное произведение $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$ или, что эквивалентно, чтобы лексикографические произведения $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$ и $\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$ совпадали, необходимо и достаточно, чтобы система $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$ была бесконфликтной.

Тот факт, что существование конфликтной ситуации для пары $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$ эквивалентно некоммутативности лексикографического произведения $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$, нетрудно увидеть непосредственно. В самом деле, условие (27) необходимо и достаточно для того, чтобы член $U_p \cap V_r$ строго предшествовал члену $U_q \cap V_s$ в $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$, но следовал после него в $\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$, а существование таких двух членов (26), (27) необходимо и достаточно для того, чтобы два упорядоченных разбиения $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$ и $\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$ с одним и тем же составом $|\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}|$ не совпадали между собой.

Из теоремы 2, взятой вместе с леммой 2, вытекает следующая лемма.

Лемма 6. Если пара $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$ бесконфликтна, то $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$ являются двумя укрупнениями одного и того же упорядоченного разбиения $\vec{g}$, в качестве которого можно взять любое из совпадающих в этом случае упорядоченных разбиений $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$.

Для иллюстрации вернемся к матрице связей (25) и «развернем» ее в последовательность заполненных клеток (i_t, j_t) для $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$. Отмечая принадлежность множеств $U_{i_t} \cap V_{j_t}$ к укрупненным классам U_i и V_j из упорядоченных разбиений $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$, получаем следующую диаграмму укрупнений:

$$i \qquad \overbrace{\times \;\; \times}^{1} \;\; \overbrace{\times}^{2} \;\; \overbrace{\times \;\; \times \;\; \times}^{3} \;\; \overbrace{\times \;\; \times}^{4} \;\; \overbrace{\times \;\; \times}^{5}$$

$$j \qquad \underbrace{\times}_{1} \;\; \underbrace{\times}_{2} \;\; \underbrace{\times \;\; \times}_{3} \;\; \underbrace{\times}_{4} \;\; \underbrace{\times \;\; \times}_{5} \;\; \underbrace{\times}_{6} \;\; \underbrace{\times}_{7} \;\; \underbrace{\times}_{8}$$

Лемма 6 содержит необходимое условие бесконфликтности пары $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$ в терминах укрупнений некоторого «базового» упорядоченного разбиения $\vec{g}$. Это условие оказывается также достаточным, и поэтому лемма 6 допускает следующее «обращение».

Лемма 7. Пусть $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$ являются укрупнениями одного и того же упорядоченного разбиения $\vec{g}$. Тогда система $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$ бесконфликтна.

Доказательство. Допустим противное: в паре $\vec{\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}$ имеется конфликтная ситуация вида (26), (27). Так как $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$ — укрупнения упорядоченного разбиения $\vec{g} = \langle G_1, \ldots, G_k \rangle$, то

$$U_p = \bigcup_{k_{p-1}+1 \leqslant k \leqslant k_p} G_k, \ V_r = \bigcup_{l_{r-1}+1 \leqslant l \leqslant l_r} G_l$$

при соответствующих $\{k_\nu\}$ и $\{l_\mu\}$. Поэтому из условия $U_p \cap V_r \neq \varnothing$ следует, что существует G_t такое, что $G_t \subseteq U_p \cap V_r$ и $l_{r-1}+1 \leqslant t \leqslant k_p$. Аналогичным образом должно существовать $G_\tau \subseteq U_q \cap V_s$, где $k_{q-1}+ +1 \leqslant \tau \leqslant l_s$. При этом из условия $p < q$ следует, что $t \leqslant k_p < < k_{q-1}+1 \leqslant \tau$, а из условия $r > s$ — что $t \geqslant l_{r-1}+1 > l_s \geqslant \tau$. Это противоречие доказывает лемму.

Объединение лемм 6 и 7 позволяет сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 3. Для того чтобы в системе из двух упорядоченных разбиений $\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{V}}$ множества U существовало совершенное произведение $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$, необходимо и достаточно, чтобы $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$ порождались как два укрупнения какого-либо одного упорядоченного разбиения $\vec{g}$ множества U. Более того, при этом в качестве $\vec{g}$ заведомо можно взять само совершенное произведение $\vec{\mathcal{U}} \odot \vec{\mathcal{V}}$, которое существует и совпадает с обоими лексикографическими произведениями $\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$ и $\vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{U}}$.

Подчеркнем, что в «достаточной» части утверждения теоремы 3 «базовое» упорядоченное разбиение $\vec{g}$ может быть произвольным; нужно лишь, чтобы оно было общим измельчением и для $\vec{\mathcal{U}}$, и для $\vec{\mathcal{V}}$. Такое базовое разбиение $\vec{g}$ можно интерпретировать как своего рода «внутренний фактор», проявляющийся в огрубленной форме в наблюдаемых упорядоченных классификациях $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$. Эту «факторную» интерпретацию нетрудно перевести на язык порядковых шкал (признаков), определяющих упорядоченные разбиения, сведя ее к требованию, чтобы порядковые шкалы для $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{V}}$ получались как результаты поразному осуществляемого «склеивания» соседних градаций одной и той же «внутренней» базовой шкалы (примером может служить практикуемое в социологии формирование возрастных групп с по-разному проводимыми границами между ними). Такая «внутренняя одномерность» системы упорядоченных разбиений, согласно основному результату настоящей работы, как раз и характеризует ту степень согласованности внутри этой системы (очевидно, весьма жесткую), которая необходима и достаточна для осуществимости «совершенной» композиции исходных упорядоченных разбиений.

В заключение кратко укажем, что аналогичные постановки задач и результаты распространяются на системы из $n > 2$ упорядоченных разбиений, а также на системы из иных, но родственных объектов: бинарных отношений «слабого порядка» и порядковых шкал. При этом аналогами операций лексикографического и совершенного умножения разбиений служат операции лексикографической композиции и симметричного объединения-пересечения бинарных отношений, а также соответствующие операции над порядковыми шкалами.

Свойства порядковых функций множеств [1]

Примером функции (функционала) от множества, отличной от обычных аддитивных функций (мер), является оптимальное значение в задаче экстремизации, рассматриваемое как функция от допустимого множества:

$$F(X) = \max_{x \in X} f(x). \tag{1}$$

Функция F в (1), как и ее «генератор» — функция f, может быть не числовой, а порядковой, т.е. принимать значения из произвольного линейно упорядоченного множества L. Однако порядковые функции множеств, порождаемые задачами экстремизации (1), обладают свойством, аналогичным аддитивности. Дальнейшие ослабления этого свойства также приводят к выделению замечательных, в том или ином смысле, классов функций множеств, которым и посвящен настоящий доклад.

Во избежание технических усложнений ограничимся конечным случаем. Далее всегда $X \subseteq U$, где U — фиксированное конечное множество. Пусть F — некоторая порядковая функция на 2^U. Скажем, что F удовлетворяет условию порядковой аддитивности, если

$$F(X' \cup X'') = \max\{F(X'), F(X'')\} \tag{2}$$

для любых $X', X'' \subseteq U$.

[1] Расширенный вариант тезисов доклада на Всесоюзном семинаре по оптимизации и ее приложениям.—Душанбе, 1986.—С. 151–152.

Теорема 1. Для того чтобы F была порядковоаддитивна, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (1). При этом с необходимостью $f(x) = F(\{x\})$, $x \in U$.

Имея в виду эту теорему, будем называть порядковоаддитивной всякую функцию $F(X)$, представимую в виде (1) с какой-либо $f(x)$. Теперь можно рассмотреть более общий случай, когда F определена не обязательно на всех $X \subseteq U$, а на некотором подсемействе $\mathcal{X} \subseteq 2^U$. В частности, F может не быть определена на одноэлементных множествах. Введем условие: для любых $X \in \mathcal{X}$ и $\{X_\nu\} \subseteq \mathcal{X}$ таких, что $\bigcup\limits_\nu X_\nu \supseteq X$, имеет место

$$F(X) \leqslant \max_\nu F(X_\nu). \tag{3}$$

Теорема 2. Для того чтобы функция $F(X)$, определенная на некотором $\mathcal{X} \subseteq 2^U$, была порядковоаддитивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3).

Далее для простоты считаем, что F определена на всех собственных подмножествах $X \subset U$.

Будем называть функцию $F(X)$ *монотонной*, если

$$F(X') \leqslant F(X'') \text{ при } X' \subseteq X'', \tag{4}$$

и назовем $F(X)$ *$\cup$-квазивыпуклой*, если

$$F(X' \cup X'') \leqslant \max\{F(X'), F(X'')\} \tag{5}$$

при любых X', $X'' \subseteq U$ (эту и последующие версии свойства «квазивыпуклости» можно интерпретировать как разновидности свойств абстрактной квазивыпуклости согласно [76]).

Теорема 3. Функция $F(X)$ порядковоаддитивна тогда и только тогда, когда она монотонна и $\cup$-квазивыпукла.

Эта теорема очевидна ввиду того, что равенство в условии квазиаддитивности (2) эквивалентно конъюнкции двух неравенств: условия субаддитивности (5) (т.е. $\cup$-квазивыпуклости) и условия супераддитивности:

$$F(X' \cup X'') \geqslant \max\{F(X'), F(X'')\} \tag{6}$$

для любых X', $X'' \subseteq U$ — что эквивалентно монотонности (4).

Назовем $F(X)$ *гипераддитивной*, если она представима в виде

$$F(X) = \max_{S \subseteq X} G(S) \tag{7}$$

при всех $X \subseteq U$, где $G(S)$ — некоторая порядковая функция («генератор») на 2^U.

Лемма 1. Гипераддитивность $F(X)$ эквивалентна ее монотонности.

Теорема 4. Для того чтобы $F(X)$ была порядковосупераддитивной (субаддитивной), необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$F(X) = \max_{x\in X} \max_{S\subseteq X} g(x,S) \tag{8}$$

либо, соответственно,

$$F(X) = \max_{x\in X} \min_{S\subseteq X} g(x,S) \tag{9}$$

с некоторой функцией g на $U \times 2^U$.

Замечание 1. В полуаддитивных представлениях (8) (или (7)) для монотонной и (9) для $\cup$-квазивыпуклой функции F можно принять: $g(x,S) \equiv G(S) \equiv F(S)$ — в (7) и (8), $g(x,S) \equiv \min\limits_{Z:x\in Z\subseteq S} F(Z)$ — в (9).

Назовем F $\cap$-квазивыпуклой, если

$$F(X' \cap X'') \leqslant \max\{F(X'), F(X'')\}. \tag{10}$$

Замечание 2. $\cap$-квазивыпуклость функции $F(X)$ эквивалентна $\cup$-квазивыпуклости функции $F^c(X) \equiv F(U \setminus X)$.

Теорема 5. Для того чтобы $F(X)$ была $\cap$-квазивыпуклой, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$F(X) = \max_{S\subseteq X} \max_{z\in U\setminus X} g(S,z) \tag{11}$$

с некоторой функцией g на $2^U \times U$.

Следствие (из теоремы 5 в силу замечания 2): $\cup$-квазивыпуклость функции F эквивалентна ее представимости в виде

$$F(X) = \max_{x\in X} \max_{Z\subseteq U\setminus X} g(x,Z) \tag{12}$$

при некоторой функции g на $U \times 2^U$ (наряду с представлением (9)).

Назовем F $\cup,\cap$-квазивыпуклой, если она одновременно $\cup$- и $\cap$-квазивыпукла.

Теорема 6. Для того чтобы F была $\cup,\cap$-квазивыпуклой, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в форме

$$F(X) = \max_{x\in X} \max_{y\in U\setminus X} g(x,y) \tag{13}$$

с некоторой функцией «потока» $g(x,y)$ на $U \times U$.

Замечание 3. В представлениях (11), (12) и (13) можно принять, соответственно,

$$g(S,z) = \min_{T:z\in T\subseteq U\setminus S} F(U\setminus T) = \min_{Q:Q\not\ni z, Q\supseteq S} F(Q), \tag{14}$$

$$g(x,Z)=\min_{T:x\in T\subseteq U\setminus Z}F(T)=\min_{Q:Q\not\ni x,Q\supseteq Z}F(U\setminus Q) \tag{15}$$

и

$$g(x,y)=\min_{T:T\ni x,T\not\ni y}F(T). \tag{16}$$

Лемма 2. Всякая монотонная (и только такая) функция F представима в виде следующего разложения по некоторой системе $\{g_\nu(x)\}_{\nu\in N}$ порядковоаддитивных функций на U:

$$F(X)=\min_{\nu\in N}\max_{x\in X}g_\nu(x). \tag{17}$$

С помощью разложения (17) получаем, как следствие из теорем 4, 5, дальнейшие эквивалентные представления функций.

Теорема 7. Справедливы разложения:

1) Для монотонной (порядковосупераддитивной) функции F:

$$F(X)=\min_{\nu\in N}\max_{x\in X}\max_{y\in X}g_\nu(x,y); \tag{18}$$

2) Для $\cup$-квазивыпуклой (порядковосубаддитивной) функции:

$$F(X)=\max_{\nu\in N}\max_{x\in X}\min_{y\in X}g_\nu(x,y) \tag{19}$$

или

$$=\max_{y\in U\setminus X}\min_{\mu\in M}\max_{x\in X}h_\mu(x,y); \tag{20}$$

3) Для $\cap$-квазивыпуклой функции:

$$F(X)=\max_{x\in X}\min_{\nu\in N}\max_{y\in U\setminus X}g_\nu(x,y) \tag{21}$$

— при некоторых наборах функций g_ν (h_μ).

Замечание 4. Задание порядковой функции $F\colon 2^U\to L$ равносильно заданию семейства $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha\in L}$ ее множеств уровня $\mathcal{X}_\alpha=\{X\subseteq$ $\subseteq U\colon F(X)\leqslant\alpha\}$. Можно убедиться, что 1) монотонность F эквивалентна замкнутости каждого $\mathcal{X}_\alpha$ относительно теоретико-множественного сужения его членов-множеств:

$$X\in\mathcal{X}_\alpha,\ \ S\subseteq X\Rightarrow S\in\mathcal{X}_\alpha; \tag{22}$$

2) $\cup$-квазивыпуклость (либо $\cap$-квазивыпуклость) эквивалентна замкнутости каждого $\mathcal{X}_\alpha$ относительно объединения (соответственно, пересечения):

$$\begin{gathered}X',X''\in\mathcal{X}_\alpha\Rightarrow X'\cup X''\in\mathcal{X}_\alpha\\ (\text{соответственно, }\ \Rightarrow X'\cap X''\in\mathcal{X}_\alpha,\end{gathered} \tag{23}$$

т.е. эквивалентна полурешеточности $\mathcal{X}_\alpha$), поэтому $\cup,\cap$-квазивыпуклость F эквивалентна решеточности всех $\mathcal{X}_\alpha$; 3) квазиаддитивность F эквивалентна тому, что каждое $\mathcal{X}_\alpha$ имеет вид булеана:

$$\mathcal{X}_\alpha = \{X\colon X \subseteq X_\alpha\}, \text{ где } X_\alpha \subseteq U. \tag{24}$$

Для частного случая порядковых функций $F\colon 2^U \to L$ при $L = \{0,1\}$, т.е. для логических функций множеств, задание каждой такой функции равносильно заданию множества $\mathcal{X}_0$ ее «нулей», и структура этого множества определяет свойства F.

В качестве примера реализации вышеописанных свойств порядковых функций множеств укажем на модель «монотонной системы» по И.Муллату [65], которая в обозначениях настоящей работы описывается скалярной функцией $F(X)$ на подмножествах X конечного множества объектов U, где F определяется так:

$$F(X) = \min_{x\in X} \pi(x, X), \tag{25}$$

где $\pi(x,X)$ — некоторая функция на $U\times 2^U$, монотонная по X (экстремизация F по X используется в задачах группировки, когда $\pi(x,X)$ имеет смысл меры «связанности» объекта x с X; эффективный алгоритм экстремизации так определенной F дан в [65]). Из леммы 1 и теоремы 4 получаем, что функция $F(X)$ определяется некоторой монотонной системой, в смысле (25), в том и только в том случае, если функция $-F(X)$ порядковосубаддитивна, иначе говоря, если $-F(X)$ $\cup$-квазивыпукла.

Комбинаторная модель причинных связей [1]

Введение

Представим себе объект, на который могут поступать дискретные входные воздействия $x, y, z, \ldots$ или сочетания (совокупности) таких воздействий, т.е. наборы вида $X = \{x, y, \ldots\}$. При этом на выходе объекта наблюдаются последствия этих воздействий, обозначаемые символами $\lambda, \mu, \nu, \ldots$. Совокупность всех наблюдаемых последствий при данном наборе воздействий X обозначим через Λ. Предполагаем, что

[1] Методы и алгоритмы анализа эмпирических данных.—М.: Институт проблем управления, 1988.—С. 27–34.

имеется детерминированная и статическая (фактор времени не рассматривается) функциональная зависимость $X \mapsto \Lambda$. Зададимся вопросом, можно ли описать эту зависимость с помощью системы «причинных связей» при более или менее обычном понимании причинности, и каковы свойства такой системы.

На интуитивном уровне можно считать данное воздействие x причиной для некоторого последствия λ, если наличие x во входном наборе воздействий X с необходимостью влечет наличие последствия λ в выходном наборе Λ (x есть «достаточная причина» для λ; обозначим это символом $x \Rightarrow \lambda$). Разумеется, одно и то же воздействие x может быть причиной для нескольких различных последствий $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. В свою очередь, одно и то же λ может проявляться как последствие любой из нескольких причин $x_1, x_2, \ldots$. Подчеркнем, что причинами мы называем только отдельные воздействия, а не их совокупности (последние будем иногда трактовать как «составные причины»).

Система индивидуальных причинно-следственных связей вида $x_i \Rightarrow \Rightarrow \lambda_j$ будет давать полное описание общей функциональной зависимости $X \mapsto \Lambda$, если выполнено следующее требование: в любой регистрируемой входо-выходной паре $X \mapsto \Lambda$ каждое последствие $\lambda \in \Lambda$ имеет (хотя бы одну) свою причину среди воздействий $x \in X$. Действительно, в этом случае, в силу данного выше определения «причины», для любого набора воздействий X соответствующий набор последствий Λ однозначно определяется как состоящий из тех и только тех последствий λ, для которых имеются причины x в X. Так устроенную функциональную зависимость $X \mapsto \Lambda$ будем далее называть разложимой по системе причинных связей $x \Rightarrow \lambda$ (кратко-разложимой).

Не всякая зависимость «воздействия — последствия» разложима; сформулированное выше условие разложимости может нарушаться. А именно, может оказаться, что некоторый набор воздействий X вызывает (среди прочего) некоторое последствие λ, для которого нельзя указать (ни одной) причины x в наборе X. При этом возможны две качественно противоположные ситуации.

Ситуация I. Последствие λ не вызывается ни одним отдельно взятым воздействием x из набора X (и поэтому у λ заведомо нет причин в X). Но поскольку все эти воздействия в совокупности все же порождают λ, здесь имеет место «положительный системный эффект» — место «индивидуальной» причины x занимает совместное воздействие «коллективной (комплексной) причины» X для λ. Примером может служить обычный логический вывод, скажем, при доказательстве математических утверждений. В самом деле, пусть $x, y, z, \ldots$ — предположения об исследуемом предмете (постулаты), а $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ — доказываемые следствия (теоремы). Тогда следствия из некоторого набора предположений X будут, как правило, более богатыми, чем совокупность следствий из этих же предположений, но принимаемых поочередно, по одному.

Ситуация II. Последствие λ порождаемо некоторым одиночным воздействием x в отсутствие других воздействий (т.е. формально, одноэлементным набором воздействий $X = \{x\}$). Однако x все же не является причиной для λ (в смысле данного выше определения), поскольку при расширении набора воздействий до некоторого X', по-прежнему включающего x, последствие λ исчезает. Это — «отрицательный» системный эффект. Примером такой ситуации может служить совокупность лекарственных воздействий на организм, когда потенциальный лечебный эффект одного лекарства может уничтожаться побочным влиянием других, принимаемых одновременно.

Далее в этой работе строится формализация вышеописанной схемы функциональных зависимостей «воздействия — последствия» как для случая ее разложимости по причинным связям, так и для случая неразложимости. Даются конструктивные критерии разложимости. Анализируются возможные причины нарушения этих критериев в виде типичных «системных эффектов» (двух основных качественно противоположных типов) и разрабатывается соответствующее расширение понятия причинности («квазиразложимость» системы связей).

Формальная модель «воздействия — последствия». Критерии разложимости по причинным связям

Пусть U — множество элементов $x, y, \ldots$, называемых воздействиями, а Ω — множество элементов $\lambda, \mu, \ldots$, называемых последствиями (природа множеств U и Ω для дальнейшего несущественна; впрочем, в случае конечности U возможны некоторые упрощения, что будет оговариваться при необходимости).

Пусть задано отображение (функциональная зависимость) F, переводящее множества $X \subseteq U$ в $\Lambda \subseteq \Omega$:

$$F(X) = \Lambda. \tag{1}$$

В общем случае F определено на некотором семействе $\mathcal{X} \subseteq 2^U$, т.е. $F\colon \mathcal{X} \to 2^\Omega$. Особо будем выделять случай, когда F определено на $\mathcal{X} = 2^U$, т.е. при всех $X \subseteq U$ (быть может, кроме $X = \varnothing$).

Назовем функцию F сепарабельной, если она представима в виде

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} f(x) \tag{2}$$

при всех $X \in \mathcal{X}$, где $f\colon U \to 2^{\Omega}$ — некоторая функция, которую будем называть причинной функцией.

Замечание 1. Здесь и далее следует для корректности особо оговорить случай $X = \varnothing$ (если он допускается). Можно для простоты положить $F(\varnothing) = \varnothing$ либо же дополнить выражение (2) «несобственным» аддитивным членом $f(\text{“}\varnothing\text{”}) = C$ (при этом C интерпретируется как постоянно наблюдаемый набор выходных сигналов — совокупность последствий «пустого» воздействия “$\varnothing$”).

Определение сепарабельности служит основой для формализации понятия схемы причинно-следственных связей, обсуждавшейся во введении. Чтобы завершить эту формализацию, приведем дальнейшие определения. Пусть задано отображение F; назовем выявленно-причинной функцией для F функцию

$$\breve{f}(x) \doteqdot \bigcap_{S \ni x} F(S), \quad x \in V \tag{3}$$

(здесь и далее ради краткости, когда это не приводит к недоразумениям, не указываем подразумеваемое требование, что все множества воздействий берутся только из допустимого семейства $\mathcal{X}$).

Определение выявленно-причинной функции (3) формализует понятие «причины». Действительно, множество $\Lambda_x = \breve{f}(x)$ состоит из всех тех и только тех последствий $\lambda \in \Omega$, которые наблюдаются всякий раз, когда данное x входит в применяемый набор воздействий. Следующее определение завершает формализацию понятия разложимости, рассмотренного во введении.

Функциональную зависимость F назовем разложимой, если при всех $X \in \mathcal{X}$

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} \breve{f}(x). \tag{4}$$

На первый взгляд разложимость (4) есть ужесточение свойства сепарабельности (2), поскольку выражение (4) есть специальный случай выражения (2). Однако в действительности разложимость не сильнее сепарабельности, а эквивалентна ей:

Утверждение 1. Функция F сепарабельна тогда и только тогда, когда она разложима.

Таким образом, в качестве причинной функции f в (2) всегда можно взять выявленно-причинную функцию $\breve{f}$ из (3).

Доказательство. В утверждении 1 «тогда» очевидно; докажем «только тогда». Зафиксируем произвольное $X \in \mathcal{X}$. Для любого $x \in X$ согласно (2) и (3) имеем

$$\breve{f}(x) = f(x) \bigcup h(x), \tag{5}$$

где

$$h(x) \subseteq \bigcup_{z \in X} f(z). \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем

$$\bigcup_{x \in X} \breve{f}(x) = \bigcup_{x \in X} f(x),$$

что и доказывает утверждение 1.

Рассмотрим теперь случай всюду определенной функции F, т.е. $\mathcal{X} = 2^U$. В этом случае (и даже шире, при любом таком $\mathcal{X}$, в которое входят все одноэлементные множества $X = \{x\}$) ситуация упрощается до тривиальности, так как при этом из сепарабельности сразу следует, что

$$f(x) = \breve{f}(x) = F(\{x\}), \quad x \in U. \tag{7}$$

Далее, при этом в силу (7) условие сепарабельности (а значит, и разложимости) становится равносильным выполнению соотношения

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} F(\{x\}) \tag{8}$$

для всех $X \in \mathcal{X}$, что представляет собой простейшее «функциональное уравнение» для сепарабельной функции F (уравнение сепарабельности). Выполнение этого уравнения есть простейший критерий разложимости отображения F.

Вернемся к общему случаю произвольного $\mathcal{X}$ и выпишем более общее соотношение, чем (8). Пусть для любого семейства $\{X_\alpha\}$ множеств $X_\alpha \in \mathcal{X}$, такого, что $\bigcup\limits_{\alpha} X_\alpha \in \mathcal{X}$, выполняется равенство

$$F(\bigcup_{\alpha} X_\alpha) = \bigcup_{\alpha} F(X_\alpha). \tag{9}$$

Назовем (9) условием аддитивности. Очевидно, соотношение (8) есть частный случай соотношения аддитивности (9). С другой стороны, легко видеть, что всякая сепарабельная функция F всегда удовлетворяет условию аддитивности. Поэтому в ситуации, когда применимо соотношение (8), т.е. при $\mathcal{X}$, содержащем все одноэлементные подмножества универсума U, свойства сепарабельности и аддитивности эквивалентны.

Утверждение 2. При $\mathcal{X} = 2^U$ условие аддитивности (9) эквивалентно условию (8), а значит, и сепарабельности, и разложимости функции F.

Замечание 2. Если в случае $\mathcal{X} = 2^U$ множество U конечно, то условие аддитивности можно свести к эквивалентному условию более простого вида: для любых $X', X'' \subseteq U$ $F(X' \bigcup X'') = F(X') \bigcup F(X'')$ (аналогичные замечания верны для рассматриваемых в следующем разделе условий «полуаддитивности»).

В отличие от случая $\mathcal{X} = 2^U$, в общем случае, при $\mathcal{X} \subset 2^U$, аддитивность функции F не гарантирует ее сепарабельности — даже если U конечно. Пусть, например, $U = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$, где $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{b, c\}$, $X_3 = \{c, d\}$. Тогда условие аддитивности (9) выполняется (при любой функции F!) тривиальным образом. Но если положить, например, $F(X_1) = F(X_3) = \varnothing$, но $F(X_2) \neq \varnothing$, то сепарабельность такой функции F заведомо невозможна.

Для того чтобы получить эквивалент сепарабельности в терминах «наблюдаемых» свойств функции F в общем случае, введем еще одно условие. Назовем функцию F консервативной, если для любого семейства множеств $\{X_\alpha\}$ и любого множества X из $\mathcal{X}$

$$\mathcal{X} \subseteq \bigcup_\alpha X_\alpha \Rightarrow F(X) \subseteq \bigcup_\alpha F(X_\alpha). \tag{10}$$

Утверждение 3. Из свойства консервативности (10) следует свойство аддитивности (9).

Чтобы доказать утверждение 3, вначале заметим, что (10) в частном случае $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ дает соотношение

$$F(\bigcup_\alpha X_\alpha) \subseteq \bigcup_\alpha F(X_\alpha).$$

Остается убедиться, что это включение в действительности должно быть равенством. С этой целью заменим в (10) множество X на любое X_α, а семейство $\{X_\alpha\}$ — на семейство, состоящее из одного членамножества $\bigcup_\alpha X_\alpha$; получаем $F(X_\alpha) \subseteq F(\bigcup_\alpha X_\alpha)$ для любого X_α, что и обеспечивает окончательное равенство (9).

При этом консервативность является существенным усилением аддитивности, так как в приведенном выше примере консервативность, в отличие от аддитивности, не имеет места. Роль этого усиления выявляется следующей теоремой.

Теорема 1 (общий критерий сепарабельности). Пусть $\mathcal{X}$ — область определения функции F произвольного вида. Для того чтобы F была сепарабельна, а значит, разложима, необходимо и достаточно, чтобы F была консервативной на $\mathcal{X}$.

Доказательство. Если F сепарабельна, то выполнение условия консервативности (10) легко проверяется непосредственно. Обратно, пусть выполнено (10). Покажем, что тогда выполнено условие разложимости (4). Для этого сначала заметим, что условие (4) путем подстановки в него выражения (3) переходит в уравнение

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} \bigcap_{S \ni x} F(S). \tag{11}$$

Заметим, что в каждом конъюнктивном члене $\bigcap F(S)$ в правой части (11) при любом x в качестве одного из множеств S фигурирует X. Поэтому эта правая часть — обозначим ее через A — заведомо вложена в $F(X)$:

$$F(X) \supseteq A.$$

Остается доказать, что и обратно, $F(X) \subseteq A$. Допустим противное: тогда существует $\lambda \in F(X)$ такое, что $\lambda \notin A$. Но тогда, согласно смыслу выражения A, для всякого $x \in X$ найдется $S_x \ni x$ такое, что

$$\lambda \notin F(S_x). \tag{12}$$

Семейство $\{S_x\}_{x \in X}$, очевидно, образует покрытие множества X, поэтому согласно условию консервативности (10) с учетом (12) должно быть $\lambda \notin F(X)$, вопреки предыдущему предположению. Теорема доказана.

Отклонения от разложимости. Квазисепарабельность

В предыдущем разделе был проведен анализ свойства сепарабельности функциональной зависимости (разложимости на причинно-следственные связи). Сепарабельность (разложимость) интерпретируется как простое «взаимоналожение» последствий от различных причин, без их «интерференции». В поведении функции F это проявляется в форме свойства аддитивности (9) или в его обобщенной форме — свойства консервативности (10).

Во введении отмечалось, что нарушение свойства разложимости системы (а значит, в силу формальных результатов предыдущего раздела — нарушение аддитивности и консервативности F) выражается в «системных эффектах» двух типов — положительном и отрицательном. В этом разделе изучается формальная структура таких эффектов.

Обратимся к условию аддитивности и заметим, что уравнение (9) можно свести эквивалентным образом к паре противоположных односторонних включений:[1]

$$F(\bigcup_\alpha X_\alpha) \supseteq \bigcup_\alpha F(X_\alpha) \tag{13}$$

и

$$F(\bigcup_\alpha X_\alpha) \subseteq \bigcup_\alpha F(X_\alpha), \tag{14}$$

где $X_\alpha \in \mathcal{X}$.

Будем называть (13) условием супераддитивности, а (14) — условием субаддитивности. Проанализируем эти условия поочередно.

Прежде всего заметим, что супераддитивность (13) эквивалентна монотонности функции F, а именно условию

$$X' \subseteq X'' \Rightarrow F(X') \subseteq F(X''), \quad X', X'' \in \mathcal{X}. \tag{15}$$

Теорема 2. Для того чтобы функция $F\colon \mathcal{X} \to 2^\Omega$ ($\mathcal{X} \subseteq 2^U$) была монотонной, т.е. супераддитивной, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$F(X) = \bigcup_{S \subseteq X} G(S), \quad X \in \mathcal{X}. \tag{16}$$

при некоторой функции-генераторе $G\colon 2^U \to 2^\Omega$.

Доказательство. Достаточность проверяется непосредственно, а необходимость вытекает из того, что представление (16) для монотонной функции F заведомо справедливо, если положить $G(S) \doteqdot F(S)$ для $S \in \mathcal{X}$ и $G(S) \doteqdot \varnothing$ для $S \notin \mathcal{X}$.

Представление (16) описывает в явной форме уже упоминавшийся «положительный системный эффект». Действительно, согласно (16) подмножество воздействий S может порождать в $F(X)$ даже те последствия λ, которые отсутствуют в множествах последствий $F(X_\alpha)$ для «малых» подмножеств воздействий X_α, не содержащих S целиком, однако присутствуют в $G(S)$, а значит, и появляются в $F(X)$, когда $X \supseteq S$. В этом смысле множество воздействий S играет роль «комплексной причины» для λ.

[1] Это обстоятельство фактически используется в приведенном выше доказательстве утверждения 3.

Замечание 3. Определение монотонности (15), если быть точным, соответствует одному из двух естественных определений монотонности — монотонному возрастанию F по X. Аналогичным образом определяется свойство монотонного убывания:

$$X' \subseteq X'' \Rightarrow F(X') \supseteq F(X''). \tag{17}$$

Как легко убедиться, для монотонно убывающих функций также справедливо представление, аналогичное (16):

$$F(X) = \bigcap_{S \subseteq X} G(S), \quad X \in \mathcal{X}. \tag{18}$$

(Отметим, что «хорошим» доопределением F на $X = \varnothing$ здесь будет $F(\varnothing) = \Omega$.)

Перейдем от монотонности (супераддитивности) к субаддитивности.

Теорема 3. Для того чтобы функция $F\colon \mathcal{X} \to 2^{\Omega}$ $(\mathcal{X} \subseteq 2^U)$ была субаддитивной, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} \bigcap_{S \subseteq X} G(x; S), \quad X \in \mathcal{X}, \tag{19}$$

при некоторой функции-генераторе $G\colon U \times 2^U \to 2^{\Omega}$.

Доказательство. Достаточность проверяется подстановкой выражения (19) в (14): нужно лишь учесть, что конъюнктивные члены вида $\bigcap G(x; S)$ в выражении для $F(\bigcup X_\alpha)$ заведомо мажорируются соответственными (при тех же x) членами, присутствующими в выражениях для $F(X_\alpha)$ (каждый такой член обязательно будет присутствовать в выражении для хотя бы одного α, поскольку совокупность $\{X_\alpha\}$ дает покрытие для X). Для доказательства необходимости положим $G(x; S) \doteqdot F(S)$ при $x \in S \subseteq X$ и $G(x; S) \doteqdot \Omega$ в остальных случаях. Тогда, поскольку в каждом конъюнктивном члене правой части (19) — обозначим ее через B — в качестве одного из сомножителей $G(x; S)$ будет стоять $G(x; X) \doteqdot F(X)$, получим заведомо $F(X) \supseteq B$. Покажем теперь, что в то же время $F(X) \subseteq B$. Допустим противное: тогда найдется $\lambda \in F(X)$ такое, что $\lambda \notin B$. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 1, возьмем для каждого $x \in X$ такое S_x, что $x \in S_x \subseteq X$ и $\lambda \notin G(x; S_x) \doteqdot F(S_x)$. Ввиду субаддитивности F на покрытии $\{S_x\}_{x \in X}$ множества X снова получаем противоречие. Теорема доказана.

Представление (19) демонстрирует «отрицательный системный эффект»: одиночное воздействие x может вызывать некоторое последствие $\lambda \in G(x; \{x\})$, которое, однако, будет «аннулировано», согласно (19), при расширении $\{x\}$ до некоторого $X \ni x$ такого, что $\lambda \notin$ $\notin G(x; X)$.

Полученное ранее представление для супераддитивных функций (16) также может быть эквивалентным образом преобразовано к форме, аналогичной представлению (19) для субаддитивных функций:

Следствие из теоремы 2. Для того чтобы функция F была монотонной (супераддитивной), необходима и достаточна ее представимость в виде

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{S \subseteq X} G(x; S). \tag{20}$$

Действительно, монотонность функции вида (20) очевидна; обратно, для всякой монотонной функции F представление (20) получается из (18) при $G(x; S) \doteqdot G(S)$ независимо от x (напомним, что о значении $F(\varnothing)$ говорилось в замечании 1).

Используя теорему 3 и следствие из теоремы 2, получаем еще один результат:

Теорема 4. Для того чтобы функция F была супераддитивной (либо субаддитивной), необходимо и достаточно, чтобы она была представима в следующем квазисепарабельном виде:

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} f(x; X), \quad X \in \mathcal{X}, \tag{21}$$

где квазипричинная функция $f\colon U \times \mathcal{X} \Rightarrow 2^{\Omega}$ монотонно возрастает (соответственно, убывает) по второму аргументу.

Доказательство. «Достаточность» представления (21) легко проверяется подстановкой этого квазисепарабельного выражения в определения супер- и субаддитивности (13) и (14) с учетом монотонности f по X. «Необходимость» вытекает из представлений (20) и (19), в силу которых для перехода к представлению (21) достаточно положить

$$f(x; X) \doteqdot \bigcup_{S \subseteq X} G(x; S)$$

и

$$f(x; X) \doteqdot \bigcap_{S \subseteq X} G(x; S)$$

соответственно; монотонное убывание (возрастание) этих функций по X гарантируется теоремой 2 и замечанием 3 (представления (16) и (18)).

Саму форму представления (21) в общем случае можно назвать псевдосепарабельной. Легко видеть, что такое представление на самом деле не обладает никакой спецификой для представляемой функции:

любая функция F может быть представлена в псевдосепарабельной форме, для чего достаточно положить $f(x;X) \doteqdot F(X)$ для $X \in \mathcal{X}$ независимо от x. Специфичность представления (21), названная выше квазисепарабельностью, возникает при дополнительном требовании монотонности $f(x;X)$ по X.

Квазисепарабельность как раз и интерпретируется как наличие системных эффектов «одностороннего» характера — эффектов, которые искажают причинность в том смысле, в каком об этом говорилось в предыдущих разделах. Действительно, монотонное возрастание квазипричинной функции $f(x;X)$ по X интерпретируется как положительный системный эффект, а убывание — как отрицательный. Теорема 4 устанавливает взаимно-однозначное соответствие между такими односторонними системными эффектами и двумя свойствами полуаддитивности (при отсутствии аддитивности) функции F.

В заключение укажем, что приведенный здесь анализ множественнозначных функций множеств переносится с соответствующими изменениями на функции на абстрактных решетках, принимающие значения также на решетках.

Упорядоченность для гиперотношений в модели множественных связей [1]

Простейшей логико-математической моделью парных связей «объект — объект» на множестве объектов U служат бинарные отношения γ вида $x\gamma y$, $x, y \in U$. В роли подобной же модели множественных связей типа «группа объектов — объект» предлагается рассматривать гиперотношения Γ вида $X\Gamma y$, $X \subseteq U$, $y \in U$. При этом некоторые типы упорядоченности для таких гиперотношений удается задать и охарактеризовать аналогично обычным бинарным отношениям.

Исходим из основных типов бинарной упорядоченности: ацикличности, частичной и линейной упорядоченности. Известно, что всякое ациклическое отношение γ погружаемо в строгий линейный порядок ρ:

$$x\gamma y \Rightarrow x\rho y \tag{1}$$

[1] III Всесоюзная школа-семинар «Комбинаторно-статистические методы анализа и обработки информации, экспертное оценивание». Тезисы докладов.—Одесса, 1990.—С. 97.

(расширенная теорема Шпильрайна), а всякий строгий частичный порядок представим, более того, системой $\{\rho_i\}_{i\in I}$ таких порядков:

$$x\gamma y \Leftrightarrow \forall i \in I\colon x\rho_i y \tag{2}$$

(теорема Душника–Миллера). Приведем аналоги для гиперотношений Γ. Назовем Γ агиперциклическим, если у Γ не существует гиперциклического множества $Y \subseteq U$ — такого, что

$$\forall y \in Y\; \exists X \subseteq Y\colon X\Gamma y;$$

иррефлексивным, если

$$X\Gamma y \Rightarrow (X \setminus \{y\})\Gamma y;$$

гипертранзитивным, если

$$X\Gamma y,\; y \in Y,\; Y\Gamma z \Rightarrow ((X \cup Y) \setminus \{y\})\Gamma z;$$

регулярным, если

$$X\Gamma y,\; X' \supseteq X \Rightarrow X'\Gamma y.$$

Доказывается, что Γ согласовано со строгим линейным порядком ρ в смысле

$$X\Gamma y \Rightarrow \exists x \in X\colon x\rho y \tag{3}$$

в том и только в том случае, если Γ агиперциклично ((3) есть аналог (1)). Далее, регулярное Γ представимо через совокупность $\{\rho_i\}_{i\in I}$ (всех таких) порядков в виде

$$X\Gamma y \Leftrightarrow \forall i \in I\; \exists x \in X\colon x\rho_i y \tag{4}$$

в том и только в том случае, если Γ иррефлексивно, агиперциклично и гипертранзитивно ((4) есть аналог (2)). Примером может служить гиперотношение пространственного «загораживания» предметов другими предметами. Другой пример — из теории выбора: гиперотношения «запрещения» на множестве альтернатив для механизмов выбора, являющегося независящим от пути.

Logic of Multicomponent Systems and a Combinatorial Model of Causal Relationships [1]

The effects which are typical for multicomponent systems, i.e. for objects composed of parts, are studied from the logical standpoint. Possi-

[1] Information Sciences.—1989.—V. 47.—P. 187–242.

ble types of the formal relationship between a property of an object as a whole (called here a "hyperproperty") and a property of its separate parts or elements are analyzed. Simple standard forms of such relationships are isolated ("separable hyperproperties"). The deviations from these standard forms are described in terms of intrasystem interactions between elements or parts. The investigated formal types of the influence that an element property has on a system property are interpreted in causal terms. This provides a basis for the formal analysis of the "cause-consequence dependence" notion in the framework of a simple combinatorial model of the dependence between events.

0. Introduction

0.1. Informal statement of the problem The main topic of the present paper is the logic of properties of complex objects, viz., of abstract systems consisting of several components. We are interested in the logic of transforming these properties during "natural" transformations of systems, in particular, when joining different objects into a system or isolating some components (subsystems) of a system. Let us consider the behavior of some property potentially applicable to various objects under consideration: to systems, their parts, etc., down to their elementary (indivisible, "atomlike") components. What happens to the given property after a change in the composition of the system? It is reasonable to require that the validity of the given property for the object as a whole should be equivalent to the validity of the same property for its parts? (far all? for some?).

On the one hand, such a requirement is justified by various quite natural examples of properties of real objects. Indeed, the serviceability of a complex facility, means, as a rule, just the serviceability of each of its components. Roughly speaking, a "good whole" is just one which consists of "good parts". Starting from this idea, let us adopt the above requirement for "goodness" as a standard pattern of the "regular behavior" of any simple property of complex (composite, compound) objects.

On the other hand, it is far from always that a property of the whole is just an accumulation of the corresponding property of the composing parts. Quite the reverse, one usually believes that a "system" in the proper sense of the word is just such a "whole" as is qualitatively different from a simple sum of its parts (elements). Namely, such a "whole" must acquire some new property not possessed by its parts. Moreover, a property describing the system as a whole sometimes may be totally inapplicable (meaningless) to the elements taken separately. For example, a simple case is when one refers to a team of workers as "qualified staff", and similarly refers to a member of this team as a "qualified worker". But let us consider a slightly different case: you can say “united team” but you can hardly say “united worker”. The property “unity” is applicable to a set (team), not to an element (member).

Let us now admit the possibility that the given property is applicable, in principle, to all objects under consideration. Nevertheless this does not mean that validity of this property for a whole is equivalent to its validity for parts. Really, the possessing of some property by a whole without its being possessed by parts is a typical feature of “systemness”, as we have mentioned above. We shall call such a phenomenon *a positive system effect*. On the contrary, we shall term *a negative system effect* opposite phenomenon when a property does hold for separate parts, but not for a whole [1].

The manifestation of such a phenomenon is possible in particular in the above example on serviceability of a facility. On the one hand, the complex facility as a whole can work correctly in spite of the presence of faulty components, e.g. due to redundancy. This would exemplify a positive system effect. On the other hand, a complex facility composed of serviceable components may turn out to be unserviceable due to defects of their interactions; this would be a negative system effect.

Thus, a property of a whole may not be generally reduced to a simple repetition of the respective common property of parts. The question arises: What are possible types of mechanisms for generating properties of complex systems (composite objects)? What are the specifications of the mechanisms which do generate “simply constructed”, “simply behaving” properties? And on the other side, which kinds of complications in such mechanisms lead to the origination of “system effects”?

The present paper offers an attempt at formalizing such statements of problems on the basis of a very simple combinatorially logical model. In this model the notions “a whole” and “a part”, including an elementary part (“atom” of the system), are modeled by abstract sets, subsets, and their elements. The interconnections of properties of “parts” and of “the whole” are specified by requirements on the behavior of the corresponding logical dependencies. The problem of forming properties of “the whole” under an interaction of “parts” will be presented formally as a version of a problem of aggregating properties of these parts. This simple model has enabled us to clarify peculiarities of the logical structure not only for the simplest “standard” types of such aggregating rules (relationship between properties of the parts and the whole) but also for more complex

[1] It is easy to see that a negative system effect for the given property is just the corresponding positive system effect for its complementary property (logical negation), and vice versa. (Simultaneously one needs to replace the aggregation rule for properties of parts by the logically dual rule; see Section 3 below for details.)

types departing from these standards. Specifically, as one might expect, the "well-aggregable" properties of multielement objects turn out to be the ones which are simply decomposable onto elementary constituents, viz., are formally reducible to some property of "atomized" parts of the whole ("elements"). The departure from "good aggregability" is revealed when it is impossible to ignore *the mutual influences* between parts of the system which distort their properties and lead to *system effects*.

0.2. On the logical formalization of the problem Speaking now more formally, we shall, in what follows, describe various objects (systems) under consideration simply as some sets consisting of elements of a given universe. (These sets in general are not endowed with an additional specific structure.) We may use the simplest mathematical operations on sets for simulating some informal procedures for constructing new objects from old ones, such as isolating a part from a whole, composing a new compound object from several parts, completing an initial object to form a new one which includes the initial one, etc. The corresponding set-theoretical operations are isolating a subset from a set, forming the union of sets, extending a set to a larger one, etc. By a formal *property* of abstract objects we as usual shall mean an arbitrary logical (i.e. 0-1-valued) function of one subject variable, i.e. a one-place predicate [1]. The admissible values of this variable are just the objects under consideration, for which the given property is meaningful. The truth (value 1) or falsity (value 0) of the predicate means that the given object possesses or, respectively, does not possess the given property.

Our consideration includes objects of two qualitatively different types: (a) the initial elements of the universe, and (b) the sets formed from these elements. Respectively, the predicates may depend on two types of subject variables: (a) elements, and (b) sets. In multiplace predicates both types of variables may be used simultaneously. In what follows, we shall use for convenience the prefix "hyper" in speaking about predicates depending on sets, to contrast to those depending only on elements. Thus, we shall call any one-placed predicate of a set variable *a hyperproperty*, and call any binary relation between sets, i.e. two-place predicate of sets, *a hyperrelation*. Hereinafter, our prime concern will be the simplest kind of hyperpredicates, viz., hyperproperties. We shall be interested in their behavior in a given subject domain (formally, on the admissible family of sets), and their inner structure. By the behavior of a hyperpredicate we mean, following the preliminary discussion in Section 0.1, the interrelation of truth values on various object sets, in particular, the relationship between fulfilling a hy-

[1] To be more exact, one-place propositional form. Here we will not attempt to stick to the standard framework of modern logical formalism.

perproperty for separate sets, i.e. *parts*, and for their union, i.e. *the whole*. Contrary to such "externally observable" behavior of the hyperpredicate, we shall mean by its *internal construction* the explicit representation of this hyperpredicate, which uses some logical operations on some initially given logical functions (the latter forming its *inner structure*).

Indeed, the notion of internal construction of a predicate or a hyperpredicate will be fruitful if the explicit logical representation used is sufficiently natural and simple. As for the hyperproperty, the standard of its internal simplicity will be the expressibility of this hyperproperty, i.e. the property of sets, in terms of some "generating" property of elements. Roughly speaking, we treat the hyperproperty as "having a simple construction" if the proposition about a set which defines this hyperproperty may be substituted by a proposition about separate elements of this set. We shall begin the next section with necessary exact definitions. Further, in Sections 1–3, the relationship between the simplicity of external behavior of the hyperproperty and the simplicity of its internal logical structure in the above sense will be traced.

Some versions of the problem of the representability of a "complex" predicate by simpler ones have already appeared elsewhere. Thus, numerous works have been devoted to the question of substitutability of a multiplace predicate by several predicates of a lower "dimension", or "arity" (particularly in connection with problems of database arrangement and related topics in discrete mathematics—see, e.g., [165, 213]; a number of papers in this issue are also devoted to this topic). The present paper deals with a different question. We study the possibility of simplified representation of a predicate, not necessarily multiplace, depending on several elementary subject variables; it may be only a one-place predicate, provided that it depends on an essentially set-valued variable.

Similar problem statements can also be found in some works on applied discrete mathematics, in particular in decision-making theory. Thus, sometimes in models of collective and game-type interaction a question arises how to express the "strength of a coalition" in terms of the "strength" ("weight") of its separate members, and particularly, how to determine the superiority of one coalition over another in terms of the individual superiorities of members of the former coalition over members of the latter one [124]. In a kindred manner the preferences between sets of alternatives are determined by pairwise comparisons of separate alternatives are determined by pairwise comparisons of separate alternatives from respective sets [157, 200]. Using the notations introduced above, we may reformulate these problems in terms of the reducibility of hyperrelations to conventional relations between elements [1] (members, alternatives). The solution of a number of such problems in the context of choice theory has brought about a broadening of the frameworks of notions "preferences on alternatives" and "rational choice" [84, 87].

Section 4 will be founded on the hyperproperty analysis of Section 1–3 and devoted to a special statement of the problem of hyperrelation analysis. This statement originates in the problem of causality in a logical form, as has been done in the combinatorial scheme of causal relationships between events in [52]. In this scheme two types of abstract events are introduced initially: primary events (in a temporal or a logical sense), or *actions*, and secondary events, or *results*.

The functional dependence between sets of actions and generated sets of results is declared, which essentially specifies a special hyperrelation between the former and the latter. The problem of causal description is posed here, in the spirit of John Stuart Mill (see, e.g. [186]), in such a way: is it possible to represent results as consequences of some single actions treated as causes, "responsible" for their related results? The formal analysis of this question for the model is given in Section 4, and the positive answer turns out to be equivalent to a certain natural kind of decomposability of the above hyperrelation into relations between separate events ("cause-effect"). The results of the analysis in Sections 1–3 yield strict criteria for this possibility. The violation of these criteria results in the inadmissibility of the desired causal description for this event scheme. Nevertheless, in some natural cases of "mild" violation of the criteria mentioned, the general analysis allows one to obtain a sufficiently regular "quasicausal" description of the event system. In these cases we may seek not single individual actions ("causes"), but complexes of actions whose presence (or, on the contrary, absence) brings about certain results. Such kinds of "complex causality" are in fact the special manifestations of general system effects which have been discussed above, in Section 0.1, and which will be investigated in detail in the main part of the paper. Finally, the concluding Section 5 will point out some further possible extensions for this realm of study.

1. Formal hyperproperties and their characteristics

1.1. Initial notions. Let us consider some set U to be given, which we shall call he universe. Objects—carriers of properties and hyperproperties studied below—will be elements x, $y, \dots$ and subsets X, $Y, \dots$ of the

[1] A particular case of a converse (in some sense) statement of the problem was considered in [149] (see also the other papers in the same issue of the journal): the extension of the linear ordering on a set onto the family of its subsets (under some axiomatic requirements).

universe. Generally speaking, the universe is an abstract set (finite or infinite) of symbolic elements, which is not assumed to be endowed with any topological or other structure. In general we shall apply to this set, and to its subsets and elements, only the usual set-theoretical operations. Only in some special cases shall we concretize the nature of the set U and its peculiarities.

Using abstract objects such as sets and their elements, we shall consider formal properties of these objects and formal relations between them, i.e. predicates of the respective subject variables. In the present section we shall consider only properties, i.e. one-place predicates. By a formal property of elements x from U (for brevity, *a property on* U) we shall mean any logical function $p(x)$ on the set U, i.e. a mapping $p\colon U \to \{0,1\}$. By a formal property of sets $X \subseteq U$, or *a hyperproperty on* U, we shall mean any logical function $P(X)$ on the power set of the universum U, i.e. a mapping $P\colon 2^U \to \{0,1\}$ (so a hyperproperty on U is just a property on 2^U).

Extending our consideration, in addition to such properties and hyperproperties defined totally, we shall also admit properties and hyperproperties defined partially, by which we mean logical functions of the form $p\colon A \to \{0,1\}$, where $A \subseteq U$, and, respectively, of the form $P\colon \mathcal{A} \to \{0,1\}$, where $\mathcal{A} \subseteq 2^U$ (here A and $\mathcal{A}$ are domains on which p and P are defined). For the sake of brevity, speaking loosely, we say "property on A" and "hyperproperty on $\mathcal{A}$".

Further we shall use the conventional operation symbols $\wedge$ for conjunction, $\vee$ for disjunction, and $^-$ for negation of logical values (functions). We shall use also the symbol $\Rightarrow$ for implication and $\Leftrightarrow$ for equivalence, treating them as the symbols of relations, not operations, which represent the respective verbal forms "if...then" and "if and only if". Also, for simplicity we shall often replace the symbol of equivalence $\Leftrightarrow$ by the sign of equality $=$ (or $\doteqdot$ for identity by definition).

Let us introduce now the formal standard pattern of "internal construction simplicity" for a hyperproperty.

Definition 1.1. Let P be a hyperproperty given on $\mathcal{A}(\mathcal{A} \subseteq 2^U)$. We shall call P a *separable hyperproperty* if P is representable in the form

$$P(X) = \bigwedge_{x\in X} p(x) \quad \text{for all} \quad X \in \mathcal{A}, \tag{1.1}$$

where $p(x)$ is a property on U or at least on $A = \cup_{X\in\mathcal{A}} X$. The expression (1.1) we shall call *a separable representation* for P, and the property p a *generating property.*

Remark 1.1. In Definition 1.1 the aggregation rule for an element property uses the logical copula "and". Such a rule expresses an informal principle mentioned in the Introduction: "a good set consists (only) of good elements" ("parts"). Also possible are some other, not so stringent forms of logical aggregation rules. Instead of requiring a generating property p to be fulfilled for *all* elements, it might be required, e.g., that this property be satisfied for "many" elements (for a "majority" in some sense), or even for *some* elements. The last is just the aggregation rule which is logically dual to the rule (1.1) and is fulfilled automatically for the complementary hyperproperty $R = \overline{P}$ and property $r = \overline{p}$:

$$R(X) = \bigvee_{x \in X} r(x) \quad \text{for all} \quad X \in \mathcal{A}. \tag{1.2}$$

If we agree that the hyperproperty P describes "good" sets, then the complementary hyperproperty $R = \overline{P}$ describes "bad" sets, and the equation (1.2) is interpreted as "a bad set is one which contains (at least one) bad element". Recall that we have accepted the expression (1.1) as the standard pattern for construction simplicity of a "positive" hyperproperty. Hence we must accept, for the same reasons, the expression (1.2) as the logically dual standard pattern for construction of a "negative" hyperproperty (complementary to the positive one). The representability of a hyperproperty in the form (1.2) will be called *separability in the negative version*. In Sections 1 and 2 we shall confine ourselves to the "positive" version of considering hyperproperties where, by definition, the standard pattern of simplicity is their "positive" separable representability in the form (1.1). The corresponding "negative" version will be discussed in Section 3.

Remark 1.2 (Technical). For the sake of completeness in definition let us make necessary notes concerning the possible case $X = \varnothing$ in the domain $\mathcal{A}$ on which a hyperproperty P is given. For the separable representation (1.1) [and (1.2) also], in accordance with conventions about conjunction [disjunction] we should let $P(\varnothing) = 1$ always in (1.1) [and $R(\varnothing) = 0$ always in (1.2)]. Henceforth in Sections 1 and 2, where hyperproperties are analyzed in the positive version, i.e. are oriented to meet the standard (1.1), we assume $P(\varnothing) = 1$. On the contrary, in Section 3 (negative version) we shall assume $P(\varnothing) = 0$. [In a broader consideration these values might be taken as arbitrary, with slight modifications in the treatment of (1.1) and (1.2).]

Thus, we have accepted here the separable representation (1.1) as the standard pattern for internal construction of a "simple" hyperproperty. The main problem to be considered in this section is how to reveal, by observing the external behavior of a hyperproperty, whether it possesses (or can possess) a standard construction (1.1). Speaking formally, we shall be interested in criteria for separability of a hyperproperty P which would be expressed in formal terms of the logical function $P(\cdot)$ on $\mathcal{A}$.

Let us start with consideration of the extremely simple situation when the above problem is essentially trivial. It is the situation when we may "directly observe" the values of the given predicate P on single elements, or more strictly, on singletons of the universe U.

Definition 1.2. A family of sets $\mathcal{A} \subseteq 2^U$ is said to be *a 1-complete* if it contains all one-element subsets (singletons) of the universe U (i.e. $\{\{x\}\}_{x\in U} \subseteq \mathcal{A}$).

Definition 1.3. Let a hyperproperty P be given on a 1-complete family of sets $\mathcal{A}$. We shall call P *autoseparable* if

$$P(X) = \bigwedge_{x\in X} P(\{x\}) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A}. \tag{1.3}$$

The autoseparability condition (1.3) formally is a specific "functional equation" for the logical function P; in this sense it characterizes the external behavior of P. Meanwhile the autoseparability equation (1.3) is immediately reduced to the special case of the separable representation (1.1), virtually by the simple redesignation

$$p(x) = P(\{x\}), \quad x \in U. \tag{1.4}$$

The separable representation (1.1) with the generating property of the form (1.4)—that is, (1.3)—we shall call the *autoseparable representation* of the hyperproperty P. It is easy to see that if a hyperproperty P is given on a 1-complete family $\mathcal{A}$ and is separable, then it is necessarily autoseparable. Moreover, the generating property p in the separable representation for P is determined uniquely, being of the form (1.4) [to be convinced of that, it is sufficient to set $X = \{x\}$ in (1.1)]. Characterizing the situation a little roughly (neglecting the logical and mathematical distinction between an element and its one-element set), we might say in the case of a 1-complete family $\mathcal{A}$ that for any separable hyperproperty its generating property is the hyperproperty itself. Speaking formally, we have

Trivial Criterion of Separability. Given a 1-complete admissible set family $\mathcal{A}$, any hyperproperty P on $\mathcal{A}$ is separable if and only if P is autoseparable.

The triviality of the case of 1-completeness of the family $\mathcal{A}$ comes out in the fact that we can simply "have a look" at the sought-for generating property in the supposed "internal construction" of the hyperproperty P. In a general case when $\mathcal{A}$ is not 1-complete, i.e. when P values are not determined on all singletons of the universe, such an approach is not feasible. In this general case a generating property p for a desired separable representation of P must be sought for indirectly, judging by the behavior of P on multielement sets $X \in \mathcal{A}$. This problem is not so simple, in particular because its solution, if any, may be not unique, which is seen from a simple example:

Example 1.1. Let a universe U be arbitrary, let A be a subset of U, and let the family $\mathcal{A}$ contain a single member, the set A. Let $P(A) = 0$. Then the representation (1.1) is true for every p different from the property with value identical to 1 on A.

Nevertheless even the trivial case of 1-complete $\mathcal{A}$ requires certain cautions. Consider another example (like some of those following below, we take it from among the simplest mathematical constructions).

Example 1.2. The definition of an open set (in a vectorial space), given in textbooks on calculus, says: a set X is called open if every point of it is inner. Introduce the predicates

$$\begin{aligned} P(X) &\doteqdot [X \text{ is an open set}], \\ p(x) &\doteqdot [x \text{ is an inner point}]. \end{aligned}$$

Then for these predicates, due to the above definition of an open set, the separability equation (1.1) will be satisfied. But let us examine the fulfilling of the trivial separability criterion for P, i.e. the autoseparability requirement. According to this the requirement, the equation $p(x) = P(\{x\})$ must be satisfied. In our case it means that for each inner point x the corresponding singleton $\{x\}$ must be an open set, which is absurd.

The matter is that in the definition of set openness we speak about interior points *of this set*, i.e. points of the interior of this set. The property of being inner (= interior), strictly speaking, is not an absolute property of the point x itself, but rather it depends on the set X whose element is the point x in the given consideration. Hence, here the property p of being an inner point is a *conditional* property of a point x relative to a given set X, and its correct formalization must be given in the form of a two-place predicate $p(x; X)$. Call such a predicate a *pseudoproperty* of a point x in a set X. Starting from such a weakening of the notion of property, consider a corresponding more general form of representation of hyperproperties.

Definition 1.4. Let a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ be given. An equation of the form

$$P(X) = \bigwedge_{x \in X} p(x; X) \quad \text{for all} \quad X \in \mathcal{A} \tag{1.5}$$

we shall call a *pseudoseparable representation* of the hyperproperty P, and the predicate $p(x; X)$ a *generating pseudoproperty* for P.

In particular, in the above definition of an open set we obtained essentially from the very beginning a pseudoseparable representation for the hyperproperty $P(X) \doteqdot [X$ is an open set$]$ by the generating pseudoproperty $p(x;X) \doteqdot [x$ is an inner point in $X] \Leftrightarrow [x$ is an interior point, i.e. point of the interior of $X]$.

We intentionally did not give the definition of a pseudoseparable hyperproperty (on an analogy with a separable one) as a hyperproperty admitting a pseudoseparable representation. In fact, such a definition would be useless (and even meaningless) because, as it is easy to see, every hyperproperty admits a pseudoseparable representation: it suffices trivially to set $p(x;X) = P(X)$ for all $x \in X \in \mathcal{A}$.

For this reason the problem of reducing a hyperproperty $P(X)$ of a set X to a property (possibly conditional) of its elements in the form $p(x;X)$ will be nontrivial and interesting only in the case when the form of the predicate $p(x;X)$, and more specifically, the mode of its dependence of the "context" X, obeys some stringent constraints. Below we shall see which constraints on p are related with natural forms of external behavior of the corresponding hyperpredicate P.

We shall begin the following Section 1.2 by investigating which behavior of a hyperproperty P leads to the standard form (1.1) of its inner structure (i.e. to the existence of the "purely" separable representation for P). So we shall obtain general criteria for separability of P. After that, in Section 2, special cases of "good" pseudoseparability will be considered.

1.2. Standards of behavior and structure for simple hyperproperties: aggregability and separability. Let us go back to the idea of a simple "external behavior" of a hyperproperty, which means a kind of regular relationship between the property of a whole and that of its parts. Now we formally treat a whole as a set and parts as its subsets (not necessarily singletons, which were considered in the former subsection as a special case).

Definition 1.5. Let $\mathcal{A}$ be a family of sets, $\mathcal{A} \subseteq 2^U$. Let $X \in \mathcal{A}$. We shall refer to a family of sets, $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu \in N}$, as a *decomposition of the set* X *in* $\mathcal{A}$, if $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ and

$$\bigcup_{\nu \in N} X_\nu = X. \tag{1.6}$$

In this definition the index set N may be arbitrary, and the sets X_ν may be in any relationship with each other (e.g., intersect of even include one another; specifically, X_ν may coincide with X itself).

Definition 1.6. Call a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ *aggregable* if for every $X \in \mathcal{A}$ and for its every decomposition $\{X_\nu\}_{\nu \in N}$ in $\mathcal{A}$,

$$P(X) = \bigwedge_{\nu \in N} P(X_\nu). \tag{1.7}$$

Remark 1.3. Autoseparability (1.3) is a special case of aggregability, which obviously results from the decomposition of a set X into its singletons, i.e. with $\mathcal{X} = \{\{x\}\}_{x \in X}$.

The aggregability requirement implies the very high degree of relationship between a property of a whole and that of its parts [the equivalence of two propositional forms in (1.7)]. We represent this requirement in the form of a pair consisting of two weaker "semiaggregability" requirements, or formally, unilateral implications in (1.7).

Definition 1.7. Call a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ *semiaggregable upwards* or *semiaggregable downwards*, if for every set $X \in \mathcal{A}$ and every decomposition $\{X_\nu\}_{\nu \in N}$ of it,

$$\bigwedge_{\nu \in N} P(X_\nu) \Rightarrow P(X) \tag{1.8}$$

or, respectively,

$$P(X) \Rightarrow \bigwedge_{\nu \in N} P(X_\nu). \tag{1.9}$$

[Directly from this definition one can see that the pair of the semiaggregability conditions (1.8), (1.9) taken together is equivalent to the aggregability condition (1.7).]

Informally, semiaggregability upwards means that a common property of the parts implies the corresponding property of the whole, and semiaggregability downwards means that, conversely, a property of the whole induces the same property of the parts.

Definition 1.8. Call a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ *hereditary* if for any $X', X'' \in \mathcal{A}$

$$X'' \subseteq X' \quad \text{implies} \quad P(X') \Rightarrow P(X''). \tag{1.10}$$

Lemma 1.1. A hyperproperty P on $\mathcal{A}$ is semiaggregable downwards if and only if P is hereditary.

Proof. Let P be hereditary. Then under the preconditions of Definition 1.7, $P(X) \Rightarrow P(X_\nu)$, $\nu \in N$; hence (1.9) holds.

Conversely, let P be semiaggregable downwards. Let $X', X'' \in \mathcal{A}$ and $X'' \subseteq X'$. In (1.9) set $X = X'$ and $\mathcal{X} = \{X', X''\}$, the two-member decomposition of X. Then due to (1.9) we have $P(X') \Rightarrow P(X') \wedge P(X'')$, i.e. $P(X') \Rightarrow P(X'')$, which is just the hereditarity of P.

From Lemma 1.1 and the definitions of (semi)aggregability immediately follows

Lemma 1.2. A hyperproperty P on $\mathcal{A}$ is aggregable if and only if it is semiaggregable upwards and hereditary.

(Such "decomposition" of the aggregability condition into the two constituents will be useful in what follows.)

The aggregability condition describes the "external" ("macroscopic") relationship between a hyperproperty of the whole and that of its parts. Let us now compare it with the separability condition, which describes the "internal" ("microscopic") construction of a hyperproperty of the whole. The latter condition expresses a property of a set via a property of elements.

Lemma 1.3. If a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ is separable, then it is aggregable.

Proof. It is enough to substitute the separable representation of P (1.1) into the aggregability condition (1.7). Then the right-hand side of (1.7) yields

$$\bigwedge_{\nu\in N} P(X_\nu) = \bigwedge_{\nu\in N} \bigwedge_{x\in X_\nu} p(x) = \bigwedge_{x\in X} p(x)$$

(due to $\bigcup_{\nu\in N} X_\nu = X$), which, moreover, by virtue of (1.1) is equivalent to the left-hand side of (1.7).

For further analysis of aggregability of hyperproperties it is important to foresee the possibility of "aggregating" for object sets themselves, viz., to presume that any union of admissible sets is admissible too.

Definition 1.9. A family of sets $\mathcal{A}$ is $\cup$-closed if for every subfamily $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ one has $\bigcup_{X\in\mathcal{X}} X \in \mathcal{A}$.

Theorem 1.1. Let a family $\mathcal{A} \subseteq 2^U$ be $\cup$-closed. Then for a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ to be separable, it is necessary and sufficient that P be aggregable on $\mathcal{A}$. Moreover, if P is separable, then as its separable representation (generally not unique) it is always possible to take the following *extendedly autoseparable* representation:

$$P(X) = \bigwedge_{x\in X} \breve{p}(x) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A}, \tag{1.11}$$

where

$$\breve{p}(x) \doteqdot \bigvee_{S\in\mathcal{A}:x\in S} P(S).$$

We shall call $\breve{p}(x)$ in (1.11) *the revealed property* of an element x.

Proof. Necessity is asserted by Lemma 1.3; let us prove sufficiency. Let the aggregability condition (1.7) be fulfilled. Show that the aggregable hyperproperty P on $\mathcal{A}$ is equivalent to the predicate

$$\breve{P}(X) \doteqdot \bigwedge_{x\in X} \bigvee_{S\in\mathcal{A}:x\in S} P(S), \quad X \in \mathcal{A}. \tag{1.12}$$

Indeed, take an arbitrary $X \in \mathcal{A}$. First let $P(X) = 1$. Then, all the more, $\breve{P}(X) = 1$, because $P(X)$ is incorporated as a term $P(S)$, with $S = X$, into every factor $\breve{p}(x) = \bigvee_{S\in\mathcal{A}:x\in S} P(S)$ in (1.12), whence $\breve{p}(x) = 1$, and consequently $\breve{P}(X) = \bigwedge_{x\in X} \breve{p}(x) = 1$. Hence $P(X) \Rightarrow \breve{P}(X)$. (Note that this conclusion is true for every P, not necessarily aggregable.)

Let now, conversely, $\breve{P}(X) = 1$, and hence $\breve{p}(x) = 1$ for every $x \in X$. Then for every $x \in X$ there exists $S \in \mathcal{A}$, denoted by S_x, for which $S_x \ni x$ and $P(S_x) = 1$. Let $T = \bigcup_{x\in X} S_x$. Then $T \supseteq X$ by construction of the sets S_x, and $T \in \mathcal{A}$ in virtue of $\cup$-closedness of $\mathcal{A}$. The family $\{S_x\}_{x\in X}$ is a decomposition of the set T in $\mathcal{A}$, such that $P(S_x) = 1$ for all its members S_x. Hence the aggregability condition yields $P(T) = 1$. In virtue of Lemma 1.2, P is hereditary; therefore $X \subseteq T$ yields $P(X) = 1$. Consequently, for an aggregable P the implication $\breve{P}(X) \Rightarrow P(X)$ must hold.

Thus, we have shown that for every aggregable hyperproperty P on $\mathcal{A}$ the identity $P(X) = \breve{P}(X)$ for all $X \in \mathcal{A}$ is fulfilled, where $\breve{P}(X)$ is specified by the expression (1.12). The above shows that for P the separable representation (1.11) is valid, which is called herein extendedly autoseparable. Finally, it remains to note that if P is separable, i.e. possesses at least one separable representation, then due to Lemma 1.3 again, P is aggregable, and hence, in virtue of what has been proven, P has the extendedly autoseparable representation (1.11). This completes the proof.

Remark 1.4. If $\mathcal{A}$ is 1-complete and if there exists a separable representation for P, then, as has been mentioned above, it is unique and coincides with the autoseparable representation (1.3). In this case it is easy to verify directly that the extendedly autoseparable representation also coincides with it: $\breve{p}(x) = P(\{x\})$. If the family $\mathcal{A}$ is arbitrary, then a generating property p in a separable representation for P may be not unique, and the revealed property $\breve{p}$ in (1.11) may differ from p initially given in (1.1). Nevertheless, Theorem 1.1 affirms that at least when $\mathcal{A}$ is $\cup$-closed, the aggregability of a hyperproperty P guarantees not just separability of P, but moreover the validity of the extendedly autoseparable representation for P. We shall see below (in Theorem 1.4) that the latter admits a universal generalization. Namely, given any arbitrary family $\mathcal{A}$, if for a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ there exists a separable representation at all (criteria for which will be specified later), then for P the extended autoseparable representation is surely valid [i.e., we may set $p \doteqdot \breve{p}$ in (1.1)].

Remark 1.5. In the formulation of Theorem 1.1 the $\cup$-closedness assumption for $\mathcal{A}$ is essential: without this requirement a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ may be aggregable but may have no separable representation. We illustrate this by the following example.

Example 1.3. Let $U = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{A} = \{X_1, X_2, X_3\}$, where $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{a, b, c\}$, $X_3 = \{b, c, d\}$. Let $P(X_1) = P(X_3) = 1$ but $P(X_2) = 0$.

Obviously P on $\mathcal{A}$ is aggregable. Indeed, the unique case to be checked is the decomposition $\mathcal{X} = \{X_1, X_2\}$ of the set X_2, for which we have

$$P(X_2) = 0 = \bigwedge_{\nu=1,2} P(X_\nu).$$

However, P is not separable. Indeed, if P were separable, $P(X_1) = P(X_3) = = 1$ would imply $p(x) = 1$ for all $x \in U$, contrary to $P(X_2) = 0$.

Remark 1.6. In the case when the universe U is finite, some definitions and statements can be replaced by equivalent but simpler ones. This may be accomplished by using no more than two-member decompositions $\mathcal{X}$ for sets X in $\mathcal{A}$, i.e. having the form $\mathcal{X} = \{X_1, X_2\}$ (where $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$, $X_1 \bigcup X_2 = X$). Let U be finite and $\mathcal{A}$ be $\cup$-closed. Then it is easy to verify by induction that in the definitions of (semi)aggregability we may confine ourselves to two-member decompositions, and such seemingly more slack definitions turn out to be equivalent to the initial ones, with Lemmata 1.1-1.3 and Theorem 1.1 still valid. In the case of arbitrary infinite U such a simplification of definitions would not permit preserving all these results.

1.3. Universal criteria for separability of hyperproperties. For constructing a universal (i.e. relevant for an arbitrary family of sets $\mathcal{A}$) separability criterion of a hyperproperty P, we use Theorem 1.1 for $\cup$-closed $\mathcal{A}$ as a basis. Let us exploit a simple idea of extensibility of a hyperproperty P from a given arbitrary $\mathcal{A}$ onto a wider family of sets which will be $\cup$-closed.

Definition 1.10. Let $\mathcal{A} \subseteq 2^U$ be a family of sets. We define $\cup$-*closure* of the family $\mathcal{A}$ as the following family:

$$\breve{\mathcal{A}} = \left\{ X \subseteq U \,\middle|\, X = \bigcup_{\nu \in N} X_\nu \text{ for some } \{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{A} \right\}.$$

It is easy to see that $\breve{\mathcal{A}}$ is the least (by inclusion) $\cup$-closed family containing $\mathcal{A}$.

Definition 1.11. Say that a hyperproperty P given on $\mathcal{A}$ is *aggregably extensible* if there exists a hyperproperty defined on $\breve{\mathcal{A}}$ (the $\cup$-closure of $\mathcal{A}$) which coincides with P on $\mathcal{A}$ and is aggregable on $\breve{\mathcal{A}}$.

It is clear that for the aggregable extensibility of a hyperproperty P from $\mathcal{A}$ onto $\breve{\mathcal{A}}$ it is necessary that P be at least aggregable on $\mathcal{A}$. However, it is not sufficient, as will be seen in the light of the following lemma.

Lemma 1.4. For a hyperproperty P given on $\mathcal{A}$ to be separable, it is necessary and sufficient that P be aggregably extensible.

Proof. Let P be aggregably extensible. Then due to Theorem 1.1 the aggregable extension of P onto $\breve{\mathcal{A}}$ is separable, and all the more, P itself is separable on $\mathcal{A}$ with the same separable representation. Conversely, let P

have a separable representation on $\mathcal{A}$. Considering this representation for each $X \in \breve{\mathcal{A}}$, we shall obtain the separable extension of P onto $\breve{\mathcal{A}}$, which is aggregable on $\breve{\mathcal{A}}$ due to Theorem 1.1.

Remark 1.7. Lemma 1.4 admits a slight strengthening: it is easy to verify that if P on $\mathcal{A}$ is aggregably extensible (onto $\breve{\mathcal{A}}$), then, moreover, for P there exists an aggregable extension onto the whole Boolean 2^U (it is enough, following the proof of Lemma 1.4, to consider a separable representation of P for all $X \subseteq U$). On the other hand, Example 1.3 above shows that a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ may be aggregable but not aggregably extensible (the latter follows from its nonseparability due to Lemma 1.4).

Lemma 1.4 gives an implicit criterion of separability, leaving open the question of checking the fact of aggregable extensibility. To make the separability criterion effective, we need to express this fact in terms of directly verified features (attributes) of the given hyperproperty.

Definition 1.12. Call a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ *recombinant* it for any two subfamilies $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu \in N}$, $\mathcal{Y} = \{Y_\mu\}_{\mu \in M}$ of $\mathcal{A}$ such that $\bigcup \mathcal{X} = \bigcup \mathcal{Y}$, i.e.

$$\bigcup_{\nu \in N} X_\nu = \bigcup_{\mu \in M} Y_\mu, \tag{1.13}$$

the following takes place:

$$\bigwedge_{\nu \in N} P(X_\nu) = \bigwedge_{\mu \in M} P(Y_\mu). \tag{1.14}$$

Note that recombinantness so defined directly implies aggregability: it is enough to construct the family $\mathcal{Y}$ consisting of the single set $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$. If the family $\mathcal{A}$ is $\cup$-closed, then evidently the reverse is true: aggregability implies recombinantness. But in a general case that is not true: recombinantness needs not only aggregability, but aggregable extensibility of P. This will be proved below (see Lemma 1.5).

In intuitive terms, Definition 1.12 as a matter of fact introduces a new type of operation on “parts”, i.e. sets, in addition to the former operations of aggregating (joining parts into the whole) and disaggregating (decomposing the whole into parts). The new operation of “recombining” sets is, so to say, rearrangement of parts (without forming the whole explicitly). The recombinantness condition requires the common hyperproperty P to be preserved in such a rearrangement.

Lemma 1.5. For a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ to be recombinant, it is necessary and sufficient that P be aggregably extensible.

Proof. Let P on $\mathcal{A}$ be recombinant; show that it is aggregably extensible. To this end we construct an extension of P from $\mathcal{A}$ onto $\breve{\mathcal{A}}$ which will be aggregable. Let $X \in \breve{\mathcal{A}}$. Then, by definition of the $\cup$-closure $\breve{\mathcal{A}}$, for the set X there exists some decomposition in $\mathcal{A}$:

$$X = \bigcup_{\nu \in N} X_\nu, \quad \text{where } \mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{A}. \tag{1.15}$$

In particular, in the case $X \in \mathcal{A}$ we will take $\{X\}$ itself as its own decomposition. Let us (if necessary) complete specifying the hyperproperty P on X in the following way:

$$P(X) = \bigwedge_{\nu \in N} P(X_\nu) \tag{1.16}$$

[if $X \in \mathcal{A}$, then (1.16) is valid as the tautology $P(X) = P(X)$]. The uniqueness of the value defined in (1.16), i.e. its independence of the selected family $\mathcal{X}$ of sets X_ν with the given sum X, is just the requirement of recombinantness.

Show that P defined thereby (extended) on $\breve{\mathcal{A}}$ will remain aggregable. For this purpose we need to examine that if $\mathcal{Z} = \{Z_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \breve{\mathcal{A}}$ is a decomposition of a given $X \in \breve{\mathcal{A}}$ into sets from $\breve{\mathcal{A}}$, then

$$P(X) = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} P(Z_\lambda), \tag{1.17}$$

where $P(X)$ has been specified earlier [according to (1.16)].

Take some set Z_λ from $\mathcal{Z}$. Since $Z_\lambda \in \breve{\mathcal{A}}$, it has a decomposition in $\mathcal{A}$:

$$Z_\lambda = \bigcup_{\nu_\lambda \in N_\lambda} X_{\nu_\lambda}, \quad \{X_{\nu_\lambda}\}_{\nu_\lambda \in N_\lambda} \subseteq \mathcal{A}, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{1.18}$$

Due to the recombinantness and hence aggregability of P on $\mathcal{A}$, we have in the case $Z_\lambda \in \mathcal{A}$ [as in the case $Z_\lambda \notin \mathcal{A}$, due to our extension rule (1.16) for P]:

$$P(Z_\lambda) = \bigwedge_{\nu_\lambda \in N_\lambda} P(X_{\nu_\lambda}), \quad \lambda \in \Lambda,$$

whence

$$\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} P(Z_\lambda) = \bigwedge_{\nu_\lambda \in N_\lambda, \lambda \in \Lambda} P(X_{\nu_\lambda}). \tag{1.19}$$

The family $\{X_{\nu_\lambda}\}_{\nu_\lambda \in N_\lambda, \lambda \in \Lambda}$ is a decomposition of the set X into sets from $\mathcal{A}$, which generally differs from the family $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu \in N}$ in (1.15). But in virtue of the recombinantness of P, the values of the right-hand sides of (1.19) and (1.16) must coincide, and hence the left-hand sides coincide too. This yields (1.17), and consequently, P is aggregably extensible.

Conversely, let P be aggregably extensible. Consider two set families $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ from Definition 1.12. Their coincident sum (1.13) belongs to $\breve{\mathcal{A}}$, but $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ are two different decompositions of it. Hence, an aggregable extension of the initial hyperproperty P onto $\breve{\mathcal{A}}$ must satisfy the equation having the form (1.14). But in reality all the members X_ν, Y_μ of the decompositions $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ belong to $\mathcal{A}$, and hence, the equation (1.14) is fulfilled for the initial P itself. Consequently, P is recombinant. The lemma is proved.

Combining Lemmata 1.4 and 1.5 immediately yields a new criterion for separability:

Theorem 1.2. Let P be a hyperproperty specified on an arbitrary family $\mathcal{A}$. For P to be separable it is necessary and sufficient for it to be recombinant.

The separability criterion may acquire a more effective form if we replace the recombinantness requirement by an equivalent but simpler one.

Definition 1.13. Call a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ *coherent* if for every covering of a set X in $\mathcal{A}$, i.e. for every family $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu\in N} \subseteq \mathcal{A}$ such that

$$X \subseteq \bigcup_{\nu\in N} X_\nu, \tag{1.20}$$

the following holds:

$$\bigwedge_{\nu\in N} P(X_\nu) \Rightarrow P(X). \tag{1.21}$$

Lemma 1.6. The coherence and recombinantness conditions for a hyperproperty P on arbitrary family $\mathcal{A}$ are equivalent.

Proof. Let P be coherent. Let $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu\in N}$ and $\mathcal{Y} = \{Y_\mu\}_{\mu\in M}$ be two subfamilies of $\mathcal{A}$ appearing in Definition 1.12. Then, setting $X = Y_\mu$ in Definition 1.13, we obtain

$$\bigwedge_{\nu\in N} P(X_\nu) \Rightarrow P(Y_\mu)$$

for every $\mu \in M$, and hence,

$$\bigwedge_{\nu\in N} P(X_\nu) \Rightarrow \bigwedge_{\mu\in M} P(Y_\mu). \tag{1.22}$$

The families $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ herein are in equal positions. Consequently, in (1.22) the reverse implication must also be valid, that is, the equivalence (1.14) is true. So P is recombinant.

Conversely, let P be recombinant. Take an arbitrary X and its covering $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu\in N}$ from Definition 1.13, and construct the family $\mathcal{Y}$ in the following form:

$$\mathcal{Y} = \{X_\nu\}_{\nu \in N} \bigcup \{X\}.$$

Then (1.13) is obviously true, and due to (1.14)

$$\bigwedge_{\nu \in N} P(X_\nu) = \bigwedge_{\nu \in N} P(X_\nu) \wedge P(X).$$

This is equivalent to the implication (1.21). So P is coherent. The lemma is proved.

Owing to Lemma 1.6 we can transform Theorem 1.2 into the following form:

Theorem 1.3. For a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ to be separable it is necessary and sufficient that P be coherent.

Thus, coherence of a hyperproperty P is just that simple requirement for its external behavior which, in the general case of an arbitrary family $\mathcal{A}$, is equivalent to separability for its internal construction.

Let us now compare the notion of coherence with the originally introduced notion of aggregability for hyperproperties. Lemmata 1.5 and 1.6 imply that coherence, recombinantness, and aggregable extensibility of a hyperproperty P on an arbitrary family $\mathcal{A}$ are mutually equivalent. Consequently, coherence always implies aggregability of a hyperproperty [1]. Moreover, coherence ($\Leftrightarrow$ recombinantness $\Leftrightarrow$ aggregable extensibility) is, in general, stronger than aggregability. This is demonstrated by Example 1.3, where aggregability is valid but (as has been already shown) separability fails, and hence (due to Theorem 1.3), coherence fails too.

The separability criteria in Theorems 1.2 and 1.3 allow establishing only the existence of a separable representation for a given hyperproperty but not pointing out such a representation constructively. We shall see now that such construction is always possible, exactly as in Theorem 1.1; it results in the extended autoseparable representation.

Definition 1.14. We shall call a hyperproperty P on a family $\mathcal{A}$ *extendedly autoseparable* if P satisfies the functional equation

$$P(X) = \bigwedge_{x \in X} \bigvee_{S \in \mathcal{A}: x \in S} P(S) \quad \text{for all} \quad X \in \mathcal{A}. \tag{1.23}$$

It is obvious that extended autoseparability of a hyperproperty P (in the sense of Definition 1.14) is equivalent to the existence of the extended autoseparable representation for P on the basis of the revealed property $\check{p}$ (1.11) (it is a matter of redesignation only). So the notion of extended

[1] This can also be easily verified from the definitions.

autoseparability virtually is transferred from the specific representation of the internal construction (1.11) to the external behavior (1.23) of the given hyperproperty P. The meaning of this transfer is that extended autoseparability of P becomes a requirement for P directly verified through the equation (1.23). The requirement turns out to be (one more) universal criterion for separability of P. To justify the latter, establish an auxiliary lemma.

Lemma 1.7. A hyperproperty P on an arbitrary family $\mathcal{A}$ is coherent if and only if it is extendedly autoseparable.

Proof. If P is extendedly autoseparable, then, all the more, it is separable [with the special separable representation (1.11)], and hence it is coherent due to Theorem 1.3. Conversely, let P be coherent. We shall prove that the extended autoseparability condition (1.23) is fulfilled. To this end we shall proceed as in proving Theorem 1.1 and prove that $P = \breve{P}$, where $\breve{P}$ has been specified by (1.12). In the first part of the proof of Theorem 1.1 it has been shown that always, independently of P, one has $P \Rightarrow \breve{P}$. It remains to justify the reverse implication $\breve{P} \Rightarrow P$. Now we have to deduce it under an arbitrary $\mathcal{A}$ (unlike Theorem 1.1) from the condition of coherence of P (which is stronger than the condition of aggregability used in Theorem 1.1). But such an inference may be achieved by an almost exact repetition of the second part in the proof of Theorem 1.1, even with a slight simplification. (The simplification is due to coherence being a stronger condition than aggregability; that means that we need not introduce the set T explicitly or appeal subsequently to hereditarity of P in the transition from T to X.)

Lemma 1.7 and Theorem 1.3 immediately imply a constructive separability criterion:

Theorem 1.4 For a hyperproperty P on an arbitrary family $\mathcal{A}$ to be separable, it is necessary and sufficient for P to be extendedly autoseparable (1.23), or which is the same, to have an extended autoseparable representation (1.11).

This separability criterion is a nontrivial analogue (applicable to an arbitrary $\mathcal{A}$) of the trivial criterion given in Section 1.1 for case of 1-complete $\mathcal{A}$.

Remark 1.8. As a historical note we point out that a particular case of the problem of similar reduction of a complex predicate (dependent on sets) to a conjunction of simpler predicates (dependent on element pairs) has been considered in choice theory. Namely, it was a problem of constructing criteria of "rationality" for a choice, in particular, in terms of "revealed preferences" [63, 212]. In our abstract exposition we introduce a system of conditions of (semi)aggregability and coherence which virtually isolates in a "pure form" those logical structure which are implicitly present in the mentioned works and their developments in [84, 87]. Another type of underlying logical algebraic structure in the choice-theory framework may be found in [203].

To conclude this section we will attempt to clarify the distinction between separable and nonseparable hyperproperties using the following example.

Example 1.4. Let a universe U and a family $\mathcal{A}$ of its admissible sets be arbitrary. Let a numerical function $f\colon U \to R$ on U be given. Take a set $X \in \mathcal{A}$.

We shall say that the function f:

(1) is positive on X if $f(x) > 0$ for all $x \in X$;

(2) is strictly positive on X if $\inf_{x \in X} f(x) > 0$.

Since the function f is assumed to be fixed, but the admissible set X is, on the contrary, variable, the predicates of positivity and strict positivity determine the following hyperproperties (of X on $\mathcal{A}$):

$$P^1_f(X) \doteqdot [f \text{ if positive on } X],$$
$$P^2_f(X) \doteqdot [f \text{ if strictly positive on } X].$$

Let us pose the question whether these hyperproperties are separable, i.e. whether it is possible to express (strict) positivity of f on X by the standard mode via some property of any element $x \in X$. For the first hyperproperty the answer is evident: the very definition of P^1_f already implies its separable representation

$$P^1_f(X) = \bigwedge_{x \in X} p_f(x), \quad \text{where } p_f(x) \doteqdot [f(x) > 0]. \tag{1.24}$$

Surely, P^1_f satisfies each criterion of separability.

Now turn to the hyperproperty P^2_f, which at first glance is only a slight modification of P^1_f. For example, it is obvious that if U is finite, these two hyperproperties are equivalent [1]. However, in the general case of an infinite U the hyperproperty P^2_f turns out to be of an essentially different kind than P^1_f. We might, as an exercise, indulge in checking the implementation of the universal separability criterion for P^2_f. But it suffices to verify the fulfillment of the necessary condition for separability, namely, the aggregability condition for P^2_f (1.7). Consider both halves of this condition in turn: semiaggregability upwards (1.8) and downwards (1.9). First, verify

[1] Likewise, even on arbitrary U, the nearest modifications of these hyperproperties, which result from replacing the sign $>$ by $\geqslant$ in their respective definitions, are equivalent to each other.

semiaggregability downwards or, equivalently, hereditarity of P_f^2 (1.10). Let $X'' \subseteq X'$ and $\inf_{x \in X'} f(x) > 0$. Then, all the more, $\inf_{x \in X''} f(x) > 0$, and hence P_f^2 is always hereditary.

Consider now semiaggregability upwards. It is not difficult to see that this condition on P_f^2 in the general case is violated. For example, let f be a numerical function $f(x) = 1/x$ of the numerical argument x on $U = \{x|x > 0\}$. Then, evidently, f is strictly positive on every finite interval of the positive numerical semiaxis, but is not strictly positive on their union, the whole of U (a property of parts is lost after their joining into a whole, which is a negative system effect, according to our terminology). So, in a general case (with infinite U) the hyperproperty P_f^2 (on sufficiently "rich" $\mathcal{A}$) is not aggregable, and hence not separable.

To elucidate the nature of nonseparability of P_f^2, consider this hyperproperty on singletons (assuming $\mathcal{A}$ to be 1-complete). Obviously,

$$P_f^2(\{x\}) = [f(x) > 0],$$

which coincides with the generating property p_f in the separable representation (1.24) for P_f^1. Therefore, if P_f^2 were separable, and hence, due to the trivial separability criterion, were autoseparable, then it ought to coincide with P_f^1, which is false. In other words the sole candidate for the generating property of elements in a desired separable representation for the hyperproperty P_f^2 is the property $p_f(x) = [f(x) > 0]$, which is certainly inappropriate.

This analysis shows that the hyperproperty P_f^2 represents an essentially "holistic" property of sets X. Such a property of a set X in general cannot be reduced to a property of each individual element, although another hyperproperty very close to it, viz., P_f^1, always admits such a reduction.

2. System effects for hyperproperties

2.1. Semiaggregability and semiseparability. As was already discussed in Section 1.2, the aggregability condition disintegrates into two constituents: (a) semiaggregability upwards and (b) semiaggregability downwards, or hereditarity. Violation of aggregability we treat as a system effect: the common property of parts is not the same as the property of the whole. Violation of either semiaggregability requirement may be treated as the corresponding one-sided (positive or negative) system effect. Namely, a violation of semiaggregability upwards (1.8) implies that the property of all parts is missing in the whole, that is, a negative system effect. Conversely, a violation of semiaggregability downwards (1.9), or equivalently, or hereditarity (1.10), implies that the property of the whole may disappear in its part, or, which is equivalent, the whole may acquire a new property missing in its part. This is the positive system effect.

For hyperproperties violating the aggregability condition, and hence at least one of the two semiaggregability conditions, there exist no separable representations. The question arises, what specific features of inner structure may be found in hyperproperties which, while not being aggregable, still preserve a "one-sided" semiaggregability (and consequently admit only "one-sided" system effects).

According to a general observation in Section 1, every hyperproperty P is representable in the pseudoseparable form

$$P(X) = \bigwedge_{x \in X} p(x; X) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A} \tag{2.1}$$

via a conditional property (pseudoproperty) $p(x; X)$ of the element x in the set X. The type of dependence of such a conditional property p upon the parameter X may be expected to reflect some system effects. In the limit case when such a dependence is actually lacking [i.e., $p(x; X)$ does not depend on X and is an absolute property, $p(x)$, of the element x], the situation is ultimately simple. In this case, in agreement with the results of the previous Section 1, the hyperproperty P is separable, and hence aggregable (and moreover, aggregably extensible $\Leftrightarrow$ recombinant $\Leftrightarrow$ coherent $\Leftrightarrow$ extendedly autoseparable). Thus the property of a whole is always a replication of the common property of its parts, without any system effects. On the other hand, a deviation from separability, i.e. the presence of an essentially unavoidable dependence of p upon X in (2.1), in view of the theorems in Section 1 must display a violation of aggregability (or, a little more broadly, a violation of aggregable extensibility and its equivalents) for the hyperproperty P. The question is, which patterns of dependence of p upon X correspond to certain deviations from aggregability of a hyperproperty, i.e. to definite system effects.

An answer to this question for two cases of semiaggregability, and respectively for two types of system effects, is given in Theorem 2.1 below. To formulate it we need a useful notion of monotonicity of a predicate depending on a set-valued variable. Let $\pi(X; \ldots)$ be a predicate (logical function) of a set X as a subject variable, and possibly of other variables.

Definition 2.1. We shall say that $\pi(X; \ldots)$ is *nonincreasing* in the set-valued variable X if

$$X'' \subseteq X' \ \text{ implies } \ \pi(X'; \ldots) \Rightarrow \pi(X''; \ldots) \tag{2.2}$$

for any fixed values of all other variables. In other words, π is nonincreasing in X if by expansion of the set X, the truth value of π may change only from 1 to 0 but not vice versa.

In the opposite case, when in (2.2) $\pi(X'';\ldots) \Rightarrow \pi(X';\ldots)$, we shall say that π is *nondecreasing in* X.

Note that according to the terminology accepted here, a hereditary hyperproperty P is just a nonincreasing predicate of the single set variable X.

Theorem 2.1. Let P be a hyperproperty on an arbitrary family $\mathcal{A}$. For P on $\mathcal{A}$ to be semiaggregable upwards or semiaggregable downwards (hereditary), it is necessary and sufficient that P have a pseudoseparable representation with a nondecreasing or, respectively, nonincreasing (in X) pseudoproperty $p(x;X)$.

Such "monotonic" pseudoseparable representations will be called *upper* or *lower semiseparable*, respectively.

Before proceeding to the proof of Theorem 2.1, we will preliminary prove some statements of independent interest.

Lemma 2.1. For a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ to be hereditary, it is necessary and sufficient that it satisfy the equation

$$P(X) = \bigwedge_{S\in\mathcal{A}:S\subseteq X} P(S) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A}. \tag{2.3}$$

Proof. The hereditarity condition for P is obviously equivalent to the condition

$$P(X) \Rightarrow \bigwedge_{S\in\mathcal{A}:S\subseteq X} P(S) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A}. \tag{2.4}$$

It remains to note that since one of the S values on the right-hand side of (2.4) is $S = X$, then in (2.4) the reverse implication is also true. Hence the equivalence (2.3) becomes a synonym for hereditarity.

Remark 2.1. The equation

$$P(X) = \bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{S\in\mathcal{A}:x\in S\subseteq X} P(S) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A} \tag{2.5}$$

in its turn is obviously equivalent to (2.3), and hence to the hereditarity condition.

For further study we need also the logically dual equivalent of Lemma 2.1:

Lemma 2.1′. For a hyperproperty R on $\mathcal{A}$ to be nondecreasing (call it also antihereditary), it is necessary and sufficient to satisfy the equation

$$R(X) = \bigvee_{S\in\mathcal{A}:S\subseteq X} R(S) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A}. \tag{2.6}$$

The equivalence of Lemma 2.1′ and 2.1 is seen from the fact that a hyperproperty $R(X)$ is nondecreasing iff $P(X) \doteqdot \overline{R}(X)$ is nonincreasing.

We have obtained an equation [in two forms, (2.3) and (2.5)] for a hyperproperty which is semiaggregable downwards. Now we will obtain an equation for semiaggregability upwards.

Lemma 2.2. For a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ to be semiaggregable upwards, it is necessary and sufficient to satisfy the equation

$$P(X) = \bigwedge_{x\in X} \bigvee_{S\in\mathcal{A}: x\in S\subseteq X} P(S) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A}. \tag{2.7}$$

Proof. Sufficiency: Let (2.7) be fulfilled. Then for every $X \in \mathcal{A}$ and for its every decomposition $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu\in N} \subseteq \mathcal{A}$ we have

$$\bigwedge_{\nu\in N} P(X_\nu) = \bigwedge_{\nu\in N} \bigwedge_{x\in X} \bigvee_{S\in\mathcal{A}: x\in S\subseteq X_\nu} P(S) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bigwedge_{x\in X} \bigvee_{S\in\mathcal{A}: x\in S\subseteq X} P(S) = P(X),$$

which implies semiaggregability upwards for P on $\mathcal{A}$.

Necessity: Let P on $\mathcal{A}$ be semiaggregable upwards. Denote the propositional form on the right-hand side of (2.7) by $Q(X)$. It needs to be shown that $P(X) = Q(X)$ for all $X \in \mathcal{A}$.

First note that $P(X)$ is one of the values (addends) $P(S)$ in every term (factor) $\bigvee P(S)$ in the expression $Q(X)$. Hence $P(X) \Rightarrow Q(X)$ always. Therefore, the equation (2.7) may be replaced by a seemingly slacker condition, viz., by the implication $Q(X) \Rightarrow P(X)$, i.e.

$$\bigwedge_{x\in X} \bigvee_{S\in\mathcal{A}: x\in S\subseteq X} P(S) \Rightarrow P(X) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A}. \tag{2.8}$$

Prove the validity of (2.8). Let the left-hand side in (2.8) be true $[Q(X) = 1]$. Then for every $x \in X$ one may choose $S = S_x$ in $\mathcal{A}$ such that $x \in S_x \subseteq X$ and $P(S_x) = 1$. The family $\{S_x\}_{x\in X}$ is a decomposition of the set X, and $\bigwedge_{x\in X} P(S_x) = 1$. Hence in virtue of semiaggregability upwards for P we obtain $P(X) = 1$, so (2.8) is fulfilled. This completes the proof of the lemma.

Note that the equation (2.7) for semiaggregability upwards is a "mirror analogue" of the equation (2.5) for semiaggregability downwards [1]. This pair of equations yields a system of equations for aggregable hyperproperties. Now we will write out solutions for each of these functional equations taken separately.

[1] In (2.5) the equality (equivalence) may be also replaced by the implication being a "mirror analogue" for (2.8).

Theorem 2.2. For a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ to be hereditary (that is, semiaggregable downwards), it is necessary and sufficient that P be representable in the form

$$P(X) = \bigwedge_{S\in\mathcal{B}:S\subseteq X} Q(S) \quad \text{for all } \ X \in \mathcal{A} \tag{2.9}$$

with some predicate $Q\colon \mathcal{B} \to \{0,1\}$ where $\mathcal{B} \subseteq 2^U$, or equivalently, representable in the form

$$P(X) = \bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{S\in\mathcal{B}:S\subseteq X} q(x;S) \quad \text{for all } \ X \in \mathcal{A} \tag{2.10}$$

with some predicate $q\colon U \times \mathcal{B} \to \{0,1\}$ $(\mathcal{B} \subseteq 2^U)$.

[The predicates Q and q and the set family $\mathcal{B}$ will be called generating. The representation (2.9) will be called hyperseparable.]

Proof. Necessity of representability (2.9) and (2.10) is implied by Lemma 2.1: it is enough to set in the equations (2.3) and (2.5), respectively, $Q(S) \doteqdot P(S)$ and

$$q(x;S) \doteqdot \begin{cases} P(S) & \text{for } \ x \in S, \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for each $S \in \mathcal{B}$, setting $\mathcal{B} \doteqdot \mathcal{A}$.

Sufficiency: That the predicates (2.9) and (2.10) in X are nonincreasing is evident from the fact that the totally of the terms in the respective conjunction can only extend when X is expanded.

Further, the logically dual equivalent of the representation (2.9) from Theorem 2.2 will be needed:

Theorem 2.2′. For a hyperproperty R on $\mathcal{A}$ to be antihereditary, it is necessary and sufficient that R be representable in the form

$$R(X) = \bigvee_{S\in\mathcal{B}:S\subseteq X} G(S) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A} \tag{2.11}$$

with some generating predicate $G\colon \mathcal{B} \to \{0,1\}$ $(\mathcal{B} \subseteq 2^U)$.

Theorem 2.2′ for nondecreasing hyperproperties follows from Lemma 2.1′ [or directly from Theorem 2.2 for nonincreasing hyperproperties; see equation (2.9) with $P = \overline{R}$, $Q = \overline{G}$].

Theorem 2.3. For the hyperproperty P on $\mathcal{A}$ to be semiaggregable upwards, it is necessary and sufficient that P be representable in the form

$$P(X) = \bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{S\in\mathcal{B}:S\subseteq X} q(x;S) \quad \text{for all } \ X \in \mathcal{A} \tag{2.12}$$

with some $q: U \times \mathcal{B} \to \{0,1\}$, $\mathcal{B} \subseteq 2^U$.

Proof. Necessity of the representation (2.12) follows from Lemma 2.2; for that it is quite enough to fix in (2.6) $\mathcal{B} \doteqdot \mathcal{A}$ and

$$q(x;S) \doteqdot \begin{cases} P(S) & \text{for } x \in S, \\ 0 & \text{for } x \notin S \end{cases}$$

for each $S \in \mathcal{A}$. Sufficiency is examined in the same way as in the proof of sufficiency in Lemma 2.2.

For proving Theorem 2.1, the main theorem of this section, it remains to provide one more lemma.

Lemma 2.3. For a predicate $p(x;X)$ on $U \times \mathcal{A}$ to be nonincreasing, or on the contrary, nondecreasing in X, it is necessary and sufficient that this predicate be representable in the form

$$p(x;X) = \bigwedge_{S \in \mathcal{B}: S \subseteq X} q(x;S) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A} \tag{2.13}$$

or, respectively, in the form

$$p(x;X) = \bigvee_{S \in \mathcal{B}: S \subseteq X} q(x;S) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A} \tag{2.14}$$

with some generating predicate $q: U \times \mathcal{B} \to \{0,1\}$ ($\mathcal{B} \subseteq 2^U$).

Proof of this lemma is obtained by applying Theorem 2.2 [Equation (2.9)] and Theorem 2.2′ directly to the predicates $P_x(X) \doteqdot p(x;X)$ and $R_x(X) \doteqdot p(x;X)$, respectively, for each fixed $x \in U$. Indeed, it is sufficient to take the generating predicate $Q_x(S)$ from the respective representation (2.9) or $G_x(S)$ from (2.11) and to identify $q(x;S)$ in (2.13) with $Q_x(S)$, or in (2.14) with $G_x(S)$.

Proof of Theorem 2.1. Now it remains only to combine Lemma 2.3 with Theorem 2.2 [Equation (2.10)] and with Theorem 2.3. This yields two types of semiseparable representations in the pseudoseparable framework (2.1), i.e. the claim of Theorem 2.1.

Thus, Theorem 2.1 gives us a general form of semiseparable representations for semiaggregable hyperproperties. Theorems 2.2 and 2.3 detail inner structures of these representations.

Remark 2.2. In the necessity part of these theorems we can of course specify a generating family $\mathcal{B}$ in the representations mentioned, setting $\mathcal{B} \doteqdot \mathcal{A}$, as has already been done in the constructive proofs of sufficiency of those representations.

Remark 2.3. As shown in Section 1, a hyperproperty P given on a set family $\mathcal{A} \subset 2^U$ and aggregable on $\mathcal{A}$ may have no aggregable extension onto 2^U. For both simiaggregability conditions the situation turns out to be different. Namely, a hyperproperty P semiaggregable upwards (or downwards) on an arbitrarily given $\mathcal{A} \subset 2^U$ is always extensible to a hyperproperty semiaggregable upwards (respectively, downwards) on the whole Boolean 2^U. This follows from the observation that the propositional form (2.12) [or, respectively, (2.9), or (2.10)] may be applied to each set $X \subseteq U$. A hyperproperty on 2^U obtained thereby is, evidently, a semiaggregable extension onto 2^U of an original semiaggregable hyperproperty on $\mathcal{A}$.

Remark 2.4. Theorem 2.1, with the theorems of Section 1 taken into account, clarifies the role of aggregability as a necessary and, under additional assumptions, sufficient condition for separability. If one considers semiseparable representations of a hyperproperty P, then the only case when a "conditional property" $p(x; X)$ would be simultaneously nonincreasing and nondecreasing in X is the case of an "absolute" property, i.e. of the form $p(x)$. Separability of a hyperproperty P combines both types of semiseparability; therefore, in terms of external behavior of P it simultaneously yields both types of semiaggregability (that is, just aggregability). The "reverse" of this logical relationship, however, is not that obvious. An aggregable hyperproperty P on $\mathcal{A}$ certainly combines both types of semiaggregability (upwards and downwards), and hence it must possess both types of semiseparable representations (upper and lower). Nevertheless if $\mathcal{A}$ is not $\cup$-closed, then aggregability of P on $\mathcal{A}$ may not guarantee the existence of a separable representation for P (see Example 1.3). This implies that the two abovementioned semiseparable representation for a given P may be essentially different, not merging into a separable one.

Furthermore, if an aggregable hyperproperty P on $\mathcal{A} \subset 2^U$ has no separable representation, then (see Section 1) it is impossible to extend P to an aggregable hyperproperty on 2^U. However, as just mentioned (in Remark 2.2), either of the two semiaggregability types of P on any $\mathcal{A} \subset 2^U$ always admits its own extension onto 2^U. This implies that an aggregable but not separable (and hence, not aggregably extensible) hyperproperty P on $\mathcal{A} \subset 2^U$ possesses not only two essentially different semiseparable representations, upper and lower, but also two essentially different semiaggregable extensions, upwards and downwards, onto 2^U.

2.2. Interpretation of semiseparable representation for hyperproperties. At the beginning of Section 2.1 we interpreted both types hyperproperty semiaggregability in terms of one-sided system effects conditioned by such hyperproperties. Now, after identification of inner structures obtained for such hyperproperties (Theorems 2.1-2.3), we may attempt to explain those system effects via special features of the corresponding semiseparable structures.

Let us consider a pseudoseparable representation (2.1) for some hyperproperty P on $\mathcal{A}$. How can one interpret monotonicity of a generating pseudoproperty $p(x;X)$ in X, if is valid? The nondecreasing (or nonincreasing) of p in X in the most general form means by definition that the expansion of the set X, "a surrounding context" for the element x, may only promote (or, just the opposite, only prevent) the fulfillment of the conditional property p for this element. This explains why the joining of new objects ("parts": elements or subsets) to a given object:

(1) for an increasing (i.e. nondecreasing and different from a constant) p in X may lead to the emergence od an object property formerly missing;

(2) for a decreasing p in X, quite the reverse, may lead to the loss of a property.

This is in essence an interpretation of Theorem 2.1, according to which an increasing p in X implies for a hyperproperty P its semiaggregability upwards but not downwards (positive system effect, in its pure form), and a decreasing p in X implies semiaggregability downwards but not upwards (negative system effect).

Theorems 2.2 and 2.3 detail possible forms of conditional properties $p(x;X)$ expressed via auxiliary predicates $q(x;S)$ ($S \in \mathcal{B}$, $S \subseteq X$). Such a detailed elaboration can be especially useful in rather natural problems with simple enough generating predicates. In particular, a generating family $\mathcal{B}$ (unlike $\mathcal{A}$) may include "few" sets or only "small" sets. Let us illustrate the point.

Example 2.1. Let us again, as in Example 1.2, consider the topological set property of being open. Since the union of any family of open sets is open, the hyperproperty

$$P(X) \doteqdot [X \text{ is an open set}] \tag{2.15}$$

is semiaggregable upwards. On the other hand, a subset of an open set does not have to be open; hence P in a general case (with an arbitrary $\mathcal{A}$, in particular with $\mathcal{A} = 2^U$) is not hereditary. Therefore, P must have a semiseparable representation with a conditional generating property p increasing in X. Obviously, we may take in this role the pseudoproperty

$$p(x;X) \doteqdot [x \text{ is an inneer point of } X] \tag{2.16}$$

from the definition of an open set (Example 1.2). For economical determination of the form of $p(x;X)$, and hence of $P(X)$, one can take a system of small neighborhoods $S \subseteq U$ (for example, in $U = R^n$, a system of balls with radius $< \varepsilon$) as a generating family $\mathcal{B}$, and let $q(x;S) \doteqdot [x \in S]$. Then, evidently, the equality

$$p(x;X) = \bigvee_{S \in \mathcal{B}: S \subseteq X} q(x;S)$$

holds. The obtained representation in the form (2.12) for the given P,

$$P(X) = \bigwedge_{x \in X} \bigvee_{S \in \mathcal{B}: S \subseteq X} [x \in S], \tag{2.17}$$

reads as an equivalent definition of openness: "a set X is open iff for every point x in it there exists some (sufficiently small) neighborhood S of x included in X".

Example 2.2. This example is a "mirror reflection" of the previous one. Let us use a simplified version of one more mathematical definition: we shall call a set X *thin* if it has no inner points. It is easy to see that the hyperproperty

$$R(X) \doteqdot [X \text{ is a thin set}]$$

is hereditary. From the very definition R one can see that R has a pseudoseparable representation with a generating pseudoproperty

$$r(x; X) \doteqdot [x \text{ is a boundary point of } X]$$

which is obviously decreasing in X. The pseudoproperty r for $x \in X$ is the logical negation of the pseudoproperty p (2.16) from the previous Example 2.1. It is easy to point out also its "economical" representation in the form (2.10), where as an auxiliary generating pseudoproperty one can take the negation of the property from the latter example: $\overline{q}(x; S) = [x \notin S]$, and as $\mathcal{B}$ one can take again a system of small neighborhoods:

$$R(X) = \bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{S \in \mathcal{B}: S \subseteq X} [x \notin S]. \tag{2.18}$$

Example 2.3. Let us consider now a discrete mathematical object: a graph. Let U be a set of vertices of a given (undirected) graph Γ. A vertex subset $X \subseteq U$ is said to be *independent* if no two vertices $x, y \in X$ are connected by an edge in Γ. Let us set on $\mathcal{A} = 2^U$

$$P(X) \doteqdot [X \text{ is an independent set of vertices}].$$

It is obvious that P is a hereditary hyperproperty. Let us also consider a predicate $Q(S)$ on $\mathcal{B} = \{S \subseteq U \,|\, |S| \leqslant 2\}$ having the form

$$Q(\{x, y\}) \doteqdot [\text{vertices } x \text{ and } y \text{ are not connected by an edge}].$$

Then, evidently, for P the following hyperseparable representation in the form (2.9) is true:

$$P(X) = \bigwedge_{\{x,y\} \subseteq X} Q(\{x, y\}). \tag{2.19}$$

Generally, a hyperseparable representation for a hyperproperty P in the form (2.9) [via $Q(S)$] differs from a pseudoseparable one in the form (2.1) [via $p(x;X)$] by the fact that the former exploit not single elements $x \in U$ but their collection $S \in \mathcal{B}$. For interpretation purposes both representations of a hereditary hyperproperty may be useful, each in its own way. Thus, in Example 2.2 a pseudoseparable form of representation is suggested by the very definition of the hyperproperty. Quite the reverse, in Example 2.3 the initial definition for the independence hyperproperty of a set X is not intended to isolate single elements x (though, of course, that is possible). Here the corresponding pseudoseparable representation for the given hereditary P in the form (2.10) will be

$$P(X) = \bigwedge_{x \in X} p(x;X), \quad p(x;X) \doteqdot \bigwedge_{y \in X} q(x,y), \tag{2.30}$$

where

$$q(x,y) \doteqdot [\text{vertex } x \text{ is not connected with } y].$$

Formally (2.20) is an equivalent (and even redundant, due to the repeated counting of pairs $\{x,y\}$) representation to (2.19). To demonstrate its possible use let us consider a "sociometrical" interpretation of the graph Γ as a graph of conflicts between members of the group U. Then any independent set X is interpreted as a collective without conflicts. Consider a corresponding "no conflict" hyperproperty for "collectives" X, which is exactly the above $P(X)$. The representation (2.20) for this hyperproperty now reads: "a collective without conflicts is a collective consisting of nonconflicting members". We mean herein the members not engaged in mutual conflicts with their partners, due to the definition of $p(x;X)$ via $q(x,y)$ in (2.20). We avoid thereby the difficulty of transferring a (nonseparable) hyperproperty P from a whole collective to its individual members, which has been discussed in the Introduction. This has been paid for by using a conventional ("pseudo") property $q(x,y)$ for an individual x, which reads "x is not in conflict with y".

3. Hyperproperties in the "negative version" and their causal interpretation

3.1. Main formal statements. In the preceding Sections 1 and 2 we adopted the elementwise conjunction rule as a standard pattern of simple internal construction for a hyperproperty: it was considered that a set possessed a given hyperproperty if and only if each element of it possessed the corresponding generating property. In the beginning of Section 1 we have noted already a "positive version" of the standard form of hyperproperty implies the existence of the logically dual "negative version" (when not *each* but *at least one* element possessed a generating property).

The same is true for the "pseudostandard" forms of hyperproperties in Section 2, which were oriented towards a positive version of the hyperproperty standard form, preserving the main logical copula "and" ("each"), but replacing the generating property by, e.g., a pseudoproperty. This may also be considered in the logically dual negative form (with "at least one" instead of "each", etc.). The present section contains a brief parallel exposition of negative-version analogues of the previous results for standard and pseudostandard hyperproperty forms, emphasizing new interpretative peculiarities compared to the "positive version". Let us start with only a simple summary of the most important definitions, and also statements obtained by the logically dual reformulation of their prototypes from Sections 1,2 and therefore needing no independent proofs.

Definition 3.1. Call a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ separable (in the negative version) if it is representable in the form

$$P(X) = \bigvee_{x \in X} p(x) \quad \text{for all } X \in \mathcal{A} \tag{3.1}$$

with a generating property $p: U \to \{0, 1\}$.

Henceforth, in definitions and statements we shall as a rule omit a stipulation 'in the negative version'. We shall assume also hereinafter that $P(\varnothing) = 0$.

Definition 3.2. A hyperproperty P on $\mathcal{A}$ is said to be: (a) aggregable, (b) semiaggregable upwards, and (c) semiaggregable downwards, if for every set $X \in \mathcal{A}$ and for each of its decomposition $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu \in N}$ in $\mathcal{A}$ one has, respectively,

$$P(X) = \bigvee_{\nu \in N} P(X_\nu), \tag{3.2}$$

$$\bigvee_{\nu \in N} P(X_\nu) \Rightarrow P(X), \tag{3.3}$$

and

$$P(X) \Rightarrow \bigvee_{\nu \in N} P(X_\nu). \tag{3.4}$$

Lemma 3.1. A hyperproperty P on $\mathcal{A}$ is semiaggregable upwards iff it is antihereditary (i.e. nondecreasing): for any $X', X'' \in \mathcal{A}$

$$X' \subseteq X'' \text{ implies } P(X') \Rightarrow P(X''). \tag{3.5}$$

Recall that in the positive version there was another condition (of semiaggregability downwards), for which we had a simplified equivalent form, viz., the hereditarity condition. Unlike that, in the negative version this time we obtain a similar form, viz., the antihereditarity condition for semiaggregability upwards. In the meantime, for semiaggregability downwards in the negative version we may also point out an equivalent form as the following requirement of "weak hereditarity".

Definition 3.3. A hyperproperty P on $\mathcal{A}$ called *weakly hereditary* if for every $X \in \mathcal{A}$ one can find $x \in X$ such that for each $X' \in \mathcal{A}$

$$x \in X' \subseteq X \text{ implies } P(X) \Rightarrow P(X'). \tag{3.6}$$

It is easy to see that the weak hereditarity condition may be written as a formal implication

$$P(X) \Rightarrow \bigvee_{x \in X} \bigwedge_{S \in \mathcal{A}: x \in S \subseteq X} P(S) \text{ for all } X \in \mathcal{A}. \tag{3.7}$$

Lemma 3.2. A hyperproperty P on $\mathcal{A}$ is semiaggregable downwards iff it is weakly hereditary.

Lemma 3.2 is the logically dual equivalent of Lemma 2.2. [The equation of the form (3.7) is obtained immediately from (2.8) by taking its logical negation. Moreover, in (3.7) as in (2.8) one may replace an implication by an equivalence, i.e. an equality.]

Lemma 3.3. A hyperproperty P on $\mathcal{A}$ is aggregable iff it is antihereditary and weakly hereditary.

Theorem 3.1. Let a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ be separable. Then it is aggregable. If $\mathcal{A}$ is $\cup$-closed, the converse is also true: aggregability of P on $\mathcal{A}$ implies its separability.

Definition 3.4. A hyperproperty P on $\mathcal{A}$ is said to be recombinant if for every pair of set families $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}$ such that

$$\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y, \tag{3.8}$$

one has

$$\bigvee_{X \in \mathcal{X}} P(X) = \bigvee_{Y \in \mathcal{Y}} P(Y). \tag{3.9}$$

Definition 3.5. A hyperproperty P on $\mathcal{A}$ is said to be coherent if for every $X \in \mathcal{A}$ and for each of its coverings $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{A}$

$$P(X) \Rightarrow \bigvee_{\nu \in N} P(X_\nu). \tag{3.10}$$

Definition 3.6. A hyperproperty P on $\mathcal{A}$ is said to be extendedly autoseparable if

$$P(X) = \bigvee_{x \in X} \bigwedge_{S \in \mathcal{A}: x \in S} P(S) \text{ for all } X \in \mathcal{A}. \tag{3.11}$$

Theorem 3.2. For a hyperproperty P given on an arbitrary $\mathcal{A}$ to be separable it is necessary and sufficient that any of the following three equivalent conditions be satisfied: (1) P is recombinant, (2) P is coherent, or (3) P is extendedly autoseparable.

Extended autoseparability of a hyperproperty P explicitly yields its separable representation in the form (3.1) with a constructively specified *revealed* generating property

$$\breve{p}(x) \doteqdot \bigwedge_{S \in \mathcal{A}: x \in S} P(S), \quad x \in U. \tag{3.12}$$

Intuitively $\breve{p}(x)$ is the common property P of all admissible sets containing the given x.

Let us now give the negative versions of semiseparability criteria.

Theorem 3.3. For a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ to be semiaggregable upwards or semiaggregable downwards, it is necessary and sufficient that P be representable in a pseudoseparable form

$$P(X) = \bigvee_{x \in X} p(x; X) \text{ for all } X \in \mathcal{A} \tag{3.13}$$

with $p(x; X)$ nondecreasing or, respectively, nonincreasing in the generating pseudoproperty X (*upper* and *lower semiseparability*, respectively).

Theorem 3.4. For a hyperproperty P on $\mathcal{A}$ to be semiaggregable upwards (that is, antihereditary), it is necessary and sufficient that P be representable in a form

$$P(X) = \bigvee_{S \in \mathcal{B}: S \subseteq X} Q(S) \text{ for all } X \in \mathcal{A} \tag{3.14}$$

(a hyperseparable representation), or equivalently, in a form

$$P(X) = \bigvee_{x \in X} \bigvee_{S \in \mathcal{B}: S \subseteq X} q(x; S) \text{ for all } X \in \mathcal{A}; \tag{3.15}$$

and for P on $\mathcal{A}$ to be semiaggregable downwards (that is, weakly hereditary) it is necessary and sufficient that P be representable in a form

$$P(X) = \bigvee_{x \in X} \bigwedge_{S \in \mathcal{B}: S \subseteq X} q(x; S) \text{ for all } X \in \mathcal{A}, \tag{3.16}$$

with some generating-set family $\mathcal{B}$ and generating predicates Q, q.

3.2. Interpretation of (semi)aggregability and (semi)separability in the negative version. We consider herein the negative version of the separable form (3.1) for a hyperproperty and of its modifications, such as the pseudo(semi)separable form (3.13) [and (3.15), (3.16) in more detail] and also the hyperseparable form (3.14). This negative version yields a basis for a new comprehensive interpretation of hyperproperty constructions different from the positive versions. In the positive version the presence of a hyperproperty for a set is related to the presence of a generating (pseudo)property for *all* its elements, and hence we have no reasons to isolate some elements as "individually responsible" for the emergence of this hyperproperty of the whole set. Roughly speaking, a set hyperproperty was uniformly, i.e. diffusely, distributed over all elements of the set.

In the negative version of the hyperproperty analysis things look quite different. Here the presence of a negative hyperproperty for a set is related to the presence of a generating (pseudo)property for *some* (at least one) individual element, as was written formally in the equations for separability (3.1) and pseudoseparability (3.13). Thereby one proceeds as if to localize the source, or the reason, for the hyperproperty to be valid for the set as a whole. Namely,one can point out the specific element (possibly nonunique) which is "individually responsible" for the given hyperproperty of the set. Formally that is the element $x \in X$ for which $p(x; X) = 1$. Recall an illustrative example from the Introduction: a defective complex facility is one which includes a defective element. According to this example, the formal problem of localization of an element ("source") for a negative hyperproperty may be treated as a kind of fault-diagnosis problem.

Such a treatment of the notion of (pseudo)separable representations for hyperproperties in the negative version yields a possibility of formalizing "causal" description of phenomena in an abstract problem statement. A detailed model of a causal relationship system based on this notion will be discussed in Section 4 below. But now we will confine ourselves to the simplest causal-type interpretation of hyperproperty generation. Lock first at the separable representation (3.1), which gives a standard for an elementary causal description. Term each element that possesses the property p [i.e. every $x \in U$ such that $p(x) = 1$] *a source* of the hyperproperty P. In this terminology the separable representation (3.1) may read: a set X possesses a hyperproperty P if and only if it contains (at least) one source of P. In a similar way one may treat the extendedly autoseparable representation (3.9) of a hyperproperty for which only external behavior (but not its inner structural sources) can be observed. In the latter case the revealed property $p(x)$ (3.12) shows all possible sources of the given hyperproperty, i.e. all elements x whose presence in X guarantees the fulfillment of $P(X)$.

Let us interpret now in this framework those deviations from separability which correspond to definite system effects in the behavior of the hyperproperty P. Parallel to the discussion of two system effects in the positive version in Section 2, we now consider two similar situations in the negative version:

(1) Semiaggregability upwards (3.3), when there is no semiaggregability downwards (3.4), is treated as a positive system effect (a whole possesses a hyperproperty P even if none of its parts possess P). This corresponds to upper (but not lower) separability in the representation (3.13).

(2) On the contrary, semiaggregability downwards without semiaggregability upwards is treated as a negative system effect (a whole lacks a hyperproperty inherent in its part). This corresponds to lower separability (without upper separability).

Structured identification of semiaggregability in Theorems 3.3 and 3.4 allow us to explain these system effects in terms of element sources of hyperproperties interacting with other elements. As discussed above, the first situation (the positive system effect) is implemented with the conditional generating property $p(x; X)$ increasing in X in the representation (3.13). Hence one can see that after uniting several parts into a whole set X, some elements of these parts (subsets) may become sources of the hyperproperty P even if they were not before. The representation (3.15) concretizes this phenomenon: an element x becomes a source of the hyperproperty P if the set X is large enough that it contains at least one whole set S *promoting* this x, viz., such that $q(x; S) = 1$.

Remark 3.1. Another look at positive system effects is provided by an equivalent hyperseparable representation (3.14). Here the explanation is given not in terms of a single isolated element x plus a promoting subset S, but in terms of a whole hypersource set S, all elements of which have equal weight. Namely, the set S is treated as a hypersource ("complex reason") of a hyperproperty P if there is $Q(S) = 1$ in the representation (3.14), and hence, the presence of (at least one) such S in X is necessary and sufficient for $P(X)$ to be true. The presence of such integrated "multiple causes" [1] is not to be confused with the simple phenomenon of "cause multiplicity" [186] consisting in many separable causes, each individually independent

---

[1] An example of such multiple (complex) causes in a formal consideration may be found in the theory of collective decision making, to be more exact, in so-called monotonic voting systems (see, e.g., [188]). In these systems a collective makes a decision if and only if at least one of certain preformed groups ("winning coalitions" or "majorities") approves this decision unanimously (cf. the abstract majorities of Remark 1.1). Formally such a rule may be written as a hyperseparable expression of the type (3.14) (the "federation rule", in the terminology of [187]).

(formally, a singleton).

The second situation (the negative system effect) may be interpreted by analogy with the first one. This situation is implemented by a pseudo-property $p(x;X)$ decreasing in X in (3.13). In this case, on expansion of the set X, a given element x can only cease to be a source of the hyperproperty P, but not become one. Such an interpretation is concretized in the representation (3.16): the element x ceases to be a source for P if the set X is large enough to include some *blocking* set S for the element x, viz., such that $q(x;S) = 0$.

We have obtained an explanation of the external behavior of a hyperproperty P of sets X in terms of inner interaction between an arbitrary element $x \in X$ which is treated as potential source of P, on the one hand, and an arbitrary subset of X, on the other hand. Such an explanation addresses some kinds of problems where hyperproperty sources may actually be localized and for which our explanation scheme is reasonably adequate. Let us demonstrate this on examples.

Example 3.1. Let $U = R^n$, i.e. n-dimensional vector space, and let

$$P(X) \doteqdot [\text{the vector set } X \text{ is linearly dependent}].$$

It is easy to see that P is an antihereditary hyperproperty and for P there exists an upper semiseparable representation in the form (3.15):

$$P(X) = \bigvee_{x \in X} \; \bigvee_{S \subseteq R^n : |S| \leqslant n, S \subseteq X} q(x;S),$$

where

$$q(x;S) \doteqdot [\text{the vector } x \text{ is representable as a linear combination of vectors in } S \text{ different from } x].$$

Thus, each vector from X linearly representable via no more than n other vectors from X is considered a source of linear dependence of the set X. It is also natural to consider here a hyperseparable representation for P, in the form (3.14), where a hypersource of linear dependence is localized as at most an n-tuple of linearly dependent vectors:

$$P(X) = \bigvee_{S \subseteq R^n : |S| \leqslant n, S \subseteq X} Q(S)$$

where

$$Q(S) \doteqdot [\text{the vector set } S \text{ is linearly dependent}].$$

Example 3.2. Take the hyperproperty complementary to the hyperproperty of being a thin set (considered earlier in Example 2.2), which is the hyperproperty of being a *solid set*:

$$P(X) \doteqdot [X \text{ is a solid set}]$$

(a set is called solid if its interior is nonempty). Evidently, P is antihereditary, and it has an upper semiseparable representation in the form (3.15) with the generating pseudoproperty

$$q(x;S) \doteqdot [S \text{ is a neighborhood of the point } x].$$

In such a representation each inner point $x \in X$ is a source of the solidity hyperproperty of the set X.

Example 3.3. Take the hyperproperty complementary to the openness hyperproperty in Example 2.1:

$$P(X) \doteqdot [X \text{ is not an open set}].$$

This hyperproperty is semiaggregable downwards (in the negative version): for a decomposition of X into the union of subsets, at least one of these subsets is sure to be not open. Hence for P there exists a lower semiseparable representation in the form (3.13) with a nonincreasing generating pseudoproperty, which may be taken in the form

$$p(x;X) \doteqdot [x \text{ is an outer or a boundary point for } X].$$

Thereby a source of nonopenness of a set X is localized in the form of a boundary point belonging to X. Note that in a detailed lower semiseparable representation of the form (3.16) for this P one may again take a system of neighborhoods as $\mathcal{B}$ and let $q(x;S) \doteqdot [x \notin S]$.

We have given a number of formal but rather simple, purely illustrative examples. Concluding this section, let us consider an informal example which illustrates the same idea of (non)localizability of hyperproperty source. This example may be considered as an attempt to treat ill-defined systems (objects), such as "crowd", from the formal logical standpoint.

Example 3.4. (A problem of a subway attendant.) In the Moscow Subway Rules it is written among other things that: "While waiting for a train, passengers should distribute uniformly along the platform. It is forbidden to cross the line marking the platform boundary". Consider both requirements cited here for a set of passengers, i.e. for a "crowd", and discuss the hyperproperty of such a set (crowd's property) consisting in violation of the given requirement by the crowd. It is easy to understand that violation of the second requirement ("not to cross the line"), considered as a hyperproperty, is separable in the negative version. Indeed, the crowd crosses the marking line if and only if someone from the crowd does so. From the station attendant's viewpoint, he always can isolate from the crowd exactly those and only those passengers, every one of whom is personally guilty of the violation of the rule against crossing the restrictive line. This is exactly the generating property of an element (passenger) for the hyperproperty of the set (crowd).

The situation for another hyperproperty, viz., violation of the first of the above requirements (on uniform distribution of passengers), is quite the opposite. It is easy to see that this hyperproperty is not separable. Really, one cannot indicate a concrete individual and treat him as personally guilty of the crowd's nonuniform distribution along the platform. This everyday-life example may be helpful in realizing that, though commonplace, reducibility of a property of a whole set (hyperproperty) to a property of its elements is not a simple problem at all.

4. System logic in a model of causal dependencies

4.1. A combinatorial formalization of cause-effect dependency of events. The term "cause" (like its counterpart, "effect" or "consequence") has many different interpretations, not only in everyday language but also in scientific applications [1]. Above we have appealed implicitly to an intuitive common-use meaning of this term when in Section 3.2 we explained negative hyperproperties of sets via generating properties of their elements and interpreted an element as cause (source) of the given hyperproperty. In a number of attempts to attach as exact a meaning as possible to the words "cause" and "effect", the essential progress is associated with the names of Francis Bacon and John Stuart Mill (see, e.g., [186]). An especially important step in this was the introduction of semiformalized rules for selecting primary causes among phenomena (actions) related with certain events (effects). Some well-developed formal logical schemes have since been elaborated which implement various versions of the causality formalism (see, e.g., [123]). As distinct from this, we confine ourselves to elements of the conventional logic only, which suffices for our analysis of some simple but essential features of the causality concept. These aspects of the notion of "cause-effect relationship" were formalized in a simple combinatorial model of functional dependencies between events which was

---

[1] Moreover, even the standpoints for such interpretations are often difficult to compare. Thus, in the *physical* approach to real-world analysis an essential aspect of causality is the temporal sequence of events: the cause (action) must precede the effect (result). On the contrary, in *the teleological* approach the ultimate aim is treated as the "final cause" of the action which leads to it (and precedes it). In general case the objects for which we consider a structure of cause-effect relationship may have no temporal aspect at all. Such are, e.g., abstract propositions in a logical inference scheme, or any other interdependent values, for example, correlated statistical data etc. [144, 186].

considered in [52]. Hereinafter we shall reproduce the results from [52], picking out their logical core. For this purpose we shall consider combinations of events as "composite objects" (systems), and analyze them by the above methods of hyperproperty logic [particularly by the one of isolating causes (sources) of hyperproperties in Subsection 3.2].

Begin with the description of the original model of event relationships. Let two nonintersecting sets U and Ω be given, which are treated as two different universes of abstract events. Elements x of the universe U will be called *primary events*, or *actions*, and elements θ of the universe Ω *secondary events*, or *outcomes*. We shall assume that outcomes are determined effects of actions, i.e., that the set of secondary events which occurred is uniquely determined by the set of primary events implemented. In symbolic notation, provided the set X of actions performed is a subset of U (i.e. it is known that all events $x \in U$ were realized but all $y \in U \setminus X$ were not), the set $\Theta \subseteq \Omega$ of all realized outcomes is predetermined uniquely. Speaking formally, there exists a univalent transformation (correspondence F) $X \mapsto \Theta$, i.e. a functional relationship

$$\Theta = F(X). \tag{4.1}$$

In a general case we assume F to be defined on a family $\mathcal{A} \subseteq 2^U$ of admissible sets of actions, so formally a mapping $F\colon \mathcal{A} \to 2^\Omega$ is given. For simplicity we shall assume that $F(\varnothing) = \varnothing$. Call F an event correspondence (mapping).

For a given F it would be a mere tautology to say that the set of implemented primary events X is "the cause" of the occurrence of the corresponding set of secondary events $\Theta = F(X)$. A nontrivial, i.e. nontautological, statement of the problem of causal relationship between events in the framework of the functional dependence (4.1) starts with consideration of separate events. Namely, following the classical tradition (J. S. Mill et al.), let us distinguish those situations when a single primary event x plays the role of a cause for a secondary event θ. Speaking more formally, we wish, instead of (or besides) the set-to-set correspondence $X \mapsto \Theta$ (two-place relation on $2^U \times 2^\Omega$, or hyperrelation in our terminology), to consider some element-to-element correspondence (not necessarily univalent) $x \mapsto \theta$, which is a two-place relation on $U \times \Omega$. The desired correspondence $x \mapsto \theta$ must admit a natural interpretation as a cause-effect relationship between the action x and the outcome θ, and in virtue of this interpretation it must be linked with the event correspondence $X \mapsto \Theta$ in a specific mode.

A cause-effect relationship between an action x and an outcome θ in a conventional form implies that realization of the primary event x is the reason (condition) for realization of the secondary event θ. There are different possible ways of making a more formally accurate definition of the notion of a reason for realization of θ: is it a necessary condition? or a sufficient one? or something else? (see, e.g., [123]). Let us assume herein as an initial point the following strict requirement: the reason (condition) mentioned must be both necessary and sufficient (this is the requirement which essentially, in an implicit form, underlies the classical approach of J. S. Mill [186]). Let us proceed to the exact formalization.

Introduce the notation $x \rightarrowtail \theta$ for the cause-effect relationship between x and θ, and call $\rightarrowtail$ a *causal relation.* The above requirement on the relation $\rightarrowtail$ in our model takes the following form:

$$x \rightarrowtail y \text{ iff } \forall X \in \mathcal{A}\colon ([\theta \in F(X)] \Rightarrow [x \in X]). \tag{4.2}$$

Remark 4.1. The strength of the requirement (4.2) may be seen, in particular, from the fact that due to (4.2) the given effect θ generally can have only one cause x. Exceptions are very special situations, when the set family $\mathcal{A}$ is such that the element x has a "duplicate" x' in the sense that

$$\forall X \in \mathcal{A}\colon ([x \in X] \Leftrightarrow [x' \in X]).$$

The requirement (4.2) combines several ideas: (1) a cause-effect relationship from the formal standpoint is a two-place relation $x \rightarrowtail \theta$ between elements $x \in U$ and $\theta \in \Omega$; (2) the relation $\rightarrowtail$ characterizes (partially determines) the event correspondence F [see (4.2)]; (3) conversely, the relation $\rightarrowtail$ itself is determined by the event correspondence F, also due to (4.2). In Mill's approach the most essential point is the development of the third idea: how to find the implied intrinsic cause-effect relationship between events, using the external behavior of the event correspondence. We shall return to this approach later; meanwhile we treat a cause-effect relationship as an initial notion—an originally given structure of an inner mechanism generating the observed event correspondence.

Thus, let a causal relation $\rightarrowtail$ in general be an arbitrarily given two-place relation on $U \times \Omega$. Provided that the causal relation $x \rightarrowtail \theta$ is valid for some $x \in U$, $\theta \in \Omega$, we refer to x as the *cause* of θ and to θ as the *effect* of x by definition. In a general case we admit that one cause x may have several effects θ, and that several different causes may have the same effect. Formally, the relation $x \rightarrowtail \theta$, treated as a correspondence, being absolutely arbitrary, may not be univalent either directly or inversely. Similarly, in general we shall consider arbitrarily given event mappings $F\colon \mathcal{A} \to 2^{\Omega}$.

Before we pose, following J.S. Mill, the problem of constructively finding cause-effect relationship "inside" a mapping F, we need to adopt an appropriate general definition, which will yield a formalization of the very possibility of representing ("explaining") a given event correspondence F via some arbitrary causal relation $\rightarrowtail$.

Definition 4.1. We shall call an event correspondence $F\colon \mathcal{A} \to 2^\Omega$ *causally explainable* (briefly, *causal*) if it satisfies the condition

$$\forall\theta \in \Omega, \forall X \in \mathcal{A}\colon ([\theta \in F(X)] \Leftrightarrow [\exists x \in X\colon x \rightarrowtail \theta]), \tag{4.3}$$

or, which is equivalent, if it is representable in the form

$$F(X) = \{\theta \in \Omega | \exists x \in X\colon x \rightarrowtail \theta\} \text{ for all } X \in \mathcal{A} \tag{4.4}$$

with some two-place relation $\rightarrowtail$ on $U \times \Omega$. The latter will be called the *causal relation generating* the event correspondence F.

From Definition 4.1 one may see that not every event correspondence F is causally explainable. For example, if $\theta \in F(X)$ but $\theta \notin F(X')$ for some $X \subset X'$ then it is easy to understand that F is not causal. Therefore, before attempting to find a hypothetical causal relation generating a given event correspondence F, we need to be able to answer the principal question, whether the given F admits any causal explanation at all. The criteria for causality will be henceforth at the center of our interest.

Remark 4.2. Due to Definition 4.1, the necessary and sufficient condition for obtaining a concrete result θ is realization of some cause (at least one of several potential ones) $x\colon x \rightarrowtail \theta$. This is a natural generalization of the requirement (4.2). However, unlike (4.2), here each separate cause x is only a sufficient but not a necessary reason for fulfilling θ:

$$\text{if } x \rightarrowtail \theta \text{ then } \forall X \in \mathcal{A}\colon ([x \in X] \Rightarrow [\theta \in F(X)]). \tag{4.5}$$

A not only sufficient but also necessary reason for θ is the realization of any arbitrary (at least one) cause from the totality $\{x \in U | x \rightarrowtail \theta\}$. We emphasize that such a *multiplicity* of causes must be distinguished from the phenomenon of *complex* causes (see Section 3.2) which are represented by combined sets of actions carried out jointly. More formally, we consider a set of primary events $S \subseteq U$ (in our notation) to be a complex cause ("hypercause"), and write $S \rightarrowtail \theta$, when the following requirement is fulfilled:

$$\forall X \in \mathcal{A}\colon ([S \subseteq X] \Rightarrow [\theta \in F(X)]) \tag{4.6}$$

[as a generalization of (4.5); the precise definition of a "hypercausality" is given below: Definition 4.9].

Remark 4.3. Let us return to the case when a single cause x is the necessary and sufficient reason for an effect θ [the requirement (4.2)]. Then such a cause, if it exists, can be revealed[1] from the behavior of the event

[1] Moreover, uniquely up to "duplicates" as in Remark 4.1.

mapping F directly, due to the equivalence (4.2):

$$[x \rightarrowtail \theta] \Leftrightarrow \left[\theta \in \bigcap_{X \in \mathcal{A}: x \in X} F(X)\right] \tag{4.7}$$

(this is formalized analogue of the “agreement-difference method” due to J.S.Mill [144, 186]). In a broader treatment of a causal relation $\rightarrowtail$ in Definition 4.1, where each single cause x may be not a necessary but only a sufficient reason for an effect θ, the requirement (4.2) is weakened (4.5), which in its turn yields only a necessary condition for a causal relation to hold:

$$[x \rightarrowtail \theta] \Rightarrow \left[\theta \in \bigcap_{X \in \mathcal{A}: x \in X} F(X)\right]. \tag{4.8}$$

Let us try to follow a constructive approach to causality in the general case when an arbitrary event correspondence $F: \mathcal{A} \to 2^{\Omega}$ is given, about which it is not known in advance if F is causally explainable. Departing from the standard of the constructive definition in (4.7), let us define a two-place relation $\succ\!\!\Longrightarrow$ on $U \times \Omega$, specifying it by the expression

$$[x \succ\!\!\Longrightarrow \theta] \doteqdot \left[\theta \in \bigcap_{X \in \mathcal{A}: x \in X} F(X)\right]. \tag{4.9}$$

Definition 4.2. Given an event correspondence F, the relation of the form (4.9) will be called the *revealed causal relation* for F.

Directly from Definition 4.2 follows

Lemma 4.1. For any event correspondence F and for its revealed causal relation $\succ\!\!\Longrightarrow$ one has $x \succ\!\!\Longrightarrow \theta$ iff x is a sufficient reason for θ, i.e.

$$[x \succ\!\!\Longrightarrow \theta] \Leftrightarrow \big[\forall X \in \mathcal{A}: ([x \in X] \Rightarrow [\theta \in F(X)])\big]. \tag{4.10}$$

Indeed, (4.10) is just an equivalent reformulation of (4.9).

Remark 4.4. In a general case the totality of all revealed (always sufficient) causes for θ, i.e. $\{x \in U | x \succ\!\!\Longrightarrow \theta\}$, may fail to be a necessary reason for θ in the sense of Remark 4.2. Indeed if F is not causal, then no relation $x \rightarrowtail \theta$ can yield necessary and sufficient reason for θ; in particular, $x \succ\!\!\Longrightarrow \theta$ cannot do it. However, for a causal F the situation is just the opposite, as will be seen below from Lemma 4.3: if F is causally explainable at all, then the causal explanation may be always done in terms of the revealed causal relation θ. Hence for a causal F, unlike noncausal ones, the totality of all revealed causes yields not only a sufficient but a necessary reason for the effect.

Definitions 4.2 and 4.1 also imply

Lemma 4.2. If an event correspondence F is causal and $\rightarrowtail$ is some causal relation generating F, then the revealed causal relation $\succ\!\!\!\Longrightarrow$ for F is never narrower than $\rightarrowtail$, i.e.,

$$x \rightarrowtail \theta \text{ implies } x \succ\!\!\!\Longrightarrow \theta. \tag{4.11}$$

Definition 4.3. Call an event correspondence F *Mill causal* if it is representable in the causal form (4.3) [or equivalently, (4.4)] with the revealed causal relation $\succ\!\!\!\Longrightarrow$ in the role of a generating causal relation $\rightarrowtail$, that is, if the following equivalence is valid:

$$\forall \theta \in \Omega \, \forall X \in \mathcal{A} \colon ([\theta \in F(X)] \Leftrightarrow [\exists x \in X \colon x \succ\!\!\!\Longrightarrow \theta]). \tag{4.12}$$

Lemma 4.3. For an event correspondence $F \colon \mathcal{A} \to 2^{\Omega}$ to be causal it is necessary and sufficient that F be Mill causal.

Proof. Sufficiency is evident from Definition 4.3. To prove necessity, let F be causal, i.e., (4.2) holds for some $\rightarrowtail$. It needs to be shown that (4.12) also holds. Fix arbitrary $\theta \in \Omega$ and $X \in \mathcal{A}$. Then in virtue of (4.3) and (4.11) (Lemma 4.2) we have

$$[\theta \in F(X)] \Rightarrow [\exists x \in X \colon x \rightarrowtail \theta] \Rightarrow [\exists x \in X \colon x \succ\!\!\!\Longrightarrow \theta],$$

but in virtue of (4.10) (Lemma 4.1) the reverse implication is also true:

$$[\exists x \in X \colon x \succ\!\!\!\Longrightarrow \theta] \Rightarrow [\theta \in F(X)],$$

which yields (4.12). This ends the proof.

Lemma 4.3 immediately gives us an effective criterion of causality for an arbitrary event correspondence:

Theorem 4.1. For an event correspondence $F \colon \mathcal{A} \to 2^{\Omega}$ to be causal, it is necessary and sufficient that the equivalence

$$\forall \theta \in \Omega \, \forall X \in \mathcal{A} \colon$$
$$\big([\theta \in F(X)] \Rightarrow \big[\exists x \in X \, \forall S \in \mathcal{A} \colon ([x \in S] \Rightarrow [\theta \in F(S)])\big]\big) \tag{4.13}$$

or, which is equivalent, the equation

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} \; \bigcap_{S \in \mathcal{A} \colon x \in S} F(S) \text{ for all } X \in \mathcal{A} \tag{4.14}$$

be true.

Proof. It is enough to note that (4.13) is the result of substitution of the equivalent definition (4.10) for the relation $\succ\!\!\!\Longrightarrow$ into the definition of

Mill causality (4.12), and that the functional equation (4.14) is the result of translating (4.13) from the logical to the set-theoretical language.

Thus, Theorem 4.1 yields a causality criterion for an event correspondence F in the logically transparent form (4.13) which means the representability of F via its own revealed causal relation [1]. The functional equation (4.14) characterizes the desired external behavior of event correspondence. Unfortunately, this characterization of F's behavior is not intuitively clear. However, it turns out that one can find equivalent and seemingly more natural forms of requirements for "regularity" of behavior of the mapping F in the case of its causal explainability. Moreover, these requirements admit some simple weakenings which in their turn become exact characteristics of certain types of "quasicausal" explainability of the correspondence F. To obtain such results it is more convenient to use not the direct analysis of causality in terms of an action-result relationship, as above, but an indirect method based on the hyperproperty logic. Applying this method in the next subsection, we shall describe some types of inner causal and quasicausal logical structures interesting for us. We shall also link them with the corresponding forms of behavior of the event correspondence.

4.2. Logic of hyperproperties in causality analysis of event correspondences. Any event correspondence (mapping) $F\colon \mathcal{A} \to 2^{\Omega}$ may be considered as a special two-place relation $X \rightarrowtail \Theta$ on $\mathcal{A} \times 2^{\Omega}$, or to be more exact, as a two-place predicate $D(X, \Theta) \doteqdot [X \rightarrowtail \Theta]$ on $\mathcal{A} \times 2^{\Omega}$ which is true if and only if $\Theta = F(X)$. Since the subject variables of this predicate are sets X from the universe U and sets Θ from Ω, then according to our terminology it must be called a hyperrelation. Causal explainability of an event correspondence F, in the sense of Definition 4.1, means a special kind of representability of the hyperrelation $X \rightarrowtail \Theta$ via a conventional relation $x \rightarrowtail \theta$ between elements $x \in U$ and $\theta \in \Omega$. We shall reduce the question of such representability of a given hyperrelation to the question of representability of a hyperproperty via a property of elements, which has been investigated in preceding sections. With this aim in mind, let us apply the following method.

Fix an arbitrary secondary event $\theta \in \Omega$, and consider primary events $x \in U$ and/or sets of such events $X \in 2^U$ which lead to the occurrence of the event θ, or alternatively speaking, which *determine* θ. In a general case such "determination" of the result θ by a set X of implemented actions x may be described, due to the definition of the mapping F, by a two-place

---

[1] Such a situation has a direct analogy in the choice theory for abstract alternatives. In this theory the so-called rational representability of a choice function via some binary relation (pairwise comparison of alternatives)[85, 88] is equivalent to its representability via the special "revealed preference relation"[190, 217] (see also Remark 1.8).

predicate $[\theta \in F(X)]$ depending upon two variables X and θ on $\mathcal{A} \times \Omega$. For fixed θ we get a one-place predicate depending upon X on $\mathcal{A}$, which is indexed by the parameter θ ($\theta \in \Omega$):

$$P_\theta(X) \doteqdot [\theta \in F(X)], \quad X \in \mathcal{A}. \tag{4.15}$$

Definition 4.4. We shall call the predicate P_θ (4.15) the *determination hyperproperty* for θ corresponding to the event mapping F.

In turn, F is obviously expressed via the family of corresponding determination hyperproperties $\{P_\theta\}_{\theta\in\Omega}$:

$$F(X) = \{\theta \in \Omega | P_\theta(X) = 1\} \text{ for all } X \in \mathcal{A}, \tag{4.16}$$

and the correspondence $F \leftrightarrow \{P_\theta\}_{\theta\in\Omega}$ is one-to-one.

Definitions 4.1 and 4.4 directly imply

Lemma 4.4. An event mapping F is causal iff every determination hyperproperty P_θ (for $\theta \in \Omega$) is separable in the negative version, i.e. is representable in the form

$$P_\theta(X) = \bigvee_{x\in X} p_\theta(x) \text{ for all } X \in \mathcal{A}. \tag{4.17}$$

Indeed, it is enough to identify a parametric property $p_\theta(x)$ in (4.17) with predicate $[x \rightarrowtail \theta]$ in (4.3) (the latter treated as predicate of x with parameter θ).

Lemma 4.4 reduces the question of causality of the correspondence F to the question of separability of hyperproperties P_θ, $\theta \in \Omega$. Hence we can apply general criteria of hyperproperty separability in the negative version from Section 3, and also consider the deviations from separability, viz., the two types of semiseparability, keeping in mind a causal interpretation of separability and pseudoseparability from Section 3.2. In particular, we may note that Lemma 4.4 points out all causes x for an effect θ as exactly the sources of the separable hyperproperty P_θ, i.e. as $x\colon p_\theta(x) = 1$.

The formal expressions in Section 3 were written in the logical language, which is convenient for the interpretation of various representations of determination hyperproperties P_θ in terms of causal relations and their generalizations. However, at the final stage of analysis we need to be able to translate these logical formulae into the original functional language of event mappings F. This reverse translation may be easily performed on the basis of the equation (4.16) (and its direct analogues for other associated function-predicate pairs).

To begin with we express the fact of separability of hyperproperties P_θ, $\theta \in \Omega$, in terms of the mapping F, which in virtue of Lemma 4.4 yields a properly functional characterization of causal mappings F.

Definition 4.5. Call an event mapping $F: \mathcal{A} \to 2^{\Omega}$ *separable* if it is representable in the form

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} f(x) \text{ for all } X \in \mathcal{A} \tag{4.18}$$

with some point-to-set mapping $f: U \to 2^{\Omega}$.

Lemma 4.5. An event mapping F is causal iff it is separable.

Proof. Due to Lemma 4.4, one needs only to verify that separability of the mapping F is equivalent to separability of each corresponding hyperproperty P_θ, $\theta \in \Omega$. For this it is enough to note that the equality (4.18) may be replaced by the logical equivalence ($\forall X \in \mathcal{A}, \forall \theta \in \Omega$):

$$[\theta \in F(X)] = \bigvee_{x \in X} [\theta \in f(x)]. \tag{4.19}$$

Now it remains only to relate f to p_θ, $\theta \in \Omega$, by relationship of the form (4.15), (4.16), i.e. to set

$$p_\theta(x) = [\theta \in f(x)], \quad f(x) = \{\theta \in \Omega | p_\theta(x) = 1\}. \tag{4.20}$$

Remark 4.5. The separable form (4.18) of the causal event correspondence F may be easily derived directly from the definition of causality of F. The use of the hyperproperty logic becomes essential from the point where we begin to find effective criteria of causality, and hence, of separability of F.

In the sequel we shall exploit the criteria of hyperproperty separability in the negative version from Section 3. Theorems 3.1 and 3.2 yield such criteria in terms of hyperproperty aggregability and its strengthened versions, such as recombinantness etc.

Note that we have already obtained independently, in Section 4.1, one criterion of causality of F, Theorem 4.1, which is presented both in a logical form (4.13) and in a functional form (4.14). Owing to this, we first will point out the place of thiscriterion among others, derived from the various equivalent criteria of separability of hyperproperties P_θ.

Recall that a hyperproperty P_θ is called extendedly autoseparable (Definition 3.5) if

$$P_\theta(X) = \bigvee_{x \in X} \bigwedge_{S \in \mathcal{A}: x \in S} P_\theta(S) \text{ for all } X \in \mathcal{A}. \tag{4.21}$$

But the condition (4.21) for each $\theta \in \Omega$ is just another equivalent form of the logical equivalence (4.13). Further, the functional equation (4.14) is an isomorphic equivalent of the equation (4.21); it may be called the condition of *extended autoseparability of the mapping F*. Thus, Theorem 4.1 is a direct corollary of one of the three criteria of hyperproperty separability given in Theorem 3.2, namely, the criterion of extended autoseparability.

Now we want to apply Theorem 3.2 in its complete scope and thereby to obtain the other two forms of separability criteria for the event correspondence F, and hence, causality criteria for F. To this end we shall give the conditions for F which are equivalent to the conditions of the same name for determination hyperproperties P_θ, $\theta \in \Omega$.

Definition 4.6. We shall call an event mapping $F\colon \mathcal{A} \to 2^\Omega$

(1) *recombinant* if for every two set families $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}$ with a coincident sum $\bigcup \mathcal{X} = \bigcup \mathcal{Y}$ we have

$$\bigcup_{X \in \mathcal{X}} F(X) = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} F(Y); \tag{4.22}$$

(2) *coherent* if for every set $X \in \mathcal{A}$ and for each of its coverings $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu \in N}$ in $\mathcal{A}$ we have

$$F(X) \subseteq \bigcup_{\nu \in N} F(X_\nu). \tag{4.23}$$

Lemma 4.6. The conditions of recombinantness and coherence for any F are equivalent to the respective conditions of the same name for P_θ, $\theta \in \Omega$.

The statements in Lemma 4.6, like those in the subsequent Lemma 4.7, follow immediately from the definitions of the respective conditions due to the relationships (4.15), (4.16) between F and P_θ, $\theta \in \Omega$.

Lemmata 4.4–4.6 and the first two points of Theorem 3.2 imply

Theorem 4.2. For an event mapping $F\colon \mathcal{A} \to 2^\Omega$ to be separable, or which is equivalent, causal, it is necessary and sufficient that F satisfy either of the following conditions: (1) F is recombinant; (2) F is coherent.

[Recall that the third equivalent condition "(3) F is extendedly autoseparable", was already included in Theorem 4.1 as equation (4.14).]

The conditions of recombinantness and coherence characterize the external-behavior logic of event mapping in a rather transparent way. So recombinantness means, roughly speaking, that if we consider several sets of actions, then the resulting complete sum of effects (sum in the set-theoretical sense) depends only upon the sum of actions but not upon the distribution of the sum on (sub)sets. Even more clear is the basic property of the mapping F, which is equivalent to aggregability of hyperproperties P_θ, $\theta \in \Omega$; to discuss this property we prefer to introduce a new terminology which reflects specific features of F as a function.

Definition 4.7. We shall call an event mapping $F\colon \mathcal{A} \to 2^\Omega$ *additive* if for every set family $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{A}$ we have

$$F\left(\bigcup_\nu X_\nu\right) = \bigcup_\nu F(X_\nu), \tag{4.24}$$

and *superadditive* or, respectively, *subadditive* if

$$F\Big(\bigcup_{\nu} X_{\nu}\Big) \supseteq \bigcup_{\nu} F(X_{\nu}) \tag{4.25}$$

or, respectively,

$$F\Big(\bigcup_{\nu} X_{\nu}\Big) \subseteq \bigcup_{\nu} F(X_{\nu}). \tag{4.26}$$

Finally, we shall call F *nondecreasing* if for every $X', X'' \in \mathcal{A}$

$$X' \subseteq X'' \text{ implies } F(X') \subseteq F(X''). \tag{4.27}$$

Lemma 4.7. The following conditions are respectively equivalent:

$$F \text{ is additive } \Leftrightarrow P_{\theta}, \theta \in \Omega, \text{ are aggregable}$$

$$\left.\begin{array}{c} F \text{ is superadditive} \\ \Updownarrow \\ f \text{ is nondecreasing} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} P_{\theta}, \theta \in \Omega, \text{ are semiaggregable upwards} \\ \Updownarrow \\ P_{\theta}, \theta \in \Omega, \text{ are antihereditary (nondecreasing)} \end{array}\right.$$

$$F \text{ is subadditive } \Leftrightarrow P_{\theta}, \theta \in \Omega, \text{ are semiaggregable downwards.}$$

From Theorem 3.1 and the first claim of Lemma 4.7 follows

Theorem 4.3. For an event mapping $F: \mathcal{A} \to 2^{\Omega}$ on a $\cup$-closed family $\mathcal{A}$ to be separable, or which is equivalent, causal, it is necessary and sufficient that F be additive, or equivalently, both subadditive and nondecreasing.

Remark 4.6. A singular case of additivity of the mapping F yields the following *trivial criterion of separability (causality)* of F. Let the family $\mathcal{A}$ be 1-complete (i.e. contain all singletons $\{x\}, x \in U$). Then F is separable, and hence causal, iff F satisfies the following *autoseparability condition*:

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} F(\{x\}) \text{ for all } X \in \mathcal{A}. \tag{4.28}$$

This trivial criterion in essence is based on the possibility of picking out single actions x, observing the sets $F(\{x\})$ of effects obtained, and verifying if the set $F(X)$ of effects of united actions set X will be composed exactly as a sum of effects of separable actions $x \in X$.

Consider now two constituents of the additively condition for F: superadditivity ($\Leftrightarrow$ nondecreasingness) and subadditivity. Due to Lemma 4.7, these two conditions correspond to the respective two types of semiaggregability of hyperproperties P_{θ}, and hence, due to Theorem 3.3 and 3.4, to the two types of semiseparability of these hyperproperties. In virtue of Lemma 4.4, separability of the determination hyperproperties P_{θ}, $\theta \in \Omega$, is an equivalent expression of causality of the corresponding event mapping F.

Now it is natural to suppose that if hyperproperties P_θ do not possess separability but do possess one of two types of semiseparability, then the event mapping must also display some weakened features of causal explainability. Indeed, in turns out that there is a kind of "quasicausal explainability" for F which may be founded on using some "conditional" cause-effect relationships. To be more formal, such are those analogues of causal relations between actions x and results θ which are made parametrically dependent on the presence of some specific action sets S within the context X of all implemented actions. Parametric two-place relations so constructed, i.e. virtually three-place predicates, will in the sequel be denoted as $x \overset{S}{\rightarrowtail} \theta$ and called *conditional causal relations.*

Definition 4.8. An event mapping $F\colon \mathcal{A} \to 2^\Omega$ will be called *positively* or *negatively quasicausal* if

$$\forall\theta \in \Omega\, \forall X \in \mathcal{A}\colon \big([\theta \in F(X)] \Leftrightarrow \big[\exists x \in X\, \exists S \in 2^X \bigcap \mathcal{B}\colon x \overset{S}{\rightarrowtail} \theta\big]\big) \quad (4.29)$$

or, respectively,

$$\forall\theta \in \Omega\, \forall X \in \mathcal{A}\colon \big([\theta \in F(X)] \Leftrightarrow \big[\exists x \in X\, \forall S \in 2^X \bigcap \mathcal{B}\colon x \overset{S}{\rightarrowtail} \theta\big]\big) \quad (4.30)$$

with some three-place predicate $x \overset{S}{\rightarrowtail} \theta$ of three subject variables x, θ, S on $U \times \Omega \times \mathcal{B}$, where $\mathcal{B} \subseteq 2^U$.

Lemma 4.8. An event correspondence $F\colon \mathcal{A} \to 2^\Omega$ is positively (or negatively) quasicausal iff its determination hyperproperties P_θ, $\theta \in \Omega$, are representable in an upper (or lower) semiseparable form, (3.15) or (3.16), respectively.

Indeed, it is enough to identify the parametric predicate $q_\theta(q; S)$ in the representation of the form (3.15) or (3.16) for P_θ, on the one hand, with the conditional causal relation $x \overset{S}{\rightarrowtail} \theta$ in (4.29) or (4.30), on the other.

From Lemmata 4.7, 4.8 and Theorem 3.4 follows

Theorem 4.4. For an event mapping $F\colon \mathcal{A} \to 2^\Omega$ to be positively (or negatively) quasicausal, it is necessary and sufficient that F be superadditive (or subadditive, respectively).

An additional characterization of quasicausal event mapping from Theorem 4.4 is given by the next theorem, where the character of deviation of such mappings from separability is described.

Theorem 4.5. For a mapping $F: \mathcal{A} \to 2^{\Omega}$ to be superadditive (or subadditive) it is necessary and sufficient that F be representable in *a pseudoseparable* form, namely,

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} f(x; X) \text{ for all } X \in \mathcal{A} \tag{4.31}$$

with some nondecreasing (respectively, nonincreasing) in X on $\mathcal{A}$ function $f: U \times \mathcal{A} \to 2^{\Omega}$ (*upper* and *lower semiseparability*, respectively).

This theorem is derived by translation of Equation (3.13) (in Theorem 3.3), applied to determination hyperproperties P_θ, from the language of predicates $P_\theta(X)$ and $p_\theta(x; X)$ to the language of functions $F(X)$ and $f(x; X)$ [similarly to the transition from (4.17) to (4.18)].

Let us discuss now the meaning of the "quasicausality" notion, returning to Definition 4.8. Positive quasicausality (4.29) means that a hypothetical relation of the elementwise determination $x \rightarrowtail \theta$ is subjected to a positive system effect, i.e., the validity of this relation depends "positively" on the whole set of implemented actions $X \ni x$.

In fact, on expanding the set X in $\mathcal{A}$, an element x may, due to (4.29), become the cause determining the effect θ (if X includes some "supporting" set $S \in \mathcal{B}$ such that $x \overset{S}{\rightarrowtail} \theta$ is true); but x cannot cease to be that cause if it already was. On the contrary, negative quasicausality in a similar way means a negative system effect for the determination relation: an element x may cease to be a cause for θ if X includes some "blocking" set $S \in \mathcal{B}$ such that $x \overset{S}{\rightarrowtail} \theta$ is not true.

Consider also another, slightly different form of displaying the positive system effect in the framework of a hypothetical causal description of event mapping. This is a kind of *hypercausality*, namely, the consideration of not only single, separate, but also complex compound causes in the form of setwise (multiple) actions.

The corresponding hypercausal explanation of event correspondences is based on the use of two-place determination (hyper)relations of the form $S \rightarrowtail \theta$ on $\mathcal{B} \times \Omega$ ($\mathcal{B} \subseteq 2^U$), where the set S is treated as a complex cause of the effect θ [cf. (4.6) in Remark 4.2].

Definition 4.9. An event correspondence $F: \mathcal{A} \to 2^{\Omega}$ will be called *hypercausal* if

$$\forall \theta \in \Omega \, \forall X \in \mathcal{A}: \Big([\theta \in F(X)] \Leftrightarrow \Big[\exists S \in 2^X \bigcap \mathcal{B}: S \rightarrowtail \theta \Big] \Big), \tag{4.32}$$

where $S \rightarrowtail \theta$ is some two-place relation on $\mathcal{B} \times \Omega$ ($\mathcal{B} \subseteq 2^U$).

Lemma 4.9. An event mapping F is hypercausal iff the corresponding determination hyperproperties P_θ, $\theta \in \Omega$, are representable in a hyperseparable form (3.14).

Indeed, it is enough to identify the predicate $Q_\theta(S)$ [in the representation (3.14) for P_θ] with the predicate (relation) $S \rightarrowtail \theta$ in (4.32). Lemma 4.9 and the first claim of Theorem 3.4, in virtue of Lemma 4.7, imply

Theorem 4.6. For an event mapping $F\colon \mathcal{A} \to 2^\Omega$ to be hypercausal it is necessary and sufficient that F be nondecreasing, or, which is equivalent, superadditive.

As an example of hypercausal event correspondence we may take a simple scheme of logical deduction. Let F be a set of potentially available primary statements ("facts" or "axioms"), and Ω be a set of possible conclusions from various combinations of "positive" (known to be true) primary statements. Let $S \rightarrowtail \theta$ $(S \subseteq U, \theta \in \Omega)$ be a generic form of rules of deducing true conclusions from conjunctions of primary statements. The deduction scheme is assumed to be conventionally *monotonic*, i.e., the derived conclusion cannot be nullified on adding new primary statements. Such a deduction scheme for each set $S \subseteq U$ of true primary statements generates the set $\Theta = F(X)$ of all true conclusions derivable from X, where

$$\Theta = \{\theta \in \Omega | \exists S \subseteq X\colon S \rightarrowtail \theta\},$$

which is a case of hypercausally explainable correspondence.

Concluding this section, for the sake of completeness of the general picture we shall consider once more those "semiadditive" event mappings which, due to Theorem 4.4 and 4.6, admit quasicausal and hypercausal representations. We shall supply explicit expressions for them in the functional language.

Theorem 4.7. For a mapping $F\colon \mathcal{A} \to 2^\Omega$ to be superadditive, or, which is equivalent, nondecreasing, it is necessary and sufficient that F be representable in the form

$$F(X) = \bigcup_{S \in \mathcal{B}: S \subseteq X} G(S) \ \text{ for all } \ X \in \mathcal{A} \tag{4.33}$$

(*hyperseparable* representation), or, equivalently, in the form

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{S \in \mathcal{B}: S \subseteq X} g(x; S) \ \text{ for all } \ X \in \mathcal{A}, \tag{4.34}$$

while for F to be subadditive it is necessary and sufficient that F be representable in the form

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} \bigcap_{S \in \mathcal{B}: S \subseteq X} g(x; S) \ \text{ for all } \ X \in \mathcal{A}, \tag{4.35}$$

(*detailed semiseparable* representations) with some set family $\mathcal{B} \subseteq 2^U$ and some generating functions $G\colon \mathcal{B} \to 2^\Omega$ and $g\colon U \times \mathcal{B} \to 2^\Omega$.

This theorem is an evident isomorphic functional equivalent of the logical Theorem 3.4 applied to determination hyperproperties P_θ, $\theta \in \Omega$. The representations (4.34) and (4.35) detail the general form (4.31) of semiseparable representations from Theorem 4.5.

5. Concluding remarks

This work is mainly devoted to the logical analysis of the relationship between properties of objects which relate to each other as a "whole" and a "part". As universal model of such objects we have used herein a simple abstraction, a system of sets with the usual operations or transformations over this system (forming unions of sets and taking sub- and supersets; our consideration may be easily completed with set operations of intersection and complement). By way of formalizing object attributes, viz., properties (or hyperproperties), we accepted conventional one-place predicates from the two-valued classical logic.

Further modifications and generalizations of the model seem to be natural. So, e.g., as objects endowed with (hyper)properties one may take elements of more general abstract constructions of the (semi)lattice type.

For a logic, even in the conventional framework of two-valued "truth-falsehood" one may seek some natural representations of a hyperproperty of a composite object not via a single property, as in the present work, but via several "simple" properties. One may seek similar ways to simplify not only one-place but also multiplace predicates (a specific example of the latter, viz., two-place "event correspondence", has been considered above).

Finally, besides 0-1-valued logical functions (predicates) one may study an algebra of more general functional attributes of objects (still with a kind of algebra of "joining" and "dividing" these objects).

As an example of the latter type of problem, one can use again the above model of functional dependence of primary and secondary events. Here an "object" is a set of primary events (actions), and its "attribute" is the generated set of secondary events (results). The parallelism of logical and set-functional equations in this model may be treated as an indication of the validity of the generalized statement of the problem concerning attributes of composite objects (systems).

Об упорядочении в структуре множественных связей [1]

Многие реальные ситуации охватываются моделями, в которых задана некоторая совокупность элементов (объектов), тем или иным способом связанных между собой. В простейшем случае, который рассматривается в настоящей работе, связи носят логический характер: «есть» — «нет». Такие связи внутри совокупности объектов обычно описываются формально бинарными отношениями, или — что более наглядно, а с математической точки зрения эквивалентно («изоморфно»), — графами на заданном множестве объектов (вершин). Однако такими отношениями (графами) охватывается лишь один достаточно специальный вид связей — а именно, связи типа «объект — объект».

В действительности наряду с этим простейшим типом «парных» связей могут существовать «коллективные», или множественные связи, в которых участвуют более чем по два объекта. Такие связи формально описываются более сложными отношениями, чем обычные бинарные (двухместные) отношения на множестве объектов. Ограничимся здесь случаем отношений, которые внешне сохраняют свой «парный» характер, но не являются обычными бинарными отношениями: это — не связи вида «объект — объект», а связи вида «группа объектов — группа объектов», или даже проще, несимметричные «однонаправленные» связи вида «объект — группа объектов». Связям последнего, «одностороннего» типа, как первому шагу при отходе от простейших связей «объект — объект», посвящена настоящая работа. Основные ее результаты относятся к возможности установления определенной упорядоченности таких связей, сходной с обычной линейной упорядоченностью. При этом имеется в виду, что в связях с участием групп объектов каждая такая группа выступает как единое целое и тем самым эти связи не сводятся (по крайней мере, априори) к связям «объект — объект». Как раз сама возможность такого сведения, т.е. в определенном смысле упрощения множественных связей путем замены их простыми, «парными», составляет одну из целей анализа таких связей. Для того чтобы убедиться, что существенно множественные связи типа «группа объектов — объект» действительно встречаются в реальных задачах, рассмотрим несколько примеров.

Примеры и определения

В этом разделе приводится серия содержательных описаний связей внутри некоторой совокупности объектов U, формализация которых

[1] Методы сбора и анализа сложноорганизованных данных.—М.: Институт проблем управления, 1991.—С. 51–60.

включает связи не (или не только) между индивидуальными объектами a и b из U, но между объектами a и целыми подмножествами объектов A ($a \in U$, $A \subseteq U$).

Пример 1. Структура загораживаний.

Пусть в реальном трехмерном пространстве как-то расположены различные предметы (объекты), на которые может смотреть неподвижный наблюдатель; множество всех объектов (также неподвижных) обозначим через U. При этом одни объекты из U могут загораживать (для наблюдателя) другие. В частности, возможна ситуация, когда некий объект b полностью загорожен некоторым объектом a. Обозначим эту ситуацию как связь $a \longrightarrow b$ («a загораживает b»). Однако более общей является ситуация, когда ни один объект a, взятый отдельно, не может загородить объект b, но несколько объектов $a_1, \dots, a_n$, взятые в совокупности, полностью загораживают b. Определим эту ситуацию как множественную связь типа «группа объектов — объект» и обозначим ее как $\{a_1, \dots, a_n\} \longrightarrow b$, или $A \longrightarrow b$, где $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — загораживающее множество объектов. В общем случае может иметься несколько различных множеств $A_1, \dots, A_m$ — альтернативных сочетаний объектов, каждое из которых загораживает b. Обозначим через $\mathcal{A}_b$ семейство $\{A_1, \dots, A_m\}$ всех загораживающих множеств для b. Структура взаимных загораживаний в данной совокупности объектов U полностью определяется заданием семейств $\mathcal{A}_b$ для всех $b \in U$, т.е. заданием всех множественных связей вида

$$A \longrightarrow b, \text{ где } A \in \mathcal{A}_b \ (A \subseteq U), \ b \in U. \qquad (1)$$

Далее такую структуру связей [1] вида (1) будем называть *ориентированным гиперграфом* [2]; этот гиперграф — односторонний в том смысле, что его дуги всегда идут от множеств к одноэлементным вершинам. Поскольку гиперграфы другого вида, чем односторонние ориентированные в вышеуказанном смысле, в данной работе не рассматриваются, далее будем говорить просто *гиперграф* и обозначать его символом H.

Обращаясь к примеру 1, можно сказать, что структура загораживаний объектов в пространстве в общем случае множественная, гиперграфовая; она не описывается простым бинарным отношением (графом) на множестве объектов. Тем более частным случаем выглядит наличие цепочки последовательно загораживающих друг друга объ-

---

[1] Формально представляющую собой двухместное отношение на $2^U \times U$, или «гиперотношение» по терминологии [174].

[2] Эта терминология — не общепринятая; однако можно сослаться на работу [96], где ориентированным гиперграфом названа конструкция именно такого вида.

ектов. В то же время хотелось бы найти какие-то аналоги «упорядоченности» даже в общем случае пространственного расположения объектов. Ниже этот пример будет использоваться для иллюстрации общих результатов об упорядоченности в гиперграфовых структурах.

Пример 2. Логическая структура системы высказываний.

Пусть имеется множество U некоторых, например математических, утверждений. Пусть связь $A \longrightarrow b$, где $A \subseteq U$, $b \in U$, означает, что утверждение b выводимо из набора других утверждений $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Пусть $\mathcal{A}_b$ — семейство всех таких множеств A, что $A \longrightarrow b$. Получаем гиперграф H логических связей на множестве высказываний U.

Пример 3. Структура толкового словаря.

Пусть U — множество слов, употребляемых в некотором толковом словаре, и пусть связь $A \longrightarrow b$ (где $A \subseteq U$, $b \in U$) означает, что для пояснения смысла слова b достаточно знать смысл всех слов из множества A. Поскольку пояснить смысл слова b можно, вообще говоря, несколькими разными способами, имеем целое семейство $\mathcal{A}_b$ таких множеств A. Вновь в результате получаем структуру связей вида $A \longrightarrow b$ ($A \in \mathcal{A}_b$, $b \in U$), т.е. некоторый гиперграф H.

Пример 4. Структура операций (работ).

Пусть теперь объектом является некоторая единичная операция при обработке некоего изделия. Пусть U — множество всевозможных операций. Начнем с простейшего случая безальтернативных технологий, когда никакая операция $u \in U$ не может быть равноценно заменена никакой другой — ни одиночной операцией, ни групповой операцией. Тогда можно для каждого объекта-операции $b \in U$ указать множество $A \subseteq U$, составленное из всех тех и только тех операций $a_1, \dots, a_n \in U$, которые по технологии обработки должны предшествовать операции b. Эту ситуацию можно обозначить как связь $A \longrightarrow b$ (единственную для объекта b), причем такая множественная связь очевидным образом может быть заменена множеством простых (парных) связей $a_1 \longrightarrow b, \dots, a_n \longrightarrow b$. Это, в частности, позволяет (при безальтернативности технологий!) изображать структуру операций графом. В связи $\{a_1, \dots, a_n\} \longrightarrow b$ каждая из операций $a_1, \dots, a_n$ является необходимым предшественником операции b, а вся совокупность $\{a_1, \dots, a_n\}$ — достаточным предшественником.

Иная ситуация возникает при наличии альтернативных технологий, т.е. когда помимо группы операций $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ в качестве возможного предшественника операции b можно использовать и какую-нибудь из других групп операций: $A' = \{a'_1, \dots, a'_{n'}\}$ или A'', или A''' и т.д. При этом про отдельную операцию a уже нельзя, вообще говоря, сказать, что она является необходимым предшественником операции b (это можно сказать только лишь, когда $a \in A \cap A' \cap A'' \cap \ldots$). С другой стороны, каждый из комплексов операций $A, A', A'', \ldots$ является достаточным предшественником [1] операции b.

Итак, вся структура технологических связей между операциями в общем случае задается гиперграфом H вида $A \longrightarrow b$ ($A \in \mathcal{A}_b$, $b \in U$) (через $\mathcal{A}_b$ обозначено семейство всевозможных комплексов операций A, являющихся достаточными предшественниками для операции b). Такие связи «предшествования операций» — существенно множественные.

Замечание. Тем не менее можно описывать такие технологические связи в терминах «парных» связей между одиночными операциями, если допустить явное использование логических связок «и» и «или» при перечислении операций. Действительно, пусть для операции b семейство $\mathcal{A}_b$ имеет вид $\{A^1, \ldots, A^m\}$, где $A^1 = \{a_1^1, \ldots \ldots, a_{n_1}^1\}, \ldots$, $A^m = \{A_1^m, \ldots, A_{n_m}^m\}$. Тогда для выполнимости операции b необходимо и достаточно, чтобы ей предшествовали операции

$$a_1^1 \text{ и } a_2^1 \text{ и } \ldots \text{и } a_{n_1}^1$$

или

$$a_1^2 \text{ и } a_2^2 \text{ и } \ldots \text{и } a_{n_2}^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

или

$$a_1^m \text{ и } a_2^m \text{ и } \ldots \text{и } a_{n_m}^m.$$

Поэтому при желании можно ограничиться рассмотрением связей «объект — объект» вида $a_i^j \longrightarrow b$ ($i = 1, \ldots, n_j$; $j = 1, \ldots, m$), изображая их графом, но обязательно снабжая дуги (связи) этого графа указанием на применяемые логические связки — «и» либо «или» (по терминологии ряда работ это И-ИЛИ-граф [71]). С другой стороны, использование гиперграфа H позволяет избежать явного задания логических связок (они неявно включены в саму структуру H).

Пример 5. Структура расписания учебных курсов.

Это некоторая разновидность примера 4. Пусть имеется список U учебных курсов (лекционных курсов или учебных пособий) и указаны логические требования к возможной последовательности их прохождения. А именно, для каждого курса (учебника) $b \in U$ указан список $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq U$ или несколько таких альтернативных списков других курсов (учебников), которые должны быть пройдены

[1] Это аналогично ситуации с «необходимыми» и «достаточными» причинами и комплексами причин при логическом анализе причинных связей [174].

предварительно. В общем случае альтернативности имеем для каждого курса $b \in U$ семейство $\mathcal{A}_b = \{A, A', \dots\}$ достаточных (возможно, избыточных) наборов курсов-предшественников. Логическая структура системы (возможных расписаний) курсов описывается гиперграфом H связей $A \longrightarrow b$, где $A \in \mathcal{A}_b$, $b \in U$.

Итак, для самых разных примеров реальных структур связей между объектами можно видеть, что каждый раз эти структуры связей оказываются множественными, т.е. гиперграфовыми, вида (1).

Укажем сейчас на некоторые особенности гиперграфов H, общие для всех рассмотренных выше и многих других примеров.

Особенность 1. Гиперграф H связей $A \longrightarrow b$ ($A \in \mathcal{A}_b$, $b \in U$) является *монотонным по* A, а именно, если имеет место $A \longrightarrow b$, то и подавно $A' \longrightarrow b$ для всякого $A' \supset A$ ($A \subseteq U$).

Особенность 2. Гиперграф H связей $A \longrightarrow b$ ($A \in \mathcal{A}_b$, $b \in U$) является *иррефлексивным*, а именно, если имеет место $A \longrightarrow b$, то $A \setminus \{b\} \longrightarrow b$.

Особенность 3. Эта особенность, в отличие от двух предыдущих, может быть выражена пока лишь неформально. Можно заметить, что в каждом из примеров 1–5 множественная связь $A \longrightarrow b$ так или иначе имеет смысл своего рода группового «предшествования» множества объектов (событий) A объекту b.

Это наблюдение подводит к формализации задачи об «упорядочении» объектов для структуры множественных связей, аналогичном обычному линейному упорядочению (ранжированию) объектов.

Постановки задач об упорядочении в структурах связей

Пусть дан гиперграф H на конечном множестве элементов U ($|U| = N$), характеризуемый связями $A \longrightarrow b$ ($A \in \mathcal{A}_b$, $b \in U$). Приступим к формализации постановки задачи об упорядочении элементов множества U, в некотором смысле согласованном со структурой множественных связей гиперграфа H. Для того чтобы сформулировать соответствующие определения наиболее естественным образом, пойдем по следующему пути. Будем отталкиваться от того, что обычный ориентированный граф G связей-дуг $a \longrightarrow b$ на множестве элементов-вершин U ($a, b \in U$) можно трактовать по существу как специальный случай гиперграфа (пренебрегая формальным различием между элементом a и одноэлементным множеством $A = \{a\}$). Приведем теперь ряд определений и процедур, относящихся к упорядочению вершин орграфа, в том или ином смысле согласованному с его структурой. После этого можно будет ввести соответствующие определения и процедуры для гиперграфа путем обобщения их «графовских» прототипов.

Для обычных орграфов общеприняты естественные определения их упорядоченности (или потенциальной упорядочиваемости). Эталоном упорядоченного орграфа является граф линейного порядка, т.е. транзитивная цепь вида

$$u_1 \longrightarrow u_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_N, \quad \{u_1, \ldots, u_N\} = U.$$

С другой стороны, намного более слабым (но все же достаточно важным, как будет видно из дальнейшего) типом упорядоченного орграфа является граф подпорядка (по терминологии Фишберна), т.е. ациклический орграф. Общим основанием для отнесения столь различных типов орграфов к «упорядоченным» служит возможность последовательного упорядочения (ранжирования) элементов множества U (вершин) в определенном, разъясняемом ниже смысле согласованного со структурой ориентированного графа G.

Ранжированием элементов множества U будем называть любую их нумерацию, т.е. взаимно однозначное отображение $\rho\colon U \to \{1, 2, \ldots, N\}$ (где $N = |U|$). Назовем ориентированный граф G *подупорядоченным*, если существует ранжирование ρ на U такое, что

$$\text{из } x \longrightarrow y \text{ следует } \rho(x) < \rho(y), \tag{2}$$

и *линейно упорядоченным*, если, в усиление требования (2),

$$x \longrightarrow y \text{ тогда и только тогда, когда } \rho(x) < \rho(y). \tag{3}$$

Разумеется, линейно упорядоченный граф — это то же самое, что граф линейного порядка. Легко также доказать, с учетом конечности множества U, что граф G является подупорядоченным в том и только в том случае, если G ацикличен, т.е. является графом подпорядка. Необходимость отсутствия циклов $x \longrightarrow y \longrightarrow \ldots \longrightarrow x$ для выполнения условия (2) очевидна; о достаточности будет сказано ниже (отметим, что при бесконечном U доказательство достаточности становится непростым, требуя использования аксиомы выбора; см., например, [199]). Для того чтобы пояснить интересующий нас аспект согласованности ранжирования ρ с соответствующим (под)упорядоченным орграфом G, введем теперь понятие первых элементов множества вершин U для графа G.

Элемент-вершина $a \in U$ называется *первым* для G на U, если

$$\text{не существует } b \in U \text{ такого, что } b \longrightarrow a. \tag{4}$$

Отметим, что первых вершин может быть несколько (но может быть и ни одной — как, в частности, во всяком цикле). Понятие первой вершины для графа G естественным образом переносится и на любое подмножество $V \subset U$ его вершин: достаточно в (4) формально заменить U на V. Естественность такого переноса определения обусловлена, по существу, естественностью определения подграфа G_V как сужения графа G на множество вершин $V \subset U$: связи, учитываемые в (4) при замене U на V — это в точности связи подграфа G_V. Благодаря такой универсальной применимости понятия «первая вершина» на нем можно основать процедуру последовательного упорядочивания вершин графа (ранжирования). С этой целью будем последовательно выделять первые вершины из последовательно сужающихся подмножеств вершин. Такую процедуру ранжирования вершин ориентированного графа (а также последующее ее распространение на гиперграфы) будем называть процедурой разборки.

Процедура разборки ориентированного графа G. Пусть x_1 — (некоторая) первая вершина орграфа G на U; положим $\rho(x_1) = 1$; далее индуктивно: пусть x_k — первая вершина графа G (точнее, подграфа G_V) на $V = U \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$; положим $\rho(x_k) = k$, и т.д. Полученную последовательность вершин $\langle x_1, \ldots, x_N \rangle$ назовем *приоритетным упорядочением* (множества U).

Подчеркнем, что для того чтобы процедура разборки графа G была реализуема, т.е. не останавливалась при $k < N$, нужно, чтобы на каждом ее шаге существовала (хотя бы одна) первая вершина.

Утверждение 1. Всякое приоритетное упорядочение вершин орграфа G на U согласовано со структурой G в смысле требования (2), а если G — граф линейного порядка, то и в смысле (3).

(Утверждение 1 немедленно вытекает из определений первой вершины и процедуры разборки графа.)

Из первой части утверждения 1 следует, что существование приоритетного упорядочения вершин возможно только при ацикличности орграфа G. Верно и обратное.

Утверждение 2. Ацикличность графа G не только необходима, но и достаточна для реализуемости процедуры разборки этого графа на U, т.е. для существования приоритетного упорядочения элементов множества U.

В самом деле, допустим противное: процедура разборки G нереализуема, т.е. на некотором подмножестве $V \subset U$ подграф G_V не имеет первых вершин. Но отсюда легко выводится наличие цикла в G_V вопреки предположенной ацикличности G.

Распространим теперь представления об упорядоченности на случай множественных связей, т.е. при переходе от графов G связей

$a \longrightarrow b$ $(a, b \in U)$ к гиперграфам H связей $A \longrightarrow b$ $(A \in \mathcal{A}_b,\ b \in U)$. Прежде всего, понятие «первый элемент» естественным образом переносится с графов на гиперграфы. А именно, элемент $a \in U$ будем называть *первым в гиперграфе H на U*, если не существует $A \subseteq U$ такого, что $A \longrightarrow a$ $(A \in \mathcal{A}_a)$.

В терминах приведенного ранее примера 1 первый элемент — это всякий незагораживаемый, видимый объект. В терминах примера 2 первый элемент — это невыводимое утверждение (можно потребовать, например, чтобы оно было принято за аксиому); в терминах примера 3 — это необъясняемое (в данном словаре) слово, и т.п.

Теперь можно изучить возможность последовательного, пошагового выделения «первых» элементов и тем самым — возможность своего рода аналога «приоритетного упорядочения» заданной гиперграфовой структуры. Для этого сначала нужно определить, что будет пониматься под сужением гиперграфовой структуры на подмножество V множества U, если исходная гиперграфовая структура H на множестве U задана связями $A \longrightarrow u$, где $A \in \mathcal{A}_u$, $u \in U$. Определим *подгиперграф* H_V (или *сужение* гиперграфа H на множество $V \subset U$) следующим образом: связи в H_V имеют вид $A \longrightarrow v$, где $v \in V$, а $A \in \mathcal{A}_v \cap 2^V$ (т.е. из семейства $\mathcal{A}_v$ оставляются только те подмножества A, которые целиком лежат в V). Такое определение сужения гиперграфовой структуры на подмножество $V \subset U$ представляется естественным, в частности, для примера 1: действительно, если при разборке совокупности предметов оставить только подмножество V исходного множества объектов U, то объект $v \in V$ останется загороженным в том и только в том случае, когда в V останется хотя бы одно загораживающее подмножество $A \in \mathcal{A}_v$, $A \subseteq V$.

Теперь на основе такого определения сужения гиперграфовой структуры можно дать определение первых элементов в подмножествах $V \subset U$. А именно, будем называть элемент $v \in V$ *первым* на подмножестве $V \subset U$ для гиперграфовой структуры H (точнее, H_V), если в V не найдется множества $A \subseteq V$ такого, что $A \in \mathcal{A}_v$.

Наконец, теперь можно описать, аналогично случаю ориентированных графов, *процедуру разборки гиперграфа H*: сначала в качестве x_1 берется первый элемент H на U;..., в качестве x_k берется первый элемент H на $U \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$, и т.д. Получаемую последовательность $\langle x_1, \ldots, x_N \rangle$ снова будем называть *приоритетным упорядочением* множества U.

Введем следующий аналог (в слабой форме) цикла ориентированного графа. Назовем непустое множество элементов $C \subseteq U$ *гиперциклическим* для гиперграфа H, если для каждого $x \in C$ существует $A \subseteq C$ такое, что $A \longrightarrow x$ $(A \in \mathcal{A}_x)$. Иначе говоря, гиперциклическое множество C — это, по определению, множество, на котором соответствующий подгиперграф H_C гиперграфа H не дает первых элементов.

Оправдание термина «гиперциклическое» дается нижеследующей леммой, которая характеризует внутреннюю структуру гиперциклических множеств (и, в частности, позволяет очевидным образом детализировать формулировку последующей теоремы 1).

Будем называть *гиперцепью* гиперграфа H любую последовательность пар $\langle (x_0, X_0), (x_1, X_1), \ldots \rangle$ такую, что

$$X_0 \longrightarrow x_0; x_1 \in X_0, X_1 \longrightarrow x_1; \ldots, X_k \longrightarrow \\ \longrightarrow x_k; x_{k+1} \in X_k, X_{k+1} \longrightarrow x_{k+1}; \ldots,$$

где $x_i \in U$ и $X_i \subseteq U$, $i = 0, 1, \ldots$. Если гиперцепь обрывается на некотором $i = l$ и если при этом $x^* \in X_l$, то будем называть ее *конечной гиперцепью, исходящей из* x_0 *и идущей в* x^*; в противном случае — *бесконечной* (исходящей из x_0). Если $V \subset U$ и $x_i \in V$, $X_i \subseteq V$, $i = 0, 1, \ldots$, то будем называть указанную последовательность пар (x_i, X_i) *гиперцепью, лежащей в* V. Если гиперцепь конечна и замкнута, т.е. $x^* = x_0$, то будем называть ее *слабым гиперциклом.* Если слабый гиперцикл таков, что он целиком лежит в множестве своих элементов-вершин $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}\}$, то будем называть его *гиперциклом* (просто). Наконец, пару $(x_0, \varnothing)$, где $\varnothing \longrightarrow x_0$, также будем называть гиперциклом (несобственным, или гиперциклом длины 0).

Лемма. Всякое гиперциклическое множество гиперграфа содержит гиперцикл.

Доказательство. Пусть C — гиперциклическое множество. Возьмем некоторое его минимальное (в смысле теоретико-множественного включения) гиперциклическое подмножество $K \subseteq C$. Если K одноэлементно, т.е. имеет вид $K = \{x_0\}$, то $\varnothing \longrightarrow x_0$ или $\{x_0\} \longrightarrow x_0$, так что имеем либо несобственный гиперцикл, либо гиперцикл типа «петля» (длины 1). Пусть теперь $|K| > 1$. Согласно принятому допущению о минимальности K, в K не существует x такого, что $\varnothing \longrightarrow x$. Поскольку K — гиперциклическое множество, т.е. для всякого $x \in K$ найдется $X \subseteq K$ такое, что $X \longrightarrow x$ (причем $X \neq \varnothing$), то для любого $x_0 \in K$ можно построить исходящую из x_0 бесконечную гиперцепь в K (возможно, с повторениями элементов). Рассмотрим всевозможные бесконечные гиперцепи, исходящие из всех $x \in K$; для каждой такой гиперцепи Ch в K отметим множество $I(Ch)$ элементов, встречающихся в ней бесконечное число раз, и возьмем (какую-нибудь) такую гиперцепь Ch^*, чье множество $I(Ch^*) = I^*$ максимально (по включению) по всем гиперцепям Ch из K. Покажем, что $I^* = K$. Допустим противное: $I^* \subset K$. Тогда мыслимы два альтернативных случая:

а) Если $x \in I^*$ и $X \longrightarrow x$, то $X \subseteq I^*$. Тогда I^* — гиперциклическое множество, что противоречит минимальности K.

б) Существуют $x_0 \in I^*$ и $X_0 \not\subseteq I^*$ такие, что $X_0 \longrightarrow x_0$. В этом случае возьмем произвольное $x' \in X_0 \setminus I^*$ и выпустим из x' всевозможные гиперцепи Ch' в K. Если бы ни одна из этих гиперцепей не возвращалась в I^*, т.е. для всех последующих элементов-вершин $x'', x''', \ldots$ этих гиперцепей было бы $x'', x''', \ldots \in K \setminus I^*$, а значит, и для всех соответствующих множеств $X', X'', \ldots$ было бы $X', X'', \ldots \subseteq K \setminus I^*$, то, очевидно, внутри $K \setminus I^*$ имелось бы гиперциклическое множество (как объединение всех элементов всех этих гиперцепей), вопреки минимальности K. Следовательно, существует конечная гиперцепь $Ch^{*\prime}$, начинающаяся в x' и идущая в некоторый элемент $x^* \in I^*$, а значит, и конечная гиперцепь вида $Ch^0 = \langle (x_0, X_0), (x', X'), \ldots \rangle$, исходящая из x_0 и идущая через x' снова в x_0 (слабый гиперцикл). Встраивая в исходную гиперцепь Ch^* эту конечную гиперцепь Ch^0 всякий раз, как в ней встретится элемент x_0, получим новую бесконечную гиперцепь Ch^{**}, для которой заведомо $I(Ch^{**}) \supseteq I^* \cup \{x'\} \supset I^*$, вопреки предположению о максимальности $I^* = I(Ch^*)$.

Таким образом, должно быть $I^* = K$, и в силу определения I^* бесконечная гиперцепь Ch^* содержит конечный замкнутый отрезок, проходящий через все элементы множества $I^* = K$, что и представляет собой искомый гиперцикл. Лемма доказана.

Замечание. Фактически в приведенном доказательстве леммы получено несколько более сильное утверждение: всякое минимальное по включению гиперциклическое множество не просто содержит, но, более того, само образует гиперцикл. (Выражения «содержит» и «образует» употребляются здесь в несколько вольном, но достаточно ясном смысле.) Ситуация аналогична случаю обычных орграфов: там всякое «циклическое множество» вершин (т.е. множество K такое, что для каждого $x \in K$ найдется $y \in K$, для которого $y \longrightarrow x$), минимальное по включению, образует цикл. При этом в орграфе такой минимальный цикл — простой, т.е. вершины в нем не повторяются. В гиперграфах, однако, избежать повторения элементов-вершин даже в минимальном гиперцикле, вообще говоря, нельзя. Это показывает следующий простой пример гиперграфа:

$$U = \{a, b, c\};\ \{a\} \longrightarrow b,\ \ \{a\} \longrightarrow c, \{b, c\} \longrightarrow a.$$

В таком гиперграфе существует единственный (с точностью до начала отсчета) минимальный гиперцикл $\langle (a, \{b, c\}),\ (b, \{a\}),\ (a, \{b, c\}),\ (c, \{a\}) \rangle$ с неустранимым повторением элемента-вершины a.

Очевидно также, что всякий гиперцикл сам образует гиперциклическое множество.

Теперь на основе данных определений перейдем к анализу возможностей упорядочивания элементов, в некотором смысле согласованного с гиперграфовой структурой.

Основные утверждения об упорядоченности для гиперграфов

Теорема 1. Для того чтобы процедура разборки гиперграфа H на множестве U была реализуема, необходимо и достаточно, чтобы U не содержало гиперциклического множества элементов для H.

Доказательство. Пусть в U имеется гиперциклическое множество элементов $C \subseteq U$, и допустим, что процедура разборки H реализуема. Тогда должен существовать такой шаг процедуры k, на котором *впервые в процедуре* берется в роли нового элемента x_k некоторый элемент x из C: $x_k = x \in C \subseteq U \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$. Но это противоречит определению гиперциклического множества, согласно которому x не может быть первым в C, и подавно — в его надмножестве $U \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$. Значит, процедура разборки H не реализуема. Обратно, пусть у H отсутствуют гиперциклические множества. Тогда на первом шаге процедуры разборки, поскольку само U — также не гиперциклическое множество, найдется первый элемент $x = x_1$. Рассуждая по индукции, найдем, что на k-м шаге, поскольку $U \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ — не гиперциклическое, в нем найдется первый элемент $x = x_k$, и т.д. Следовательно, процедура разборки H реализуема. Теорема доказана.

Рассмотрим некоторое приоритетное упорядочение элементов множества U, т.е. последовательность $\langle x_1, \dots, x_N \rangle$ первых элементов, получаемую процедурой разборки гиперграфа H на U. Обозначим это линейное упорядочение множества U символом $<$; таким образом, $x_1 < x_2 < \dots x_N$. Это упорядочение *согласовано* со структурой гиперграфа H в том смысле, что:

$$\begin{array}{l} \text{для любого } u \in U \text{ не существует множества} \\ A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq U \text{ такого, что} \\ u < a_1, \dots, u < a_n \text{ и при этом } A \longrightarrow u. \end{array}$$

В терминах примера 1: процедура разборки гиперграфа «загораживаний» выделяет на каждом шаге незагороженный объект, устраняет его из «поля зрения» и берет следующий объект, оказавшийся незагороженным. В любом приоритетном упорядочении никакой объект не загораживается никакой совокупностью следующих за ним объектов.

Препятствием к построению приоритетного упорядочения множества объектов может служить, в силу теоремы 1, лишь наличие гиперциклического подмножества объектов. В таком подмножестве вообще нет первых (в примере 1 — незагораживаемых) объектов. Применительно к примеру 1 ясно, что невозможна ситуация, когда *каждый* объект был бы *полностью* загорожен другими; поэтому здесь процедура разборки всегда реализуема.

Отметим, что процедура разборки гиперграфа H, если она реализуема, дает, вообще говоря, не единственное упорядочение элементов множества U, согласованное с H. В самом деле, первых элементов на том или ином шаге процедуры может быть несколько, и в этом случае при продолжении процедуры может быть выбран любой из них.

Рассмотрим теперь обобщение процедуры разборки гиперграфа, позволяющее охватывать и случаи отсутствия первых элементов. Более того, результатом такой обобщенной процедуры может быть любое из линейных упорядочений множества U, однако снабженное некоторой дополнительной информацией («метками»). Польза такого обобщения будет видна из дальнейшего.

Обобщенная процедура разборки гиперграфа H на U. Зафиксируем заранее некоторую последовательность (линейное упорядочение) $\langle u_1, \dots, u_N \rangle$ элементов множества U. Начнем с элемента u_1; скажем, что он входит в данную последовательность *положительно*, если u_1 является первым для H в U, и *отрицательно* — в противном случае. Вообще, для элемента u_k скажем, что он входит в данную последовательность положительно, если u_k является первым для H в $U \setminus \{u_1, \dots, u_{k-1}\}$, и отрицательно — в противном случае. Последовательность $\langle u_1, \dots, u_N \rangle$ с отмеченными «знаками» (положительности либо отрицательности) всех ее элементов будем называть *маркированной последовательностью.* Заметим, что если (и только если) $\langle u_1, \dots, u_N \rangle$ согласована с H, то все ее элементы положительны.

Рассмотрим все $N!$ линейных упорядочений множества U и соответствующие $N!$ маркированных последовательностей элементов U, получаемые вышеописанной обобщенной процедурой разборки гиперграфа H на U.

Теорема 2. Пусть задан гиперграф H связей $A \longrightarrow u$ на U ($A \in \mathcal{A}_u$, $u \in U$), монотонный по A и иррефлексивный. Тогда H однозначно восстанавливается по совокупности всех своих маркированных последовательностей элементов U следующим образом:

$A \longrightarrow u$ в том и только в том случае, если выполнено *условие* (A, u):
в каждой маркированной последовательности
$\langle u_1, \dots, u_N \rangle$ элементов множества U,
в которую u входит положительно, хотя
бы один элемент $a \in A$ предшествует u.

Доказательство. Сначала покажем, что если $A \longrightarrow u$, то выполнено условие (A, u). Действительно, пусть u входит в $\langle u_1, \ldots, u_N \rangle$ положительно в качестве некоторого u_k. Тогда согласно обобщенной процедуре разборки $u = u_k$ является первым элементом в множестве $U \setminus \{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$. Следовательно, $A \not\subseteq U \setminus \{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$, т.е. существует $a \in A$ такое, что $a \in \{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$; иначе говоря, a предшествует $u_k = u$. Обратно, пусть выполнено условие (A, u). Допустим, что связь $A \longrightarrow u$ не имеет места. Возьмем последовательность $\langle u_1, \ldots, u_N \rangle$, в которой сначала идут элементы из $U \setminus (A \cup \{u\})$ (в произвольном порядке), затем u, а затем элементы из A. Элемент u является первым в множестве $A \cup \{u\}$, поскольку иначе, если бы было $A' \longrightarrow u$ для некоторого $A' \subseteq A \cup \{u\}$, то с учетом монотонности и иррефлексивности гиперграфа H и подавно было бы $A \longrightarrow u$. Значит, u входит в данную маркированную последовательность $\langle u_1, \ldots, u_N \rangle$ положительно. Но при этом ни один элемент множества A не предшествует u, что нарушает условие (A, u). Теорема доказана.

Теорема 2 позволяет заменить непосредственное задание гиперграфа множественных связей вида $A \longrightarrow u$ заданием совокупности маркированных последовательностей, которые можно трактовать как помеченные ориентированные графы простейшего вида — а именно, транзитивные цепи (графы линейного порядка). Этим формально решается (в определенной степени) поставленный во введении вопрос о «сводимости» множественных связей к обычным, парным, для рассматриваемого класса гиперграфов «группа элементов — элемент».

Для интерпретации теоремы 2 вернемся к примеру 1. В этом примере всякая маркированная последовательность $\langle u_1, \ldots, u_N \rangle$ элементов множества U, в которую элемент u входит положительно, может трактоваться как такая последовательность изъятий объектов из поля зрения наблюдателя, при которой объект u оказывается к некоторому шагу k незагороженным (точнее, во всяком случае загороженным не полностью), и на этом шаге он, в свою очередь, изымается сам ($u_k = u$). Условие (A, u) в данном случае означает, что предварительно из загораживающего u множества A был изъят хотя бы один элемент-объект. Иначе говоря, во всяком подмножестве $W = \{u_k, \ldots, u_N\} \subseteq U$ объект $u = u_k$ оказывается незагороженным только в том случае, если в $W \setminus \{u_k\}$ отсутствует полный комплект объектов A (это и есть условие (A, u)). Согласно теореме 2, это требование не только необходимо, но и достаточно для существования связи загораживания $A \longrightarrow u$.

Теорема 2 использует всевозможные упорядочения множества U (маркированные согласно обобщенному алгоритму разборки гиперграфа H), в том числе и не приоритетные, т.е. имеющие отрицательные вхождения элементов. Представляет интерес рассмотрение только приоритетных, т.е. согласованных с H упорядочений элементов U, получаемых простым алгоритмом разборки H. Вопрос о том, когда можно восстановить гиперграф H только по согласованным с ним приоритетным упорядочениям множества U, требует отдельного анализа.

An axiomatics for pairwise coalition comparisons generated by an underlying order [1]

A qualitative measuring of comparative coalitional strength is considered based on pairwise contests of coalitions. Any two nonintersecting coalitions can participate in the contest, and in every such a pair exactly one coalition is to be the loser, another the winner. This is a kind of modification of "simple games" (in such games only "absolutely" winning coalitions are enumerated; their complements are implied to be their losing opponents). We assume that a given coalition, i.e. set of individuals, may be compared in a contest with each subset of its complementary set (thereby we admit "abstinence" or "absence" of some individuals). Thus, the notion of winning and losing coalitions becomes to be relative, not absolute.

Fixing the winner and the loser for every pair of nonintersecting coalitions yields a binary "superiority" relation between coalitions which qualitatively describes the relative strength of these sets of individuals. The question arises, under what conditions such a relative strength can be represented in a natural way as a result of comparison of individual strengths of the coalition members. We propose an axiomatic which provides, in words, the existence of a linear ordering of individuals in accordance with their strength, such that the result of comparison of two coalitions is determined by comparison of the strongest members of these coalitions.

Formally, let U be a finite set of *individuals*. Each nonempty subset $X \subseteq U$ is treated as a *coalition*. For every nonempty $X, Y \subseteq U$ such that $X \bigcap Y = \varnothing$ we write $X \prec Y$ if in the pairwise contest of X and Y we find that X is the loser and Y the winner; $\prec$ is called the *superiority relation* on $2^U \backslash \{\varnothing\}$. We shall say that a superiority relation $\prec$ is:

conditionally connected, if for any $X, Y \in 2^U \setminus \{\varnothing\}$ we have

$$X \cap Y = \varnothing \Rightarrow (X \prec Y \quad \text{or} \quad Y \prec X);$$

[1] Extended abstract of a paper presented at the Third International Meeting of the Society for Social Choice and Welfare, Maastricht, Limburg University, 1996.

acyclic, if $\prec$ is acyclic in usual sense as the binary relation on $2^U \setminus \{\varnothing\}$ (and in particular, is asymmetric);

monotonic, if

$$(X \prec Y, X' \subseteq X \quad \text{and} \quad Y' \supseteq Y) \Rightarrow X' \prec Y';$$

additive, if

$$(X \prec Y, X' \prec Y' \text{ and } (X \cup X') \cap (Y \cup Y') = \varnothing) \Rightarrow (X \cup X') \prec (Y \cup Y').$$

As a direct corollary from Szpilrajn–Ore theorem on embedding acyclic binary relation into a linear order, we obtain the following almost trivial result.

Proposition 1. Given a superiority relation $\prec$ on $2^U \setminus \{\varnothing\}$, there exists a linear order $<$ on $2^U \setminus \{\varnothing\}$ such that

$$X \prec Y \Leftrightarrow (X \cap Y = \varnothing \quad \text{and} \quad X < Y)$$

if and only if $\prec$ is conditionally connected and acyclic.

Some more deep statement concerns representation of pairwise comparison of coalitions via comparison of their strongest subcoalitions on the basis of an underlying subcoalition ordering:

Proposition 2. Given a superiority relation $\prec$ on $2^U \setminus \{\varnothing\}$, there exists a linear order $<$ on $2^U \setminus \{\varnothing\}$ such that

$$X \prec Y \Leftrightarrow (X \cap Y = \varnothing \quad \text{and} \quad \forall S \subseteq X\ \exists T \subseteq Y :\ S < T)$$

if and only if $\prec$ is conditionally connected, acyclic and monotonic.

Finally, we establish an axiomatic characterization of representability of coalition comparison results via comparisons of the strongest individual members of coalitions, where "the strongest" is defined by virtue of an underlying linear ordering of individuals:

Proposition 3. Given a superiority relation $\prec$ on $2^U \setminus \{\varnothing\}$, there exists a linear order $<$ on U such that

$$X \prec Y \Leftrightarrow (X \cap Y = \varnothing \quad \text{and} \quad \forall x \in X\ \exists y \in Y :\ x < y)$$

if and only if $\prec$ is conditionally connected, acyclic, monotonic and additive.

The latter representation in fact makes use of specific "lexicographic comparison" of sets. As applied to an Arrovian-like model of collective two-valued (say, "yes" or "no") decisions, where the winning vs. losing coalitions are the totalities of the supporters vs. the opponents of an aggregated decision (the rest are indifferent or absent), such a representation implements an analogue of "hierarchical dictatorship": the collective decision coincides with the opinion of that voter among non-indifferent voters who is the "eldest" by virtue of the given linear ordering of individuals. A similar structure is obtained in an abstract problem of reduction of an ordering of sets to an underlying ordering of elements (this problem is "inverse" with respect to the well-known problem of extension of an ordering given on a set to an ordering on a power set).

Structural characterizations of the path independence property for set transformations [1]

The path independence property, firstly introduced by C.Plott for choice functions, is considered for more general set transformations. This property reflects the idea of adequacy of data processing in serial-parallel procedures performed "by parts". Two polar cases are investigated in detail: contractive and extensive set transformations. The notion of hypertransitivity is suggested for relations between sets, and structural characterizations of path independence are given in terms of this notion.

1. Introduction

Transformations of sets to sets are used in many problems of data processing. We point out here two of them: 1) the problem of choice, where a set of admissible alternatives is transformed into the set of chosen ("best") alternatives, and 2) the problem of logical inference, where a set of primary facts ("axioms") is transformed into the set of all deducible facts ("corollaries").

Formally, some sets X are transformed to the corresponding sets $G(X)$. If X represents some data array then $Y \subset X$ has the sense of a "part" of this array, and a family $\{Y_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq 2^X$ such that $\bigcup_{\nu \in N} Y_\nu = X$ is a "decomposition" of the array X into parts (with possible overlapping). One can try to fulfil the transformation G of X "by parts", applying G not to X but to some finite set of its parts Y_ν, then uniting the obtained results (plus, possibly, those parts which remained unchanged) and then applying G to this union. Such a two-stage serial-parallel procedure has been proposed by C.Plott [208] for choice mappings (the problem 1 above) having the

[1] Ordinal and Symbolic Data Analysis. Eds. E.Diday, Y.Lechevallier, O.Opitz.— Berlin: Springer, 1996.—P. 319–327. Роль свойства независимости от пути в проблеме обработки данных обсуждается в работе [177].

specific feature: the mapping G is contractive, i.e. $\forall X : G(X) \subseteq X$. The requirement of the adequacy of this procedure has been formulated by Plott in the form of the condition called *path independence*, PI.

This condition (following the idea of K.Arrow) required that the eventual result of a "good" two-stage (and more general multi-stage) procedure of choice would not depend on the form of the procedure, but should only depend on preferences of participants and on the complete set of feasible alternatives. We shall present an exact formulation of the PI condition in the next section, but now we shall only illustrate the idea by an example.

It is known that in some professional sports such as boxing, chess etc, the world champion is revealed by the following procedure. Let some person x_o be the current champion: $x(0) = x_o$. At the first stage of the contest x_o fights with the first challenger x_1. The next champion is the winner in their battle $x(1) = \text{win}\,\{x(0), x_1\}$. Then the next contender x_2 fights with x(1), etc.; at each k-th stage of the procedure the next champion $x(k)$ is determined as $\text{win}\{x(k-1), x_k\}$. Let procedure be terminated at the stage $k = N$. The question arises: does the final champion $x(N)$ depend on the ordering of the sequence of contenders from the fixed set $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$? (Similar multistage procedures were considered, in particular, in [118, 230] and especially in [191, 193] and [99] in the sequential choice context).

It is easy to see that the result $x(N)$ does not depend on the procedure if the relation $>$ defined by the below formula (1) is a linear order:

$$x, y \in X,\ x \neq y : \quad x = \text{win}\{x, y\} \Leftrightarrow x > y. \tag{1}$$

However, if the "preference relation" $>$ defined by (1) is not a linear order, then the final result generally depends on the procedure. Say, let $X = \{a, b, c\}$ where $a > b, b > c, c > a$ (nontransitive triple), and $x_0 = a$. Then with the sequence of contenders $x_1 = b,\ x_2 = c$ the final winner is $x(2) = c$, but with $x_1 = c$, $x_2 = b$ we get $x(2) = b$. Such an effect is undesirable because it allows to influence the result by "manipulating the agenda". The impossibility of such an effect, which can be called "result independence of arranging the procedure", or briefly, "independence on path", is accepted as the requirement of the adequacy of the procedure.

In the sequel we will see that the role of transitivity in the above example is not incidental. It happens that in some sufficiently general cases (covering Plott's choice theory case) the "path independence" under serial-parallel sets-to-sets transformations is intimately connected with an appropriate generalization of the transitivity notion to the case of relations between sets. The present work is devoted to revealing and formalizing such a hidden transitivity in some set transformation problems.

2. Formulation of model

Let some "universal set" U of abstract objects be fixed; for simplicity assume that U is finite. Let a mapping $G: 2^U \to 2^U$ be given which represents a considered transformation of sets $X \subseteq U$ to the corresponding sets $G(X)$. Following one of the versions of Plott's definition [203], assume that an arbitrary $X \subseteq U$ is decomposed as

$$X = \bigcup_{\nu \in N} Y_\nu \cup \bigcup_{\mu \in M} Y_\mu, \tag{2}$$

and require that

$$G(X) = G(G(\bigcup_{\nu \in N} Y_\nu) \cup \bigcup_{\mu \in M} Y_\mu). \tag{3}$$

This requirement is called *path independence* (PI) after Plott. It is just the formalization of adequacy of the two-stage serial-parallel procedure of applying G to X "by parts", as it has been described in Introduction.

Such a procedure can be iterated, with possible interchanging the terms, so that, say, we might require that

$$G(Y_1 \cup G(Y_2 \cup G(G(Y_3) \cup Y_4)) \cup G(G(Y_5 \cup G(G(Y_6)))))$$

should be equal to $G(Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_6)$. (The exact universal characterization of all expressions that can be obtained by arbitrary serial-parallel procedures for G, is given in recursive way; see [177]. Note that the requirement of adequacy of the championship scheme of Introduction can be also described by specific serial-parallel procedure as follows:

$$G(\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}) = G(G(\ldots G(G(\{x_o, x_1\}) \cup \{x_2\}) \cup \ldots).$$

Now consider the simplest particular case of PI, referring to it as *basic* PI condition:

$$\forall X', X'' \subseteq U: \; G(X' \cup X'') = G(G(X') \cup X''). \tag{4}$$

Lemma 1. The basic PI condition (4) implies the PI condition (3).

Moreover, the basic PI implies PI for every multi-stage recursive serial-parallel procedure of applying G. This is the generalization of Plott's [203] two-stage choice-theoretical result onto general multi-stage set transformations [177]. So in order to consider PI, it is sufficient to consider the basic PI condition.

3. Two types of G transformations

Two dual cases of transformations $G: 2^U \to 2^U$ are of particular interest for us:

I. *Contractive* transformations: $\forall X \quad G(X) \subseteq X$.
II. *Extensive* transformations: $\forall X \quad G(X) \supseteq X$.

Case I corresponds to choice functions (Example I in Introduction), and Case II to inference transformations (Example II), among other interpretations.

Lemma 2. For a contractive G the basic PI condition is equivalent to the pair of properties:

$$X' \subseteq X \Rightarrow G(X') \supseteq G(X) \bigcap X', \tag{5i}$$

$$G(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow G(X') = G(X). \tag{5ii}$$

(See [87], where the meaning of conditions (5i), (5ii) in terms of choice rationality is used.) Note that (5.ii), in particular, implies idempotence of G:

$$\forall X \subseteq U : \; G(G(X)) = G(X).$$

On the other hand, the following is known (see, e.g., [76]):

Lemma 3. For an extensive G the basic PI condition is equivalent to the axiomatics of closure:

$$X' \subseteq X \Rightarrow G(X') \subseteq G(X), \tag{6i}$$

$$G(G(X)) = G(X). \tag{6ii}$$

Note that here we can replace idempotence (6.ii) by apparently more strong condition

$$X \subseteq X' \subseteq G(X) \Rightarrow G(X') = G(X), \tag{6ii$'$}$$

which makes this axiom the obvious counterpart of (5.ii). In turn, we can re-write (5.i) in the form

$$X' \subseteq X \Rightarrow (X' \backslash G(X')) \subseteq (X \backslash G(X)), \tag{5i$'$}$$

which makes it a more clear counterpart of (6.i). A deep "dual" nature of contraction versus extension with PI will be clarified further.

4. Hyperrelations and their properties

We shall call any binary relation on 2^U *hyperrelation on U.* In other words, if $\mathcal{R}$ is a hyperrelation on U, then $X\mathcal{R}Y$ (where $X, Y \subseteq U$) means that X and Y as elements of 2^U are connected by relation $\mathcal{R}$. We call a hyperrelation $\mathcal{R}$ on U:

regular, if it is a) *monotonic*:

$$X\mathcal{R}Y, X' \supseteq X,\ Y' \subseteq Y \Rightarrow X'\mathcal{R}Y',$$

and b) *semiadditive*:

$$X\mathcal{R}Y',\ X\mathcal{R}Y'' \Rightarrow X\mathcal{R}(Y' \cup Y'').$$

In the sequel we deal only with regular hyperrelations; the notion of regularity reflects the idea of X “dominating” over Y in $X\mathcal{R}Y$.

We call $\mathcal{R}$ on U:

strict, if

$$X\mathcal{R}Y \Rightarrow (X\backslash Y)\mathcal{R}Y;$$

reflexive, or, respectively, *irreflexive*, if

$$\forall X : X\mathcal{R}X \quad \text{or,} \quad \text{resp.,} \quad \rceil\, \exists X \neq \varnothing : X\mathcal{R}X;$$

nondegenerate, if

$$\rceil\, \exists X \neq \varnothing :\ \varnothing\mathcal{R}X.$$

It is easy to see that every strict nondegenerate hyperrelation is irreflexive.

We shall call a hyperrelation $\mathcal{R}$ on U *hypertransitive*, if

$$X\mathcal{R}Y,\ V\mathcal{R}W \Rightarrow (X \cup (V\backslash Y))\mathcal{R}W, \tag{7}$$

and *strictly hypertransitive*, if

$$X\mathcal{R}Y,\ V\mathcal{R}W \Rightarrow ((X \cup V)\backslash Y)\mathcal{R}W. \tag{8}$$

Lemma 4. $\mathcal{R}$ is strictly hypertransitive iff it is hypertransitive and strict.

Obviously, hypertransitivity of $\mathcal{R}$ implies usual transitivity of $\mathcal{R}$ as a relation on U. Thus, hypertransitivity is a strengthening of the notion of transitivity which is relevant to hyperrelations.

In what follows we will be interested in representability of hyperrelations $\mathcal{R}$ on U via usual relations ρ on U in the form

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow \forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X :\ x\rho y,$$

or more generally, in the form

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow \forall\, i \in I\ \forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X :\ x\rho_i y, \tag{9}$$

where $\{\rho_i\}_{i\in I}$ is a family of binary relations on U.

More concretely, we will operate with relations ρ which are various orders on U. We refer to a binary relation ρ on U as *linear order* if it is a transitive, connected, and antireflexive relation, and as a *weak order* if it is a transitive and complete relation.

Theorem 1. $\mathcal{R}$ is a hypertransitive reflexive nondegenerate regular hyperrelation on U if and only if $\mathcal{R}$ is representable in the form (9) for some family $\{\rho_i\}_{i\in I}$ of weak orders on U.

Theorem 2. $\mathcal{R}$ is a strictly hypertransitive nondegenerate (and hence irreflexive) regular hyperrelation on U if and only if $\mathcal{R}$ is representable in the form (9) for some family $\{\rho_i\}_{i\in I}$ of linear orders on U.

Remark: Theorems 1 and 2 are direct generalizations of the well-known Dushnik and Miller [128] theorem on representation of partial orders as intersections of orders. Namely, let R be a partial order on U, i.e. a transitive and antireflexive relation. The Dushnik–Miller theorem asserts that then (an only then) there exists a family $\{\rho_i\}_{i\in I}$ of linear orders on U such that R is representable in the form

$$xRy \Leftrightarrow \forall\, i \in I:\ x\rho_i y. \tag{10}$$

The representation (9) is a natural generalization of (10). Thus, we can treat our concept of hypertransitivity as a proper generalization of transitivity from relations to hyperrelations.

5. Structural characterizations of PI

Theorem 3. Let $G:\ 2^U \to 2^U$ be an extensive mapping. Then G is PI (i.e., a closure) if and only if there exists a hypertransitive reflexive regular hyperrelation $\mathcal{R}$ on U such that for each $X \subseteq U$

$$G(X) = \bigcup\{W \subseteq U \big|\, \exists\, V \subseteq X:\ V\mathcal{R}W\}, \tag{11}$$

which is equivalent to

$$G(X) = \bigcup\{W \subseteq U \big|\ X\mathcal{R}W\}. \tag{12}$$

Moreover, in such a case

$$G(X) = \max!\{W \subseteq U \big|\ X\mathcal{R}W\} \tag{13}$$

where max! denotes taking the unique maximal (i.e., the greatest) set in the sense of set-theoretical inclusion.

Theorem 4. Let $G:\ 2^U \to 2^U$ be a contractive mapping. Then G is PI if and only if there exists a strictly hypertransitive regular hyperrelation $\mathcal{R}$ on U such that for each $X \subseteq U$

$$X\backslash G(X) = \bigcup\{W \subseteq X \big|\, \exists V \subseteq X:\ V\mathcal{R}W\}, \tag{14}$$

which is equivalent to

$$X \backslash G(X) = \bigcup \{W \subseteq X \big| \, X \mathcal{R} W\}. \tag{15}$$

Moreover, in such a case

$$X \backslash G(X) = \max! \{W \subseteq U \big| \, X \mathcal{R} W\}. \tag{16}$$

Remark: The expressions in Theorem 4 can be replaced by

$$\begin{aligned} G(X) &= \bigcap \{Y \subseteq X | \forall Z \subseteq X : \, Y \mathcal{R} Z\} \\ &= \bigcap \{Y \subseteq X | Y \mathcal{R} X\} \\ &= \min! \{Y \subseteq X | Y \mathcal{R} X\} \end{aligned}$$

where min! denotes taking the least set.

Call an extensive transformation G *nondegenerate* if $G(\varnothing) = \varnothing$, and call a contractive transformation G *nondegenerate* if $G(X) = \varnothing \Rightarrow X = \varnothing$. The additional requirement of degeneracy of G in both Theorems 3 and 4 provides that the corresponding $\mathcal{R}$ is degenerate as well.

As direct corollaries from Theorems 3 and 4 together with Theorems 1 and 2, we obtain:

Theorem 5. Let $G : \, 2^U \to 2^U$ be a nondegenerate extensive mapping. Then G is PI (i.e., a closure) if and only if there exists a family $\{\rho_i\}_{i \in I}$ of weak orders on U such that for each $X \subseteq U$

$$G(X) = \{u \in U \big| \, \forall \, i \in I \; \exists \, v \in X : \, v \rho_i u\}. \tag{17}$$

Theorem 6. Let $G : 2^U \to 2^U$ be a nondegenerate contractive mapping. Then G is PI if and only if there exists a family $\{\rho_i\}_{i \in I}$ of linear orders on U such that for each $X \subseteq U$

$$\begin{aligned} G(X) = \{y \in X \mid \exists \, i \in I \; \forall x \in X : \rceil x \rho_i y\} = \\ = \{y \in X \mid \exists \, i \in I \; \forall x \in X : \, x \neq y \Rightarrow y \rho_i x\}. \end{aligned} \tag{18}$$

The last representation is just the *collected-extremal* mechanism of choice suggested in [87] as a “quasi-rational” realization of Plott’s path independent choice functions (it is a kind of nonconventional multicriterial optimization).

The proofs of Theorems 1–6 will be presented elsewhere.

6. Conclusion

Theorems 1–6 above elucidate in different ways a kind of “hidden transitivity” intrinsic to at least two considered types (extension and contraction) of transformations when they are path independent. The role of the

PI property itself has been illustrated in Introduction by an example of a sequential choice problem (Problem 1). In general, PI is the justification of using serial-parallel schemes of data processing using set transformations.

As an additional example (for other examples, see [177]), we might point out a scheme of sequential inference (Problem 2 in Introduction), where the totality $G(X)$ of all corollaries from an initial set X of axioms is being obtained "by parts". Namely, decompose X as $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_N$, then infer the totality $G(X_1)$ of all corollaries from X_1, then join the resulting $G(X_1)$ with X_2 and infer the next totality of corollaries $G(G(X_1) \cup X_2)$, etc.

If the inference rules obey the laws of usual logical inference, particularly the transitivity of implication (unlike the so called "nonmonotonic" logic systems where applying some inference ("production") rule may "destroy" some another inference rule), then we will eventually have

$$G(G(G(\ldots((G(X_1) \cup X_2) \cup X_3)\ldots))) = G(X),$$

which is just an appearance of PI. This sequential procedure may be more convenient and/or feasible (with respect to information constraints) than the one-step inference of the whole totality $G(X)$. The structural characterizations of PI for specific set transformations may help to conceive the essence of path independence as a kind of intrinsic transitivity.

Note that the very definition of hypertransitivity (7) is the natural set-wise generalization of the transitivity of "element-to-element" logical implication (of the form $((x \Rightarrow y)\& \ (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$, where x, y and z are elementary propositions). It corresponds to a "complex" logical implication formalized for sets (to be more precise, for conjunctions) of propositions.

Namely, if X, Y, V and W are sets (conjunctions) of propositions such that $X \Rightarrow Y$ and $V \Rightarrow W$, then the hypertransitivity property, which in these terms has the form

$$((X \Rightarrow Y)\&(V \Rightarrow W)) \Rightarrow ((X\&(V \backslash Y)) \Rightarrow W),$$

is provided by the elementary logic lows. Other kinds of structural characterizations of the path independence can also obtain a natural interpretation in concrete problems of data processing.

Finally, it is worth nothing that actually the notion of path independence is applicable to much more general objects than set transformations. In [180] a general characterization of abstract PI transformations on semigroups was given by means of algebraic properties like associativity and idempotence. This pair of properties appeared to be an abstract counterpart of transitivity.

Комбинаторные механизмы порождения семейств хорошо организованных множеств [1]

Рассматриваются семейства множеств со свойствами, встречающимися при описании «хорошо организованных» групп (коалиций) в поведенческих моделях. В качестве базовых свойств берутся требования замкнутости семейств относительно взятия надмножеств (либо, двойственно, подмножеств) или относительно объединений (двойственно – пересечений). Описываются механизмы порождения таких семейств в терминах отношений «множество – множество», «элемент – множество» или «элемент – элемент» и простых логических операций над ними.

1. Введение

В социально-экономических и вообще «поведенческих» моделях, в частности в теории игр и теории принятия многофакторных (особенно коллективных) решений, нередко возникают специфические семейства примечательных «хорошо устроенных» множеств. В контексте моделей коллективного поведения – это семейства «эффективных», «слаженных» и т.п. коалиций (групп), формально – это семейства выделенных подмножеств заданного множества индивидуумов. Выделенные «примечательные» множества могут служить формализацией таких понятий, как *решающая группа* в теории коллективных решений (см., например, [23, 63, 95, 119, 131, 133, 188]), или, иначе, *выигрывающая коалиция* в терминах теории игр (см., например, [80, 193, 231]). Одна из естественных интерпретаций выигрывающей (решающей) коалиции соответствует понятию *большинства* в моделях голосования – «простого», «взвешенного» и т.д., вплоть до наиболее общего понятия «абстрактного большинства» [102, 108, 188]. Важнейшей, а в случае абстрактного большинства – возможно, единственной характеристикой самого понятия большинства является то, что всякое множество, включающее в себя подмножество-большинство, и подавно также является большинством. Формально говоря, семейство множеств-большинств замкнуто относительно операции [2] взятия надмножества.

В других содержательных задачах заданное семейство примечательных множеств (групп, коалиций) может характеризоваться по-другому: например, быть замкнутым относительно взятия объедине-

[1] Автоматика и телемеханика.—1997.—№11.—С. 162–177.
[2] Унарной и многозначной.

ний. Рассмотрим простейшую ситуацию голосования, когда каждый член группы голосует «за» либо «против», и будем считать группу *нейтральной*, если внутри нее число голосов «за» равно числу голосов «против». Очевидно, объединение любых непересекающихся нейтральных групп снова даст нейтральную группу; впрочем, для пересекающихся групп это уже не так.

Формальным объектом настоящей работы являются семейства множеств, замкнутые относительно основных операций: взятия надмножества (или двойственной операции взятия подмножества, примененной к дополнительным множествам) или теоретико-множественного объединения (или двойственно, для дополнительных множеств: пересечения). Резонно ожидать, что множества из столь просто организованных семейств должны быть в каком-то смысле естественно устроены, т.е. порождаемы некими достаточно простыми механизмами. Описание таких механизмов, в том числе отыскание новых и сведение их в единую систему с известными ранее, является целью данной работы.

Механизмы порождения множеств искались среди простейших конструкций комбинаторно-логического вида, т.е. использующих такие основные понятия, как «элемент», «множество», «(не)принадлежность», и основные логические связки типа «и», «влечет (следует из)», кванторы «для всех» и «существует». Для того, чтобы пояснить направленность поиска таких конструкций, изложим сейчас простейшую модельную задачу – по существу, интерпретацию задачи об абстрактных большинствах, – решение которой будет получено ниже как побочный продукт «расшифровки» механизма порождения одного типа хорошо организованных множеств (в данном случае – большинств).

Задача о сейфе. Допустим, что некая фирма хочет установить сейф, возможность открыть который будут иметь только определенные группы сотрудников, входящие в заранее составленный список (например: либо сам президент фирмы, либо его заместитель вместе с одним из членов правления, либо совместно любые три члена правления, и т.п.). Для этого в сейфе предполагается установить несколько замков, изготовить нужное количество дубликатов ключей к каждому замку и раздать эти ключи сотрудникам фирмы таким образом, чтобы полный комплект ключей (т.е. набор, содержащий ключи от всех замков сейфа) оказался в данной группе сотрудников в том и только в том случае, если эта группа входит в заданный список; а точнее, если внутри этой группы есть подгруппа, входящая в этот список. Это уточнение вызвано тем, что присоединение «избыточных» членов к группе не лишает ее возможности открыть сейф. Последнее формально означает, что совокупность всех групп, могущих открыть сейф, замкнута относительно взятия надгрупп, т.е. является семейством абстрактных большинств. Предлагаемая задача заключается в следующем: можно ли для произвольно заданного списка групп установить столько замков и так раздать ключи среди персонала, что вышеуказанное требование (условие возможности открыть сейф) будет выполнено? И если можно, то как это сделать?

Эта задача комбинаторного характера всегда разрешима. Ее нетрудно решить без применения какого-либо специального математического аппарата, притом различными и достаточно элегантными способами (в том числе выполнив также и дополнительное требование минимальности набора замков и ключей, чем мы здесь заниматься не будем). Один из способов ее решения будет представлен в разделе 4 статьи как следствие из общей схемы описания абстрактных большинств.

Общая необходимость «расшифровки» механизма порождения семейств множеств, замкнутых относительно некоторых операций, неявным образом возникала в довольно широком круге задач. Среди «поведенческих» задач можно назвать проблему рациональности функций выбора, где в соответствующих аксиомах выбора неявно фигурируют семейства множеств альтернатив, замкнутые относительно взятия подмножеств и/или относительно объединения [7, 220]; отметим также модель коллективного выбора по Эрроу, где семейства решающих коалиций замкнуты относительно взятия надмножеств и относительно пересечения [63, 95, 119]. Из более формальных задач можно упомянуть анализ комбинаторной модели причинности в [174], где неявно описанное семейство множеств абстрактных дискретных воздействий на систему, являющихся элементарными «причинами» эффекта, наблюдаемого на выходе, в рамках принятой аксиоматизации также замкнуто относительно взятия подмножеств и объединений. В [174] дается частичная расшифровка соответствующих механизмов на языке «свойств» и «гиперсвойств» – логических функций от элементов и множеств, т.е., по существу, характеристических функций множеств и семейств множеств, соответственно. В настоящей работе механизмы порождения семейств множеств [1] описываются непосредственно в

[1] Вообще, семейства множеств, наделенные теми или иными свойствами, интенсивно изучались как в «чистой», так и в прикладной математике. К первым можно отнести введенные в [239] *матроиды* или *системы (не)зависимостей* и их последующие обобщения (см., например, [1, 127]); впрочем, эти конструкции оказались весьма полезными и для прикладных задач, в особенности комбинаторной оптимизации. Изучение систем множеств с «прикладной» ориентацией проводилось, в частности, в связи с задачами классификации – см., например, [69, 70].

терминах множеств, их элементов и простейших операций над ними. Это позволяет достаточно наглядным образом представить взаимосвязи между описаниями различных типов «хорошей организации» семейств множеств.

2. Абстрактно-большие и абстрактно-малые множества

Далее будем рассматривать следующую общую схему. Дано некоторое *универсальное множество* U, и рассматриваются всевозможные его подмножества $X \subseteq U$. В общем случае U имеет произвольную природу (и может быть как конечным, так и бесконечным). В интерпретациях мы будем обычно рассматривать в качестве U множество *индивидуумов* – «общество», а подмножества $X \subseteq U$ трактовать как *коалиции* (или *группы*).

Нас будут интересовать семейства множеств $\mathcal{X} \subseteq 2^U$, их свойства и их «устройство». В этом и двух следующих пунктах будут рассматриваться абстрактные «большинства» (по «социальной» терминологии), или, вообще, «большие множества» (а в «дополнительном» рассмотрении – «меньшинства», или «малые множества»). Часть материала разделов 2–4 статьи в той или иной форме встречалась в литературе (там, где уместно, мы даем ссылки) или может считаться так или иначе известной как «научный фольклор». Включение этого материала в данную работу оправдано тем, что мы укладываем его (в переработанном виде) в достаточно единообразную схему анализа семейств множеств и, в частности, этим готовим основу для изучения семейств, замкнутых относительно объединений (и дополнительно – пересечений), что будет сделано в разделе 5 статьи.

Будем называть семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ *замкнутым относительно взятия надмножеств*, или *замкнутым вверх* (в краткой записи – $\uparrow$-*замкнутым*), если

$$X^0 \in \mathcal{X},\ X \supseteq X^0 \ \Rightarrow\ X \in \mathcal{X}. \tag{1}$$

Аналогично, называем $\mathcal{X}$ *замкнутым относительно взятия подмножеств* (или *замкнутым вниз*, $\downarrow$-*замкнутым*), если

$$X^0 \in \mathcal{X},\ X \subseteq X^0 \ \Rightarrow\ X \in \mathcal{X}. \tag{2}$$

Пусть $\mathcal{X}$ – некоторое заданное $\uparrow$-замкнутое (либо $\downarrow$-замкнутое) семейство. Будем называть его элементы $X \in \mathcal{X}$ *абстрактно-большими*, кратко – *большими* (соответственно, *абстрактно-малыми*, кратко – *малыми*) множествами. Начнем с указания простейших, почти очевидных конструкций, которые можно трактовать как примитивные механизмы порождения семейств больших (либо малых) множеств.

Предложение 1. Семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ является $\uparrow$-замкнутым (либо $\downarrow$-замкнутым) в том и только в том случае, если для некоторого семейства $\mathcal{T} \subseteq 2^U$ имеет место

$$X \in \mathcal{X} \;\Leftrightarrow\; \exists T \in \mathcal{T}:\; X \supseteq T, \tag{3}$$

либо, соответственно,

$$X \in \mathcal{X} \;\Leftrightarrow\; \exists T \in \mathcal{T}:\; X \subseteq T. \tag{4}$$

Доказательство. Достаточность в предложении 1 легко вытекает из самого вида соотношений (3), (4). Для установления *необходимости* положим $\mathcal{T} = \mathcal{X}$; поскольку в (3) и в (4) всегда можно взять $T = X$, это обеспечит выполнение (3) и (4) тривиальным образом [1].

Произвольному семейству $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ можно поставить в соответствие два «дополнительных», в разных смыслах, семейства:

1) семейство $\overline{\mathcal{X}}$, дополнительное к $\mathcal{X}$ в 2^U:

$$\overline{\mathcal{X}} = 2^U \backslash \mathcal{X} \tag{5}$$

(так что имеет место дихотомия $2^U = \mathcal{X} \bigsqcup \overline{\mathcal{X}}$), и

2) семейство $\mathcal{X}'$ множеств $\overline{X}$, являющихся дополнениями в U к множествам X из $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{X}' = \{U \backslash X |\; X \in \mathcal{X}\} \tag{6}$$

(так что имеет место дихотомия $U = X \bigsqcup \overline{X}$).

В общем случае семейства $\overline{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{X}'$ различны (случай совпадения этих множеств будет рассмотрен ниже). Легко видеть, что если семейство $\mathcal{X}$ $\uparrow$-замкнуто (либо $\downarrow$-замкнуто), то $\overline{\mathcal{X}}$ $\downarrow$-замкнуто (соответственно, $\uparrow$-замкнуто), и обратно. То же относится к $\mathcal{X}'$. Таким образом, каждое семейство больших множеств $\mathcal{X}$ естественно порождает два, вообще говоря, различных семейства малых множеств, $\overline{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{X}'$. При этом лишь для членов семейства $\overline{\mathcal{X}}$ справедливо, что малые множества (т.е. принадлежащие к $\overline{\mathcal{X}}$) — это в точности те, которые не являются большими (т.е. принадлежащими к $\mathcal{X}$); для множеств, «малых» в смысле принадлежности к $\mathcal{X}'$, это, вообще говоря, не так [2]. В частности, возможно, что некоторое множество, большое в смысле принадлежности к $\mathcal{X}$, оказывается подмножеством малого (и значит, само оказывается малым) в смысле принадлежности к $\mathcal{X}'$.

[1] Разумеется, такое семейство $\mathcal{T}$ в конструкциях (3), (4) «избыточно»: в частности, в конечном случае (U конечно) с учетом $\uparrow$-замкнутости (либо $\downarrow$-замкнутости) $\mathcal{X}$ всегда можно ограничиться в качестве $\mathcal{T}$ семейством минимальных (соответственно, максимальных) по включению множеств из $\mathcal{X}$.

[2] Это расхождение становится важным применительно к понятиям «большинств» и «меньшинств» в моделях голосования – об этом см. ниже.

Взяв суперпозицию двух преобразований «черта» ($\mathcal{X} \mapsto \overline{\mathcal{X}}$) и «штрих» ($\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}'$), можно построить еще одно преобразование «звезда»: $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^*$, где

$$\mathcal{X}^* = \overline{\mathcal{X}}', \tag{7}$$

причем здесь порядок взятия операций «черта» и «штрих» в силу их очевидной коммутативности (т.е. $(\overline{\mathcal{X}})' = \overline{(\mathcal{X}')}$) несуществен. Будем называть семейство $\mathcal{X}^*$ *сопряженным* к $\mathcal{X}$. Легко видеть, что $\mathcal{X}^*$ является $\uparrow$- (либо $\downarrow$-)замкнутым тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ также является $\uparrow$- (соответственно, $\downarrow$-)замкнутым. Таким образом, каждому семейству больших (либо малых) множеств $\mathcal{X}$ соответствует еще одно, вообще говоря, отличное от него сопряженное семейство $\mathcal{X}^*$ больших (соответственно, малых) множеств. Совпадение этих семейств (*самосопряженность* семейства $\mathcal{X}$): $\mathcal{X} = \mathcal{X}^*$ – как раз равносильно совпадению $\overline{\mathcal{X}}$ с $\mathcal{X}'$. Этот простой факт легко устанавливается с помощью следующего очевидного утверждения:

Лемма 1. Операции «черта» и «штрих» инволютивны, т.е. $\overline{(\overline{\mathcal{X}})} = \mathcal{X}$ и $(\mathcal{X}')' = \mathcal{X}$.

Теперь из инволютивности, например, операции «черта» (аналогично можно использовать операцию «штрих») эквивалентность $\mathcal{X} = \mathcal{X}^* \Leftrightarrow \overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}'$ выводится немедленно:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^* \;\Leftrightarrow\; \mathcal{X} = \overline{(\mathcal{X}')} \;\Leftrightarrow\; \overline{\mathcal{X}} = \overline{(\overline{(\mathcal{X}')})} \;\Leftrightarrow\; \overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}'.$$

Более важно следующее утверждение:

Лемма 2. Операция сопряжения инволютивна: $(\mathcal{X}^*)^* = \mathcal{X}$.

Доказательство – следует из инволютивности и коммутативности операций «черта» и «штрих»:

$$(\mathcal{X}^*)^* = \overline{(((\overline{\mathcal{X}})')')} = \overline{(\overline{\mathcal{X}})} = \mathcal{X}\,.$$

Далее описание свойств семейств больших и малых множеств (в частности, с введением еще одной операции) будет продолжено с привлечением интерпретации таких множеств как «большинств» и «меньшинств» в модели голосования.

3. Большие и малые множества в абстрактной модели голосования

Выше говорилось, что для семейства абстрактно-больших множеств $\mathcal{X}$ в общем случае семейства $\overline{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{X}'$ не совпадают (и, следовательно, сопряженное семейство $\mathcal{X}^*$ не совпадает с $\mathcal{X}$). Интерпретация множества U и его подмножеств X в терминах простейшей модели голосования приводит к специфическим осмысленным соотношениям между $\overline{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{X}'$ (и, соответственно, между $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$). Опишем эту модель.

Пусть U – *общество* (множество индивидуумов) и пусть $U = X \sqcup \overline{X}$ ($\overline{X} = U \backslash X$) – произвольная дихотомия U. Будем интерпретировать пару $(X, \overline{X})$ как пару противостоящих *коалиций*, из которых первая, X, голосует «за», а вторая, $\overline{X}$ – «против» по некоторому (не имеет значения, какому) вопросу. Подразумевается, что каждый член общества $u \in U$ голосует либо «за», либо «против», и что все голосующие «за» составляют множество X, а все голосующие «против» – $\overline{X}$ (возможность воздержаться или не участвовать в голосовании здесь не допускается). Далее мы также потребуем, чтобы при любом раскладе голосов $(X, \overline{X})$ общество U в целом принимало определенное решение – либо «за», либо «против». Будем называть такую схему двузначного коллективного решения *референдумом*.

Назовем семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ *семейством большинств* для данной схемы референдума, если $\mathcal{X}$ является $\uparrow$-замкнутым и выполнены следующие два условия:

а) любой результат референдума («за» либо «против») означает, что имеется некоторая коалиция $S \in \mathcal{X}$, все члены которой единогласно придерживаются такого же мнения (т.е. «за» либо, соответственно, «против»);
и обратно,

б) всякий раз, когда все члены некоторой коалиции $S \in \mathcal{X}$ имеют одно мнение (либо все «за», либо все «против»), результат референдума предопределяется этим мнением (т.е. он будет «за» либо, соответственно, «против»).

Рассмотрим два требования к семейству большинств, вытекающих из определения схемы референдума.

а) *Полнота.* В каждой дихотомии $(X, \overline{X})$ **хотя бы одна** из двух коалиций $X, \overline{X}$ должна содержать большинство, а значит, быть большинством:

$$X \notin \mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad \overline{X} \in \mathcal{X}, \tag{8}$$

т.е.

$$X \in \overline{\mathcal{X}} \quad \Rightarrow \quad X \in \mathcal{X}', \tag{9}$$

что означает

$$\overline{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X}', \tag{10}$$

или, равносильно,

$$\mathcal{X} \supseteq \mathcal{X}^* \,. \tag{11}$$

б) *Непротиворечивость.* В каждой дихотомии $(X, \overline{X})$ **не более чем одна** из двух коалиций $X, \overline{X}$ содержит большинство, а значит, является большинством:

$$X \in \mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad \overline{X} \notin \mathcal{X}, \tag{12}$$

т.е.

$$X \in \mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad X \in \mathcal{X}^*, \tag{13}$$

что означает

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^*, \tag{14}$$

или, равносильно,

$$\overline{\mathcal{X}} \supseteq \mathcal{X}'. \tag{15}$$

Наконец, *корректность* семейства большинств, определяемая как конъюнкция условий полноты «а» и непротиворечивости «б», означает, что в каждой дихотомии $(X, \overline{X})$ **ровно одна** из двух коалиций $X, \overline{X}$ является большинством. Это требование эквивалентно конъюнкции включений (10) и (15), т.е. равенству [1]

$$\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}', \tag{16}$$

или, что равносильно,

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^*, \tag{17}$$

т.е. самосопряженности семейства $\mathcal{X}$ (см., например, [120, 188]). Самосопряженность (17) семейства большинств, равносильная совпадению (16) обоих «производных» семейств малых множеств, $\overline{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{X}'$ – это как раз то свойство, которое дает возможность однозначно формализовать понятие *меньшинств* как множеств $Y \in \overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}'$. Описание механизма порождения самосопряженных семейств большинств составляет предмет отдельной работы.

4. Общие свойства семейств больших и малых множеств

Вернемся к общему рассмотрению произвольных абстрактно-больших и абстрактно-малых множеств. Пусть $\mathcal{X}$ – некоторое произвольное семейство из 2^U. Назовем множество Y *трансверсальным* к семейству

[1] Такое совпадение между двумя по-разному определенными «дополнительными» семействами к семейству большинств (выигрывающих коалиций) было отмечено еще фон Нейманом и Моргенштерном [80, глава 10, §48].

$\mathcal{X}$ (или *трансверсалью*, или *множеством представителей* для семейства $\mathcal{X}$)[1], если
$$\forall X \in \mathcal{X}: \quad Y \cap X \neq \varnothing. \tag{18}$$

Совокупность всех трансверсалей к $\mathcal{X}$ назовем семейством, *трансверсальным* к $\mathcal{X}$, и обозначим через $\mathcal{X}^T$:

$$\mathcal{X}^T = \{Y \subseteq U \mid \forall X \in \mathcal{X}: \ Y \cap X \neq \varnothing\}. \tag{19}$$

Лемма 3. Для любого семейства $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ трансверсальное к нему семейство $\mathcal{X}^T$ $\uparrow$-замкнуто.

Доказательство – непосредственно из определения (19).

Лемма 4. $\mathcal{X}^T = \mathcal{X}^*$ в том и только в том случае, если семейство $\mathcal{X}$ $\uparrow$-замкнуто.

Доказательство. 1) *Необходимость.* Если $\mathcal{X}^T = \mathcal{X}^*$, то ввиду $\uparrow$-замкнутости $\mathcal{X}^T$ (по лемме 3) семейство $\mathcal{X}^*$, а значит и семейство $\mathcal{X}$, также $\uparrow$-замкнуто.

2) *Достаточность.* Пусть $\mathcal{X}$ $\uparrow$-замкнуто. Тогда

$$\begin{aligned}
S \in \mathcal{X}^* \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{S} \notin \mathcal{X} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall X \in \mathcal{X}: \quad U \backslash S \neq X \\
&\Leftrightarrow \quad \forall X \in \mathcal{X}: \quad U \backslash S \not\supseteq X \quad (\text{в силу } \uparrow\text{-замкнутости } \mathcal{X}) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall X \in \mathcal{X}: \quad S \cap X \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad S \in \mathcal{X}^T,
\end{aligned}$$

что и дает $\mathcal{X}^* = \mathcal{X}^T$.

Таким образом, для семейств больших множеств операции взятия трансверсальных и сопряженных семейств совпадают. Это дает простой способ построения трансверсальных семейств в этом случае: $\mathcal{X}^T = \overline{\mathcal{X}}'$, т.е. нужно взять дополнительное семейство (в 2^U) к семейству дополнений (в U) к большим множествам. Из лемм 2 и 4 немедленно вытекает инволютивность операции трансверсальности применительно к семействам больших множеств:

Лемма 5. (См., например, [108][2].) $(\mathcal{X}^T)^T = \mathcal{X}$, если (и только если) семейство $\mathcal{X}$ $\uparrow$-замкнуто.

[1] Часто в литературе по комбинаторной теории *трансверсалью* к $\mathcal{X}$ называют множество Y **различных** представителей, т.е. требуют, чтобы для любых различных $X^1, X^2 \in \mathcal{X}$ в Y вошли их **несовпадающие** элементы $x^1 \neq x^2$. Мы здесь придерживаемся более широкого определения.

[2] Аналогичное построение справедливо (в случае конечного U) при рассмотрении вместо $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^T$ их подсемейств, состоящих из минимальных по включению – и следовательно, не вложенных друг в друга – подмножеств [130].

Отметим также, что поскольку, вообще говоря, $\mathcal{X}^* \neq \mathcal{X}$, то и $\mathcal{X}^T \neq \mathcal{X}$ в общем случае даже для $\uparrow$-замкнутых семейств. Смысл самого определения трансверсального семейства $\mathcal{X}^T$, его свойств, указанных в леммах 4 и 5, а также специфический смысл совпадения $\mathcal{X}^T$ с $\mathcal{X}$ (когда это имеет место), вновь удобно пояснить на абстрактной модели референдума.

Рассмотрим несколько обобщенную, по сравнению с описанной выше, схему референдума. Пусть $\mathcal{X}$ – семейство абстрактных большинств, т.е. $\uparrow$-замкнутое семейство. Будем теперь в отличие от предыдущего считать, что коалиции $X \in \mathcal{X}$ функционируют как большинства при голосовании по отношению к решению «за», но не обязательно по отношению к «против». Иначе говоря, если среди голосующих «за» наберется большинство (из $\mathcal{X}$), то решение общества будет «за»; если же такого большинства не наберется, то решение общества будет «против». Тогда трансверсальное семейство $\mathcal{X}^T$, также являющееся семейством (трансверсальных) большинств, интерпретируется следующим образом. Пусть, следуя принятому определению большинств, решение общества U в целом будет «за» тогда и только тогда, когда все индивидуумы-члены хотя бы одной коалиции $X \in \mathcal{X}$ будут «за». Что означает отсутствие такой ситуации? Это значит, что в каждом множестве-большинстве $X \in \mathcal{X}$ имеется хотя бы один элемент $y \in X$, высказывающийся «против». Иначе говоря, существует трансверсальное к семейству $\mathcal{X}$ множество Y, все члены которого голосуют «против»; это препятствует тому, чтобы исход референдума был «за», и значит, исход будет «против».

Итак, в описанной схеме появилась другая система большинств: $\mathcal{X}^T$. Множества $Y \in \mathcal{X}^T$ часто называют *блокирующими коалициями* по отношению к коалициям X из $\mathcal{X}$ [108]. Лемма 4 указывает, что блокирующие коалиции – это в точности множества, не являющиеся дополнениями к исходным большинствам. Большинства $X \in \mathcal{X}$ обеспечивают исход референдума «за» (их можно назвать *«за»-большинствами*), а трансверсальные большинства (блокирующие коалиции) $Y \in \mathcal{X}^T$ обеспечивают исход «против» (*«против»-большинства*). В силу леммы 5 блокирующие коалиции к блокирующим коалициям – это как раз исходные коалиции («за»-большинства), что и выражает «самосогласованность» возникшей ситуации, т.е. равноправное взаимное блокирование «за»-большинств и «против»-большинств. С другой стороны, ситуация в общем случае не вполне симметрична: голосующие «за» и голосующие «против» не совсем равноправны, поскольку семейства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^T$ «за»-большинств и «против»-большинств, вообще говоря, различны. Класс ситуаций, когда семейства «за»-большинств и «против»-большинств совпадают и можно говорить просто о большинствах, – это класс корректных семейств большинств $\mathcal{X}$, удовлетворяющих требованиям полноты и непротиворечивости. Действительно, для них $\mathcal{X} = \mathcal{X}^*$ (17), а значит, с учетом леммы 4, $\mathcal{X} = \mathcal{X}^T$ (семейство $\mathcal{X}$ *самотрансверсально*)[1].

Для дальнейшего понадобится еще одно простое следствие из предыдущих лемм.

Лемма 6. Если (и только если) семейство $\mathcal{X}$ $\uparrow$-замкнуто, то существует $\uparrow$-замкнутое семейство $\mathcal{Y}$ такое, что $\mathcal{X} = \mathcal{Y}^T$. При этом в качестве $\mathcal{Y}$ можно принять $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^T$.

Доказательство. 1) *Необходимость* $\uparrow$-замкнутости семейства $\mathcal{X}$ вида $\mathcal{Y}^T$ следует из леммы 3.

2) *Достаточность* – прямо следует из леммы 5.

Теперь все подготовлено для вывода основного результата этого раздела статьи: комбинаторного механизма порождения произвольных $\uparrow$-замкнутых семейств множеств.

Теорема 1. Семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ является $\uparrow$-замкнутым в том и только в том случае, если для некоторого семейства $\{W_i\}_{i \in I} \subseteq 2^U$ имеет место

$$X \in \mathcal{X} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i \in I \quad \exists\, x \in X: \quad x \in W_i. \tag{20}$$

При этом в качестве $\{W_i\}_{i \in I}$ можно взять индексованное семейство $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^T$.

Доказательство. 1) *Необходимость.* В силу леммы 6 для $\uparrow$-замкнутого семейства $\mathcal{X}$ существует семейство $\mathcal{Y}$ (можно взять $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^T$) такое, что $\mathcal{X} = \mathcal{Y}^T$. Представив семейство $\mathcal{Y}$ в индексованной форме $\mathcal{Y} = \{W_i\}_{i \in I}$, по определению трансверсальности имеем

$$X \in \mathcal{X} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i \in I: \quad X \cap W_i \neq \varnothing\,, \tag{21}$$

что равносильно (20).

2) *Достаточность.* $\uparrow$-замкнутость семейства $\mathcal{X}$, определяемого соотношением (20), вытекает непосредственно из вида (20).

Замечание 1. Порождающее семейство $\{W_i\}_{i \in I}$ в представлении (20) определяется, вообще говоря, не единственным образом. Действительно, в «необходимой» части теоремы для простоты берется конкретное семейство $\{W_i\}_{i \in I} = \mathcal{Y} = \mathcal{X}^T$; но в «достаточной» части теоремы 1, в схеме универсального механизма порождения любых $\uparrow$-замкнутых семейств $\mathcal{X}$, в качестве $\{W_i\}_{i \in I}$ берутся произвольные подсемейства из 2^U. В то же время из формы (20) видно, что каждое данное

[1] Эквивалентность требования корректности семейства большинств (по принятой нами терминологии) условию $\mathcal{X} = \mathcal{X}^T$ отмечалась, в частности, в [188].

семейство $\{W_i\}_{i \in I}$ всегда можно пополнить до $\uparrow$-замкнутого, присоединив к нему все надмножества всех его членов – множеств W_i. Поэтому без ограничения общности в теореме 1 можно было бы рассматривать только $\uparrow$-замкнутые семейства $\{W_i\}_{i \in I}$. С другой стороны, например, в конечном случае всегда можно, как легко видеть, оставить в представлении (20) только минимальные по включению множества-члены W_i семейства $\{W_i\}_{i \in I}$.

Перейдем к интерпретации теоремы 1. Представление (20) можно описать в достаточно абстрактных терминах, например, в терминах «раскраски» элементов множества U. Представим себе, что каждый элемент $u \in U$ может быть окрашен в один или несколько цветов i из набора красок I. Пусть W_i – это множество всех элементов, окрашенных i-м цветом (при этом они могут быть окрашены также и другими цветами). Тогда согласно представлению (20) множество $X \subseteq U$ будет большим (в смысле принадлежности к $\mathcal{X}$) в том и только в том случае, если в нем представлены все цвета из набора I. Теперь можно перейти к более прикладным терминам. Пусть, например, I – это набор работ (задач, функций, ролей), которые должны быть выполнены командой, комплектуемой из членов общества U. Пусть W_i – это множество всех индивидуумов из U, способных выполнить работу i. Предполагается, что каждая работа (роль) $i \in I$ может быть выполнена командой (коалицией, группой) $X \subseteq U$ в том и только в том случае, если в X есть хоть один индивидуальный участник, способный ее выполнить (так что «объединение усилий» не предусматривается). Тогда согласно (20) команда X признается большой (в смысле принадлежности к $\mathcal{X}$) в том и только в том случае, если она способна выполнить весь набор работ I.

В качестве примера такой ситуации вернемся к «задаче о сейфе» из введения. Пусть U — персонал фирмы, $\mathcal{X}$ — список всех групп, которые должны иметь возможность открыть сейф своими ключами (по смыслу задачи, как уже отмечалось, семейство $\mathcal{X}$ — это семейство абстрактных большинств, т.е. оно $\uparrow$-замкнуто). Пользуясь теоремой 1, представим $\mathcal{X}$ в виде (20). Для каждого индекса $i \in I$ изготовим свой i-й замок и раздадим ключи от этого замка тем и только тем членам коллектива, кто входит в группу W_i из представления (20). Напомним, что для того, чтобы открыть сейф, нужно открыть все замки $i \in I$. Ясно, что коалиция $X \subseteq U$ может открыть i-й замок (здесь это и есть i-я работа) в том и только в том случае, если в ней есть представитель группы W_i. Поэтому, согласно (20), коалиция X сможет открыть все замки (выполнить весь набор работ I) тогда и только тогда, когда она входит в список (семейство) $\mathcal{X}$. Тем самым представление (20) из теоремы 1 дает решение задачи о сейфе. Это решение конструктивно, так как семейство $\{W_i\}_{i\in I}$ может быть построено в виде[1] $\{W_i\}_{i\in I} = = \mathcal{X}^T = \mathcal{X}^* = \overline{\mathcal{X}}'$.

Попытаемся теперь построить комбинаторный механизм порождения семейств абстрактно-малых множеств, подобно тому как такой механизм был построен для абстрактно-больших множеств в виде (20). С этой целью естественно воспользоваться уже полученным механизмом порождения $\uparrow$-замкнутых семейств (20) и тем фактом, что любое $\downarrow$-замкнутое семейство $\mathcal{X}$ может быть представлено через некоторое $\uparrow$-замкнутое семейство, причем двумя (вообще говоря, разными) способами: $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{Y}}$ и $\mathcal{X} = \mathcal{Z}'$, где $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ – подходящие $\uparrow$-замкнутые семейства. Отсюда с помощью теоремы 1 немедленно получаем следующие два представления:

Теорема 2. Семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ является $\downarrow$-замкнутым в том и только в том случае, если для некоторого семейства $\{W_i\}_{i\in I} \subseteq 2^U$ имеет место

$$X \in \mathcal{X} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, i \in I \ \forall\, x \in X: \quad x \notin W_i, \tag{22}$$

или, иначе, для некоторого семейства $\{V_j\}_{j\in J} \subseteq 2^U$ имеет место

$$X \in \mathcal{X} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, j \in J \quad \exists\, y \notin X: \quad y \in V_j. \tag{23}$$

Однако эти представления, в отличие от (20), по-видимому, не столь интересны с точки зрения приложений. Недостатком представления (23) является то, что оно «нелокально» в том смысле, что для проверки факта (не)принадлежности X к $\mathcal{X}$ нужно пользоваться информацией об элементах y, лежащих вне этого множества. Что же касается представления (22), то оно является всего лишь переформулировкой представления (3) из предложения 1: достаточно взять $\{U\backslash W_i\}_{i\in I} = \mathcal{T}$. Таким образом, между комбинаторными представлениями больших и малых множеств имеется определенное неравноправие: комбинаторные механизмы порождения семейств малых множеств, в отличие от больших, с точки зрения интерпретации оказываются менее интересными. Например, в терминах «раскраски» элементов представление (22) интерпретируется так: множество X мало тогда и только тогда, когда в раскраске его элементов отсутствует хотя бы один цвет – если по-прежнему считать W_i множеством всех элементов, несущих i-й цвет. В терминах комплектации команд для выполнения работ это означает, что команда «мала», если есть такая работа, которую она не может выполнить. Ясно, что это лишь простое

[1] Можно убедиться, что минимальный набор замков с минимальными наборами ключей соответствует подсемейству всех минимальных по включению множеств из $\{W_i\}_{i\in I}$.

логическое отрицание определения «большой команды», данного выше. Тем не менее это же представление (22) может быть осмысленно интерпретировано в «квазисоциологических» терминах: пусть I – это список «интересов» индивидуумов $u \in U$ (например, интерес к живописи, к спорту и т.д.) и пусть W_i – это множество индивидуумов, лишенных интереса i. Тогда коалиция X является «сплоченной командой» (в смысле принадлежности к семейству $\mathcal{X}$ «малых» команд) в том и только в том случае, если всех ее членов $x \in X$ объединяет хотя бы один общий интерес $i \in I$ (т.е. если $X \subseteq U \backslash W_i$). Подобная интерпретация получит нетривиальное развитие в следующем разделе статьи.

5. Абстрактно-открытые и абстрактно-замкнутые множества

Здесь рассматриваются семейства множеств, замкнутые относительно двух взаимно дополнительных теоретико-множественных операций: объединения и пересечения. Объединение множеств, трактуемых как коалиции индивидуумов, имеет очевидный смысл (одна частная интерпретация будет рассмотрена ниже). Пересечение групп [1] естественно возникает в контексте задач классификации [82]: если различные множества объектов выделяются различными характеристическими свойствами, то конъюнкция этих свойств выделяет пересечение этих множеств.

Будем называть семейство $\mathcal{X}$ множеств из 2^U *замкнутым относительно объединения* (кратко – $\bigcup$*-замкнутым*), либо *замкнутым относительно пересечения* (кратко – $\bigcap$*-замкнутым*), если для любого семейства $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq 2^U$

$$\forall \nu \in N: \;\; X_\nu \in \mathcal{X} \;\;\Rightarrow\;\; \bigcup_{\nu \in N} X_\nu \in \mathcal{X}, \tag{24}$$

либо, соответственно,

$$\forall \nu \in N: \;\; X_\nu \in \mathcal{X} \;\;\Rightarrow\;\; \bigcap_{\nu \in N} X_\nu \in \mathcal{X}\,. \tag{25}$$

Легко видеть, что $\bigcup$-замкнутые и $\bigcap$-замкнутые семейства взаимно дополнительны в следующем смысле: семейство $\mathcal{X}$ является $\bigcup$-замкнутым тогда и только тогда, когда семейство дополнительных множеств $\mathcal{X}' = \{U \backslash X \mid X \in \mathcal{X}\}$ является $\bigcap$-замкнутым [2]. Пользуясь этим,

---

[1] Оно также используется как часть аппарата анализа моделей коллективных решений типа Эрроу [63, 95, 119, 131].

[2] Будем придерживаться здесь «технического» соглашения о том, что объединение пустого семейства множеств из 2^U есть пустое множество $\varnothing$, а пересечение

рассмотрим сначала $\bigcup$-замкнутые семейства, а затем, опираясь на полученные результаты, перейдем к $\bigcap$-замкнутым семействам.

Замечание 2. $\bigcap$-замкнутые семейства множеств изучались в литературе в различных контекстах, чаще всего в связи с соответствующими «операторами замыкания» [27, 104] и под различными наименованиями: *системы замыканий* [27], *муровские семейства* [104], *абстрактные выпуклости* [76]. Следуя наиболее распространенной терминологии, будем называть множества-члены произвольного данного $\bigcap$-замкнутого семейства *абстрактно-замкнутыми* (кратко – просто *замкнутыми*) [1], и, соответственно, множества-члены $\bigcup$-замкнутого семейства (напомним – являющиеся дополнениями к замкнутым) *абстрактно-открытыми* (кратко – *открытыми*).

Замечание 3. Отметим, что дополнительное семейство $\overline{\mathcal{X}}$ к $\bigcup$-замкнутому семейству $\mathcal{X}$ также может быть охарактеризовано самостоятельно. А именно: пусть $\mathcal{X}$ $\bigcup$-замкнуто; рассмотрим $\overline{\mathcal{X}} = 2^U \setminus \mathcal{X}$. Пусть $Y \subseteq U$, и пусть $Y = \bigcup_{\mu \in M} Y_\mu$. Тогда, как легко видеть,

$$Y \in \overline{\mathcal{X}} \quad \Rightarrow \quad \exists\, \mu \in M: \ Y_\mu \in \overline{\mathcal{X}}. \tag{26}$$

Условие (26) представляет собой «ослабленную» версию условия $\downarrow$-замкнутости для семейства $\overline{\mathcal{X}}$: не **всякое** подмножество множества $Y \in \overline{\mathcal{X}}$, но **хотя бы одно** его подмножество в произвольном разложении Y в сумму подмножеств должно принадлежать $\overline{\mathcal{X}}$ (условие *слабого наследования*).

Построим теперь для $\bigcup$-замкнутых семейств «ослабленный» аналог представления (3) из предложения 1 о порождении $\uparrow$-замкнутых и $\downarrow$-замкнутых семейств.

Предложение 2. Семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ является $\bigcup$-замкнутым в том и только в том случае, если для некоторой совокупности семейств $\mathcal{T}^u \subseteq 2^U, \ u \in U$, имеет место

$$X \in \mathcal{X} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in X \ \exists\, T \in \mathcal{T}^x: \ T \subseteq X. \tag{27}$$

Доказательство. 1) *Достаточность.* Пусть для некоторой совокупности семейств $\{\mathcal{T}^u\}_{u \in U}$ выполнено (27), и пусть $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{X}$. Тогда для каждого $\nu \in N$ имеем

пустого семейства множеств из 2^U есть универсальное множество U [27]. Поэтому всякое $\cup$-замкнутое семейство содержит $\varnothing$, а всякое $\cap$-замкнутое семейство содержит U (иногда это постулируют отдельно).

[1] Во избежание недоразумений подчеркнем, что термин «замкнутость» здесь вынужденно используется в двух разных смыслах, на двух «уровнях»: один — это замкнутость **множества** X как совокупности элементов универсума U, а другой — это замкнутость **семейства** $\mathcal{X}$ (по отношению к некоторой операции) как совокупности множеств из 2^U.

$$\forall\, x \in X_\nu \;\; \exists T \in \mathcal{T}^x : \;\; T \subseteq X_\nu,$$

а значит и подавно

$$\forall\, x \in \bigcup_{\nu \in N} X_\nu \;\; \exists T \subseteq \mathcal{T}^x : \;\; T \subseteq \bigcup_{\nu \in N} X_\nu.$$

Отсюда в силу (27) получаем $\bigcup\limits_{\nu \in N} X_\nu \in \mathcal{X}$, и значит, семейство $\mathcal{X}$ $\bigcup$-замкнуто.

2) *Необходимость.* Пусть семейство $\mathcal{X}$ $\bigcup$-замкнуто. Положим для каждого $u \in U$

$$\mathcal{T}^u = \{X \in \mathcal{X} \mid X \ni u\}. \tag{28}$$

Докажем справедливость (27).

а). Пусть верна левая часть (27), т.е. $X \in \mathcal{X}$. Тогда по построению $\mathcal{T}^u$ (28) имеем

$$\forall\, x \in X : \;\; X \in \mathcal{T}^x.$$

Теперь легко убедиться в истинности правой части (27), положив там $T = X$.

б). Пусть верна правая часть (27), т.е.

$$\forall\, x \in X \;\; \exists T \in \mathcal{T}^x : \;\; T \subseteq X.$$

По построению $\mathcal{T}^u$ (28) это означает, что

$$\forall\, x \in X \;\; \exists Y : \;\; x \in Y \in \mathcal{X}, \;\; Y \subseteq X. \tag{29}$$

Обозначим для каждого $x \in X$ соответствующее Y в (29) (любое из них, если таковых несколько) через Y_x. Тогда $\{Y_x\}_{x \in X} \subseteq \mathcal{X}$ есть семейство множеств такое, что по построению $\bigcup_{x \in X} Y_x = X$. В силу $\bigcup$-замкнутости семейства $\mathcal{X}$ получаем $X \in \mathcal{X}$, т.е. левую часть (27).

Замечание 4. Нетрудно видеть, что порождающие семейства $\mathcal{T}^u$ в представлении (27) можно без ограничения общности считать $\uparrow$-замкнутыми. Действительно, каждое $\mathcal{T}^u$ всегда можно пополнить всеми надмножествами всех его членов-множеств, что, очевидно, не изменит истинности правой части (27). В случае $\uparrow$-замкнутости семейств $\mathcal{T}^u$ представление (27) упрощается до

$$X \in \mathcal{X} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in X : \;\; X \in \mathcal{T}^x, \tag{30}$$

что дает следующую модификацию предложения 2:

Предложение **2′**. Семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ является $\bigcup$-замкнутым в том и только в том случае, если для некоторой совокупности $\uparrow$-замкнутых семейств $\mathcal{T}^u \subseteq 2^U$, $u \in U$, выполнено (30), или, эквивалентно,

$$X \in \mathcal{X} \;\Leftrightarrow\; X \in \bigcap_{x \in X} \mathcal{T}^x. \tag{31}$$

Теперь все подготовлено для искомого комбинаторного представления $\bigcup$-замкнутых семейств.

Теорема 3. Семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ является $\bigcup$-замкнутым в том и только в том случае, если для некоторой совокупности семейств $\{W_i^u\}_{i \in I^u} \subseteq 2^U$ $u \in U$, имеет место

$$X \in \mathcal{X} \;\;\Leftrightarrow\;\; \forall\, x \in X \;\forall\, i \in I^x \;\;\exists\, y \in X: \;y \in W_i^x. \tag{32}$$

Доказательство. Воспользуемся, в силу предложения 2′, универсальным представлением (30) для $\bigcup$-замкнутых семейств, и представим каждое включение $X \in \mathcal{T}^x$ в (30), где $\mathcal{T}^x$ – $\uparrow$-замкнутое семейство, с помощью теоремы 1 в виде

$$X \in \mathcal{T}^x \;\;\Leftrightarrow\;\; \forall\, i \in I^x \;\;\exists\, y \in X: \;y \in W_i^x, \tag{33}$$

где $\{W_i^x\}_{i \in I^x}$ – порождающее семейство для $\mathcal{T}^x$ по теореме 1. Подставляя (33) в (30), получаем (32).

Замечание 5. Представление (32) можно упростить, если привести все семейства $\{W_i^u\}_{i \in I^u}$, $u \in U$, к семействам, индексованным одинаковым образом. Это можно сделать, например (не заботясь об «экономности» представления), положив

$$I = \bigsqcup_{u \in U} I^u \tag{34}$$

(напомним, что прямая сумма множеств $\bigsqcup$ есть теоретико-множественное объединение, в котором любые два элемента из разных множеств считаются разными), и приняв при каждом $u \in U$

$$W_i^u = U \;\text{ для }\; i \notin I^u, \tag{35}$$

а для $i \in I^u$ сохранив W_i^u прежними. Тогда, как легко видеть, в представлении (32) можно убрать индекс x у I^x. Это позволяет переставить $\forall x \in X$ с $\forall i \in I$, что окончательно дает следующее представление:

Теорема **3′**. Семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ является $\bigcup$-замкнутым в том и только в том случае, если для некоторой совокупности семейств $\{W_i^u\}_{i \in I} \subseteq 2^U$, $u \in U$, имеет место

$$X \in \mathcal{X} \;\;\Leftrightarrow\;\; \forall\, i \in I \;\forall x \in X \;\;\exists\, y \in X: \;y \in W_i^x. \tag{36}$$

Замечание 6. Для формальной интерпретации представления (33) можно трактовать выполнение $y \in W_i^x$ как i-е *бинарное отношение* между элементами x и y (двухместный предикат) – подобно тому, как, например, в представлении (20) из теоремы 1 выполнение $x \in W_i$ можно было трактовать как i-е *свойство* элемента x (одноместный предикат). Записывая i-е отношение $y \in W_i^x$ между x и y явным образом как xR_iy и рассматривая полученный набор отношений $\{R_i\}_{i \in I}$ на U, можно переписать универсальное представление (36) $\bigcup$-замкнутых семейств в еще одной эквивалентной форме: для некоторого набора *порождающих бинарных отношений* $\{R_i\}_{i \in I}$ на U имеет место

$$X \in \mathcal{X} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i \in I \;\; \forall\, x \in X \;\; \exists\, y \in X : \;\; xR_iy. \tag{37}$$

В качестве иллюстрации дадим представлению (36) или, равносильно, (37) следующую неформальную интерпретацию. Пусть I – это список потенциальных «валентностей» (например, потребностей) i, которыми может обладать каждый элемент x и каждая из которых может быть насыщена (удовлетворена) любым элементом y из соответствующего множества W_i^x. В записи (37) xR_iy как раз и означает, что i-я валентность элемента x насыщается элементом y. Например, в «квазисоциологической» модели каждый индивидуум x может иметь список I (или индивидуализированный список I^x – в представлении (32)) потребностей в общении по интересам, и интерес i индивидуума x удовлетворен в группе X, если находится «партнер» $y \in X$ такой, что xR_iy (т.е. $y \in W_i^x$). Группа (коалиция) X признается *хорошо укомплектованной*, или *слаженной*, если для каждого члена группы все его потребности в общении по интересам удовлетворены внутри группы. В силу теоремы $3'$ совокупность всех слаженных коалиций образует $\bigcup$-замкнутое семейство; слаженные коалиции являются абстрактно-открытыми. Отметим, что такое семейство, вообще говоря, не является $\uparrow$-замкнутым: присоединение к группе нового члена может удовлетворить имевшуюся потребность каких-либо прежних членов группы, но создать новую неудовлетворенную потребность, которую принес с собой этот новый член.

Перейдем теперь от абстрактно-открытых множеств к их дополнениям – абстрактно-замкнутым множествам, образующим $\bigcap$-замкнутое семейство. Переход к дополнительным (в U) множествам немедленно превращает предложение 2 в

Предложение 3. Семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ является $\bigcap$-замкнутым в том и только в том случае, если для некоторой совокупности семейств $\mathcal{T}^u \subseteq 2^U$ имеет место

$$X \in \mathcal{X} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \notin X \;\; \exists\, T \in \mathcal{T}^x : \;\; X \subseteq T. \tag{38}$$

Аналогично, из теорем 3 и $3'$ немедленно получается

Теорема 4. Семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ является $\bigcap$-замкнутым в том и только в том случае, если для некоторой совокупности семейств $\{W_i^u\}_{i \in I^u} \subseteq 2^U,\ u \in U$, имеет место

$$X \in \mathcal{X} \iff \forall\, x \notin X\ \forall\, i \in I^x\ \exists\, y \notin X:\ y \in W_i^x, \tag{39}$$

или, равносильно, для некоторой совокупности семейств $\{W_i^u\}_{i \in I},\ u \in \in U$, имеет место

$$X \in \mathcal{X} \iff \forall\, i \in I\ \forall\, x \notin X\ \exists\, y \notin X:\ y \in W_i^x. \tag{40}$$

Представления (38)–(40) обладают, с точки зрения интерпретации, уже отмечавшимся по поводу (23) недостатком – «нелокальностью», использованием информации об элементах, лежащих **вне** тестируемого множества X. Чтобы устранить этот недостаток, возьмем представление (40) и эквивалентно преобразуем его следующим образом:

$$X \in \mathcal{X} \iff \forall\, i \in I\ \forall\, u \in U:\ \Big[(\forall\, w \in W_i^u : w \in X) \Rightarrow u \in X\Big]. \tag{41}$$

Убедиться, что правые части (40) и (41) действительно эквивалентны, можно с помощью цепочки эквивалентных переходов

$$\forall\, x \notin X \quad \exists\, y \notin X:\ y \in W_i^x \iff \forall\, u \in U:\ (u \notin X \Rightarrow \exists\, y \notin X:\ y \in W_i^u)$$
$$\iff \forall\, u \in U:\ (\forall\, w \in W_i^u:\ w \in X \Rightarrow u \in X).$$

Далее, с помощью явного введения набора бинарных отношений $xR_iy \iff y \in W_i^x$ (как и выше при преобразовании (36) к виду (37)), можно преобразовать (41) к эквивалентному виду

$$X \in \mathcal{X} \iff \forall\, i \in I\ \forall\, u \in U:\ \Big[(\forall\, w:\ uR_iw \Rightarrow w \in X) \Rightarrow u \in X\Big]. \tag{42}$$

(Другое, более простое по форме (но опирающееся на специальный аппарат «гиперотношений») представление абстрактно-замкнутых множеств через бинарные отношения «элемент-элемент» (а именно, через наборы упорядочений на U) см. в [180].)

Тем самым теорема 4 преобразуется в следующую:

Теорема $\mathbf{4'}$. Семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ является $\bigcap$-замкнутым в том и только в том случае, если для некоторой совокупности семейств $\{{W_i}^u\}_{i \in I} \subseteq 2^U,\ \ u \in U$, имеет место (41), или, равносильно, для некоторого набора $\{R_i\}_{i \in I}$ бинарных отношений на U имеет место (42).

Представление (41) (или (42)) можно сделать более обозримым, перейдя от отношений «элемент-множество» и «элемент-элемент» к специальному отношению «множество-множество», а именно, к преобразованию $F:\ 2^U \to 2^U$ вида

$$F(V) = \{u \in U \mid \exists\, i \in I:\ W_i^u = V). \tag{43}$$

Можно убедиться, что в терминах отображения F представление множеств из семейства $\mathcal{X}$, эквивалентное (41), приобретает вид:

$$X \in \mathcal{X} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, V \subseteq X: \; F(V) \subseteq X. \tag{44}$$

Обратный переход от представления (44) с произвольно заданным отображением $F: \; 2^U \longrightarrow 2^U$ к эквивалентному представлению вида (41) того же семейства $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ производится, если построить для каждого $u \in U$ семейство $\{W_i^u\}_{i \in I}$, взяв в качестве него как-либо индексованное семейство $\mathcal{W}^u$ вида

$$\mathcal{W}^u = \{V \subseteq U \mid \; F(V) \ni u\}. \tag{45}$$

Тем самым мы доказали справедливость представления (44) абстрактно-замкнутых множеств с помощью механизма произвольных преобразований «множество $\mapsto$ множество»:

Теорема 5. Семейство $\mathcal{X} \subseteq 2^U$ является $\bigcap$-замкнутым в том и только в том случае, если для некоторого отображения $F: \; 2^U \Rightarrow 2^U$ выполнено (44).

Замечание 7. Теорема 5 легко доказывается непосредственно. В частности, ее «достаточная» часть приведена в [76, теорема 1.3], и доказательство сводится к прямой проверке $\bigcap$-замкнутости семейства множеств X, удовлетворяющих (44). Для прямого доказательства «необходимости» остается положить $F(V) = \bigcap_{W \supseteq V,\; W \in \mathcal{X}} W$ для каждого $V \subseteq U$ (*замыкание* множества V).

Неформальную интерпретацию представления (44) как «хорошо организованных множеств» проще всего дать в терминах классификации (группировки) абстрактных объектов из универсума U. Допустим, что в основу классификации объектов на «компактные группы» положено понятие *сходства*, формализованное не в терминах отношения «элемент-элемент», а в терминах *гиперотношения* «множество-элемент»: для каждого множества объектов $V \subseteq U$ указаны все объекты $u \in U$, «сходные» с совокупностью объектов V, рассматриваемой как целое. Обозначим через $F(V)$ множество всех таких объектов u. Будем считать группу объектов X *компактной* в смысле заданного понятия сходства, если вместе с каждым подмножеством $V \subseteq X$ в X входят и все объекты, сходные с X. Очевидно, это и дает механизм (44) порождения абстрактно-замкнутых множеств. Адекватность такого механизма задачам группировки косвенно оправдывается уже отмечавшимся естественным смыслом $\bigcap$-замкнутости в терминах классификации [82]: пересечение классов есть класс, который характеризуется конъюнкцией свойств, характеристических для исходных классов.

Представление абстрактно-замкнутых множеств в терминах отношений «элемент-множество» и «элемент-элемент» вида (42), несмотря на некоторую свою громоздкость, также может быть теперь проинтерпретировано в терминах «сходства» – теперь уже сходства элемента с элементом. Будем интерпретировать отношение uR_iw как сходство объекта u с объектом w *по i-му признаку* ($i \in I$). Тогда представление (42) прочитывается так: множество X компактно (т.е. замкнуто, в смысле принадлежности к семейству $\mathcal{X}$) тогда и только тогда, когда по каждому признаку $i \in I$ каждый объект u, для которого все объекты w, с которыми он сходен, принадлежат X, сам также принадлежит X. Подчеркнем, что бинарные отношения «сходства» в таком универсальном порождающем механизме для $\bigcap$-замкнутых семейств множеств полностью произвольны – и, в частности, не обязаны быть симметричными. Можно предположить, что выделение отношений сходства, удовлетворяющих определенным ограничениям, приведет к специфическим типам абстрактно-замкнутых множеств.

Concordant aggregation of attributes and latent hierarchical structures [1]

A model of an abstract attribute aggregation is proposed where objects are represented by subsets of a universal set, and compound objects by unions of sets. A single nominal attribute is considered as featuring the situation. Each object, including "elementary" objects which are represented by singletons, is endowed with some value of the attribute. Formally, a mapping is given that associates an attribute value with each nonempty subset of the universal set. We establish axiomatic requirements to the connection between the attribute values of the objects (sets) and the "aggregated" attribute value of the compound object (union of these sets). The primary axiom is the simplest Unanimity or Concordance condition which demands that if all the objects have the same attribute value, then the attribute of the compound object also takes this value. We introduce a generalization of this axiom to the case of different values: the Extended Concordance condition which demands that the aggregate attribute value must coincide with one of the attribute values of the composing objects.

[1] Prepared for a plenary talk at the International Conference on Ordinal and Symbolic Data Analysis, Darmstadt, 1997.

We show that under the Extended Concordance axiom assumed, the generation of the aggregate attribute is determined by a specific underlying structure, namely, by a latent hierarchy of the elementary objects. It is proved that the generating mechanism for the aggregate attribute in the finite case amounts to choosing the highest element and to taking its attribute value as that for the whole object (set). A particular choice theoretic interpretation of this result is given. If elements are interpreted as individuals, and the attribute as the decision, then the above result implies the well-known structure of "hierarchical dictatorship" in the social choice theory. Namely, the coalition decision is predetermined by the individual decision of the "eldest" member of the coalition by virtue of a latent hierarchy of the elements-individuals. The Extended Concordance axiom is interpreted here as the requirement that the candidate chosen by a united coalition must belong to at least one of the nominee lists of the initial subcoalitions.

The technique of obtaining our main result rests on studying a binary relation of "latent superiority" between elements. This relation is defined by whether or not the addition of a given element to a set containing another element can change the attribute value of the set. It is proved that under the Extended Concordance axiom the relation is complete and transitive, and thus it describes a latent weak ordering structure. A justification and an explanation of the meaning of the Extended Concordance axiom is given, in particular in terms of social choice models.

Раздел III
Структурные свойства в теории принятия решений

Равновесные решения и их реализация в задаче о распределении дискретных объектов [1]

Анализ задач о рациональном распределении непрерывных объектов (безгранично делимых ресурсов, продуктов и т.п.) обычно опирается на аналитический аппарат двойственных оценок (оптимальных или равновесных цен). С использованием таких оценок и механизмов типа «экономического равновесия» удается, в частности, организовывать «децентрализованные» схемы рационального распределения непрерывных ресурсов, в том числе по многим критериям [198].

С другой стороны, задачи о распределении дискретных объектов нередко оказываются более трудными (по сравнению с «непрерывными») для теоретического анализа — в частности, из-за невозможности пользоваться аппаратом «оценок». Эти трудности увеличиваются в тех случаях, когда: 1) исходная постановка задачи опирается только на качественные, а не на количественные данные (критерии качества распределений выражаются алгебраическими распределениями, а не числовыми «полезностями») и 2) задача распределения ставится не как задача оптимизации единого априорного критерия, а как многокритериальная или теоретико-игровая задача.

В докладе рассматривается простейшая задача такого рода, в которой оказывается возможным: 1) получить в явном виде рациональное (в определенном смысле) решение о распределении дискретных объектов, охарактеризовав его в терминах теоретико-игрового равновесия; 2) сформировать «качественный» аналог «оценок» дискретных ресурсов и 3) организовать с их помощью децентрализованный механизм распределения.

В задаче исследуется распределение n объектов по n потребителям (при условии, что каждый объект должен достаться одному и только одному потребителю). Каждый i-й потребитель обладает сво-

[1] VI Всесоюзное совещание по проблемам управления. Рефераты докладов. Ч.II.—М., 1974.—С. 61–64.

ей индивидуальной системой предпочтений на множестве объектов $j = 1, \ldots, n$. Одна из возможных интерпретаций — назначение n работников на n работ (но без обычного предположения о количественной измеримости эффективности работника i на работе j). Другая интерпретация — расселение n квартирантов по n квартирам. Система предпочтений в простейшей модели задается строгим линейным упорядочением (ранжированием) объектов. Поскольку предпочтения различных потребителей считаются априори не соизмеримыми, то рассматриваются две многокритериальные (теоретико-игровые) постановки задачи: задача распределения и задача перераспределения объектов.

Задача А. Найти и охарактеризовать все распределения, оптимальные по Парето.

Вторая постановка отличается от первой дополнительным предположением о том, что уже имеется некоторое исходное распределение объектов по потребителям (так что речь идет теперь о перераспределении или обмене), и каждый потребитель вправе отказываться от невыгодных для него вариантов предлагаемых перераспределений (обменов). Реализуемыми считаются лишь обмены, происходящие при взаимном согласии участников. Для этой постановки представляется адекватным теоретико-игровое понятие «коалиционно-устойчивых» решений («сильных равновесий», «ядер» [67, 198]). Перераспределение объектов, первоначально распределенных между участниками, называется коалиционно-равновесным, если никакая коалиция участников не может улучшить положения своих членов за счет «собственных ресурсов» — отказавшись от предлагаемого перераспределения и поиному перераспределив между своими членами объекты, первоначально принадлежавшие им же.

Задача Б. Найти и охарактеризовать все коалиционно-устойчивые перераспределения.

В докладе задачи А и Б решаются конструктивно путем анализа графов предпочтений и построения «равновесных» (вообще говоря, нестрогих) ранжирований объектов и потребителей. Равновесным названо такое ранжирование объектов R^0 и потребителей R^n (при заданном распределении объектов между участниками), при котором каждый потребитель получает наилучший объект среди объектов, имеющих ранг не выше его собственного.

Решение задачи А опирается на следующие теоремы.

Теорема 1А. Для того чтобы распределение объектов между потребителями было оптимальным по Парето, необходимо и достаточно, чтобы существовало соответствующее равновесное ранжирование объектов R^0 и потребителей R^n.

Теорема 2А. Распределение объектов между потребителями допускает равновесное ранжирование (R^0, R^n) в том и только в том случае, если это распределение оптимизирует лексикографический критерий, составленный из критериев потребителей в соответствии с ранжированием R^n.

Отсюда вытекает метод эффективного перебора всех оптимальных по Парето распределений (и только их): задаваться произвольными ранжированиями потребителей R и предоставлять им поочередно (в порядке R) право выбора наилучших для них объектов. Как другое следствие, получен конструктивный алгоритм отыскания равновесного ранжирования по заданному Парето-оптимальному распределению.

В задаче Б о перераспределении объектов в определении равновесного ранжирования в качестве ранжирования потребителей берется ранжирование первоначально принадлежавших им объектов. Решение задачи Б опирается на следующие теоремы.

Теорема 1Б. Для того чтобы перераспределение объектов между потребителями при данном первоначальном распределении было коалиционно-равновесным, необходимо и достаточно, чтобы существовало соответствующее равновесное ранжирование объектов R.

Теорема 2Б. Перераспределение объектов между потребителями допускает равновесное ранжирование R в том и только в том случае, если получаемое новое распределение оптимизирует лексикографический критерий, составленный из критериев потребителей в соответствии с ранжированием R их первоначальных объектов.

Отсюда вытекает, что всякое коалиционно-равновесное перераспределение «оптимально» в том смысле, что оно представимо как результат последовательного выбора наилучших объектов потребителями, взятыми в некотором порядке. Как следствие, установлен сам факт существования (и единственности) коалиционно-равновесного перераспределения при любом заданном начальном распределении объектов и указан алгоритм построения этого перераспределения, одновременно дающий равновесное ранжирование объектов R.

Полученные результаты включают прямые аналоги известных теорем о равновесных (оптимальных) распределениях непрерывных ресурсов и их оценках в моделях экономического равновесия [198]. «Групповое ранжирование объектов» R согласно теоремам 2А, 2Б представляет собой результат своеобразного «агрегирования» индивидуальных предпочтений; «ранг» дискретного объекта является качественным аналогом «оценки» непрерывного ресурса. Теоремы 1А, 1Б показывают, что эта аналогия простирается вплоть до возможности организации децентрализованной схемы независимого выбора объектов потребителями по типу моделей децентрализованных экономических решений [198]. А именно, для реализации оптимальных (равновесных) (пере-)распределений оказывается достаточным приписать объектам равновесные «групповые» ранги и разрешить каждому потребителю выбирать наилучший объект в пределах «собственного» ранга. Равновесные групповые ранги могут быть либо определены предварительно с помощью «централизованных» алгоритмов ранжирования, либо найдены естественно реализуемым итеративным поисковым методом (типа алгоритма «спрос — предложение» в известных экономических моделях [198]).

Таким образом, на примерах выявляется возможность формирования «качественных» показателей — в данном случае нечисловых «рангов» дискретных объектов, — выполняющих такие же функции, что и количественные показатели — «оценки» непрерывных ресурсов в известных равновесных моделях распределения.

Структурные свойства в теории выбора вариантов [1]

1. Оптимизационная постановка задач теории управления предусматривает отбор одного (или нескольких) элементов заданного допустимого множества вариантов (состояний, управлений, стратегий и т.п.) по некоторому критерию. Критерий отбора обычно задается из некоторых внешних по отношению к задаче соображений и формализуется в виде одной числовой или порядковой функции («скалярный критерий») или набора таких функций («векторный критерий»).

Вопросы: «Откуда и почему возникают критерии?», «Всегда ли осмысленный выбор варианта сводится к выбору по критериям?» и иные вопросы подобного рода, как правило, не ставятся и не обсуждаются в теории управления. Между тем аналогичные вопросы исследовались в смежной области — в теории выбора и принятия решений. Цель этого доклада — объединив ряд разрозненных теоретических результатов и дополнив их новыми фактами, продвинуться в поиске ответов на поставленные выше вопросы.

[1] VII Всесоюзное совещание по проблемам управления. Тезисы докладов. Кн. 2.—М.; Минск, 1977.—С. 93–96 (в соавторстве с *М.А.Айзерманом*). Английскую версию этой работы см. в [89].

2. Под ситуацией выбора подразумевается предъявление некоторого множества X допустимых вариантов (объектов, альтернатив) некоей системе (лицу, коллективу, механизму) для выделения одного или нескольких элементов из этого множества. Пусть $Y \subseteq X$ — множество вариантов, выбранных из X. Функция выбора $Y = C(X)$, определенная на допустимых («предъявляемых к выбору») подмножествах X полного набора всех возможных вариантов $X_{\text{М}}$, задает «внешнее» («входо-выходное») описание выбора. Вопрос о том, каково возможное «внутреннее устройство» системы, реализующей данное внешнее описание выбора, и является темой доклада.

Будем исходить из предположения, что внутреннее устройство системы выбора можно описать, задав, с одной стороны, некоторую структуру на полном множестве вариантов $X_{\text{М}}$, а с другой стороны, правило выбора, определенное на этой структуре. Простейший пример: структура — набор числовых оценок вариантов, т.е. скалярная функция на $X_{\text{М}}$, а правило — выбор варианта с максимальной оценкой на X.

Интуитивные представления о «разумности» («объяснимости», «логичности» и т.д.) выбора будем связывать с простотой как структуры, так и правила выбора. Задача восстановления структуры и правила выбора по внешнему описанию $C(X)$ приобретает определенность, если потребовать, чтобы структура (на множестве $X_{\text{М}}$) и правило выбора были фиксированы, а не произвольно перестраиваемы при смене «входа» X. (Без этого требования любой выбор тривиально «сводится» к оптимизации по скалярному критерию.)

3. В теории выбора обычное представление о простой структуре реализуется в форме «структуры предпочтений», и используются два языка ее описания: «критериальный» и «алгебраический».

При использовании *критериального языка* основная структура предпочтений фиксируется в виде набора числовых или ранговых критериев, а правила выбора — экстремальные (максимизация — по одному критерию, паретов или, например, мажоритарный выбор — по нескольким). В этом воплощены представления о воображаемых направлениях «лучше — хуже» в пространстве вариантов [63, 163].

При использовании *алгебраического языка* структура предпочтений задается бинарными отношениями (графами) на множестве вариантов; правило — стандартный выбор максимальных («неподчиненных») вариантов. Это отражает представление о том, что отношение предпочтения «лучше — хуже» полностью выявляется при попарном сравнении вариантов и предопределяет выбор в любой более общей ситуации («контексте») [63].

В литературе установлены связи между описанием выбора на этих двух языках; в частности, установлено, что выбор по скалярному критерию соответствует выбору по бинарному предпочтению — (квази-)порядку, а паретов выбор (по векторному критерию) — выбору по частичному порядку [63].

4. С другой стороны, рассматривались различные формы условий, налагаемых на внешнее входо-выходное описание системы выбора (на функцию $C(X)$), которые также отражают интуитивные представления о большей или меньшей «простоте» и «целенаправленности» выбора. Эти условия формулируются в терминах «независимости» (или «ограниченной зависимости») выбора от «контекста», а именно, от отбрасывания (или присоединения) части вариантов. Из условий такого рода, изучавшихся разными авторами, выделим три условия [63, 138, 146, 222]:

I. *Условие наследования* (Н)*:*

$$\text{если } X' \subseteq X, \text{ то } C(X') \supseteq C(X) \cap X'.$$

II. *Условие независимости от отвергнутых вариантов* (О)*:*

$$\text{если } C(X) \subseteq X' \subseteq X, \text{ то } C(X') = C(X).$$

III. *Условие согласия* (С)*:*

$$\bigcap_i C(X_i) \subseteq C\Big(\bigcup_i X_i\Big).$$

Можно убедиться, что условия Н, О и С независимы, т.е. что существуют функции $C(X)$, удовлетворяющие любой из восьми возможных комбинаций этих трех условий и их отрицаний.

Для простоты предполагается, что в качестве допустимых множеств X рассматриваются все непустые подмножества заданного конечного множества возможных вариантов $X_{\text{м}}$, и что на одноэлементных множествах выбор не пуст.

Известно, что:

а) Пересечение областей Н и С определяет класс функций $C(X)$, представляемых бинарными отношениями (графами) [222].

б) Пересечение всех трех областей Н, С и О — класс функций, представимых частичными порядками (транзитивными графами) и сводящихся к паретовому выбору по некоторому набору критериев [138, 146, 222].

в) Скалярный критерий соответствует области, лежащей строго внутри пересечения трех областей Н, С и О, и выделяемой следующим *условием сильной независимости от отбрасывания вариантов* (В) [138, 146, 222]:

$$\text{если } X' \subseteq X \text{ и } C(X) \cap X' \neq \varnothing, \text{ то } C(X') = C(X) \cap X'.$$

г) Класс функций $C(X)$, удовлетворяющих *условию независимости от пути* (П) [203]:

$$C\Big(\bigcup_i X_i\Big) = C\Big(\bigcup_i C(X_i)\Big)$$

и условиям Н и С, совпадает с пересечением трех областей Н, С и О.

5. В докладе показывается, что пересечение областей Н и О совпадает с областью П. Вводится в рассмотрение «совокупно-экстремальная» система выбора, общая структура которой задается набором скалярных критериев, а правило выбора — объединением выборов по каждому критерию порознь. Доказывается, что класс функций $C(X)$, порождаемых совокупно-экстремальным выбором, совпадает с пересечением Н и О, а значит, с областью П.

Каждая из областей Н, С и О по отдельности определяет класс функций $C(X)$, для которого возможно достаточно простое «внутреннее» описание системы выбора. В докладе дается полный анализ систем выбора, удовлетворяющих условию Н.

Показывается, что условие Н имеет следующие три эквивалентные формы:

а) $\bigcup_i C(X_i) \supseteq C\Big(\bigcup_i X_i\Big)$,

б) $C\Big(\bigcup_i C(X_i)\Big) \supseteq C\Big(\bigcup_i X_i\Big)$,

в) $\bigcup_i R(X_i) \subseteq R\Big(\bigcup_i X_i\Big)$, где $R(X) = X \backslash C(X)$.

Такие (и только такие) функции $C(X)$ обладают свойством слабой зависимости от контекста, заключающемся в «монотонном сужении» выбора $C(X)$ при расширении множества X. На основе этого свойства можно задать структуру выбора, связав с каждым вариантом минимальные (по расширению) «критические множества» X, при которых данный вариант x в данном контексте X начинает отвергаться. Эти структуры при соответствующем правиле выбора исчерпывающе описывают класс функций выбора, удовлетворяющих условию Н.

Аналогичное структурное описание можно построить для областей С и О. Эти структуры имеют характер «мультинарных», или «гиперграфовых». Пересечение условий Н и С соответствует частному случаю таких структур — бинарным, или графовым.

Из этих соображений легко генерируются содержательные примеры систем выбора, удовлетворяющих каждому из рассмотренных условий порознь. Тем самым выявляются типы выбора, которые не сводятся к обычным стандартам «рациональности» — к бинарным отношениям предпочтений или к общепринятым типам критериального выбора. Вместе с тем такой анализ показывает место стандартно рассматривающихся структур и правил «рационального» выбора в ряду различных моделей выбора.

6. Ситуация упрощается, если ограничиться классом функций выбора C^*, для которых множество $C^*(X)$ при каждом X содержит ровно один вариант. В этом специальном случае области Н и О совпадают с областью В, лежащей внутри области С, и соответствуют выбору по взаимно-однозначному скалярному критерию (строгому линейному порядку). Однако и в этом случае легко строятся примеры функций $C^*(X)$, для которых даже не выполнено условие С, и для которых, следовательно, заведомо не существует эквивалентного скалярного критерия.

Логический анализ абстрактной модели выбора [1]

В теории принятия решений важное место занимает проблема обоснования. На языке общей схемы выбора вариантов этой проблеме можно придать форму вопроса: какие варианты и по какой причине «заслуживают» быть выбранными из имеющегося допустимого множества. Классическая теория выбора в основу анализа кладет содержательные представления о «лучшем» и формализацию этих представлений в терминах меры качества вариантов или, на более абстрактном уровне, в терминах отношений предпочтения (доминирования) между вариантами. Необходимым и достаточным основанием для включения данного варианта в выбор признается его оптимальность или недоминируемость, определяемая естественным образом.

При таком классическом подходе исходным в ряду так называемых «постулатов рациональности» является постулат парной сравнимости любых вариантов и выводимости оснований для выбора из результатов парных сравнений. Этот постулат фактически предопределяет явное

[1] VIII Всесоюзное совещание по проблемам управления. Тезисы докладов. Кн. 2.—М.; Таллин, 1980.—С. 419–421.

или неявное использование логики двухместных (бинарных) отношений. При этом классический эталон выбора лучших (доминируемых или недоминируемых) вариантов обусловливает специфическое «доминантное» правило логического оперирования с такими отношениями.

В настоящей работе предлагается более общий подход к логическому описанию и анализу оснований выбора, не предполагающий заранее ни «парности» структуры отношений между вариантами, ни «доминантности» правила оперирования с ними. Работа опирается как на отдельные логические условия, уже использовавшиеся ранее в теории выбора для частных целей, так и на предшествовавший анализ различных механизмов выбора, для которых «неклассические» расширения логики выбора оказались адекватными. Результатом работы является обнаружение скрытой «обобщенно-доминантной» логики выбора в ряде типовых «неклассических» схем выбора.

Рассматривается следующая, достаточно общеупотребительная, абстрактная модель выбора. Задается множество A элементов x, y,..., называемых вариантами. Акты выбора состоят в предъявлении различных множеств вариантов $X \subseteq A$ и выделении из каждого X его подмножества $Y \subseteq X$ — «выбранной части» X. Предполагается для простоты, что A конечно и что всевозможные подмножества $X \in 2^A \setminus \varnothing$ допустимы для предъявления. Предметом анализа является наблюдаемое «внешнее описание» выбора в виде функции выбора $Y = C(X)$.

Цель анализа — выявление логических оснований наблюдаемого выбора при тех или иных его внешних свойствах. В теории рационального выбора фундаментальную роль играют три общих «характеристических свойства» функций выбора:

Условие наследования (Н):
Если $X' \subseteq X$, то $C(X') \supseteq C(X) \cap X'$.

Условие согласия (С):
Если $X = X' \cup X''$, то $C(X) \supseteq C(X') \cap C(X'')$.

Условие отбрасывания (О):
Если $C(X) \subseteq X' \subseteq X$, то $C(X') = C(X)$.

Известно, что конъюнкция условий Н ∩ С определяет область «рациональных» функций выбора, порождаемых всевозможными классическими «парно-доминантными» механизмами выбора, а Н∩С∩О — подобласть «транзитивной рациональности» среди таких механизмов.

Предлагается единообразный способ описания механизмов выбора в терминах «предписывающих предикатов» вида $\lambda(y|X)$ или $\lambda(Y|X)$ —

логических функций от предметных переменных, которые дают обоснование выбора варианта — элемента y или целого множества Y в X: $C(X) = \{y :\ \lambda(y|X)$ истинно$\}$, или $C(X) = Y\colon \lambda(Y|X)$ истинно. В этих терминах классический парно-доминантный механизм выбора записывается так:

$$\lambda(y|X)\ \doteqdot\ \bigcap_{x\in X}\alpha(y|x),$$

где $\alpha(y|x)$ — исходно задаваемый «предикат разрешения» для выбора варианта y в присутствии варианта x (в предъявлениях X). Это выражение выделяет в чистом виде обычную логику выбора «лучших» («доминантных») вариантов. Критерий рациональности выбора с предписывающим предикатом $\lambda(y|X)$ приобретает форму обобщенных условий Кондорсе:

$$\lambda(y|X) \Leftrightarrow \bigcap_{Z\in\mathcal{B}_y(X)}\lambda(y|Z),$$

где $y \in X \subseteq A$ и $\mathcal{B}_y(X)$ — произвольное семейство $\{Z_\nu\}$, $y \in Z_\nu \subseteq X$, $\bigcup_\nu Z_\nu = X$.

Такая логика «совместного разрешения» выражает существо классической трактовки «рациональности выбора», формально характеризуемой конъюнкцией условий Н∩С. «Транзитивная рациональность» дополнительно предусматривает транзитивность элементарного «предиката запрещения» $\beta(y|x)\ \doteqdot\ \overline{\alpha}(y|x)$, что обеспечивает реализацию конъюнкции всех трех характеристических условий Н∩С∩О.

В настоящей работе доказывается, что характеристические условия Н,С и О по отдельности в терминах предикатов λ имеют вид:

$$\lambda(y|X) \Leftrightarrow \bigcap_{Z\subseteq X}\lambda(y|Z) \Leftrightarrow \bigcap_{\mathcal{B}_y(X)}\ \bigcap_{Z\in\mathcal{B}_y(X)}\lambda(y|Z), \tag{Н}$$

$$\lambda(y|X) \Leftrightarrow \bigcup_{\mathcal{B}_y(X)}\ \bigcap_{Z\in\mathcal{B}_y(X)}\lambda(y|Z), \tag{С}$$

$$\lambda(Y|X) \Leftrightarrow \bigcap_{Z\subseteq X}\lambda(Y|Z), \tag{О}$$

что может интерпретироваться как различные формы «внешней рациональности» (согласованности) предписываемого выбора. Доказывается, что все эти типы выбора реализуются соответственно следующими логическими схемами механизмов выбора, отличающимися от классической схемы наличием «множественных» параметров W, V:

$$\lambda(y|X)\ \doteqdot\ \bigcap_{x\in X}\ \bigcap_{W\subseteq X}\alpha(y|x;W) \Leftrightarrow \bigcap_{Y\subseteq X}\alpha'(y|V), \tag{Н}$$

$$\lambda(y|X) \doteqdot \bigcap_{x\in X} \bigcup_{W\subseteq X} \alpha(y|x;W) \Leftrightarrow \bigcap_{x\in X} \bigcup_{V:x\in V\subseteq X} \alpha'(y|V), \qquad (\mathrm{C})$$

$$\lambda(Y|X) \doteqdot \bigcap_{V\subseteq X} \alpha(Y|V). \qquad (\mathrm{O})$$

Таким образом, конструкции механизмов, реализующих обобщенные «квазиклассические» типы выбора H,C,O, сохраняют «квазидоминантный» характер логики выбора как конъюнкции разрешений. Однако в роли элементарных отношений между вариантами теперь уже с необходимостью выступают небинарные «гиперотношения» $\alpha(y|x;W)$ и $\alpha(y|V)$, $\alpha(Y|V)$, которые отражают совместные взаимовлияния множеств вариантов, не сводимые к обычной логике парных сравнений.

Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов [1]

Обсуждается общая схема классических механизмов выбора лучших вариантов, в частности оптимизационных механизмов, где явно или неявно используются структурный принцип «парной сравнимости» вариантов и специфическая логика «доминантного» правила выбора. Аргументируется возможность и необходимость выхода за рамки принципа «парности — доминантности» в структурах и правилах выбора и перехода к «неклассическим» структурам и правилам. Показывается, что такой переход можно осуществить путем формализации понятия «множественных взаимовлияний» при определении лучших вариантов.

1. Постановка задачи

Многие задачи прикладной математики и теории управления сводятся к выбору в некотором смысле «лучших» из заданного множества вариантов, «допускаемых к сравнению». Так, например, в моделях оптимального управления, математического программирования и подобных им вариантами служат планы, управления, стратегии и т.д., а множество допускаемых к сравнению вариантов задается ограничениями. В задачах подобного рода выбор лучших вариантов осуществляется по

[1] Автоматика и телемеханика.—1981.—№ 2.—С. 65–83. (в соавторстве с *М.А.Айзерманом*).

«критерию оптимальности» (скалярному или «векторному») с помощью той или иной экстремизационной процедуры. При этом предполагается, что экстремизируемый скалярный критерий (целевая функция, шкала) или их набор — «вектор» критериев (n-ка шкал) заданы извне, цель же теории усматривается в установлении факта существования решения задачи, в исследовании его свойств и в развитии техники нахождения оптимума в конкретных задачах.

Вопрос, всегда ли осмысленный и целенаправленный выбор в некотором смысле «лучших» вариантов может быть сведен к экстремизации по какому-либо критерию оптимальности или по некоторому множеству («вектору») критериев, обычно в теории управления не ставится. Вопросы подобного рода входят в проблематику смежной дисциплины — теории принятия решений, сложившейся в основном на базе экономико-социальных и психологических задач. К середине XX века развитие этой теории, казалось бы, привело к исчерпывающим ответам на такого рода вопросы (см., например, постановочно-обзорные статьи [204, 212] и монографии [63, 134]).

Оптимизационный выбор по одному или нескольким критериям был представлен в обобщающих терминах выбора по бинарным отношениям предпочтения, и была сформулирована система «аксиом рационального выбора», выполнение которых для любого данного способа выбора эквивалентно существованию его оптимизационного представления. В результате складывалось впечатление, что «разумные» способы выбора естественным образом отделены от «неразумных», «вычурных» и что экстремизационный подход к выбору лучших вариантов опирается на надежный фундамент теории принятия решений.

Однако в 70-х годах ситуация стала представляться менее ясной. Все чаще появлялись работы, в которых высказывались обоснованные сомнения в том, что разумный выбор должен удовлетворять аксиомам рациональности, и описывались примеры и целые классы методов и механизмов выбора, вполне разумных, но не обязательно удовлетворяющих этим аксиомам (см., например, [135, 203]).

В связи с этим вновь стали актуальными вопросы типа указанных выше: какие из различных употребительных и естественных способов выбора лучших вариантов сводятся к классическим оптимизационным моделям, а какие — нет, и каким образом эти модели могут быть расширены и обобщены с тем, чтобы охватить разумные, хотя и не удовлетворяющие классической аксиоматике, способы выбора.

Введению в этот круг вопросов посвящена настоящая статья. Она содержит как факты, известные из литературы, но излагаемые здесь несколько иначе (теорема 1), так и новые факты (теорема 2 и далее).

2. Формальная модель и механизмы выбора

Выбор вариантов рассматривается здесь в рамках следующей абстрактной модели. Задано множество A вариантов $x, y, \ldots$. Для простоты будем считать, что A конечно и что любое непустое подмножество вариантов $X \subseteq A$ может быть предъявлено для выбора [1].

Акт выбора состоит в выделении из X по некоторому правилу части вариантов $Y \subseteq X$ $(Y \neq \varnothing)$ [2]. Совокупность всевозможных актов выбора, порождаемых данным детерминированным способом выбора, определяет соответствующее множество пар $\{(X, Y)\}$. Последнее можно рассматривать как задание функции выбора C, сопоставляющей каждому $X \subseteq A$ его подмножество $Y = C(X)$ [63, 95, 203, 204, 212, 221, 233].

Далее всюду, говоря о том или ином способе или типе выбора, мы имеем в виду не отдельный акт выбора, а «выбор в целом», т.е. всю совокупность актов выбора, порождаемую применением данного способа выбора к всевозможным предъявлениям $X \subseteq A$.

В традициях теории управления выбор может быть представлен моделью «преобразователя», изображенной на рис. 1. На вход блока «выбор» подаются множества вариантов $X \subseteq A$, а на его выходе появляются подмножества $Y \subseteq X$. Для такого преобразователя возможны два описания: 1) «внутреннее», или описание механизма выбора, устанавливающего, как по конкретному множеству X находится его «лучшая часть» — Y, и 2) «внешнее» (входо-выходное) описание, которое сводится к указанию множества пар $\{(X, Y)\}$, порождаемых этим механизмом, т.е. функции $C(X)$.

Механизмы выбора, порождающие одну и ту же функцию выбора C, будем называть эквивалентными.

Будем пользоваться следующей единообразной формой описания механизма (процедуры) выбора. Для задания такого механизма фиксируется некоторая структура [3] σ на множестве A и задается правило

---

[1] В задачах теории управления часто множество вариантов бесконечно, но принципиальные вопросы удобнее изучать, рассматривая конечное A. Основные идеи статьи и многие из приведенных далее результатов с надлежащими изменениями переносятся на случай бесконечного A и на случай, когда для выбора могут быть предъявлены не любые подмножества $X \subseteq A$.

[2] Условие непустоты выбора $(Y \neq \varnothing)$ рассматривается иногда как одна из аксиом «рациональности» выбора. В этой работе мы сохраняем его лишь с целью упрощения и сокращения изложения. С другой стороны, множество Y может включать несколько элементов, выбираемых одновременно; по этой причине мы используем термин «варианты» вместо более часто употребляемого термина «альтернативы», относящегося, как правило, к взаимоисключающим объектам выбора.

[3] Термин «структура» здесь используется в смысле, близком к общепринятому вольному математическому словоупотреблению («алгебраическая структура»,

π, указывающее, как при каждом предъявлении X, используя структуру σ, найти Y. Поясним эти понятия на примерах.

Пример 1. Скалярно-оптимизационный выбор. Структура σ задается отображением φ множества A на числовую ось, имеющую здесь смысл оси «хуже — лучше». Такое отображение $\varphi(x)$ называют «шкала» [1], «критерий» и т.д. В этом примере правило π — экстремизация (для определенности, максимизация) $\varphi(x)$ на множестве X, т.е. выделение из X подмножества Y, определяемого как

$$C(X) = Y = \{y \in X \mid \varphi(y) \geqslant \varphi(x) \text{ для всех } x \in X\} \tag{1}$$

или, эквивалентно,

$$C(X) = Y = \{y \in X \mid \text{ не существует } x \in X, \text{ такого, что } \varphi(x) > \varphi(y)\}. \tag{2}$$

Так определенный скалярно-оптимизационный механизм включает в выбор Y ((1) или (2)) все варианты с максимальным значением φ на X (и только их).

Рис. 1

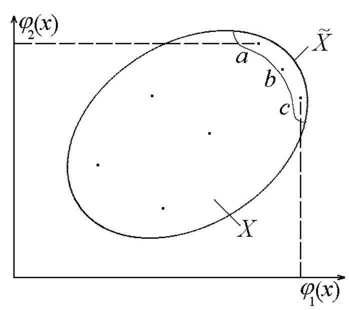


Рис. 2

Пример 2. Векторно-оптимизационный выбор. В этом случае структура σ задается в виде $n > 1$ отображений $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, множества A на числовую ось, т.е. задается вектор-функцией $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Правило π — это «векторная максимизация» функции $\varphi(x)$ на X, понимаемая как выделение из X множества всех оптимальных (по Парето) вариантов по «векторному критерию» φ (множества Парето). Описанием такого правила может служить уже приведенное выше выражение (2), если в нем понимать неравенство $\varphi(x) > \varphi(y)$ как

«структура упорядочения» и т.п.); в этом вводном изложении нет нужды прибегать к общим формальным определениям.

[1] Простоты ради мы говорим лишь о числовых шкалах. Все изложенное далее относительно примеров 1–5 переносится также и на более общие порядковые шкалы.

векторное[1] (заметим, что выражение (1) при аналогичном векторном понимании фигурирующего в нем неравенства $\varphi(y) \geqslant \varphi(x)$ теперь уже дает другое правило[2]).

Во избежание недоразумений подчеркнем, что так определяемый векторно-оптимизационный механизм включает в выбор все оптимальные по Парето варианты, принципиально не делая между ними различия. Иногда под «векторной оптимизацией» понимают выделение каких-либо специальных вариантов среди всех вариантов, оптимальных по Парето. С точки зрения принятого определения это будет другой механизм; некоторые примеры подобных механизмов, выделяющих «часть» множества Парето, будут рассмотрены ниже (см. примеры 4, 5). Простейшая двумерная иллюстрация представлена на рис. 2. Здесь $\tilde{X}$ — множество Парето для предъявления X, представленное в плоскости двух шкал (критериев) φ_1, φ_2. Множество $\tilde{X}$ содержит «крайние» элементы a и c — варианты, оптимальные по одной из шкал φ_1, φ_2. Кроме того, $\tilde{X}$ включает «промежуточный» элемент b — «компромиссный» вариант, оптимальный в смысле Парето по вектору шкал (φ_1, φ_2), но не оптимальный ни по одной из шкал в отдельности. Механизм выделения «крайних» вариантов рассматривается далее в примере 4, а другой механизм, выделяющий, вообще говоря, «компромиссные» варианты, будет рассмотрен в примере 5.

В основе логики механизмов выбора (1) и (2) лежит парное сравнение вариантов. Эта логика «в чистом виде» и в наиболее общей форме отражена в следующем примере 3.

Пример 3. Парно-доминантный выбор и его графо-доминантная реализация. В этом механизме выбора структура σ задается бинарным отношением D на множестве вариантов A (запись xDy для x, $y \in A$ читается как «x находится в отношении D к y»). Правило π получается, если в определениях правил экстремального выбора (1) и

---

[1] Общеупотребительны два векторных толкования такого неравенства: «строгое», когда $\varphi(x) > \varphi(y)$ понимается как набор покомпонентных неравенств $\varphi_j(x) > \varphi_j(y)$, $j = \overline{1,n}$, и «полустрогое», когда $\varphi(x) > \varphi(y)$ определяется как $\varphi(x) \geqslant \varphi(y)$ и $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, где $\varphi(x) \geqslant \varphi(y)$ понимается как набор покомпонентных неравенств $\varphi_j(x) \geqslant \varphi_j(y)$, $j = \overline{1,n}$. Обычно в основу определения оптимальности по Парето кладется «полустрогое» определение неравенства $\varphi(x) > \varphi(y)$, хотя можно рассматривать также и «слабую оптимальность по Парето» на основе «строгого» векторного неравенства. Все последующие утверждения относительно векторно-оптимизационного механизма остаются равно справедливыми и при одном, и при другом определении векторного неравенства и соответственно множества Парето в (2).

[2] Выбор (1) в векторном случае означает выделение вариантов, лучших в X по каждой из шкал φ_j, $j = \overline{1,n}$, одновременно; такой выбор, как правило, оказывается пустым.

(2) заменить неравенства отношениями D:

$$Y = \{y \in X \mid yD_1x \text{ для всех } x \in X\}, \tag{1'}$$

$$Y = \{y \in X \mid \text{ не существует } x \in X, \text{ такого, что } xD_2y\}. \tag{2'}$$

Определения (1′) и (2′) эквивалентны между собой при $D_2 = (\overline{D}_1)^{-1}$, т.е. когда отношения D_1 и D_2 взаимно «обратно-дополнительны»: $yD_2x \Leftrightarrow$ (не xD_1y). Далее, предполагая это условие выполненным, будем называть обратное отношение $(D_1)^{-1}$ в (1′) отношением разрешения и обозначать через α, а D_2 в (2′) называть отношением запрещения и обозначать через β. Отношения α и β по определению взаимно дополнительны: $\beta = \overline{\alpha}$, $\alpha = \overline{\beta}$.

Отношение $x\alpha y$ будем интерпретировать как «вариант y разрешается вариантом x», а дополнительное отношение $x\beta y$ — как «вариант y запрещается вариантом x». Вариант $y \in X$, разрешенный каждым (или, что то же самое, не запрещенный ни одним) вариантом $x \in X$, будем называть доминантой в X. Таким образом, доминанта определяется в терминах «парных сравнений» данного варианта со всеми вариантами в X. Механизм выбора всех доминант в X ((1′) или (2′)) будем называть парно-доминантным механизмом.

Произвольный парно-доминантный механизм, в отличие от оптимизационных механизмов, в общем случае не гарантирует непустоты выбора «автоматически». Поэтому в этой работе, продолжая налагать требование непустоты, мы должны ограничиться лишь теми отношениями D_1 и D_2 в (1′), (2′), которые обеспечивают[1] непустоту Y при всех X.

Обычно рассматриваемые механизмы выбора лучших вариантов по «отношениям предпочтения» — строгим предпочтениям P или нестрогим предпочтениям R [63, 95, 134, 221, 233] — однозначно укладываются в схему механизма парно-доминантного выбора. При этом P играет роль D_2 в (2′), а R играет роль D_1 в (1′). Более того, при соблюдении условия непустоты выбора можно было бы с самого начала в определениях (1′) и (2′) интерпретировать[2] (и обозначать) D_1 как отношение нестрогого предпочтения (R), а D_2 — как отношение строгого предпочтения (P). Однако традиционная трактовка отношений предпочтения существенно связана с идеей «парного сравнения» вариантов, от которой далее мы намерены отойти. Для последующих обобщений более

[1] Так, в терминах бинарного отношения D_2 для непустоты Y при всех непустых $X \subseteq A$ в (2′) необходима и достаточна ацикличность D_2 [63, 221] (напомним, что множество A конечно).

[2] В общем случае, допускающем пустой выбор, такая интерпретация может терять силу. Так, отношение доминирования в играх [80, 143], не обязательно асимметричное, может служить примером отношения типа D_2, т.е. отношения «запрещения» β, не всегда интерпретируемого как «предпочтение».

пригодны введенные нами «нейтральные» термины: отношения разрешения α и запрещения β.

Для наглядности удобно представлять бинарные отношения графами, вводя граф запрещений β или дополнительный к нему граф разрешений $\alpha = \overline{\beta}$. Вершинами этих графов служат варианты $x \in A$, а отношение $x\alpha y$ (или $x\beta y$) представляется ориентированной дугой от x к y (в частности, $x\alpha x$ — петля). На графе запрещений β правило $(2')$ означает выбор из подграфа β_X, соответствующего X, тех вершин $y \in X$, к которым не подходят дуги от других вершин подграфа β_X. На графе разрешений α правило $(1')$ — это выбор вершин $y \in X$, к которым подходят дуги от всех вершин $x \in X$. Выбираемые так вершины (варианты y) — это доминанты в β_X, а такой механизм выбора мы будем называть графо-доминантной реализацией парно-доминантного механизма (или, для краткости, графо-доминантным механизмом).

Условие непустоты выбора особенно наглядно формулируется в терминах графа β: на этом графе должны отсутствовать циклы.

Схему парно-доминантного механизма можно рассматривать как абстрактную формулировку понятия «оптимизационный выбор» (а отношения D_1 и D_2 — как абстрактные формы отношений «не хуже» и «лучше»). В частности, класс парно-доминантных механизмов выбора (пример 3) в определенном смысле «перекрывает» оба вышеописанных класса оптимизационных механизмов (примеры 1 и 2). Действительно, каждому оптимизационному механизму выбора можно сопоставить эквивалентный парно-доминантный механизм с отношением запрещения

$$x\beta y \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(y).$$

Такое отношение (граф) β является транзитивным [1], если φ — вектор, и, более того, сильно транзитивным [2], если φ — скаляр. Таким образом, оптимизационным механизмам могут быть найдены эквиваленты лишь в специальных подклассах парно-доминантных механизмов выбора с транзитивной (для векторно-оптимизационного) или даже сильно транзитивной (для скалярно-оптимизационного механизма) [3] структурой, т.е. структурой частичного упорядочения или слабого упорядочения, соответственно.

[1] Напомним, что отношение (граф) β называется транзитивным, если из $x\beta y$ и $y\beta z$ следует $x\beta z$.

[2] Отношение (граф) β называется сильно транзитивным, если транзитивно как β, так и его дополнение $\overline{\beta}$.

[3] Справедлив и обратный факт: любой парно-доминантный механизм с транзитивной (сильно транзитивной) структурой β может быть эквивалентно сведен к векторно-оптимизационному (соответственно, к скалярно-оптимизационному) механизму выбора (см. теорему 1).

Механизмы выбора, описанные в примерах 1–3, назовем классическими. Такие типы механизмов или их частные случаи обычно фигурируют в литературе по теории выбора [63, 95, 134, 204, 212, 221, 233]. Каждый из этих примеров фактически вводит в рассмотрение не один механизм M, а целый класс $\mathcal{M}$ механизмов выбора. Конкретный механизм M выделяется из такого класса конкретизацией «структурного параметра» σ (заданием конкретной шкалы, конкретной n-ки шкал, конкретного отношения D).

Разумеется, можно построить иные классы механизмов выбора, используя эти же типы структур (шкалы, n-ки шкал, отношения или графы), но изменив правило выбора π, причем новое правило выбора может оставаться «похожим» на старое. Так, например, по заданной n-ке шкал можно из каждого X выбирать не все множество Парето, а определенную его часть (см. далее примеры 4 и 5). Другой пример: если структура задана графом γ, имеющим смысл «запрещений» (или строгих предпочтений), то можно выбирать в X не те вершины, к которым не подходит ни одной дуги в γ_X, а те вершины y из подграфа γ_X, для которых максимальна разность $N = n_2 - n_1$, где n_1 — число дуг, подходящих к y от других $x \in X$, а n_2 — число дуг, отходящих от y к другим $x \in X$ (см. далее пример 6).

Возникает вопрос: не сводятся ли различные «неклассические» механизмы выбора такого рода к эквивалентным классическим? В частности, существует ли шкала или n-ка шкал, на которые можно отобразить то же множество вариантов A так, чтобы оптимизационный выбор (примеры 1 и 2) при любых $X \subseteq A$ совпадал с заданным неклассическим выбором? В тех случаях, когда такой эквивалентной сводимости нет, возникают существенно неклассические механизмы выбора. В таких механизмах могут использоваться те же структуры σ, что и в классических, их правило π может включать экстремизационные процедуры, но класс таких механизмов выбора заведомо не «охватывается» (в смысле эквивалентной сводимости) классом классических оптимизационных механизмов.

3. Пространство $\mathcal{C}$ и характеристические свойства функций выбора

Каждый конкретный механизм выбора M порождает определенную функцию выбора $C(X)$, которую можно рассматривать как «точку» пространства $\mathcal{C}$ всевозможных функций выбора на A; класс $\mathcal{M}$ механизмов выбора порождает соответствующий класс функций выбора, образующий в пространстве $\mathcal{C}$ некоторую «область» $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$.

Эквивалентные механизмы выбора порождают одну и ту же точку

C^* в пространстве $\mathcal{C}$. Два класса механизмов выбора назовем эквивалентными, если они порождают одну и ту же область $\mathcal{C}^*$ в пространстве $\mathcal{G}$.

Эквивалентные классы $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ механизмов выбора обладают, в очевидном смысле, одинаковыми возможностями: для каждого механизма M_1 из одного класса $\mathcal{M}_1$ найдется эквивалентный ему механизм M_2 из другого класса $\mathcal{M}_2$ и обратно. Если же один класс механизмов $\mathcal{M}_1$ выбора порождает более широкую область $\mathcal{C}_1$, чем область $\mathcal{C}_2$, порождаемая другим классом механизмов $\mathcal{M}_2$, т.е. $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2$, то естественно считать, что механизмы класса $\mathcal{M}_1$ обладают «бóльшими возможностями» по сравнению с $\mathcal{M}_2$. Действительно, в этом случае для каждого механизма $M_2 \in \mathcal{M}_2$ можно указать механизм $M_1 \in \mathcal{M}_1$, который «делает то же самое», что M_2, т.е. эквивалентен M_2, тогда как обратное утверждение неверно. Таким образом, рассмотрение пространства $\mathcal{C}$ и сопоставление точек и областей, порождаемых в этом пространстве механизмами выбора и их классами, дает формальную основу для содержательного сравнения «возможностей» различных механизмов выбора.

Наряду с пространством $\mathcal{C}$ введем в рассмотрение «пространство структур» Σ. Все шкалы, все n-ки шкал, все отношения (графы) образуют соответствующие «области» в этом пространстве; конкретная шкала, конкретная n-ка шкал, конкретное отношение (граф) — точка σ такой области. Разумеется, в пространство структур Σ можно заранее включить и многие другие типы структур σ. Тогда «хорошо определенный» класс механизмов выбора можно представить как конкретное множество структур $\tilde{\Sigma}$ с заданным на нем правилом выбора $\tilde{\pi}$. Здесь π – это оператор, который отображает точки σ пространства структур Σ в точки C пространства $\mathcal{C}$. Тем самым область $\tilde{\Sigma}$ пространства структур отображается на порождаемую правилом $\tilde{\pi}$ область $\mathcal{C}_{\tilde{\Sigma},\tilde{\pi}}$ пространства $\mathcal{C}$. Чтобы соотносить между собой области $\mathcal{G}_{\tilde{\Sigma},\tilde{\pi}}$, порождаемые различными классами механизмов выбора, удобно привлечь независимые понятия, в качестве которых мы будем брать те или иные свойства функций выбора, называемые далее характеристическими. Каждым характеристическим свойством $\mathcal{P}$ выделяется область $\mathcal{C}^{\mathcal{P}}$ в пространстве $\mathcal{C}$, состоящая из всех тех и только тех функций C, которые обладают свойством $\mathcal{P}$. Области $\mathcal{C}^{\mathcal{P}}$ будут служить нам «ориентирами» в пространстве $\mathcal{C}$.

Характеристические свойства функций выбора вводились в теории принятия решений главным образом со специальной целью — очертить область «классических» функций выбора. Мы приводим их здесь и приписываем им специальные наименования, имея в виду общую задачу: описание достаточно произвольных (не обязательно классических) классов механизмов $\mathcal{M}_{\Sigma,\pi}$ и классов функций выбора $\mathcal{C}^{\mathcal{P}}$.

Определение. Будем говорить, что функция $C(X)$ удовлетворяет условию:

1. Наследования, **H** (оно же — постулат 4 Чернова [121], или условие α Сена [222], или аксиома $C2$ Эрроу–Удзавы [94]), если

$$\text{из } X' \subseteq X \text{ следует } C(X') \supseteq C(X) \cap X'. \tag{3}$$

2. Строгого наследования, или константности остаточного выбора, **K** (оно же — постулат 6 Чернова [121] и одна из форм «слабой аксиомы выявленных предпочтений» Самуэльсона — аксиома $C4$ Эрроу [94]), если

$$\text{из } X' \subseteq X \text{ и } X' \cap C(X) \neq \varnothing \text{ следует } C(X') = C(X) \cap X'. \tag{4}$$

3. Согласия, **C** (оно же — постулат 10 Чернова [121] и условие γ Сена [222]), если

$$\text{из } X = X' \cup X'' \text{ следует } C(X) \supseteq C(X') \cap C(X''). \tag{5}$$

4. Независимости от отбрасывания отвергнутых вариантов (или, для краткости, отбрасывания), **O** (постулат 5* Чернова [121] или аксиома 2 в [146]), если

$$\text{из } C(X) \subseteq X' \subseteq X \text{ следует } C(X') = C(X). \tag{6}$$

Все эти свойства **H**, **K**, **C** и **O** имеют достаточно ясный смысл как требования к «логике» наблюдаемого выбора $C(X)$, в той или иной степени отражающие содержательные представления о «лучшем» [121, 221, 222].

Рассмотрим теперь формальные соотношения между этими свойствами. Начнем с условий **H**, **C** и **O**. Они представляют собой независимые свойства в том смысле, что существуют функции выбора, удовлетворяющие любой из 8 возможных конъюнкций этих условий и их отрицаний:

$$\mathbf{H} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{O}; \quad \overline{\mathbf{H}} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{O}; \ldots; \quad \overline{\mathbf{H}} \cap \overline{\mathbf{C}} \cap \overline{\mathbf{O}}.$$

Это значит, что в пространстве $\mathcal{C}$ соответствующие области **H**, **C**, **O** и их дополнения $\overline{\mathbf{H}}$, $\overline{\mathbf{C}}$, $\overline{\mathbf{O}}$ имеют непустые пересечения (рис. 3). Что же касается условия **K**, то оно является усилением каждого из условий **H**, **C** и **O**: из **K** следует $\mathbf{H} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{O}$, но не обратно, так что область **K** лежит строго внутри пересечения трех областей $\mathbf{H} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{O}$ (рис. 3).

Оказывается, что в построенном разбиении пространства $\mathcal{C}$ удачно располагаются области, порождаемые классическими механизмами выбора.

Теорема 1[1]. Для того чтобы функция выбора была порождаема механизмом

1^0) скалярно-оптимизационного (пример 1),

2^0) векторно-оптимизационного (пример 2),

3^0) парно-доминантного (пример 3)

выбора, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соответственно условию

1) $\mathbf{K}$,

2) $\mathbf{H} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{O}$,

3) $\mathbf{H} \cap \mathbf{C}$.

При этом класс векторно-оптимизационных (скалярно-оптимизационных) механизмов выбора эквивалентен подклассу парно-доминантных механизмов, определяемому транзитивными (соответственно сильно транзитивными) графами или отношениями запрещения[2] β. В силу теоремы 1 все классические механизмы выбора (примеры 1–3) при любом выборе шкалы, n-ки шкал и графа (отношения) порождают функции выбора, лежащие в пересечении областей $\mathbf{H}$ и $\mathbf{C}$ в пространстве $\mathcal{C}$. Области, порождаемые в пространстве $\mathcal{C}$ классами механизмов выбора 1^0, 2^0 и 3^0 — это выделенные на рис. 3 «классические» области $\mathbf{K}$, $\mathbf{H} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{O}$ и $\mathbf{H} \cap \mathbf{C}$ соответственно, последовательно вложенные друг в друга.

Теперь поставленные выше вопросы о сводимости механизмов выбора к классическим (оптимизационным) можно сформулировать так: порождает ли данный механизм или класс механизмов выбора точку или область в пространстве $\mathcal{C}$, лежащую внутри пересечения $\mathbf{H} \cap \mathbf{C}$, или, более жестко, внутри $\mathbf{H} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{O}$, или даже внутри $\mathbf{K}$?

Отрицательные ответы на эти вопросы приводят к проблеме, имеющей самостоятельный интерес: каковы возможные механизмы порождения «неклассических» областей в пространстве $\mathcal{C}$?

В качестве примера рассмотрим одну такую «неклассическую область» — пересечение $\mathbf{H} \cap \mathbf{O}$ областей $\mathbf{H}$ и $\mathbf{O}$, выделенное на рис. 3 штриховкой (наряду с «классическими» областями $\mathbf{H} \cap \mathbf{C}$, $\mathbf{H} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{O}$ и $\mathbf{K}$). Начнем с описания одного «неклассического» механизма выбора.

Пример 4. Совокупно-экстремальный выбор. Структура σ та же, что и в примере 2, т.е. n-ка ($n > 1$) шкал. Правило π таково: по каждой шкале («критерию») порознь осуществляется скалярно-оптимизационный выбор (1) на множестве X (как в примере 1), и выбранные

[1] Эта теорема представляет в «синтетической» форме серию известных частных утверждений о соответствиях между различными «классическими» типами механизмов и функций выбора (см. [63, 134, 146, 214]).

[2] Напомним, что всегда предполагается ацикличность β как требование непустоты парно-доминантного выбора.

варианты объединяются, образуя множество $Y = C(X)$.

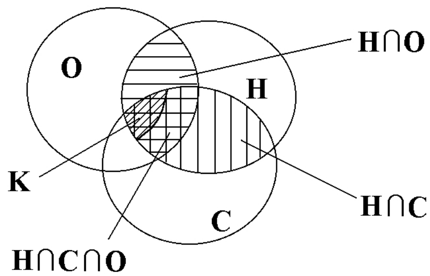


Рис. 3

Теорема 2. Пусть задан механизм векторно-оптимизационного выбора по некоторому набору шкал $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$. Тогда этот набор шкал может быть дополнен до нового набора $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,m}$ $(m > n)$, так, что механизм совокупно-экстремального выбора на новом наборе эквивалентен исходному векторно-оптимизационному механизму.

Теорема 2 утверждает, что при любом $X \subseteq A$ совокупно-экстремальный выбор на «новом» наборе будет совпадать с множеством Парето по «старому» набору шкал (можно также дополнительно показать, что $C(X)$ оказывается множеством Парето и по «новому» набору шкал).

В силу этой теоремы класс механизмов совокупно-экстремального выбора «охватывает» класс механизмов векторно-оптимизационного выбора (пример 2) и, следовательно, тем более скалярно-оптимизационного (пример 1). Вместе с тем имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Для того чтобы функция $C(X)$ могла быть порождена механизмом совокупно-экстремального выбора, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию $\mathbf{H} \cap \mathbf{O}$ (рис. 3).

Из теоремы 3 с учетом утверждения о независимости свойств $\mathbf{H}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{O}$ следует, что механизмы совокупно-экстремального выбора не всегда, а лишь в специальных случаях могут быть эквивалентно сведены к классическим оптимизационным и даже вообще к каким-либо парно-доминантным механизмам (хотя они включают процедуру экстремизации). Действительно, область $\mathbf{H} \cap \mathbf{O}$ не лежит целиком внутри «классической» области $\mathbf{H} \cap \mathbf{C}$ функций парно-доминантного выбора, а лишь пересекается с нею (рис. 3).

Замечая, что пересечение областей $\mathbf{H} \cap \mathbf{O}$ и $\mathbf{H} \cap \mathbf{C}$ есть область $\mathbf{H} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{O}$, фигурирующая в п. 2 теоремы 1, получаем из теоремы 3 следствие 1.

Следствие 1. Пусть механизм совокупно-экстремального выбора эквивалентен некоторому парно-доминантному механизму. Тогда он эквивалентен некоторому векторно-оптимизационному механизму.

Это следствие показывает, что любой данный механизм совокупно-экстремального выбора либо эквивалентен некоторому векторно-оптимизационному, либо не эквивалентен вообще никакому «классическому» парно-доминантному механизму.

В работе Плотта [203] введен в рассмотрение класс функций выбора, удовлетворяющих следующему условию независимости от пути (**НП**):

$$\text{Если } X = X' \cup X'', \text{ то } C(X) = C[C(X') \cup C(X'')]. \tag{7}$$

Теорема 4. Для того чтобы функция $C(X)$ была не зависящей от пути по Плотту, необходимо и достаточно, чтобы она порождалась механизмом совокупно-экстремального выбора.

В силу этой теоремы всевозможные совокупно-экстремальные механизмы выбора порождают все функции Плотта и только их. В сочетании с теоремой 3 это дает следствие 2.

Следствие 2[1]. Свойство (7) «независимости от пути» для функций выбора эквивалентно конъюнкции характеристических свойств $\mathbf{H} \cap \mathbf{O}$.

Пример 5. Суперпозиция классических механизмов выбора. Структура σ та же, что и в примерах 2 и 4, т.е. n-ка шкал. Правило π «двухступенчатое»: сначала из X выделяется множество Парето (как в примере 2), а затем из него выбираются «лучшие варианты» по дополнительному скалярному критерию оптимальности, заданному на A (как в примере 1)[2].

Можно показать, что функция выбора, порождаемая таким «двухступенчатым» механизмом, всегда удовлетворяет условию **C**, но может не удовлетворять условию **H** (а также условию **O**) и тем самым не попадает в «классическую» область $\mathbf{H} \cap \mathbf{C}$.

Таким образом, суперпозиция двух классических механизмов выбора может порождать «неклассический» выбор. Аналогично обстоит дело и для ряда иных механизмов выбора, в которых правило π «выделяет часть» множества Парето.

Пример 6. Турнирный выбор. Этот пример фактически уже был представлен выше как формальное видоизменение графодоминантного механизма выбора, а именно как выбор вершин на ориентированном

[1] Близкий результат установлен в [106].

[2] Такое правило выбора можно рассматривать как специфическое обобщение известного лексикографического правила [63, 134]: если на первом этапе выбора применять одну шкалу ($n = 1$), то получим в точности лексикографический выбор по двум последовательно применяемым скалярным критериям.

графе по правилу максимизации разности числа отходящих и подходящих дуг. Покажем, как такое «турнирное» правило возникает из рассмотрения содержательной задачи.

Пусть A — множество шахматистов, из которых могут формироваться турниры по однокруговой системе с различным составом участников, и пусть в каждом турнире победители определяются («выбираются») по обычному правилу — по максимуму суммы набранных очков (выигрыш дает 1 очко, проигрыш — 0, ничья — 1/2). Примем упрощающую «гипотезу постоянства результатов», согласно которой результат игры между шахматистами x и y (x, $y \in A$) всегда одинаков. Исходя из этой гипотезы, построим ориентированный граф выигрышей [1] γ на множестве вершин A (дуга из x в y проводится, если x выигрывает у y; дуга между x и y отсутствует, если они играют вничью). Каждому составу турнира $X \in A$ соответствует подграф этого графа на множестве вершин X, который в силу «гипотезы постоянства результатов» представляет собой граф выигрышей в турнире X. Знание исходного графа γ на A, а значит, и его подграфа γ_X на X, позволяет тем самым указать победителя (или победителей) любого турнира X. Победители согласно вышеуказанному турнирному правилу (точнее, согласно эквивалентному правилу максимума очков при 0 за ничью и -1 за поражение) — это те вершины $y \in X$, для которых максимальна разность $N = n_2 - n_1$, где n_2 — число отходящих от них дуг и n_1 — число подходящих к ним дуг от других вершин $x \in X$.

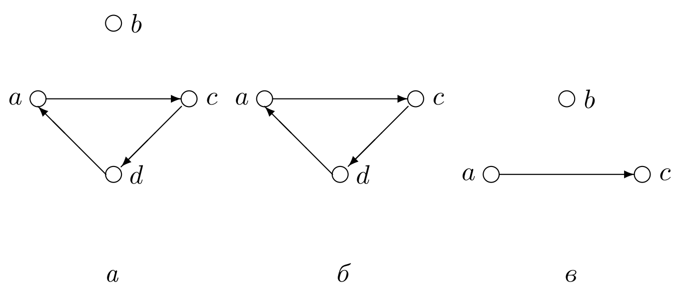


Рис. 4

Допустим, что результаты игр «каждого с каждым» таковы, что все шахматисты (все множество A) могут быть разбиты на упорядоченное семейство непересекающихся подмножеств так, что выполнены следующие два условия:

[1] Такой граф γ будет антирефлексивным и антисимметричным (т.е. без петель и без встречных дуг). Отметим, что употребление термина «турнирный граф» в теории графов обычно предполагает выполнение еще одного дополнительного условия: любые две вершины $x \neq y$ связаны дугой (в наших терминах — нет ничьих) [81]. Мы здесь этого не предполагаем.

1) в пределах каждого подмножества все шахматисты играют друг с другом вничью и

2) каждый шахматист из некоторого подмножества выигрывает у всех шахматистов из «нижележащих» подмножеств (по их упорядочению). Это случай «слабого упорядочения» игроков из A по результатам их игр между собой, имеющий место тогда и только тогда, когда граф выигрышей γ сильно транзитивен. В этом и только в этом случае выбор победителей по турнирному правилу при любом составе $X \subseteq A$ (совпадающий при этом с выбором по графо-доминантному правилу на графе выигрышей γ, рассматриваемом как граф запрещений β) удовлетворяет условию **K** и может быть сведен к скалярно-оптимизационному [1] выбору.

Разумеется, такой граф выигрышей представляет собой весьма частный случай. Легко указать графы выигрышей, при которых порождаемая так функция $C(X)$ не удовлетворяет не только условию **K**, но даже ни одному из условий **H**, **C** и **O**. Пример такого графа на четырех вершинах-вариантах a, b, c, d приведен на рис. 4, *а*.

Для того чтобы убедиться в нарушении условия **H** для турнирного выбора $C(X)$ на этом графе выигрышей, рассмотрим его подграф γ_X на множестве вершин $X = \{a, c, d\}$ (рис. 4, *б*). Легко видеть, что по турнирному правилу $C(X) = \{a, c, d\}$. Взяв затем $X' = \{a, c\}$, получаем $C(X') = \{a\}$. Замечая, что $c \in C(X)$ и $c \in X' \subset X$, но $c \notin C(X')$, убеждаемся, что $C(X) \cap X' \not\subseteq C(X')$, так что условие наследования нарушено.

Для того чтобы убедиться в нарушении условий **C** и **O**, возьмем $X = \{a, b, c\}$ (рис. 4, *в*). Тогда по турнирному правилу $C(X) = \{a\}$. Взяв затем $X' = \{a, b\}$, получаем $C(X') = \{a, b\}$. Так как при этом $C(X) \subset X' \subset X$, но $C(X') \neq C(X)$, то нарушено условие отбрасывания. Наконец, возьмем здесь же $X'' = \{b, c\}$, так что $X' \cup X'' = X$. Тогда $C(X'') = \{b, c\}$. Замечая, что $b \in C(X')$ и $b \in C(X'')$, но $b \notin C(X)$, убеждаемся, что $C(X) \not\supseteq C(X') \cap C(X'')$, так что условие согласия также нарушено.

Таким образом, даже такой часто употребляющийся механизм выбора «лучших игроков», как турнирный механизм с правилом «максимума суммы очков», в общем случае не сводится к классическим, в частности к скалярно-оптимизационным механизмам выбора, хотя он и содержит в себе процедуру экстремизации скалярной величины — «суммы очков».

[1] Здесь шкала φ получается, если в качестве оценки $\varphi(x)$ приписать каждому шахматисту x номер подмножества, которому он принадлежит (отсчитываемый «снизу вверх»).

4. Парные и множественные взаимовлияния вариантов и роль контекста выбора

Приведенные выше примеры продемонстрировали неадекватность классического оптимизационного подхода общей задаче выбора лучших вариантов. Чтобы пояснить внутреннюю причину этого, вернемся к примеру 4 и рассмотрим случай, когда три варианта (a, b и c) размещаются в плоскости двух шкал (критериев) так, как это показано на рис. 2. При двухэлементных предъявлениях $X' = \{a, b\}$ и $X'' = \{b, c\}$ оба варианта в каждом предъявлении при применении совокупно-экстремального правила попадают в выбор: $C(X') = \{a, b\}$ и $C(X'') = \{b, c\}$. Но при предъявлении всех трех вариантов $\tilde{X} = X' \cup X'' = \{a, b, c\}$ выбор имеет вид $C(\tilde{X}) = \{a, c\}$, так что $C(X') \cap C(X'') = \{b\} \nsubseteq C(\tilde{X})$, т.е. классическое условие согласия нарушено. Здесь естественно считать, что вариант b не включен в выбор из $X = \{a, b, c\}$ потому, что этот вариант «подавляется» («запрещается») одновременным присутствием в предъявлении X вариантов a и c. Такое «совместное запрещение» представляет собой один из примеров «множественного воздействия» одних вариантов на другие.

Подобные множественные воздействия приводят к тому, что на выбор данного варианта существенно влияет весь «контекст выбора», т.е. предъявленное множество X в целом. Это влияние, в отличие от классического парно-доминантного случая, в общем случае не может быть расчленено на воздействия типа «разрешение — запрещение» со стороны «конкурирующих вариантов», взятых по отдельности, и не может быть обнаружено методом парных сравнений вариантов. Именно наличие таких существенно множественных влияний со стороны всего контекста выбора обусловливает несводимость целого ряда естественных и внутренне логичных механизмов выбора к механизмам, использующим классическую парно-доминантную логику выбора (логику «абстрактной оптимизации»). Другими словами, «выбор лучших вариантов» перестает быть простым, если само понятие «лучший» находится в сложной зависимости от контекста выбора и не сводится к понятию «лучше» (или «не хуже чем») в парном сравнении.

Аналогичное обстоятельство прослеживается в примере 6: выбор победителя в турнире может сложным образом зависеть от всего «контекста», так как сумма очков, набираемых данным игроком, зависит от состава турнира. В частности, включение в турнир нового игрока может привести к смене победителя, даже если этот новый игрок сам победителем не становится [1]. На этом примере хорошо видно так-

---

[1] Логика подобного влияния контекста на выбор обсуждалась, в частности, при введении характеристических свойств функций выбора в [221, 222].

же, чем отличается скалярно-оптимизационный выбор в смысле принятого здесь определения от более произвольного выбора на основе максимизации какой-либо функции. Действительно, в примере 6 максимизируемая функция «сумма очков у игрока x в турнире X» имеет вид $\varphi(x, X)$, а не вид $\varphi(x)$, который должна иметь шкала в определении скалярного критерия оптимальности. Зависимость «оценки» φ варианта x не только от самого x, но и от «контекста» X, в котором производится сравнение данного варианта с другими, отличает такой механизм выбора от оптимизационного механизма в «жестком» смысле, сформулированном в примере 1.

Нередко под выбором по скалярному критерию оптимальности явно или неявно подразумевается «смягченное» определение скалярно-оптимизационного механизма, допускающее зависимость экстремизируемой функции от контекста выбора. Если при этом зависимость φ от X допускать произвольной, то любой наперед заданный выбор $Y = C(X)$ легко формально представить как «оптимальный». Для этого достаточно положить, например, $\varphi(x, X) = 1$ при $x \in C(X)$ и $\varphi(x, X) = 0$ при $x \notin C(X)$. Однако это по существу равносильно тому, что оценочное значение φ приписывается не априори самому варианту x, а апостериори «составному объекту» (x, X), имеющему смысл «вариант x в контексте сравнения X». Отметим, что использование вариационной техники решения задач оптимизации нередко не только предусматривает возможную зависимость значения экстремизируемой функции φ от «допустимого множества» X, но даже может намеренно вводить такую зависимость [1].

Нас сейчас интересует, однако, не «техническая» сводимость задач выбора к применению экстремизационных процедур, а принципиальная возможность определения «лучшего» варианта как такого, который «лучше (не хуже)» любого другого из имеющихся вариантов в некотором безусловном смысле, не зависящем от контекста сравнения. Примеры механизмов выбора, не сводимых к парно-доминантным, показывают, что это не всегда возможно даже в содержательно осмысленных задачах выбора «лучших» вариантов, и что причина этого — эффекты «множественных» взаимовлияний вариантов. Отсюда возникает необходимость изучения «логики отношений» не только между отдельными вариантами, но и между целыми множествами вариантов. Ориентиром при этом может служить та логика выбора, которую можно видеть в общих характеристических свойствах функций выбо-

[1] Это фактически делается, в частности, при замене задачи условной экстремизации (при ограничениях в форме равенств или неравенств) задачей безусловной экстремизации путем перевода ограничений в экстремизируемую функцию (метод множителей Лагранжа или метод штрафных функций).

ра, а именно в вышеприведенных свойствах наследования, согласия и отбрасывания (**H**, **C** и **O**). Ниже мы покажем, что естественные обобщения классической «парной» структуры отношений на множестве вариантов и классического «доминантного» правила выбора приводят к таким неклассическим схемам механизмов выбора, которые способны порождать любые функции выбора из областей **H**, **C** и **O** в пространстве $\mathcal{C}$.

5. Обобщенные доминантные механизмы выбора

Рассмотрим теперь некоторые схемы механизмов выбора, которые представляют собой различные обобщения парно-доминантного механизма (пример 3). В качестве структур σ будем использовать обобщенные бинарные отношения или гиперотношения, которые устанавливаются не (или не только) для отдельных вариантов, а для определенных подмножеств вариантов, взятых как целое: это отношения $\mathcal{D}$ вида $y\mathcal{D}Z$, $Z\mathcal{D}y$ и $Y\mathcal{D}Z$, где y — отдельные варианты из A ($y \in A$), а Y и Z — подмножества из A ($Y, Z \subseteq A$). В качестве правил π будем использовать обобщенные доминантные правила, три конкретные разновидности которых формулируются ниже.

Пример 7. Сильнодоминантный выбор. Структурой σ служит обобщенное бинарное отношение (гиперотношение) $\mathcal{D}$ между отдельными вариантами $y \in A$ и подмножествами вариантов[1] $Z \subseteq A$.

Сильнодоминантное правило выбора π определяется следующим выражением для функции выбора:

$$C(X) = \{y \in X \mid y\mathcal{D}_1 Z \text{ для всех } Z \subseteq X\} \tag{8}$$

или, равносильно,

$$C(X) = \{y \in X \mid \text{ не существует } Z \subseteq X, \text{ такого, что } Z\mathcal{D}_2 y\}, \tag{9}$$

где $\mathcal{D}_2 = (\overline{D}_1)^{-1}$ – обратно-дополнительное отношение к $\mathcal{D}_1$: $y\mathcal{D}_2 Z \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (не $Z\mathcal{D}_1 y$).

Формулировки (8) и (9) представляют собой непосредственные обобщения формулировок (1′) и (2′) «классического» парно-доминантного выбора. Продолжая эту аналогию, можно рассматривать гиперотношение $\mathcal{D}_1$ или, точнее, обратное к нему гиперотношение $(\mathcal{D}_1)^{-1}$ как обобщенное отношение разрешения α, а $\mathcal{D}_2$ – как обобщенное отношение запрещения β. В соответствии с этой интерпретацией $y\mathcal{D}_1 Z$ читается как «множество Z разрешает вариант y», а $Z\mathcal{D}_2 y$ –

[1] Такое гиперотношение можно, аналогично обычному бинарному отношению D на множестве A, задать путем указания всех тех и только тех пар (y, Z), для которых это отношение имеет место.

как «множество Z запрещает вариант y». Тогда формулировки (8) и (9) означают выбор вариантов y, «разрешенных всеми» (равносильно, «не запрещенных никакими») множествами вариантов Z, «присутствующими» в контексте X.

Как и в классическом образце парно-доминантного механизма выбора (пример 3), в этом примере 7 требование непустоты выбора налагает ограничения на допустимый вид гиперотношений[1] $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$. Будем называть отношение $\mathcal{D}_1$ (или $\mathcal{D}_2$) в определении сильнодоминантного механизма выбора (8) (и соответственно (9)) корректным, если порождаемое множество $C(X)$ не пусто при всех непустых $X \subseteq A$.

Теорема 5. Для того чтобы функция выбора $C(X)$ порождалась сильнодоминантным механизмом выбора (8) (или (9)) при каком-либо корректном гиперотношении $\mathcal{D}_1$ (или $\mathcal{D}_2$), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла характеристическому условию наследования ($\mathbf{H}$).

Таким образом, класс всех сильнодоминантных механизмов выбора при всевозможных корректных гиперотношениях $\mathcal{D}_1$ (или, равносильно, $\mathcal{D}_2$) порождает в точности область $\mathbf{H}$ в пространстве функций выбора $\mathcal{C}$. Каждая функция C из этой области может быть порождена механизмом (8) при некотором гиперотношении $\mathcal{D}_1$ (или механизмом (9) при некотором $\mathcal{D}_2$). Однако, в отличие от классического парнодоминантного механизма, гиперотношение $\mathcal{D}_1$ (и $\mathcal{D}_2$), порождающее данную функцию C, восстанавливается не единственным образом. Существует, вообще говоря, несколько эквивалентных сильнодоминантных механизмов, различающихся своими структурами $\mathcal{D}_1$ (или $\mathcal{D}_2$), но порождающих одну и ту же функцию выбора C.

Пример 8. Слабодоминантный выбор. Структурой σ служит, как и в примере 7, гиперотношение $\mathcal{D}$ между $y \in A$ и $Z \subseteq A$.

Слабодоминантное правило выбора π определяется выражением

$$C(X) = \{y \in X \mid \text{ для каждого } x \in X \text{ и хотя бы одного } Z \subseteq X, \text{ такого, что } x \in Z, \text{ имеет место } y\mathcal{D}_3 Z\} \tag{10}$$

или, равносильно,

$$C(X) = \{y \in X \mid \text{ не существует } x \in X, \text{ такого, что для всех } Z, \text{ таких, что } x \in Z \subseteq X, \text{ имеет место } Z\mathcal{D}_4 y\}, \tag{11}$$

где $\mathcal{D}_4 = (\bar{\mathcal{D}}_3)^{-1}$.

[1] В частности, для $\mathcal{D}_2$ (обобщенное отношение запрещения) такое ограничение сводится к своего рода «обобщенной ацикличности» этого гиперотношения.

Формулировки (10) и (11) представляют собой иное, чем (8) и (9), обобщение «классических» формулировок ($1'$) и ($2'$). Гиперотношения $(\mathcal{D}_3)^{-1}$ из (10) и $\mathcal{D}_4$ из (11) также могут интерпретироваться как обобщенные отношения разрешения α и запрещения β соответственно. Однако слабодоминантное правило «перерабатывает» такие отношения в (10) и в (11) несколько иным способом, нежели сильнодоминантное правило в (8) и в (9).

Будем называть гиперотношение $\mathcal{D}_3$ в (10) и $\mathcal{D}_4$ в (11) корректным, если порождается $C(X) \neq \varnothing$ при всех непустых $X \subseteq A$.

Теорема 6. Для того чтобы функция выбора $C(X)$ порождалась слабодоминантным механизмом выбора (10) (или (11)) при каком-либо корректном гиперотношении $\mathcal{D}_3$ (или $\mathcal{D}_4$), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла характеристическому условию согласия ($\mathbf{C}$).

Фигурирующие в теореме 6 порождающие гиперотношения $\mathcal{D}_3$ и $\mathcal{D}_4$ для заданных функций выбора C могут восстанавливаться неоднозначно, как это имело место и для гиперотношений $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ из теоремы 5.

Неоднозначность структуры гиперотношения $\mathcal{D}$ при построении механизма сильно- или слабодоминантного выбора, порождающего заданную функцию выбора из области $\mathbf{H}$ или $\mathbf{C}$, ставит вопрос о подборе в некотором смысле удобной (простой, экономной) структуры среди различных эквивалентных структур. Мы здесь ограничимся лишь указанием на такую возможность и несколькими замечаниями. Прежде всего, хотя определения корректных гиперотношений $\mathcal{D}_1 \div \mathcal{D}_4$ не исключают сопоставление $y\mathcal{D}Z$ (или $Z\mathcal{D}y$) варианта y с пустым множеством $Z = \varnothing$, но без потери общности можно ограничиться лишь непустыми множествами Z (в формулировках (10), (11) это делается «автоматически»). Далее, сопоставление варианта y с одноэлементным множеством вида $Z = \{z\}$ может рассматриваться как включение обычного бинарного отношения [1] D (между вариантами y, $z \in A$) в соответствующее гиперотношение $\mathcal{D}$. Наконец, сопоставления варианта y с подмножествами $Z \subseteq A$ общего вида, предусматриваемые отношениями $\mathcal{D}$, можно описать «экономным» образом, учитывая логику последующей переработки отношения $\mathcal{D}$ соответствующим правилом π в (8)–(11). Так, например, пусть для двух множеств Z' и Z'' имеет место $Z'\mathcal{D}_2 y$ и $Z''\mathcal{D}_2 y$, и пусть $Z' \subset Z''$. Тогда непосредственно

---

[1] Можно показать, что в гиперотношениях $\mathcal{D}$ из механизмов (8)–(11) (перестроенных эквивалентным образом, если это требуется для включения в них бинарных отношений D) сохраняется в силе интерпретация D как отношений разрешения (запрещения) одного варианта другим, проявляющихся в парных сравнениях вариантов (вариант y разрешается, т.е. не запрещается, вариантом x, если и только если $y \in C(\{x, y\})$).

из (9) видно, что отношение $\mathcal{D}_2$ можно «упростить», оставив $Z'\mathcal{D}_2 y$ и отбросив $Z''\mathcal{D}_2 y$. Возможности «экономного» построения структур порождающих механизмов выбора будут проиллюстрированы ниже более конкретно.

Для построения класса механизмов выбора, порождающих последнюю характеристическую область в пространстве функций выбора — область **O**, понадобится еще более общий тип структур: гиперотношения вида $Y\mathcal{D}Z$, связывающие пары множеств вариантов.

Пример 9. Гипердоминантный выбор. Структурой σ служит гиперотношение $\mathcal{D}$ между подмножествами вариантов[1] $Y,\ Z \subseteq A$.

Гипердоминантное правило выбора π на такой структуре определяется выражением

$$C(X) = Y,\ \text{где } Y \subseteq X \text{ таково, что } Y\mathcal{D}_5 Z \text{ для всех } Z \subseteq X, \tag{12}$$

или, равносильно, при $\mathcal{D}_6 = (\overline{\mathcal{D}}_5)^{-1}$

$$\begin{aligned}&C(X) = Y,\ \text{где } Y \subseteq X \text{ таково, что не существует } Z \subseteq X,\\ &\text{такого, что } Z\mathcal{D}_6 Y.\end{aligned} \tag{13}$$

Будем называть гиперотношение $\mathcal{D}_5$ (или $\mathcal{D}_6$) в определении гипердоминантного механизма выбора (12) (соответственно (13)) корректным, если при каждом непустом $X \subseteq A$ множество Y, определяемое формулировкой (12) (или (13)), непусто и единственно[2].

Теорема 7. Для того чтобы функция выбора $C(X)$ порождалась гипердоминантным механизмом выбора (12) (или (13)) при каком-либо корректном гиперотношении $\mathcal{D}_5$ (или $\mathcal{D}_6$), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла характеристическому условию отбрасывания (**O**).

Таким образом, классом гипердоминантных механизмов выбора при всевозможных корректных структурах порождаются все функции выбора из области **O** и только они. Порождающее гиперотношение $\mathcal{D}_5$ (или $\mathcal{D}_6$) для такой функции выбора подбирается, вообще говоря, неоднозначно, и поэтому здесь, как и в предыдущих примерах 7 и 8, применимы соображения удобства и экономности такого подбора (в частности, заведомо можно ограничиться сопоставлением только непустых подмножеств Y и Z).

[1] Такое гиперотношение на множестве A в то же время формально является бинарным отношением на множестве 2^A — семействе подмножеств множества A (подробнее см. далее).

[2] Требование однозначности определения множества Y в (12) и (13) обусловлено принятой моделью выбора. Иногда в более широкой постановке задачи принятия решений допускается неоднозначный выбор подмножества вариантов, т.е. выбор множества таких подмножеств (см., например, [241]).

6. Интерпретация обобщенных доминантных механизмов выбора

Эффекты «множественных» воздействий между вариантами, положенные в основу схем сильно-, слабо- и гипердоминантных механизмов выбора, становятся более наглядными при несколько ином взгляде на исходную модель выбора. Напомним, что мы рассматриваем акт выбора (X, Y) как предъявление множества вариантов X и выделение его подмножества («лучшей части») $Y \subseteq X$ $(Y = C(X))$. До сих пор мы трактовали X как предъявление совокупности элементов — одиночных вариантов x, $y, \ldots$, а выбор Y — как совокупность «выбранных вариантов» среди них. Но формально столь же правомерно трактовать предъявление X как одновременное предъявление всевозможных непустых подмножеств $Z \subseteq X$, которые оказывают воздействия («разрешающие» либо «запрещающие») на выбор тех или иных вариантов $y \in X$. Такая трактовка представляется адекватной применительно к сильно- и слабодоминантным механизмам выбора (примеры 7 и 8).

Эту трактовку можно углубить, условно считая, что объектом выбора являются не отдельные варианты $y \in X$, а множества вариантов $Y \subseteq X$ в целом. С этой точки зрения при предъявлении X одновременно предъявляются все непустые подмножества $Z \subseteq X$, и ровно одно из них должно быть «выбранным». Такая трактовка представляется адекватной определению гипердоминантного механизма выбора (пример 9). Действительно, формулировки (12) и (13) можно рассматривать как формальное приложение определений парно-доминантного выбора $(1')$ и $(2')$ к новой ситуации, где в роли «вариантов» выступают множества Z первоначальных («истинных») вариантов x, y, $z, \ldots \in A$. При такой трактовке роль «предъявления» играет не «истинное» множество предъявленных вариантов $X \subseteq A$, а совокупность всех непустых подмножеств Z этого множества X. Наконец, в роли отношений D_1 и D_2 из определений $(1')$ и $(2')$ теперь, в (12) и (13), выступают гиперотношения $\mathcal{D}_5$ и $\mathcal{D}_6$, соответственно. Корректность $\mathcal{D}_5$ и $\mathcal{D}_6$ означает, что выбранным из любого такого предъявления всегда будет ровно одно множество (притом непустое). Привлекая обычную интерпретацию отношений D_1 и D_2 в $(1')$ и $(2')$ как отношений нестрогого и строгого предпочтения соответственно и перенося ее на гиперотношения $\mathcal{D}_5$ и $\mathcal{D}_6$ в (12) и (13), мы приходим к интерпретации гипердоминантного механизма как специфического механизма выбора «лучшего подмножества» из предъявленного множества вариантов.

Таким образом, если отношения «лучше — хуже» применять не к отдельным вариантам, а к множествам («комплектам») вариантов, рассматриваемым как целое, то мы получим гипердоминантный механизм выбора (предполагая выполнение требования корректности). Иллюстрацией может служить пример 10.

Пример 10. Выбор оптимальных комплектов. Роль структуры σ здесь играет скалярная функция $\Phi(Z)$ (гипершкала), заданная на множестве $2^A \setminus \varnothing$ — семействе всех непустых подмножеств множества A и ставящая в соответствие каждому непустому $Z \subseteq A$ число $\Phi(Z)$ — «оценку комплекта» Z. Правило π заключается в выделении непустого множества $Y \subseteq X$ с максимальным значением оценки Φ:

$$C(X) = Y, \text{ где } \Phi(Y) = \max_{Z \subseteq X} \Phi(Z). \tag{14}$$

Корректность этого определения обеспечивается взаимной однозначностью функции Φ: $\Phi(Z') \neq \Phi(Z'')$ при $Z' \neq Z''$ (а также с учетом того, что в (14) $Z = \varnothing$ исключено по определению).

Легко видеть, что такой механизм выбора оптимальных комплектов сводится к частному случаю гипердоминантного механизма: достаточно положить в (12) $Y\mathcal{D}_5 Z \Leftrightarrow \Phi(Y) \geqslant \Phi(Z)$.

Можно было бы предположить, что и вообще все эффекты «множественных» взаимовлияний вариантов, по крайней мере в содержательно осмысленных механизмах выбора, сводятся к обобщенным бинарным отношениям (гиперотношениям) предпочтения между множествами вариантов, а сами такие механизмы — к гипердоминантным механизмам выбора. Однако это предположение опровергается теоремой 7, в силу которой гипердоминантными механизмами могут порождаться только функции выбора из области **O**. Поэтому, например, механизм совокупно-экстремального выбора (пример 4) действительно всегда может быть эквивалентно представлен гипердоминантным механизмом (см. ниже), а механизмы двухступенчатого выбора (пример 5) и турнирного выбора (пример 6) — в общем случае не могут. Даже не всякий классический парно-доминантный механизм выбора может быть сведен к гипердоминантному (сравните теоремы 1 и 7). Тем более не всегда сводятся к гипердоминантному механизму сильно- и слабодоминантные механизмы выбора, в которых множественные взаимодействия формализуются иным образом.

7. Иллюстративные примеры

Рассмотрим теперь, каким образом некоторые конкретные механизмы выбора с определенным типом множественных взаимовлияний вариантов могут быть представлены в рамках обобщенных доминантных механизмов выбора. С этой целью вернемся к описанным выше механизмам совокупно-экстремального выбора (пример 4) и двухступенчатого выбора (пример 5).

Анализ примера 4. Совокупно-экстремальный выбор по набору шкал $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ можно представить в форме

$$C(X) = \{y \in X \mid \text{ существует } i, \text{ такое, что}\\ \varphi_i(y) \geqslant \varphi_i(x) \text{ для всех } x \in X\} \tag{15}$$

или, равносильно,

$$C(X) = \{y \in X \mid \text{ не существует набора } x^1, \ldots, x^n \in X, \text{ такого,}\\ \text{что } \varphi_i(x^i) > \varphi_i(y),\ i = \overline{1,n}\} \tag{16}$$

(в формулировке (16) среди вариантов $x^1, \ldots, x^n$ могут быть совпадающие). Согласно теореме 3, механизм совокупно-экстремального выбора порождает функцию $C(X)$, удовлетворяющую как условию **H**, так и условию **O**. Поэтому в силу теоремы 5 этот механизм можно представить эквивалентным сильнодоминантным механизмом, а в силу теоремы 7 – эквивалентным гипердоминантным механизмом.

Для сведения к сильнодоминантному механизму воспользуемся формулировкой (16) и определим гиперотношение $\mathcal{D}_2$ в (9) следующим образом:

$$Z\mathcal{D}_2 y \Leftrightarrow Z = \{z^1, \ldots, z^n\}, \text{ где } z^1, \ldots, z^n \in A \text{ и } \varphi_i(z^i) > \varphi_i(y),\ i = \overline{1,n}. \tag{17}$$

Легко убедиться, что так определенная структура $\mathcal{D}_2$ дает сильнодоминантный механизм (9), эквивалентный (16). Отметим, что «запрещающие множества» Z в определении (17) этой структуры подобраны «экономно»: они содержат не более чем по n элементов (а возможно, и менее, поскольку некоторые из $z^1, \ldots, z^n$ могут совпадать).

Для сведения к гипердоминантному механизму можно, например, определить гиперотношение $\mathcal{D}_6$ в (13) только для одноэлементных $Z = \{z\}$ и для $Z = Y$ следующим образом:

$$Z\mathcal{D}_6 Y \Leftrightarrow \begin{cases} Z = \{z\},\ z \in Y \text{ и существует } i_0, \text{ такое,}\\ \text{что } \varphi_{i_0}(z) \geqslant \varphi_{i_0}(y) \text{ для всех } y \in Y,\\ \text{или}\\ Z = Y \text{ и существуют } y^0, y^1, \ldots, y^n \in Y,\\ \text{такие, что } \varphi_i(y^0) < \varphi_i(y^i),\ i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{18}$$

Нетрудно убедиться, что структура $\mathcal{D}_6$, определенная в (18), корректна и дает гипердоминантный механизм (13), эквивалентный совокупно-экстремальному механизму (15). Заметим, что гиперотношение «запрещения» $Z\mathcal{D}_6Y$ здесь не имеет смысла «предпочтительности» Z перед Y, что особенно видно при «экономном» определении гиперотношения $\mathcal{D}_6$ в (18).

Анализ примера 5. Двухступенчатый выбор по набору шкал $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ первой ступени и по шкале $\psi(x)$ второй ступени можно представить в виде

$$C(X) = \{y \in X \mid \text{ не существует } x \in X, \text{ такого, что } \varphi(x) > \varphi(y), \text{ и если } z \in Z \text{ таково, что } \psi(z) > \psi(y), \text{ то существует } u \in X, \text{ такое, что } \varphi(u) > \varphi(z)\}. \tag{19}$$

Здесь $\varphi(x) > \varphi(y)$ — «векторное неравенство» для набора шкал φ в том смысле, в каком оно фигурирует в определении векторно-оптимизационного выбора (пример 2). Невыполнение такого неравенства будем записывать как $\varphi(x) \not> \varphi(y)$. Аналогично для единообразия записи невыполнение неравенства $\psi(z) > \psi(y)$ будем записывать [1] как $\psi(z) \not> \psi(y)$. Как уже отмечалось, такой двухступенчатый механизм порождает функцию выбора, удовлетворяющую условию **C**. Поэтому в силу теоремы 6 такой механизм можно представить эквивалентным слабодоминантным механизмом выбора.

С этой целью определим гиперотношение $\mathcal{D}_3$ в (10), положив $y\mathcal{D}_3Z$ для множеств $Z \subseteq A$ двух типов: одноэлементных — вида $Z = \{z\}$ и двухэлементных — вида $Z = \{u, v\}$. Примем

$$y\mathcal{D}_3Z \Leftrightarrow \begin{cases} Z = \{z\}, \text{ где } \varphi(z) \not> \varphi(y) \text{ и } \psi(z) \not> \psi(y) \\ \qquad\qquad (\text{в частности, } z = y), \\ \text{или} \\ Z = \{u, v\}, \text{ где } \varphi(u) \not> \varphi(y),\ \varphi(v) \not> \varphi(y), \\ \qquad\qquad \psi(u) \not> \psi(y) \text{ и } \varphi(u) > \varphi(v) \end{cases} \tag{20}$$

(в последнем случае в (20) допускается, что $\psi(v) > \psi(y)$). Сопоставляя формулировку (19) с формулировкой (10) при $\mathcal{D}_3$ из (20), получаем, что так определенный слабодоминантный механизм (10), (20) эквивалентен двухступенчатому механизму (19). Отметим «экономность» структуры $\mathcal{D}_3$, определенной в (20): в качестве «разрешающих» множеств берутся не более чем двухэлементные подмножества из X.

8. Заключение

Проведенный анализ показывает, что содержательное понятие «выбор лучших вариантов», которое в наиболее чистом виде формализуется как «выбор по скалярному критерию оптимальности», во многих случаях может выходить за рамки не только скалярно-оптимизационных механизмов, но и вообще каких бы то ни было классических механизмов выбора вариантов, «лучших по парным сравнениям». Даже

---

[1] Этим мы предусматриваем возможность использования в качестве ψ не скаляра, а вектора шкал, что оставляет все приводимые результаты в силе.

наличие процедуры экстремизации какой-либо скалярной функции в определении механизма выбора само по себе не означает, что выбор сводится к сравнению вариантов (по их «предпочтительности» и т.п.) по строгой классической схеме парно-доминантного выбора (выбора по предпочтениям). Действительно, с одной стороны, варианты, максимизирующие (или минимизирующие) некоторую скалярную функцию, по самому определению операции максимизации (минимизации) всегда могут быть выделены путем явных или неявных парных сравнений их с остальными предъявленными вариантами. Более того, само понятие «вариации», лежащее в основе многих экстремизационных методов, представляет собой не что иное, как специфическое парное сравнение. Однако, с другой стороны, при этом важно отдавать себе отчет, какой характер имеет используемая оценочная функция как основание для этих сравнений: зависит или не зависит она от всего предъявления (от «контекста» выбора).

Для сведения к классической схеме требуется, чтобы результаты парных сравнений не зависели от «контекста» выбора, а это выполняется не всегда. В целом ряде примеров такая зависимость от контекста проявляется в форме эффектов «множественных взаимовлияний» вариантов. Для явного учета таких эффектов необходимы более общие схемы механизмов выбора, позволяющие выявить скрытую логику «неклассических» способов выбора лучших вариантов. Некоторые такие обобщения, описанные в настоящей работе, демонстрируют как эволюцию, так и преемственность понятия «выбор лучших вариантов» при переходе от простейших к более сложным механизмам выбора.

Критерии классической рациональности выбора [1]

Предметом классической теории выбора является так называемый рациональный выбор. Простейшим его прототипом служит оптимизационный тип выбора; более общие постулаты «рациональности» описывают выбор вариантов, «лучших» в смысле некоторого бинарного отношения предпочтения. В литературе приводятся различные определения и критерии рациональности выбора в виде тех или иных требований логического характера [63, 212, 222, 223]. Предлагаемая рабо-

[1] I Всесоюзное совещание по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации, экспертным оценкам и дискретной оптимизации. Тезисы докладов.—М.; Алма-Ата, 1981.—С. 344-346.

та посвящена систематизации, взаимоувязке и обобщению таких критериев путем представления их в абстрактной общелогической форме.

Используется следующая модель выбора. Задано конечное множество $A = \{a, b, \ldots, x, y, z\}$ объектов, называемых *вариантами*, и некоторое семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества A. Каждое $X \in \mathcal{A}$ интерпретируется как множество вариантов, «предъявляемых» в конкретном акте выбора, а само $\mathcal{A}$ — как *семейство допустимых предъявлений.* Акт выбора задается предъявлением X и выделением подмножества $Y \subseteq X$, интерпретируемого как множество выбираемых («лучших») вариантов из X. «Внешнее» описание выбора дается *функцией выбора* $Y = C(X)$, определенной на $\mathcal{A}$. «Внутреннее» описание механизма выбора будем считать заданным в форме *предписывающего предиката выбора* $\lambda(y|X)$, имеющего смысл утверждения «вариант y должен выбираться (или: достоин быть выбранным) при предъявлении X». Формально $\lambda(y|X)$ есть логическая функция (со значениями «истинно — ложно») от предметной переменной y при предметном параметре X ($y \in X \in \mathcal{A}$). Предикат λ и функция C связаны при всех $y \in X \in \mathcal{A}$ соотношением

$$\lambda(y|X) \Leftrightarrow [y \in C(X)]. \tag{1}$$

Наиболее удобным для анализа является случай, когда семейство предъявлений $\mathcal{A}$ — *полное*, т.е. содержит все подмножества $X \subseteq A$: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 = 2^A$. Полное $\mathcal{A}^0$ содержит, в частности, все пары вариантов вида $X = \{x, y\}$; значения $\lambda(y|\{x, y\})$ описывают результаты «парных сравнений» вариантов. В соответствии с классическими представлениями, рациональный механизм выбора должен опираться на «внутренние» отношения между вариантами, например, вида $\alpha(y|x)$: «вариант y разрешается вариантом x» (в обычной интерпретации — «y не хуже x»).

Согласно классической логике рациональности, выбор варианта y из произвольного множества $X \in \mathcal{A}^0$ должен «объясняться» совокупностью (конъюнкцией) «положительных» результатов парных сравнений варианта y со всеми $x \in X$:

$$\lambda(y|X) \Leftrightarrow \bigcap_{x \in X} \alpha(y|x). \tag{2}$$

Предикат выбора λ, который при некотором α удовлетворяет (2) для всех $y \in X \in \mathcal{A}$, будем называть *парно-доминантно* (ПД-)*представимым на* $\mathcal{A}$. Свойство ПД-представимости является формализацией классического понятия «рациональности выбора».

Критериями рациональности будем называть логические условия, необходимые и достаточные для ПД-представимости выбора. Простейшим таким критерием в терминах значений предиката λ является *принцип Кондорсе* в следующей форме: для любых $y \in X \in \mathcal{A}^0$ должно выполняться *условие* ПД-*разложимости* предиката λ, имеющее вид

$$\lambda(y|X) \Leftrightarrow \bigcap_{x \in X} \lambda(y|\{x, y\}). \tag{3}$$

Принцип Кондорсе опирается на результаты непосредственных парных сравнений вариантов y и x; обобщение этого принципа получается, если рассматривать их «неявные» сравнения. Назовем семейство $\mathcal{S} = \{S_\nu\}_{\nu \in N}$ подмножеств множества $X \subseteq A$ $X|_y$-*разложением*, если

$$\bigcup_{\nu \in N} S_\nu = X; \quad y \in S_\nu, \quad \nu \in N. \tag{4}$$

Скажем, что для предиката λ выполнен *принцип Кондорсе–Сена*, если для любых $y \in X \in \mathcal{A}^0$ и любого $X|_y$-разложения $\mathcal{S}$ имеет место

$$\lambda(y|X) \Leftrightarrow \bigcap_{\nu \in N} \lambda(y|S_\nu). \tag{5}$$

Односторонние следования в (5) — *условия Сена* — несколько в иной форме были введены в [222], а их «парные» прототипы — *условия Кондорсе* — упомянуты, в частности, в [223].

Лемма 1. Для предиката выбора λ на полном семействе предъявлений $\mathcal{A}^0$ принципы Кондорсе и Кондорсе–Сена эквивалентны.

Дальнейшее обобщение этих принципов получается, если взять несколько иную комбинацию условий Сена, нежели в (4). Пусть $S \in \mathcal{A}$; назовем семейство $\mathcal{S} = \{S_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{A}$ $S|_y$-*покрытием в* $\mathcal{A}$, если

$$\bigcup_{\nu \in N} S_\nu \supseteq S; \quad y \in S_\nu, \quad \nu \in N. \tag{6}$$

Скажем, что для предиката выбора λ на $\mathcal{A}$ выполнен *принцип Сена*, если для любых $y \in S \in \mathcal{A}$ и любого $S|_y$-покрытия в $\mathcal{A}$ имеет место

$$\bigcap_{\nu \in N} \lambda(y|S_\nu) \Rightarrow \lambda(y|S). \tag{7}$$

Принцип Сена для полного $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0$ будем называть *специальным* (подобный принцип рассматривался Миркиным в [63]).

Лемма 2. Для предиката выбора λ на полном семействе $\mathcal{A}^0$ принцип Кондорсе эквивалентен специальному принципу Сена.

Принцип Сена для произвольного $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^0$ будем называть *общим*. Наряду с ним рассмотрим *общий принцип Рихтера* [212], согласно которому для любых $y \in X \in \mathcal{A}$ должно выполняться требование:

$$\lambda(y|X) \Leftrightarrow \bigcap_{x \in X} \bigcup_{T: x, y \in T \subseteq \mathcal{A}} \lambda(y|T). \tag{8}$$

Лемма 3. Общие принципы Сена и Рихтера эквивалентны.

В случае $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0$ принцип Рихтера будем называть *специальным.*

Теорема 1. Для того чтобы предписывающий предикат выбора λ, заданный на полном семействе предъявлений $\mathcal{A}^0$, был ПД-представимым на $\mathcal{A}^0$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено любое из следующих эквивалентных требований: 1) принцип Кондорсе;

2) принцип Кондорсе–Сена;

3) специальный принцип Сена;

4) специальный принцип Рихтера.

При неполноте семейства предъявлений $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^0$ принципы Кондорсе и Кондорсе–Сена оказываются в прежнем виде неприменимыми. Однако общий принцип Рихтера [212], а в силу леммы 3 — и общий принцип Сена, — сохраняют полную силу критериев рациональности:

Теорема 2. Для того чтобы предписывающий предикат выбора λ, заданный на некотором семействе предъявлений $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^0$, был ПД-представимым на $\mathcal{A}$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено любое из следующих эквивалентных требований: 1) общий принцип Сена; 2) общий принцип Рихтера.

Теоремы 1 и 2 представляют собой синтез и обобщение теорем из [63, 212, 222, 223]. Соответствующие определения и утверждения, которые в [63, 212, 222, 223] даны в терминах функции выбора (C на $\mathcal{A}$), в силу (1) легко переводятся на язык предиката λ на $\mathcal{A}$, и обратно, соотношения (2)–(8) легко переводятся на теоретико-множественный язык значений $C(X)$.

Выбор на базе контекстно-зависимых парных сравнений [1]

Классическая логика рационального выбора выделяет в качестве «лучших» те элементы y заданного множества X, которые определены как предпочтительные в каждом парном сравнении со всеми $x \in X$. Здесь существенно, что базовое бинарное отношение «предпочтения» (превосходства) на каждой паре x, y фиксировано и не зависит от множества-«контекста» $X \ni x, y$, варьируемого в пределах полного множества вариантов U. Однако в ряде естественных механизмов

[1] Всесоюзная конференция «Нечисловая статистика, экспертные оценки и смежные вопросы». Тезисы докладов.—М.; Таллин, 1984.—С. 232–233.

выбора допускается явное или неявное отклонение от этого постулата и используется некоторая степень зависимости отношения «между x и y» от контекста X. Примером может служить правило выбора на базе «транзитивного замыкания предпочтений» [223]: y признается выдерживающим сравнение с x в контексте X не только тогда, когда y превосходит x по отношению R «непосредственно» (yRx), но и тогда, когда он превосходит, скажем, некоторый третий вариант $w \in X$, который в свою очередь превосходит x ($yRw \bigcap wRx$). В настоящей работе рассматривается «квазиклассическая» модификация логики рационального выбора, учитывающая эффекты подобной зависимости результатов парных сравнений от их контекста.

Воспользуемся логическим описанием выбора в терминах предиката $\lambda(y|X)$ — «y выбирается в X» ($y \in X \subseteq U$) [8]. Пусть $\alpha(y|x)$ — базовый предикат (отношение) парного сравнения — «y выдерживает сравнение с x». Тогда классический *парно-доминантный* (ПД) механизм выбора задается в форме

$$\lambda(y|X) \doteqdot \bigcap_{x \in X} \alpha(y|x). \tag{1}$$

Известно [8], что для представимости произвольного предиката $\lambda(y|X)$ (заданного на всех $X \subseteq U$, $y \in X$) в ПД-форме (1) необходимо и достаточно выполнение пары условий — *прямого условия Сена*:

$$\lambda(y|X') \bigcap \lambda(y|X'') \Rightarrow \lambda(y|X' \cup X'') \tag{2}$$

для всех X', $X'' \subseteq U$, и *обратного условия Сена*:

$$\lambda(y|X) \Rightarrow \lambda(y|S) \tag{3}$$

для всех $y \in S \subseteq X \subseteq U$.

Допустим теперь зависимость базового предиката α от X, т.е. включим в рассмотрение $\alpha = \alpha(y|x;X)$, и рассмотрим соответствующее *псевдопарно-доминантное* (ППД) представление предиката λ:

$$\lambda(y|X) \Leftrightarrow \bigcap_{x \in X} \alpha(y|x;X). \tag{4}$$

Если зависимость α от X допускается любая, то для всякого λ заведомо возможно тривиальное ППД-представление — при «тавтологическом» определении $\alpha(y|x;X) \doteqdot \lambda(y|X)$ ($\forall x \in X$). Интерес, однако, вызывают нетривиальные ППД-представления, где зависимость α от X стеснена каким-либо естественным ограничением.

Назовем предикат $\alpha(y|x;X)$ возрастающим (или убывающим) по X, если для любых $x, y \in X' \subseteq X'' \subseteq U$ верно $\alpha(y|x;X') \Rightarrow \alpha(y|x;X'')$ (соответственно, $\alpha(y|x;X'') \Rightarrow \alpha(y|x;X')$).

Теорема. Для того чтобы предикат выбора $\lambda(y|X)$ удовлетворял прямому (или обратному) условию Сена, необходимо и достаточно, чтобы он имел ППД-представление с базовым предикатом парного сравнения вида $\alpha(y|x;X)$, возрастающим (соответственно, убывающим) по X.

Пример 1. Выбор по правилу транзитивного замыкания Шварца–Борда. Пусть задано первичное отношение предпочтения R на U (вообще говоря, нетранзитивное). Пусть

$$\lambda(y|X) \doteqdot [\forall x \in X\, \exists\, l \geqslant 1, w_0, w_1, \ldots, w_l \in X\colon \\ y = w_0, w_0 R w_1, \ldots, w_{l-1} R w_l,\, w_l = x]. \tag{5}$$

Легко видеть, что (5) сводится к (4) с $\alpha(y|x;X)$, возрастающим по X.

Пример 2. Выбор M лучших объектов. Пусть задана строгая шкала φ на U ($x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$) и фиксировано $M > 1$. Пусть

$$\lambda(y|X) \doteqdot [\varphi(y) < \varphi(x) \text{ для не более } M-1 \text{ различных } x \in X]. \tag{6}$$

Легко видеть, что (6) равносильно

$$\lambda(y|X) \Leftrightarrow [\forall x \in X\, \overline{\exists}\, w_0, w_1, \ldots, w_M \in X\colon \\ y = w_0,\, \varphi(w_0) < \varphi(w_1) < \ldots < \varphi(w_M),\, w_M = x], \tag{7}$$

и (7) имеет вид (4) с предикатом $\alpha(y|x;X)$, убывающим по X.

Итак, предложенное обобщение классической логики выбора охватывает естественные типы контекстно-зависимых отношений парного сравнения, монотонно изменяющихся с расширением (сужением) контекста.

Сохранение рациональности в двухступенчатых механизмах оптимального выбора [1]

Один из подходов к согласованию различных «точек зрения» или «позиций» в задачах принятия решений состоит в «объединении» механизмов, реализующих эти позиции в актах выбора. В данной работе

[1] Анализ данных и экспертные оценки в организационных системах.—М.: Институт проблем управления, 1985.—С. 51–61.

рассматривается модель последовательного (каскадного) соединения двух механизмов выбора, каждый из которых является рациональным в смысле «классической» теории выбора (см., например, [6]) и, более того, обладает одним из высших уровней рациональности [8], реализуя оптимальный выбор по некоторой скалярной или векторной шкале оценок вариантов. В [9] при анализе двухступенчатого «векторно-скалярного» механизма выбора была обнаружена возможность потери рациональности для такого механизма. Настоящая работа развивает эту тему в нескольких направлениях: здесь модель выбора имеет более общий вид; вопрос о сохранении рациональности изучается не только в негативном, но в первую очередь в позитивном плане, с уточнением получаемых уровней рациональности; наконец, особое внимание уделяется иерархическому («лексикографическому») строению последовательного принятия решений [22, 134] и, в частности, изучается зависимость результирующего решения (выбора) от порядка принятия составляющих его частных решений (последний вопрос на несколько ином материале рассматривался в [237]).

Процедура двухступенчатой оптимизации имеет достаточно естественные эвристические обоснования, например, как выбор «лучших из лучших» или как расщепление акта выбора на этапы «предварительного» и «заключительного» отбора (см., например, [83]). В свете такой интерпретации естественно было ожидать, что рациональность и вообще «логичность» двухступенчатого выбора должна быть связана со степенью «взаимоувязанности» обеих его ступеней. И действительно, оказалось, что характерные черты логики двухступенчатого выбора определяются специфическими свойствами «взаимо(не)согласованности» оценочных шкал, применяемых на разных ступенях; впрочем, эти свойства не всегда просты. Анализ системы таких свойств составил основное содержание этой работы.

Формальная модель двухступенчатой оптимизации

Начнем с необходимых определений, придерживаясь логической модели выбора из [6]. Пусть задано конечное множество U объектов выбора — «вариантов». Предполагается, что любое непустое множество $X \subseteq U$ может быть предъявлено для выбора; выбор состоит в выделении некоторого подмножества $Y \subseteq X$. Зависимость $Y = C(X)$ — *функция выбора* — служит «внешним» описанием модели выбора, а в качестве ее «внутреннего» описания («механизма выбора») будем рассматривать *предикат выбора* $\lambda(y|X)$, истинность которого означает, что вариант y входит в выбор $Y = C(X)$:

$$\lambda(y|X) \Leftrightarrow [y \in C(X)], \text{ т.е. } C(X) = \{y \in X \mid \lambda(y|X) \text{ истинно}\}.$$

Два механизма выбора λ' и λ'' эквивалентны ($\lambda' \Leftrightarrow \lambda''$) тогда и только тогда, когда порождаемые ими функции выбора совпадают ($C' = C''$). Здесь и далее будем считать (если не оговорено противное), что эквивалентность или равенство подразумевается при всех значениях переменных; в данном случае — при всех непустых $X \subseteq U$ (для C) и при всех $y \in X \subseteq U$ (для λ).

Будем называть *парно-доминантным* механизмом выбора (ПД-механизмом) предикат

$$\lambda_{\alpha/\beta}(y|X) \doteqdot \bigcap_{x \in X} \alpha(y|x) \Leftrightarrow \overline{\bigcup_{x \in X} \beta(y|x)}, \tag{1}$$

где $\alpha(y|x)$ и $\beta(y|x) \doteqdot \overline{\alpha}(y|x)$ — некоторые двухместные предикаты (бинарные отношения) *разрешения и запрещения*, соответственно [6]. Пару взаимно дополнительных отношений α/β будем называть *структурой* ПД-механизма $\lambda_{\alpha/\beta}$ [6].

Будем называть *шкалой* на U всякое отображение $\varphi\colon U \to L$ множества U в какое-либо линейно упорядоченное множество L («ось оценок»). Будем также рассматривать наборы (n-ки, «векторы») шкал вида $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$: $U \to L \times \ldots \times L$, $n \geqslant 1$, и будем называть их *многомерными шкалами,* в отличие от одномерных, «скалярных» — при $n = 1$. *Шкально-экстремальным* механизмом выбора по шкале φ назовем предикат

$$\lambda_\varphi(y|X) \doteqdot \bigcap_{x \in X} \overline{[\varphi(y) < \varphi(x)]}. \tag{2}$$

В случае одномерной шкалы φ это – обычный механизм «скалярной оптимизации», порождающий выбор $C(X) = \{y \in X \mid \varphi(y) = \max_{x \in X} \varphi(x)\}$. Рассматривая в качестве φ набор шкал $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ и понимая неравенство в (2) как векторное, получаем *многошкально-экстремальный* механизм выбора (механизм «векторной оптимизации»). Очевидно, что (много-) шкально-экстремальный механизм λ_φ эквивалентно представляется ПД-механизмом $\lambda_{\alpha/\beta}$ с $\alpha(y|x) \doteqdot \overline{[\varphi(y) < \varphi(x)]}$, $\beta(y|x) \doteqdot [\varphi(y) < \varphi(x)]$.

Произвольный механизм выбора λ будем называть *рациональным*, если он эквивалентен некоторому ПД-механизму. При этом назовем λ рациональным *на уровне* $\hat{1}$, если он порождает непустой выбор $C(X) \neq \varnothing$ при каждом непустом X; или в терминах α/β-структуры, что равносильно: если отношение β для эквивалентного ПД-механизма ациклично. Далее, назовем λ рациональным на уровне $\hat{2}$ или $\hat{3}$, если, сверх предыдущего, α/β-структура эквивалентного ПД-механизма транзитивна по β или, соответственно, транзитивна и по α и по β [8].

Механизмы выбора, рациональные на уровне $\hat{1}$, $\hat{2}$ или $\hat{3}$, будем для краткости называть $\hat{1}$-, $\hat{2}$- или $\hat{3}$-рациональными. Всякий многошкально-экстремальный механизм $\hat{2}$-рационален, а одношкально-экстремальный — $\hat{3}$-рационален.

Пусть дан произвольный предикат выбора λ. Будем называть *сопровождающим ПД-предикатом* $\check{\lambda}$ для λ предикат выбора

$$\check{\lambda}(y|X) \doteqdot \bigcap_{x\in X} \check{\alpha}(y|x) \Leftrightarrow \overline{\bigcup_{x\in X} \check{\beta}(y|x)}, \tag{3}$$

где

$$\check{\alpha}(y|x) \doteqdot \lambda(y|\{x,y\}) \tag{4}$$

(и соответствующее $\check{\beta} \doteqdot \bar{\check{\alpha}}$) называется *сопровождающим отношением разрешения* (соответственно, *запрещения*).

Для дальнейшего понадобится следующая простая лемма из [8].

Лемма 1. Для того чтобы предикат выбора λ был рационален, необходимо и достаточно, чтобы λ был эквивалентен своему сопровождающему ПД-предикату $\check{\lambda} \doteqdot \lambda_{\check{\alpha}/\check{\beta}}$.

Эквивалентность $\lambda \Leftrightarrow \check{\lambda}$ названа в [8] *принципом Кондорсе*, а односторонние импликации $\check{\lambda} \Rightarrow \lambda$ и $\lambda \Rightarrow \check{\lambda}$ — *прямым* и *обратным свойством* (*условием*) *Кондорсе,* соответственно.

Приступим к основной теме работы — к двухступенчатым механизмам выбора. Пусть λ_1 и λ_2 — два механизма выбора, и пусть они порождают функции выбора C_1 и C_2, соответственно. Соединим механизмы λ_1 и λ_2 последовательно как первую и вторую ступень составного механизма: предъявленным множеством вариантов для λ_2 будет множество $C_1(X)$, выбранное из X по λ_1. Результирующий выбор имеет вид суперпозиции $C_{\langle 1,2\rangle}(X) = C_2(C_1(X))$. Переходя к «внутреннему» описанию двухступенчатого механизма выбора, сразу ограничимся только такими механизмами, которые будем рассматривать ниже — а именно, составленными из механизмов оптимального выбора по шкалам или (и) по наборам шкал, т.е. (много-) шкально-экстремальных.

Пусть φ — некоторая шкала на U; под шкалой всюду далее подразумевается, вообще говоря, многомерная шкала — если только ее одномерность не оговорена специально. Положим

$$[x \underset{\varphi}{\prec} y] \doteqdot [\varphi(x) < \varphi(y)], \quad [x \underset{\tilde{\varphi}}{\prec} y] \doteqdot \overline{[x \underset{\varphi}{\succ} y]}, \quad [x \underset{\varphi}{\sim} y] \doteqdot [x \underset{\tilde{\varphi}}{\prec} y] \cap [y \underset{\tilde{\varphi}}{\prec} x].$$

При этом в силу асимметричности $\underset{\varphi}{\prec}$ (или, что равносильно, полноты отношения $\underset{\tilde{\varphi}}{\prec}$),

$$[x \underset{\tilde{\varphi}}{\prec} y] \Leftrightarrow [x \underset{\varphi}{\prec} y] \bigcup_{x\in X} [x \underset{\varphi}{\sim} y]. \tag{5}$$

В этих обозначениях (много-) шкально-экстремальный механизм λ_φ имеет вид [1]

$$\lambda_\varphi(y|X) \doteqdot \bigcap_{x\in X}[x \underset{\tilde\varphi}{\preceq} y].$$

Бинарное отношение $\underset{\tilde\varphi}{\preceq}$ играет роль отношения разрешения для эквивалентного ПД-механизма: $\alpha_\varphi(y|x) \doteqdot [x \underset{\tilde\varphi}{\preceq} y]$; аналогично, $\underset{\varphi}{\succ}$ играет роль отношения запрещения β_φ. Будем называть отношения $\underset{\tilde\varphi}{\preceq}$, $\underset{\varphi}{\prec}$, $\underset{\varphi}{\sim}$, как и шкалу φ, структурообразующими для механизма (5), рассматриваемого как ПД-механизм.

Возьмем теперь две шкалы φ и ψ, построим соответствующие шкально-экстремальные механизмы выбора λ_φ и λ_ψ и применим λ_φ в качестве первой ступени, а λ_ψ — второй ступени каскадного выбора. Полученный *двухступенчатый $\langle\varphi,\psi\rangle$-механизм выбора* $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ можно представить так:

$$\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}(y|X) \doteqdot \Big[\bigcap_{x\in X}\alpha_\varphi(y|x)\Big]\bigcap\Big[\bigcap_{u\in C_\varphi(X)}\alpha_\psi(y|u)\Big],$$

или, что равносильно (см. [9]), в виде

$$\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}(y|X) \doteqdot \bigcap_{x\in X}\Big([x \underset{\tilde\varphi}{\preceq} y]\bigcap\Big([x \underset{\tilde\psi}{\preceq} y]\bigcup\bigcup_{x\in X}[x \underset{\varphi}{\prec} z]\Big)\Big). \tag{6}$$

Если шкала φ первой ступени — многомерная, то, как показано в [9], двухступенчатый механизм $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ в общем случае не рационален. Ниже это утверждение будет детализировано (теорема 3); но сейчас начнем с установления «противоположного» факта — рациональности $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ при одномерности шкалы φ, независимо от того, одномерна или многомерна шкала ψ второй ступени.

Теорема 1. Если шкала φ — одномерная, то механизм $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ рационален.

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся принципом Кондорсе (лемма 1), но прежде приведем вспомогательные построения и утверждения для произвольных шкал φ, ψ.

Выпишем сопровождающий ПД-предикат $\check\lambda$ (3) для произвольно заданного двухступенчатого $\langle\varphi,\psi\rangle$-механизма $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$:

$$\check\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}(y|X) \doteqdot \bigcap_{x\in X}\Big([x \underset{\tilde\varphi}{\preceq} y]\bigcap\Big([x \underset{\tilde\psi}{\preceq} y]\bigcup[x \underset{\varphi}{\prec} y]\Big)\Big). \tag{7}$$

---

[1] Можно было бы вести почти все изложение в терминах бинарных отношений, оговаривая, где нужно, свойства транзитивности и т.п.; шкалы здесь используются в основном лишь для большей наглядности.

Здесь сопровождающее отношение разрешения (4) имеет вид

$$\breve{\alpha}_{\langle\varphi,\psi\rangle}(y|x) \doteqdot [x \underset{\tilde{\varphi}}{\precsim} y] \bigcap([x \underset{\tilde{\psi}}{\precsim} y] \bigcup[x \underset{\varphi}{\prec} y]); \tag{8}$$

в нем учтена антирефлексивность отношения $\underset{\varphi}{\prec} : \overline{[x \underset{\varphi}{\prec} x]}$.

Лемма 2. При любых шкалах φ, ψ двухступенчатый механизм $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ удовлетворяет прямому условию Кондорсе. (Достаточно сопоставить (6) и (7).)

Следствие 1. Для рациональности механизма $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ необходимо и достаточно выполнение обратного условия Кондорсе.

Замечание 1. Если механизм $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ рационален, то он заведомо $\hat{1}$-рационален, поскольку порождаемый им выбор $C_{\langle\varphi,\psi\rangle}(X) = C_\psi(C_\varphi(X))$, очевидно, всегда не пуст.

Доказательство теоремы 1. Согласно следствию 1, достаточно рассмотреть выполнение импликации $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Rightarrow \check{\lambda}_{\langle\varphi,\psi\rangle}$. Если предикат $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}(y|X)$ (6) истинен при данных $y \in X \subseteq U$, то заведомо истинен предикат $\lambda_\varphi(y|X)$ (5), т.е. по одномерной шкале φ имеем $\varphi(y) = \max\limits_{v\in X} \varphi(v)$. Поэтому

$$\bigcup_{z\in X} [x \underset{\varphi}{\prec} z] \Rightarrow [x \underset{\varphi}{\prec} y],$$

а отсюда следует, что при истинности (6) истинен и предикат (7). Теорема доказана.

Таким образом, рациональные двухступенчатые механизмы выбора заведомо существуют; таковыми являются все те механизмы двухступенчатой оптимизации, в которых оптимизация на первой ступени — скалярная.

Рассмотрим структуру рационального двухступенчатого механизма $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$. Возьмем сопровождающее отношение разрешения $\breve{\alpha}_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ для $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$, которое при рациональности $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ образует вместе со своим дополнением $\breve{\beta}_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ α/β-структуру эквивалентного ПД-механизма $\check{\lambda}_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ для $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$. Представим $\breve{\alpha}_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ (8) в эквивалентной, но более наглядной форме:

$$\alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle}(y|x) \doteqdot [x \underset{\varphi}{\prec} y] \bigcup([x \underset{\varphi}{\sim} y] \bigcap[x \underset{\tilde{\varphi}}{\precsim} y]). \tag{9}$$

и его дополнение — в аналогичной форме:

$$\beta_{\langle\varphi,\psi\rangle}(y|x) \doteqdot [x \underset{\varphi}{\succ} y] \bigcup([x \underset{\varphi}{\sim} y] \bigcap[x \underset{\varphi}{\succ} y]). \tag{10}$$

Будем называть $\alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ (а также $\beta_{\langle\varphi,\psi\rangle}$) лексикографической композицией отношений α_φ и α_ψ (соответственно, β_φ и β_ψ).

Выражения (9) и (10) демонстрируют «лексикографический» принцип последовательного принятия решений (в данном случае — о «превосходстве» одного объекта над другим): сначала решение принимается по первому «критерию», а в случае «безразличия» (неразличимости или равноценности объектов) по этому первому критерию решение принимается по второму [134].

Нетрудно проверить, что если φ — одномерная шкала, то отношение $\beta_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ (10) транзитивно, а если при этом ψ — также одномерная шкала, то и $\alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ (9) также транзитивно. С учетом теоремы 1 и принципа Кондорсе получаем усиление этой теоремы.

Следствие 2. Если шкала φ — одномерная, то механизм $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ $\hat{2}$-рационален, а если ψ — также одномерная, то $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ $\hat{3}$-рационален.

Двухступенчатые парные сравнения

Рассмотрим элементарные логические свойства двухступенчатого принятия решений, сопоставив роли первой и второй ступени и их влияние на окончательный результат. С этой целью возьмем α/β-структуры, а точнее, ради определенности, возьмем структуры разрешения α для отдельных ступеней: первой — α_φ и второй — α_ψ, и сравним их со структурой $\alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ — лексикографической композицией структур α_φ и α_ψ, а также со структурой $\alpha_{\langle\psi,\varphi\rangle}$ — лексикографической композицией тех же структур α_ψ и α_φ, взятых в обратном порядке. При этом мы временно отходим от общей задачи выбора и обращаемся к задаче о парных сравнениях вариантов (или, по существу, к задаче выбора из двухэлементных множеств).

Сопоставляя роли первой и второй ступени парного сравнения, выделим, с одной стороны, случай резкой «асимметрии», когда результирующее решение (лексикографическая композиция $\alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ или $\alpha_{\langle\psi,\varphi\rangle}$) «диктуется» одним из «составляющих» его решений, α_φ либо α_ψ, а с другой стороны — случай «внешней симметрии», когда α_φ и α_ψ участвуют в построении $\alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ и $\alpha_{\langle\psi,\varphi\rangle}$ «равноправно». Для такого исследования оказываются существенными следующие признаки взаимной (не-) согласованности или соподчиненности структур (структурообразующих отношений и шкал).

Пусть для пары объектов u, $v \in U$ и пары шкал φ, ψ на U имеет место какое-либо из следующих трех условий:

$$\text{а)}\ \begin{cases} u \underset{\varphi}{\prec} v, \\ u \underset{\psi}{\succsim} v; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} u \underset{\varphi}{\prec} v, \\ u \underset{\psi}{\sim} v; \end{cases} \qquad \text{в)}\ \begin{cases} u \underset{\varphi}{\prec} v, \\ u \underset{\psi}{\succ} v. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда пару u, v будем называть, соответственно, а) $\langle\varphi,\psi\rangle$-несогласованной диадой, б) $\langle\varphi,\psi\rangle$-некогерентной диадой, в) (φ,ψ)-конфликтной диадой. Пару шкал $\langle\varphi,\psi\rangle$ назовем а) согласованной, б) когерентной, в) бесконфликтной, если в U не существует, соответственно, а) $\langle\varphi,\psi\rangle$-несогласованной, б) $\langle\varphi,\psi\rangle$-некогерентной, в) (φ,ψ)-конфликтной диады.

Отметим, что в определениях $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованности и $\langle\varphi,\psi\rangle$-когерентности порядок шкал φ и ψ существен, тогда как для (φ,ψ)-бесконфликтности он не имеет значения — это свойство симметрично (в знак этого в последнем случае используем для пары (φ,ψ) круглые скобки, а не угловые).

Легко видеть, что $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованность равносильна выполнению при всех x, $y \in U$ условия

$$[x \underset{\varphi}{\prec} y] \Rightarrow [x \underset{\psi}{\prec} y] \tag{12}$$

или, что эквивалентно (с учетом равноправия x и y), выполнению при всех x, $y \in U$ условия

$$[x \underset{\psi}{\precsim} y] \Rightarrow [x \underset{\tilde{\varphi}}{\prec} y]. \tag{13}$$

Далее, $\langle\varphi,\psi\rangle$-когерентность равносильна выполнению условия

$$[x \underset{\psi}{\sim} y] \Rightarrow [x \underset{\tilde{\varphi}}{\succ} y] \tag{14}$$

или, с учетом равноправия x и y, выполнению условия

$$[x \underset{\psi}{\sim} y] \Rightarrow [x \underset{\varphi}{\sim} y]. \tag{15}$$

Наконец, (φ,ψ)-бесконфликтность равносильна выполнению

$$[x \underset{\varphi}{\prec} y] \Rightarrow [x \underset{\psi}{\precsim} y] \tag{16}$$

или, что эквивалентно,

$$[x \underset{\psi}{\prec} y] \Rightarrow [x \underset{\tilde{\varphi}}{\prec} y] \tag{17}$$

при всех x, $y \in U$.

Лемма 3. Имеет место логическая взаимосвязь: [$\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованность] $\Leftrightarrow$ ([$\langle\varphi,\psi\rangle$-когерентность] $\cap$ [(φ,ψ)-бесконфликтность]).

Эта взаимосвязь очевидна из определения диад (11 а,б,в). Вернемся к α-структурам на структурообразующих шкалах.

Теорема 2. Для того чтобы было выполнено соотношение

$$\text{а) } \alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \alpha_{\psi}; \quad \text{б) } \alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \alpha_{\varphi}; \quad \text{в) } \alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \alpha_{\langle\psi,\varphi\rangle}$$

необходима и достаточна, соответственно, а) $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованность; б) $\langle\psi,\varphi\rangle$-когерентность [1]; в) (φ,ψ)-бесконфликтность.

Доказательство. а) Предикат

$$\alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle}(y|x) \doteqdot [x \underset{\varphi}{\prec} y] \cup \big([x \underset{\varphi}{\sim} y] \cap [x \underset{\tilde{\psi}}{\precsim} y]\big) \tag{18}$$

имеет логическую форму $P \cup \big(Q \cap R\big)$, где через P, Q и R обозначены три соответствующих терма в (18). Предикат

$$\alpha_{\psi}(y|x) \doteqdot [x \underset{\tilde{\psi}}{\precsim} y] \tag{19}$$

имеет в этих обозначениях вид R. Поэтому задача об эквивалентности предикатов (18) и (19) имеет форму «логического уравнения»

$$P \cup \big(Q \cap R\big) \Leftrightarrow R. \tag{20}$$

Эквивалентность (20) равносильна двум импликациям

$$P \cup \big(Q \cap R\big) \Rightarrow R \ \text{ и } \ R \Rightarrow P \cup \big(Q \cap R\big). \tag{21}$$

Первая импликация в (21), как нетрудно видеть, равносильна импликации $P \Rightarrow R$, а вторая — импликации $R \Rightarrow P \cup Q$. Следовательно, эквивалентность (20) равносильна цепочке

$$P \Rightarrow R \Rightarrow R \cup Q. \tag{22}$$

Подставляя в (22) «значения» термов P, Q и R из (18), имеем

$$[x \underset{\varphi}{\prec} y] \Rightarrow [x \underset{\tilde{\psi}}{\precsim} y] \Rightarrow [x \underset{\tilde{\varphi}}{\precsim} y]. \tag{23}$$

Истинность первой импликации в (23) при всех $x,\ y \in U$ есть условие (16) (φ,ψ)-бесконфликтности, а истинность второй есть условие (13) $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованности. А поскольку (φ,ψ)-бесконфликтность следует из $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованности (лемма 3), то отсюда заключаем, что эквивалентность предикатов (18) и (19) при всех $x,\ y \in U$ равносильна $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованности.

Пункты б) и в) рассматриваются по такой же схеме.

[1] Порядок шкал φ и ψ в пп. а) и б) важен!

Замечание 2. Условие (φ, ψ)-бесконфликтности в силу теоремы 2 (в) эквивалентно коммутативности лексикографической композиции шкал φ и ψ. Такая композиция в этом случае, как можно убедиться, дает структуру упорядочения $\alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle}/\beta_{\langle\varphi,\psi\rangle}$, совпадающую с «симметрической композицией» $\alpha^*_{(\varphi,\psi)}/\beta^*_{(\varphi,\psi)}$, где $\alpha^*_{(\varphi,\psi)} \doteqdot \alpha_\varphi \bigcap \alpha_\psi$ и $\beta^*_{(\varphi,\psi)} \doteqdot \beta_\varphi \bigcup \beta_\psi$, т.е.

$$\alpha^*_{(\varphi,\psi)}(y|x) \doteqdot [x \underset{\tilde{\varphi}}{\preceq} y] \bigcap [x \underset{\tilde{\psi}}{\preceq} y],$$
$$\beta^*_{(\varphi,\psi)}(x|y) \doteqdot [x \underset{\varphi}{\succ} y] \bigcup [x \underset{\psi}{\succ} y],$$

причем здесь (φ, ψ)-бесконфликтность равносильна полноте $\alpha^*_{(\varphi,\psi)}$ и асимметричности $\beta^*_{(\varphi,\psi)}$ (аналогичный результат для композиций индексов абстрактных упорядоченных разбиений представлен в [49]).

Замечание 3. Из формулировки (а также из доказательства) теоремы 2 можно извлечь ряд дополнительных фактов. В частности, сопоставление пунктов а), б), в) в теореме 2 с их эквивалентами в лемме 3 дает следующее.

Следствие 3. Если $\alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \alpha_\psi$, то $\alpha_{\langle\psi,\varphi\rangle} \Leftrightarrow \alpha_\psi$ и $\alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \alpha_{\langle\psi,\varphi\rangle}$.

Непосредственно из теоремы 2 вытекает еще одно утверждение.

Следствие 4. Пусть даны произвольные одно- и двухступенчатые механизмы (много-) шкально-экстремального выбора λ_φ, λ_ψ и $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$, $\lambda_{\langle\psi,\varphi\rangle}$, и пусть $\check{\lambda}_{\langle\varphi,\psi\rangle}$, $\check{\lambda}_{\langle\psi,\varphi\rangle}$ — сопровождающие ПД-предикаты для двух последних. Тогда для того чтобы имела место эквивалентность: а) $\check{\lambda}_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \lambda_\psi$; б) $\check{\lambda}_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \lambda_\varphi$; в) $\check{\lambda}_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \check{\lambda}_{\langle\psi,\varphi\rangle}$ — необходима и достаточна, соответственно, а) $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованность; б) $\langle\psi,\varphi\rangle$-когерентность; в) (φ,ψ)-бесконфликтность.

В случае рациональности механизмов $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ и $\lambda_{\langle\psi,\varphi\rangle}$ следствие 4, в свете принципа Кондорсе, может быть усилено: в случаях а), б) и в) будут иметь место эквивалентности для самих двухступенчатых механизмов, а не только для их сопровождающих ПД-предикатов. В частности, в силу теоремы 1 это сразу можно гарантировать для случая одномерной шкалы φ. Однако в действительности справедливо существенно более сильное утверждение: указанное усиление следствия 4 распространяется почти полностью (лишь с одной оговоркой в пункте в)) на произвольные многомерные шкалы φ, ψ. Но для того, чтобы обосновать такое усиление, нужно предварительно располагать общим критерием рациональности двухступенчатого $\langle\varphi,\psi\rangle$-механизма выбора.

Двухступенчатый выбор: рациональность и коммутативность

Пусть дана пара шкал φ, ψ на U. Тройку объектов x, y, z из U назовем *φ-триадой*, если

$$x \underset{\varphi}{\sim} y, \quad y \underset{\varphi}{\sim} z, \quad x \underset{\varphi}{\prec} z. \tag{24}$$

Будем называть φ-триаду x, y, z *$\langle\varphi,\psi\rangle$-противоречивой триадой типа* 1, или *типа* 2, или 3^* (кратко: $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-триадой, $\langle\varphi,\psi\rangle$-2-триадой и т.д.), если, соответственно:

$$\begin{aligned} &\text{I) } x \underset{\psi}{\succ} y, \quad y \underset{\psi}{\succsim} z;\\ &\text{II) } x \underset{\psi}{\sim} y, \quad y \underset{\psi}{\succ} z;\\ &\text{III) } x \underset{\psi}{\sim} y, \quad y \underset{\psi}{\sim} z;\\ &\text{III}^*\text{) } x \underset{\psi}{\sim} y, \quad y \underset{\psi}{\sim} z, \quad x \underset{\psi}{\sim} z. \end{aligned} \tag{25}$$

Пару шкал φ, ψ будем называть $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-*непротиворечивой,*… $\langle\varphi,\psi\rangle$-$3^*$-*непротиворечивой*, если в U отсутствуют, соответственно, $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-триады,… $\langle\varphi,\psi\rangle$-$3^*$-триады.

Теорема 3. Для того чтобы двухступенчатый $\langle\varphi,\psi\rangle$-механизм выбора был: I) рациональным, а значит, $\hat{1}$-рациональным; II) $\hat{2}$-рациональным; III) $\hat{3}$-рациональным, — необходимо и достаточно, чтобы пара шкал φ, ψ была, соответственно: I) $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-непротиворечивой; II) $\langle\varphi,\psi\rangle$-1- и $\langle\varphi,\psi\rangle$-2-непротиворечивой; III) $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-, $\langle\varphi,\psi\rangle$-2-, $\langle\varphi,\psi\rangle$-3-непротиворечивой и $\langle\psi,\varphi\rangle$-$3^*$-непротиворечивой.

Доказательство. I) Рациональность, а значит и $\hat{1}$-рациональность (см. замечание 1) механизма $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ равносильна отсутствию в U $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-противоречивых триад в силу прямого переноса теоремы 1 из [9] на «векторно-векторный» случай.

II) $\hat{2}$-рациональность. Допустим, что $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ $\hat{1}$-рационален, но не $\hat{2}$-рационален. Тогда его сопровождающее отношение $\beta_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ (10) не транзитивно, т.е. найдется тройка u, v, $w \in U$ такая, что

$$\beta_{\langle\varphi,\psi\rangle}(u|v), \quad \beta_{\langle\varphi,\psi\rangle}(v|w), \quad \alpha_{\langle\varphi,\psi\rangle}(u|w) \tag{26}$$

истинны. Рассмотрев все возможные конфигурации отношений вида $\underset{\varphi}{\prec}$, $\underset{\varphi}{\sim}$, $\underset{\varphi}{\succ}$ и $\underset{\psi}{\prec}$, $\underset{\psi}{\sim}$, $\underset{\psi}{\succ}$ между u, v и w, которые могут привести к ситуации (26), убеждаемся, что в любом возможном случае тройка u, v, w образует $\langle\varphi,\psi\rangle$-2-триаду или $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-триаду; но последнее в силу п.I противоречит $\hat{1}$-рациональности.

Итак, если $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ не $\hat{2}$-рационален, то либо он не $\hat{1}$-рационален, и тогда в U имеется $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-триада, либо он $\hat{1}$-рационален, но тогда в U имеется $\langle\varphi,\psi\rangle$-2-триада. Обратно, если хотя бы одна из таких триад имеется в U, то на ней нарушается либо рациональность (если это $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-триада), либо транзитивность отношения $\beta_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ (если это $\langle\varphi,\psi\rangle$-2-триада), и значит, $\hat{2}$-рациональность в любом случае невозможна.

III) $\hat{3}$-рациональность – анализируется аналогично пункту II.

Замечание 4. При одномерности шкалы ψ (случай, рассмотренный в [9]) формулировка теоремы 3 несколько упрощается: $\langle\varphi,\psi\rangle$-триады типов 1, 2 и 3 определяются как φ-триады (24) с условием на ψ, вместо (25), вида 1) $\psi(x) > \psi(y) \geqslant \psi(z)$, 2) $\psi(x) = \psi(y) > \psi(z)$, 3) $\psi(x) = \psi(y) = \psi(z)$, соответственно, а $\langle\psi,\varphi\rangle$-3*-триады вообще при этом невозможны. Если же одномерна шкала φ (случай из теоремы 1), то теорема 3 «вырождается», поскольку при этом никакие φ-триады вообще не могут существовать, и поэтому всегда обеспечена $\hat{2}$-рациональность (в согласии со следствием 2). При этом $\hat{3}$-рациональность равносильна отсутствию $\langle\psi,\varphi\rangle$-3*-триад, в данном случае имеющих вид $\varphi(x) = \varphi(y) = \varphi(z)$, $x \underset{\psi}{\succ} y$, $y \underset{\psi}{\sim} z$, $x \underset{\psi}{\sim} z$. Наконец, если обе шкалы φ и ψ одномерны, то такие $\langle\psi,\varphi\rangle$-3*-триады также невозможны, так что всегда имеет место $\hat{3}$-рациональность (вновь в согласии со следствием 2).

Установим теперь связь между результатами предыдущего и настоящего разделов.

Лемма 4. Для любых шкал φ, ψ из $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованности следует $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-непротиворечивость, а из $\langle\varphi,\psi\rangle$-когерентности следует $\langle\psi,\varphi\rangle$-1-непротиворечивость.

Замечание 5. Свойство (φ,ψ)-бесконфликтности, в отличие от $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованности и $\langle\psi,\varphi\rangle$-когерентности (см. лемму 4), не гарантирует $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-непротиворечивости в общем случае. Но, если шкала ψ одномерна, такая гарантия появляется.

Лемма 5. При одномерности шкалы ψ из (φ,ψ)-бесконфликтности следует $\langle\varphi,\psi\rangle$-1- и $\langle\psi,\varphi\rangle$-1-непротиворечивость.

Из теоремы 3 (I) в сочетании с леммами 4 и 5 вытекает лемма 6.

Лемма 6. Для того чтобы $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ был рационален, достаточно $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованности или $\langle\psi,\varphi\rangle$-когерентности, а если шкала ψ одномерна, то достаточно также и (φ,ψ)-бесконфликтности.

Теперь можно получить искомое «расширение» теоремы 2.

Теорема 4. Для того чтобы механизм двухступенчатого выбора

$\lambda\langle\varphi,\psi\rangle$ удовлетворял условию:

$$\text{а) } \lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \lambda_{\psi}; \quad \text{б) } \lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \lambda_{\varphi}; \quad \text{в) } \lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \lambda_{\langle\psi,\varphi\rangle},$$

необходимо и достаточно, чтобы пара шкал φ, ψ была соответственно: а) $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованной; б) $\langle\psi,\varphi\rangle$-когерентной; в) одновременно (φ,ψ)-бесконфликтной, $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-непротиворечивой и $\langle\psi,\varphi\rangle$-1-непротиворечивой.

Доказательство. а) Пусть $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \lambda_{\psi}$. Тогда предикат $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ рационален, поскольку он эквивалентен рациональному λ_{ψ}. Поэтому по принципу Кондорсе $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \check{\lambda}_{\langle\varphi,\psi\rangle}$. Следовательно, $\check{\lambda}_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \lambda_{\psi}$, а для этого, согласно следствию 4, необходима $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованность. Обратно, пусть имеет место $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованность. Тогда в силу следствия 4 $\check{\lambda}_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \lambda_{\psi}$, а в силу леммы 6 и принципа Кондорсе $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \check{\lambda}_{\langle\varphi,\psi\rangle}$, что и дает $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \lambda_{\psi}$.

б) Доказывается аналогично пункту а).

в) Пусть $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \lambda_{\langle\psi,\varphi\rangle}$. (27)

Докажем, что при этом предикат $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$, а значит, и $\lambda_{\langle\psi,\varphi\rangle}$, должен быть рационален. Допустим противное; тогда по теореме 3 (I) существует $\langle\varphi,\psi\rangle$-1-триада x, y, z (24), (25.I), для которой, как легко видеть, $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}(y|\{x,y,z\})$ истинно, а $\lambda_{\langle\psi,\varphi\rangle}(y|\{x,y,z\})$ ложно, что нарушает (27). Следовательно, $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ и $\lambda_{\langle\psi,\varphi\rangle}$ рациональны, и по теореме 3 (I) имеет место $\langle\varphi,\psi\rangle$-1- и $\langle\psi,\varphi\rangle$-1-непротиворечивость. Кроме того, в силу принципа Кондорсе, из (27)

$$\check{\lambda}_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \check{\lambda}_{\langle\psi,\varphi\rangle}, \tag{28}$$

а для этого, согласно следствию 4, необходима (φ,ψ)-бесконфликтность. Обратно, если имеет место (φ,ψ)-бесконфликтность, то по следствию 4 справедливо (28), и если имеет место $\langle\varphi,\psi\rangle$-1- и $\langle\psi,\varphi\rangle$-1-непротиворечивость, то по теореме 3 (I) $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ и $\lambda_{\langle\psi,\varphi\rangle}$ рациональны, и поэтому из (28) вытекает (27).

Замечание 6. Как видно из доказательства теоремы 4 (в), требование перестановочности ступеней λ_{φ} и λ_{ψ} автоматически обеспечивает рациональность двухступенчатого механизма $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ и эквивалентного ему при этом механизма $\lambda_{\langle\psi,\varphi\rangle}$, и это требование обеспечивает также (φ,ψ)-бесконфликтность. Однако само свойство (φ,ψ)-бесконфликтности, в отличие от $\langle\varphi,\psi\rangle$-согласованности и $\langle\psi,\varphi\rangle$-когерентности, не обеспечивает рациональности $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ в общем многомерном случае. Но при одномерности шкалы ψ, не говоря уже о φ (см. замечание 5), рациональность $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$ этим свойством гарантирована в силу леммы 5. Более того, при одномерности ψ (φ,ψ)-бесконфликтность в силу леммы 6 и теоремы 4 (в) эквивалентна перестановочности λ_{φ}

и λ_ψ. Таким образом, для двухступенчатого механизма «векторно-скалярной» оптимизации [9] свойство (φ,ψ)-бесконфликтности достаточно и для рациональности $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle}$, и для коммутативности ступеней λ_φ и λ_ψ: $\lambda_{\langle\varphi,\psi\rangle} \Leftrightarrow \lambda_{\langle\psi,\varphi\rangle}$.

Замечание 7. Утверждения теоремы 4 можно детализировать и усилить подобно утверждениям теоремы 2 (см. замечание 3); кроме того, их легко перевести с предикатного языка на язык функций выбора. Ограничимся в качестве примера аналогом следствия 3.

Следствие 5. Если $C_\psi(C_\varphi) = C_\psi$, то $C_\psi(C_\varphi) = C_\varphi(C_\psi) = C_\psi$.

Этот результат устанавливает, в рамках данной модели, связь между свойствами «суперпозиционной представимости» и «усиленной коммутативности» функций выбора из [237], введенными и рассмотренными для функций иного происхождения.

Conditions for universal reducibility of a two-stage extremization problem to a one-stage problem [1]

Dedicated to the memory of Richard Bellman

An extremization problem in the general form $\max_{x\in X} f(x)$ *is considered. This notation is treated as the description of a parametric family of problems where the extremized function f is the same but the set X is a variable parameter. Such a "mass" treatment of the extremization problem for function f determines implicitly the "choice transformations" $X \to Y$, where Y is the set of solutions, i.e.,* $Y = \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)$, *and X goes over a given family $\mathcal{X}$ of admissible sets. Similarly, a two-stage problem of sequential extremization of two functions, φ and ψ, determines the superposition of two related choice transformations. We consider the cases when the function φ and/or ψ may be vectorial and the extremization is understood in the Pareto sense. The very possibility of reducing a two-stage problem to a one-stage problem having the same solution set Y for every admissible $X \in \mathcal{X}$ is studied. Unlike the usual "lexicographical" extremization of two scalar functions, such a reduction is not always possible in the vectorial case. The necessary and sufficient conditions for it are stated.*

[1] Journal of Mathematical Analysis and Applications.—1986.—V. 119.—P. 361-388 (в соавторстве с *М.А.Айзерманом*).

1. Introduction and statement of problem

We shall consider mainly the problems of extremization (for definiteness, maximization) of scalar and vectorial functions on abstract sets, i.e., the problems in the form:

$$\max_{x \in X} f(x). \tag{1}$$

In this way we shall treat the formulation (1) in two ways: (1) as the *individual* problem of extremization of the given function f on the given set X, and (2) as the *mass* problem of extremization of the same function f on various sets X in which role the members of some given family $\mathcal{X}$ of admissible sets are taken. In what follows, under the *problem of extremization for function* f (briefly, f-problem), we shall understand the mass problem of extremization for f in the above-mentioned sense. That is, we shall virtually consider the parameterized (by X) family of individual problems in the form (1) which are different in the parameter $X \in \mathcal{X}$. We shall be interested in the behavior of the set Y of solutions of the f-problem (1) under all possible X's, i.e., in the form of transformation $X \to Y$ implicitly defined due to (1) where $X \in \mathcal{X}$ and

$$Y = \operatorname{Arg} \max_{x \in X} f(x). \tag{2}$$

Indeed, similar transformations converting every admissible set X into some subset $Y \subseteq X$ really appear as a result of applying certain "mass" procedures to the sets $X \in \mathcal{X}$ (such procedures may specifically include the use of extremizing operations for various functions). Every problem (procedure) which explicitly or implicitly selects from any set $X \in \mathcal{X}$ some subset Y is called a *choice problem* on $X \in \mathcal{X}$. In these terms the simplest f-problem of extremization (1) may be considered as a paradigm of choice problems. The aim of the present work is to consider some other problems having more complicated forms and to collate them with this paradigm, being interested in the possibility or impossibility of finding the "equivalent" paradigm problem for any such starting problem (the sense of "equivalence" being strictly defined below).

As the starting problems we shall furthermore consider the problems of sequential extremization of two functions, φ and ψ, having the same domain U. We shall assume that under any fixed X ($X \subseteq U$) used as the admissible (feasible) set for the *first stage* of extremization, viz., the φ-problem, the received solution set V for φ-problem is used further as the admissible set for the *second stage* of extremization, viz., the ψ-problem. The resulting overall problem

$$\max_{v \in V} \psi(v), \quad \text{where } V = \operatorname{Arg} \max_{x \in X} \varphi(x), \tag{3}$$

will be called *the two-stage problem of sequential extremization of functions φ and ψ* (or the φ, ψ-problem for brevity). Such a φ, ψ-problem generates the choice transformation $X \to Y$, $X \in \mathcal{X}$, where

$$Y = \operatorname{Arg} \max_{v \in \operatorname{Arg} \max_{x \in X} \varphi(x)} \psi(v). \tag{4}$$

It is evident that this transformation is the superposition of two "single-stage" choice transformations, $X \to V$ and $V \to Y$, generated by the φ-problem and the ψ-problem, respectively.

Let us pose the question: is it possible to replace a two-stage φ, ψ-problem (3) by some equivalent one-stage f-problem? The answer to this question essentially depends on the way of defining the notion of "equivalent substitution". It is natural to require that the "substitute" problem possess exactly the same set of solutions as the initial one. But if we applied this requirement only to the individual problem on a single fixed set X and if we simultaneously permitted arbitrary selection of any criterial function f in the proposed substitute equivalent f-problem, then the answer to our question should turn out to be trivially positive. It would be sufficient, e.g., to take the characteristic function of the set Y as the f function, i.e., let $f(x) = 1$ for $x \in Y$ and $f(x) = 0$ otherwise. Nevertheless the above question remains nontrivial if we treat our problems as mass problems of choice; then according to such a treatment we shall consider all admissible sets $X \in \mathcal{X}$, and by the "equivalence of problems" we shall mean the coincidence of their respective solution sets, Y's, for every $X \in \mathcal{X}$.

Definition 1. Consider two choice problems on sets X from the same family $\mathcal{X}$. We shall say that one problem is *universally reducible* to another (and conversely) if for every $X \in \mathcal{X}$ the respective solution sets Y_1 and Y_2 of these two problems coincide.

In what follows, speaking of reducibility of one problem to another (specifically, of two-stage to one-stage), we shall mean the universal reducibility in Definition 1 even if the word "universal" is omitted.

Remark. Although, as we have indicated above, for every choice problem on a fixed X a respective f-problem with the same solution set Y can be designed in a trivial way, such a design by itself yields nothing for the answer to the question on the universal reducibility to an f-problem. Indeed, the so designed critical function f will generally depend parametrically on X, i.e., $f = f_X(x)$. The question is if it is possible to "sew" different functions $f_X(x)$ together to get a joint function $f(x)$ on $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$ independent of X as is required in the form (1) of the mass f-problem. In the choice theory (see, e.g., [87]) for this question in a general case the negative answer is given: definitely not every choice problem is universally reducible to a scalar or even vectorial extremization problem. The result of analysis of possibilities for such reducibility for two-stage φ, ψ-problems are given below (some of them have been published earlier, particularly in [84, 87]).

In the simplest case, when both φ and ψ are scalar functions, the two-stage φ, ψ-problem (3) is a well-known problem of "lexicographic maximization" (see, e.g., [134]). Such a "scalar-scalar" two-stage problem is always reducible to a one-stage extremization problem (1) with some function f being a scalar one also; we shall discuss it below. But if in the role of φ and/or ψ, one may use vectorial functions then the situation becomes more complicated: universal reducibility of a φ, ψ-problem (3) to an f-problem (1) can demand that certain conditions be fulfilled. The setting of such conditions is the main topic of this paper.

Everywhere below we assume for the sake of simplicity that all considered functions (f, φ, etc.) are defined on some finite set U (i.e., $f : U \to R$ or $\varphi : U \to R^n$, etc.) and the family $\mathcal{X}$ is the collection of all nonempty subsets X of the set U (i.e., $\mathcal{X} = 2^U \backslash \{\varnothing\}$).

2. Vectorial extremization

Let us start from statements of extremization problems under several criterial functions. Assume that n scalar functions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ on U are given. Before looking at the "sequential" application of different criterial functions in extremization procedures, let us discuss their "parallel" application. The "parallel" (i.e., simultaneous and "equitable") usage of functions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ as extremization criteria naturally leads to the usual consideration of the "vectorial" criterial function $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ when the vector maximization problem

$$\max_{x \in X} \varphi(x) \tag{5}$$

is understood as the problem of finding the solution set

$$\begin{aligned} Y &= \operatorname{Arg} \max_{x \in X} \varphi(x) = \\ &= \{y \in X \,\big|\, \text{there is no } x \in X \text{ such that } \varphi(x) > \varphi(y)\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Here vectorial inequality for φ is defined as an appropriate generalization of scalar inequality which converts itself into usual numerical inequality in the case $n = 1$. This fact implies that the scalar extremization problem is a particular case of the vectorial one. Following the standard definition we shall treat vectorial inequality as a component-wise problem (a *vectorial superiority* relation in the Pareto sense):

$$\varphi(x) > \varphi(y) \Leftrightarrow (\varphi_i(x) > \varphi_i(y),\ i = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

So Y in (6) is the set of Pareto-maximal points for the vectorial function φ.

Remark. The definition of the Paretian relation of strict vectorial superiority $>$ usually admits that some (but not all) respective component-wise inequalities may be unstrict. For further exposition this difference in two varieties of vectorial inequality $>$ is unessential.

Let us pose the question: is the vectorial maximization problem (5), with $n > 1$, reducible to some scalar maximization problem, with $n = 1$? The answer to this question will serve as an illustration for the notion of universal reducibility for mass choice problem.

First, we shall introduce some notations. The failure (logical negation) of the vectorial inequality $>$ we shall call *vectorial nonsuperiority* and denote by $\not>$ (in the scalar case, $n = 1$, the relation $\not>$ is equivalent to $\leqslant$). Let us also introduce for vectors the following relation of *mutual nonsuperiority* denoted by $><$:

$$\varphi(x) >< \varphi(y) \Leftrightarrow (\varphi(x) \not> \varphi(y) \quad \text{and} \quad \varphi(x) \not< \varphi(y))$$

(in the scalar case $><$ is equivalent to $=$).

Let us call a triple of elements $u, v, w \in U$ a φ-*triad* if

$$\varphi(u) < \varphi(v),\ \varphi(u) >< \varphi(w), \quad \text{and} \quad \varphi(v) >< \varphi(w). \tag{8}$$

Note that the system of relations (8) is possible even with $n = 2$, e.g., when $\varphi_1(u) < \varphi_1(v) < \varphi_1(w)$ and $\varphi_2(v) > \varphi_2(u) > \varphi_2(w)$.

Let us satisfy ourselves that under the existence of a φ-triad in U the universal reducibility of the φ-problem (5) to an f-problem (1) with some scalar function f is definitely impossible. Really, on setting $X = \{u, v, w\}$, we get for (5) $Y = \{v, w\}$. Hence in the case of the reducibility of (5) to (1), we might have $f(u) < f(v) = f(w)$. On the other hand, on setting $X = \{u, w\}$, we get for (5) $Y = \{u, w\}$. In the case of the reducibility of (5) to (1) this would imply that $f(u) = f(w)$, in contradiction with the preliminary result $f(u) < f(w)$. Therefore the problem (5) is not reducible to (1).

Remark. Really, the converse is also true: the existence of a φ-triad in U is not only sufficient but also necessary for the irreducibility of a problem (5) to (1).

This well-known fact is easily deduced in Section 5 by using some elementary notions of decision theory [1]. In the main part of the text we shall if possible avoid addressing these notions for the sake of autonomy of exposition. For the same purpose in several cases we give independent proofs of statements known (in one form or other) in the theory of choice and decision making [84, 87, 134, 221].

[1] In this case the essence of the matter is the nontransitivity of the mutual nonsuperiority relation $><$ which is just equivalent to the existence of a φ-triad in U.

In particular, we shall now give an independent "constructive" proof of the fact that if φ-triads in U are absent then the φ-problem (5) is reducible to an f-problem (1) with some scalar function f. It will be useful for us to write the requirement of absence of φ-triads in U in the form of the *Quadruple condition*: for every $x, y, r, s \in U$

$$\varphi(x) > \varphi(y), \quad \varphi(x) >\!< \varphi(r), \quad \varphi(y) >\!< \varphi(s) \Rightarrow \varphi(r) > \varphi(s).$$

Really, the existence of a φ-triad $u, v, w \in U$ of the form (8) obviously violates the Quadruple condition (it is sufficient to take $x = r = v, y = u, s = w$). Conversely, let the Quadruple condition be violated, viz., its left part be fulfilled but its right part be violated (i.e., $\varphi(r) \not> \varphi(s)$). Then, as it is easy to see, under any possible relation between $\varphi(x)$ and $\varphi(s)$ in the quadruple x, y, r, s at least one φ-triad (x, y, s or x, s, r) will exist.

Thus let φ-triads be absent in U so that the Quadruple condition is fulfilled. We shall design the desired function f on U. Define for every $u \in U$ the set

$$E(u) = \{v \in U \,|\, \varphi(u) >\!< \varphi(v)\}$$

and let

$$f(u) = \frac{1}{|E(u)|} \sum_{v \in E(u)} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v).$$

We will show that the given scalar function f is equivalent to the vectorial function φ in the sense that

$$\varphi(x) > \varphi(y) \Leftrightarrow f(x) > f(y).$$

Note for the beginning that due to the absence of φ-triads in U

$$\varphi(x) >\!< \varphi(y) \Rightarrow E(x) = E(y),$$

hence

$$\varphi(x) >\!< \varphi(y) \Rightarrow f(x) = f(y).$$

On the other hand, the definition of f in light of the Quadruple condition immediately implies

$$\varphi(x) > \varphi(y) \Rightarrow f(x) > f(y).$$

This together with the previous implication just means the equivalence between f and φ which yields universal reducibility of the φ-problem to the f-problem.

Definition 2. A vectorial extremization problem (5) (with $n > 1$) will be called *essentially vectorial* if it is not universally reducible to an f-problem (1) with any scalar function f.

Now the above statement on reducibility of problem (5) to (1) may be summarized in the following Lemma.

Lemma 1. For a problem of extremization of a vectorial function φ on U (with $\mathcal{X} = 2^U \backslash \{\varnothing\}$) to be essentially vectorial, it is necessary and sufficient that φ-triads were in U.

Remark. We once more emphasize that nonreducibility of a given vectorial extremization problem to a scalar one is generated by the requirement of universality of such a reducibility on all $X \in \mathcal{X}$. In contradistinction to it, the statements on the reducibility of a vectorial extremization problem to a scalar one on a single fixed set X are sometimes considered. These statements can be nontrivial if we set some a priori requirements on the form of the scalar function sought (e.g., the representability in the form of linear combination of components of the initial vectorial function).

3. Sequential extremization: the simple cases

Now let various criterial functions, scalar or vectorial, be used in extremization procedures sequentially. We shall consider the two-stage procedure in the form of a φ, ψ-problem (3) with criterial functions φ and ψ at the first and the second stages of extremization, respectively. The four types of problems depend on the types of functions φ and ψ:

I) φ scalar, ψ scalar;
II) φ scalar, ψ vectorial;
III) φ vectorial, ψ scalar;
IV) φ vectorial, ψ vectorial.

The logical subordination of these types of problems is shown as:

$$\begin{tikzcd}
& \text{I (scalar-scalar)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{II (scalar-vectorial)} \arrow[dr] & & \text{III (vectorial-scalar)} \arrow[dl] \\
& \text{IV (vectorial-vectorial)} &
\end{tikzcd}$$

Here every lower type of problem includes as a particular case every higher type. In this section we shall consider problem types I and II in which reducibility to one-stage extremization may be verified directly. The more complex types III and IV will be considered in the later sections.

I. Let us start with a scalar-scalar problem (type I, "lexicographic scalar extremization") [221]. We shall display its universal reducibility to a scalar extremization problem by using the following self-explanatory construction. Let $|U| = N$. Then without loss of generality we may consider values φ and ψ to be integers between 0 and $N - 1$ and index them by N-ary digits. (Here we as usual base our results on the evident fact that functions under extremization admit any monotone transformations without changing the solutions for extremization problems).

Consider now two-digit numbers in the N-ary positional calculus system having the form $\langle \varphi, \psi \rangle$, i.e., where digit (one-digit number) φ is set in a higher position and ψ in a lower one. Let us construct now a new scalar function χ on the set U having values

$$\chi(x) = \langle \varphi(x), \psi(x) \rangle, \ x \in U, \tag{9}$$

and consider the extremization problem

$$\max_{x \in X} \chi(x). \tag{10}$$

It is easy to make sure that the φ, ψ-problem (3) with given scalar functions φ and ψ is universally reduced to the χ-problem (10). Indeed, the set $Y = \operatorname{Arg} \max_{x \in X} \chi(x)$ obviously consists of those and only those elements $y \in X$ which satisfy the two conditions:

(1) among elements of X, they have the maximal value of the highest digit for χ, i.e., the maximal value of φ;

(2) among these φ-maximal elements of X, they have the maximal value of the lowest digit for χ, i.e., the maximal value of ψ.

But this is exactly the description of the set Y given by (4).

II. Now, let in a two-stage φ, ψ-problem (3), the function φ be a scalar and ψ be a vectorial one: $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Repeating the process of introducing two-digit N-ary numbers, we shall define a vectorial function $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ by the equalities

$$\chi_i(x) = \langle \varphi(x), \psi_i(x) \rangle, \ \ i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Again it is possible to verify that a two-stage φ, ψ-problem (3) is reduced to the one-stage χ-problem (10) but now with a vectorial function χ of the form (11). For this purpose we shall consider an arbitrary element $y \in X$ and show that it is not a solution of the problem (10) if and only if it is not a solution of the problem (3).

Denote $\varphi^* = \max_{x \in X} \varphi(x)$. Then the set V defined by (3) is $V = \{v \in X | \varphi(v) = \varphi^*\}$. For $y \in X$ not to be a solution of the χ-problem (10), it is necessary and sufficient that for some $z \in X$, the inequality $\chi(y) < \chi(z)$ holds, i.e.,

$$(\langle \varphi(y), \psi_1(y) \rangle, \ldots, \langle \varphi(y), \psi_n(y) \rangle) < (\langle \varphi(z), \psi_1(z) \rangle, \ldots, \langle \varphi(z), \psi_n(z) \rangle), \tag{12}$$

which is possible in exactly one of the two cases:

(a) $\varphi(y) < \varphi^*$; in this case (12) holds with any $z \in V$;
(b) $\varphi(y) = \varphi^*$, but there exists $z \in V$ such that $\psi(y) < \psi(z)$.

Obviously, (a) is equivalent to the fact that in the φ, ψ-problem (3), y has not been included in the set of solutions already at the first stage, and (b) is equivalent to the fact that y is included in the set of solutions at the first but not at the second stage of (3). So (a) and (b) together exhaust the cases when y is not a solution of (3).

The results of Subsections I and II can be summed up in the following theorem.

Theorem 1. Every two-stage problem of scalar-vectorial extremization (in particular, of scalar-scalar extremization) is universally reducible to a one-stage problem of vectorial (resp., scalar) extremization.

In concluding this section we shall note that under reduction of a two-stage scalar-vectorial extremization problem to a one-stage problem, the case is possible when the resulting one-stage problem turns out to be not a vectorial but a scalar one. We shall now give the complete characterization of this case based on Lemma 1 and construction (11) of a vectorial function χ, to the extremization of which the initial φ, ψ-problem (3) may be reduced. Due to Lemma 1, a χ-problem (10) will be essentially vectorial if and only if in U there are no χ-triads, i.e., no triples $u, v, w \in U$ such that

$$\chi(u) < \chi(v), \quad \chi(u) >\!\!< \chi(w), \quad \chi(v) >\!\!< \chi(w). \tag{13}$$

From the definition of χ (11) it follows that the last two relations in (13) are equivalent to

$$\begin{aligned} &\varphi(u) = \varphi(v) = \varphi(w), \\ &\psi(u) >\!\!< \psi(w), \ \psi(v) >\!\!< \psi(w), \end{aligned} \tag{14}$$

and the first relation in (13) with first equality in (14) is equivalent to the vectorial inequality

$$\psi(u) < \psi(v). \tag{15}$$

So fulfillment of the relation system (14), (15) for some $u, v, w \in U$ is necessary and sufficient for a χ-problem (10) to be essentially vectorial, i.e., irreducible to a scalar extremization problem. Hence it is also necessary and sufficient for an initial φ, ψ-problem (3) to be irreducible to a scalar problem. Speaking differently, the reducibility of a φ, ψ-problem (3) to a scalar one is equivalent to nonexistence of a situation of the form (14), (15) on the set U.

Noting that (15) together with the second line in (14) implies that the triple u, v, w is a ψ-triad, we may give the final form of the latter statement.

Addendum to Theorem 1. For a two-stage problem of scalar-vectorial extremization to be reducible to a problem of scalar extremization, it is necessary and sufficient that no subset of the set U having the same φ value on its elements (i.e., a subset of the form $U_c = \{u \in U | \varphi(u) = c\}$) contains a ψ-triad.

Note that due to the impossibility of ψ-triads for scalar functions ψ, this addendum automatically implies the above-mentioned universal reducibility of any scalar-scalar φ, ψ-problem to a one-stage problem.

Thus the existence of the "preliminary" scalar extremization stage before the vectorial extremization stage in any case does not make the problem "essentially more complex" than a single vectorial problem (Theorem 1). Moreover, introducing the preliminary ψ-stage can even "simplify" the initial vectorial ψ-problem, transforming it into a scalar one (Addendum to Theorem 1) by "destroying" existing ψ-triads (by virtue of giving unequal φ-values to their elements).

Now let us go to clarify in what degree an extremization problem is complicated after introducing not the scalar but the vectorial preliminary extremization stage.

4. Two-stage extremization: general case

In this section the main statements are given which concern the general case of vectorial-vectorial extremization (problems of type IV), and the case of vectorial-scalar extremization (type III) which turns out to be almost as complex.

Start with a problem of type III. Let $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ be a vectorial and ψ a scalar function on U. One might attempt, by analogy with a problem of type II, to design a "lexicographic" vectorial function χ with components $\chi_i = \langle \varphi_i, \psi \rangle, i = 1, \ldots, n$. But is easy to verify that the initial two-stage problem (3) definitely is not reducible to the extremization of the function χ in the nontrivial case when for at least one pair of elements, $p, q \in U$,

$$\varphi(p) >\!\!< \varphi(q) \quad \text{but} \quad \psi(p) \neq \psi(q). \tag{16}$$

Really, in this case for the two-stage φ, ψ-problem of extremization on $X = \{p, q\}$ the set Y evidently contains just one of the elements p or q. But for the respective one-stage χ-problem we have $\chi(p) >\!\!< \chi(q)$ and hence $Y = \{p, q\}$ on the same $X = \{p, q\}$.

Attempts at constructing any other function χ, scalar or vectorial, to reduce a two-stage φ, ψ-problem to a one-stage χ-problem are doomed to failure. Consider the triple $u, v, w \in U$ such that

$$\begin{gathered} \varphi(u) < \varphi(v), \quad \varphi(u) >\!\!< \varphi(w), \quad \varphi(v) >\!\!< \varphi(w), \\ \psi(u) > \psi(w) \geqslant \psi(v) \end{gathered} \tag{17}$$

(here the first line in (17) means that u, v, w is a φ-triad). Then for the two-stage φ, ψ-problem on $X = \{u, v, w\}$ the solution set Y surely includes element w. But on $X = \{u, w\}$ the respective solution set Y' contains the single element u (i.e., $Y' = \{u\}$) and does not include w. It demonstrates the violation of the property of "rational choice," the *heredity property*[1] which may be formulated in the following way: if $w \in X' \subseteq X$ and $w \in Y$ where Y is the choice from X, then $w \in Y'$ holds where Y' is the choice from X'. It is easy to see that the heredity property must be kept on solution sets of any one-stage extremization problem (considered as a mass problem of choice, following the Introduction). Therefore the above-stated φ, ψ-problem on the set U including the triple u, v, w from (17) definitely cannot be reduced to a one-stage problem of extremization, neither scalar nor vectorial.

Thus all problems of vectorial-scalar extremization and, even more so, all problems of vectorial-vectorial extremization of the general type must be broken up into definitely nonempty classes: problems which do not admit universal reduction to the one-stage problem of scalar or vectorial extremization, and problems which do admit such a reduction. We shall give in this section the formulations of conditions which discriminate these classes of problems. The proofs will be given in the next section.

We introduce the necessary definitions.

Definition 3. Let φ and ψ be two vectorial functions on U and let a triple $u, v, w \in U$ be a φ-triad (8). We shall call it a φ, ψ-*inconsistent triad of the 1st, 2nd or 3rd kind* (in short, a φ, ψ-1-, φ, ψ-2-, or φ, ψ-3-*triad*) if, respectively,

$$\begin{aligned} &(1) \quad \psi(u) > \psi(w),\ \psi(v) \not> \psi(w); \\ &(2) \quad \psi(u) \asymp \psi(w),\ \psi(v) < \psi(w); \\ &(3) \quad \psi(u) \asymp \psi(w),\ \psi(v) \asymp \psi(w). \end{aligned} \tag{18}$$

Remark. In Definition 3 as usual it is not forbidden to take as vectorial functions φ, ψ their particular case, scalar functions. But we note that if the first function, φ, is really scalar, then φ-triads and, even more so, φ, ψ-1- ψ-2-, and ψ-3-triads surely do not exist.

We now formulate the main theorem of this work.

Theorem 2. For a vectorial-vectorial extremization φ, ψ-problem to be universally reducible to a vectorial (or, moreover, to a scalar) one-stage extremization problem, it is necessary and sufficient that φ, ψ-1- and φ, ψ-2-triads be absent in U (respectively, any φ, ψ-1-, φ, ψ-2, φ, ψ-3, and also ψ, φ-3-triads were absent in U).

[1] See, e.g., [87]. Such a property also used to be called the Chernoff condition or α-condition (after Sen [221]).

Remark. Theorem 2 covers the general vectorial-vectorial case of the two-stage extremization problem (type IV). Surely it implies the statements concerning reducibility of more particular problems, of type I and II, which have been considered above, and also of type III. Being applied to problems of type III, Theorem 2 can be specified in the following way. In the formulation of Theorem 2, φ, ψ-inconsistent triads of the 1st, 2nd, and 3rd kind are characterized as φ-triads satisfying the conditions, respectively,

$$\begin{aligned} &(1) \quad \psi(u) > \psi(w) \geqslant \psi(v); \\ &(2) \quad \psi(u) = \psi(w) > \psi(v); \\ &(3) \quad \psi(u) = \psi(w) = \psi(v). \end{aligned} \tag{19}$$

The additional requirement of the absence of ψ, φ-3-triads (in the list of conditions for reducibility to a scalar problem) here may be omitted, because due to scalarity of ψ it is fulfilled automatically. Note that just the φ-triad with additional condition (19.1) has been considered in this section as a counterexample for the reducibility of a φ, ψ-problem of type III to the one-stage problem. Furthermore, for problems of type I and II, Theorem 2 immediately gives Theorem 1 and the Addendum to it.

Indeed, under scalarity of φ no φ, ψ-inconsistent triads exist, hence reducibility of a problem of type II (in particular, of type I) to a vectorial problem is always guaranteed. Moreover, under scalarity of ψ no ψ, φ-3-triads exist, hence a problem of type I is always reducible to a scalar problem. It results just in Theorem 1. Finally, reducibility of an arbitrary problem of type II to a scalar problem is equivalent to the absence of ψ, φ-3-triads (because any φ, ψ-triads are definitely absent). But relations (14), (15), whose fulfillment is excluded by the Addendum to Theorem 1, just compose the definition of a ψ, φ-3-triad. So the results from Section 3 are essentially included in the generalizing Theorem 2 as particular cases.

5. Proof of the general theorem on the vectorial-vectorial problem

The proof given below is founded upon a number of statements concerning binary relations and kindred notions in the theory of choice and decision making.

A. Representation of binary relations of ordering by numerical functions. Let on a set U a binary relation $\succ$ be given which is asymmetrical, i.e., $u \succ v \Leftrightarrow$ (not $u \prec v$); we shall further call $\succ$ a *superiority relation*. For the given relation $\succ$, we construct the associated *indifference relation* denoted by the symbol $\sim$ and defined by

$$u \sim v \Leftrightarrow (\text{not } u \succ v \quad \text{and not} \quad u \prec v).$$

A relation $\succ$ on U is called a *partial order* if it is transitive, i.e., ($u \succ v$ and $v \succ w) \Rightarrow u \succ w$, and a *weak order* if, moreover, the respective relation $\sim$ is also transitive (here orders are considered in the "strict" version according to the presumed asymmetry of $\succ$).

Definition 4. Let a vectorial (possibly scalar) function f and a relation $\succ$ be given. We say that f is *consistent with* $\succ$ if for every $u, v \in U$:

$$u \succ v \Rightarrow f(u) > f(v), \tag{20}$$

and that f *represents* $\succ$ if, moreover,

$$u \succ v \Leftrightarrow f(u) > f(v), \tag{21}$$

where $>$ is the symbol of vectorial inequality in the Paretian sense (7).

This Definition directly implies

Lemma 2. Every scalar (or vectorial) function f on U represents some relation of weak (resp., partial) order $\succ$ on U; moreover, the relation represented thereby is unique.

The next two lemmata are as a matter of fact the versions of the well-known Szpilrajn theorem and the Dushnik and Miller theorem [134, 199] (concerning imbedding of partial orders into linear ones) which are expressed in terms of representing functions.

Lemma 3. For any partial (also including weak) order $\succ$ on U there exists a scalar function f on U consistent with $\succ$.

Lemma 4. For any weak (or partial) order $\succ$ on U there exists a scalar (resp., vectorial) function f on U which represents $\succ$.

We shall give here independent "constructive" proofs of Lemmata 3 and 4 using a simple iterative procedure in the spirit of R. Bellman's dynamic programming, for building up functions f to be found. Let a superiority relation $\succ$ and the associated indifference relation $\sim$ on U be given. Consider the iterative procedure

$$f^{t+1}(x) = \max\{f^t(x); \max_{s \prec x} (f^t(s) + 1)\} \tag{22}$$

(we mean that here $x \in U, s \in U, t = 0, 1, \ldots$, and that in the case of the absence of $s \in U$ such that $s \prec x$, only the first term remains in the outer braces in (22)).

Take initial values of f:

$$f^0(u) = 0, \quad \text{for all} \quad u \in U. \tag{23}$$

It follows from acyclicity of $\succ$ that in U there exists at least one minimal element, i.e., element u such that for it there are no elements v such that

$u \succ v$. For every minimal element u in U obviously $f^t(u) \equiv 0$, for all $t = 0, 1, \ldots$

Furthermore, the definition of the procedure (22) in virtue of acyclicity and transitivity of $\succ$ implies the next properties:

(a) Values $f^t(x)$ for every fixed x do not decrease with t increasing.

(b) Positiveness of the value $f^t(x) = k$ for some x and t is equivalent to existence of a chain $x \succ p \succ q \succ \ldots \succ u$ in U, where u is a minimal element of U and the length of the chain (the number of elements $x, p, q, \ldots, u$) is equal to k.

(c) It follows from Property (b) that

$$f^t(x) < N \quad \text{for all} \quad t = 0, 1, \ldots \text{ and } \quad x \in U,$$

where $N = |U|$.

(d) It follows from Properties (a) and (b) that after a finite number of steps, T, the procedure (22) stabilizes on some values $f^*(x)$, i.e.,

$$f^{t+1}(x) = f^t(x) = f^*(x), \quad \text{for all} \quad t \geqslant T,\ x \in U. \tag{24}$$

(e) It follows from Properties (b) and (c) that for (24) the following estimates are true: $T < N$, and for all $x \in U$

$$f^*(x) < N. \tag{25}$$

(f) It follows from Property (d) that the function f^* on U is consistent with the relation $\succ$ (it is sufficient to consider (22) with (24)).

Property (f) yields the statement of Lemma 3. For Lemma 4 to be proved for the case when $\succ$ is a weak order, it is sufficient now to verify that in this case the function f^* so constructed is not only consistent with $\succ$ but, moreover, does represent $\succ$. To this end we need to show that if $u \sim v$ then $f^*(u) = f^*(v)$. Let $u \sim v$. Properties of the weak order imply

$$s \prec u \Leftrightarrow s \prec v, \ \ \forall s \in U.$$

Taking into account the form of procedure (22) and initial data (23) the above equivalence implies $f^t(u) \equiv f^t(v)$, for $u \sim v$ with all $t = 0, 1, \ldots$, hence $f^*(u) = f^*(v)$.

Finally we shall prove the Lemma for the case when $\succ$ is a partial order. With that end in view we consider the procedure (22) under special initial conditions different from (23). Let elements of U be numbered: $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Consider N different sets of initial data specifying in the ith set ($i = 1, \ldots, N$)

$$f_i^0(x) = \begin{cases} N, & \text{for } x = u_i, \\ 0, & \text{for } x \neq u_i. \end{cases} \tag{26}$$

Applying now the procedure (22) with each of these N sets of initial data, we shall get N function sequences $\{f_i^t\}_{t=0,1,\dots}$ $(i = 1, \dots, N)$ built by the procedure. Each sequence will possess properties similar to (and partially coincident with) Properties (a)-(f) of the sequence $\{f_i^t\}$ generated by the procedure (22) under zero initial data (23). For convenience of describing properties of the new sequences $\{f_i^t\}$ determined from the ith set of initial data (26), we part the set U into two subsets

$$U_i^+ = \{u \in U |\, u \succ u_i \text{ or } u = u_i\} \quad \text{and} \quad U_i^- = U \backslash U_i^+.$$

Consider the behavior of value sequences $\{f_i^t(u)\}_{t=0,1,\dots}$ for $u \in U_i^-$ and for $u \in U_i^+$ separately. It is not difficult to see that two respective subsets $\{f_i^t(v)\}, v \in U_i^-$, and $\{f_i^t(w)\}, w \in U_i^+$, can be constructed by independent application of procedure (22) to subsets U_i^- and U_i^+ separately taken in the role of U in (22) under initial data (23) or (26), respectively. Really, let us consider the cases of U_i^- and U_i^+ taken separately.

(1) *Case of* U_i^-. To begin with we note that by the construction of sets U_i^+ and U_i^-, due to the transitivity of $\succ$, the following holds:

$$\text{If } v \in U_i^-, \text{ and } w \in U_i^+, \text{ then it is impossible that } v \succ w. \tag{27}$$

Hence the procedure (22) being applied to the total set U under initial data (26) works on the subset U_i^- independently of U_i^+, i.e., generates the same sequences $\{f_i^t(v)\}_{t=0,1,\dots}, v \in U_i^-$, as when applied only to U_i^- under zero initial data $f_i^0(v), v \in U_i^-$. Therefore the subset $\{f_i^t(v)\}_{t=0,1,\dots}, v \in U_i^-$ possesses all of the above-stated properties (a)-(f), including finite con vergence to a subset of values $f_i^*(v), v \in U_i^-$, which is consistent with $\succ$ on U_i^- and is such that

$$f_i^*(v) < N, \quad v \in U_i^-. \tag{28}$$

(Here the estimate N can actually be made more precise, up to $N_i^- = |U_i^-| < N = |U|$.)

(2) *Case of* U_i^+. Note that the procedure (22) under initial data (26) for $t = 1$ yields

$$f_i^1(u_i) = N;\ f_i^1(u) = N + 1, \text{ for } u \in U_i^+,\ u \neq u_i. \tag{29}$$

Hence due to monotonic nondecreasing of $f_i^t(u)$ in t, we receive for all $t \geqslant 1$:

$$f_i^t(u_i) \equiv N;\ f_i^t(u) \geqslant N + 1, \quad \text{for } u \in U_i^+,\ u \neq u_i. \tag{30}$$

Comparing (30) with (28), we conclude that the procedure (22) works over subset U_i^+ independently of U_i^-, i.e., generates the same sequences

$\{f_i^t(w)\}_{t=0,1,\ldots}, w \in U_i^+$, as when applied only to U_i^+ under a subset of initial data (26) for $x \in U_i^+$. On the other hand, let us apply the procedure (22) to U_i^+ under zero initial data: $f_i^0(w) = 0, w \in U_i^+$. Then because u_i obviously is the unique minimal element in U_i^+, we shall get for $t = 1$:

$$f_i^1(u_i) = 0;\ f_i^1(u) = 1,\ \text{for}\ u \in U_i^+,\ u \neq u_i. \tag{31}$$

Comparing (31) with (29), we conclude that the procedure (22) on U_i^+ under initial data set (26) generates values $f_i^t(w), t = 1, 2, \ldots$, which exceed exactly by N the corresponding values given under zero initial data. Latter values as it has been pointed out earlier must possess all Properties (a)-(f). Hence the procedure (22) ensures finite convergence of the sequence subset $\{f_i^t(w)\}_{t=0,1,\ldots}, w \in U_i^+$, to the value subset $f_i^*(w), w \in U_i^+$, consistent with $\succ$ on U_i^+ and such that

$$N \leqslant f_i^*(w) < 2N, \quad \text{for all} \quad w \in U_i^+. \tag{32}$$

Finally, it is easy to see that united set of values $f-i^*(u), u \in U = U_i^- \cup U_i^+$, yields the function f_i^* on U consistent with $\succ$ on the overall set U (due to (27), (28), and (32)).

Let us now construct a vectorial function f^* not only consistent with but representing the relation $\succ$ on U. Note that the above-constructed scalar function f_i^* possesses the following property:

$$\text{If}\ u \neq u_i, \quad \text{and} \quad u \not\succ u_i, \quad \text{then} \quad f_i^*(u) < f_i^*(u_i) \tag{33}$$

(it follows from estimates (28) and (32)). Letting $f^* = (f_1^*, \ldots, f_N^*)$, we get f^* consistent with $\succ$ on U such that (due to (33)), for every $u, v \in U$, we have the following additional property:

$$\text{If}\ u \not\succ v, \quad \text{then} \quad f^*(u) \not> f^*(v). \tag{34}$$

Condition (34) together with consistency of f^* with $\succ$ implies that f^* does represent $\succ$ on U. This ends the proof of Lemma 4 for the general vectorial case.

Remark. This constructive proof of the existence of a vectorial function f^* representing $\succ$ on U simultaneously gives an upper bound for its dimensionality: it is sufficient to take f^* with no more than $N = |U|$ scalar components.

B. Problems of extremization under binary relations. Let $\succ$ be a superiority relation on U (i.e., an asymmetrical binary relation). We call a *problem of extremization under relation* $\succ$ (in short, a $\succ$-problem) the following problem of selection of the subset Y from a set X defined as

$$Y = \{y \in X |\ \text{there is no}\ x \in X\ \text{such that}\ x \succ y\}. \tag{35}$$

Every $\succ$-problem being considered as a mass problem (over all $X \in \mathcal{X}$) represents a special type of choice problem $X \to Y, X \in \mathcal{X}$. The main question interesting us herein concerns the reducibility of a choice problem to the problem of extremization of a function (f-problem). It is convenient to reduce the solution of this question to the two steps: (1) applying a criterion of reducibility of a choice problem to a $\succ$-problem, and (2) applying a criterion of reducibility of a $\succ$-problem to an f-problem. Let us begin with the 1st step.

Definition 5. For an arbitrary choice problem $X \to Y$ on $\mathcal{X} = 2^U \backslash \{\varnothing\}$, we shall call the *relation of pairwise-revealed superiority* the binary relation $\breve{P}$ on U defined as

$$u\breve{P}v \Leftrightarrow [u \text{ but not } v \text{ is chosen from the pair } \{u, v\}] . \tag{36}$$

for every $u, v \in U$.

Remark. Relation $\breve{P}$ in virtue of Definition 5 surely is asymmetrical, i.e., it is really a superiority relation.

Lemma 5. It a choice problem $X \to Y$ on $\mathcal{X} = 2^U \backslash \{\varnothing\}$ is reducible to a problem of extremization under some superiority relation $\succ$, then $\succ$ coincides with the pairwise-revealed superiority relation $\breve{P}$ for this problem.

Proof of the lemma is reduced to comparing the above definition (36) with the definition of choice (35) for the case $X = \{u, v\}$.

Lemma 5 implies directly the following criterion of reducibility of a choice problem to a $\succ$-problem.

Lemma 6. For a choice problem $X \to Y$ on $\mathcal{X} = 2^U \backslash \{\varnothing\}$ to be reducible to a $\succ$-problem, it is necessary and sufficient that for every $X \in \mathcal{X}$ the following is true:

$$Y = \{y \in X | \text{ there is no } x \in X \text{ such that } x\breve{P}y\}. \tag{37}$$

Equation (37) will be called the *Condorcet Principle*. The essence of the Condorcet Principle is the requirement that a given choice problem $X \to Y$ be reducible to the problem of extremization under its relation of pairwise-revealed superiority, i.e., to the $\succ$-problem with $\succ = \breve{P}$. Lemma 6 says that this requirement is not only sufficient (which is trivial) but also necessary (which is declared by Lemma 5) for reducibility to a $\succ$-problem.

Let us go to the 2nd step, to the statements concerning mutual reducibility of $\succ$-problems to f-problems.

Lemma 7. If a superiority relation $\succ$ on U is represented by a function f, then the problem of extremization under the relation $\succ$ and the problem of extremization of the function f on $\mathcal{X} = 2^U \backslash \{\varnothing\}$ are mutually reducible, one to another.

Proof of the Lemma is given by direct replacement of the relation $x \succ y$ by $f(x) > f(y)$ in the formulation of the $\succ$-problem.

Remark. Lemma 7 admits a converse: if an f-problem and a $\succ$-problem on $\mathcal{X} = 2^U \backslash \{\varnothing\}$ are mutually reducible, then f represents $\succ$. It follows directly from Lemma 5 applied to the f-problem because for this problem

$$x\breve{P}y \Leftrightarrow [f(x) > f(y)]\,.$$

Lemma 7 opens the path of construction of direct counterparts of Lemmata 2 and 4 in terms of extremization problems:

Lemma 8. Each problem of extremization of a scalar (or vectorial) function f on U is reducible to the problem of extremization under a superiority relation $\succ$ which is a weak (resp., partial) order on U.

Lemma 9. Each problem of extremization under a superiority relation $\succ$ which is a weak (or partial) order on U is reducible to a problem of extremization of a scalar (resp., vectorial) function f on U.

Now we can synthesize the two steps of the reasoning and formulate the next lemma.

Lemma 10. For a choice problem $X \to Y$ on $\mathcal{X} = 2^U \backslash \{\varnothing\}$ to be reducible to the problem of extremization of a scalar (or vectorial) function f, it is necessary and sufficient that the following two conditions be fulfilled:

(1) the given problem satisfies the Condorcet Principle;

(2) the pairwise-revealed superiority relation $\breve{P}$ is a weak (resp., partial) order.

Proof. (a) Necessity: Let the given choice problem be reducible to the f-problem with a scalar (or vectorial) function f. Then in virtue of Lemma 8, it is reducible also to the $\succ$-problem with a relation $\succ$ being a weak (resp., partial) order. The latter in virtue of Lemma 6 implies satisfying the Condorcet Principle for the initial problem (condition(1)). Moreover, in virtue of Lemma 5, its relation $\breve{P}$ must coincide with the relation $\succ$, and hence $\breve{P}$ must be a weak (resp., partial) order (condition (2)).

(b) Sufficiency: Let the given choice problem satisfy conditions (1) and (2) of the lemma. Then due to condition (1), in virtue of Lemma 6 the given problem is reducible to the problem of extremization under the relation $\succ = \breve{P}$, which is by condition (2) a weak (or partial) order. But then in virtue of Lemma 9 the initial problem is reducible also to the problem of extremization of a scalar (resp., vectorial) function f.

Remark. Now a proof of Lemma 1 can be obtained as a simple corollary from Lemma 10. Really, in virtue of Lemma 10 for reducibility of a vectorial φ-problem to a scalar problem, it is necessary and sufficient that the superiority relation $\breve{P}$ having form $x\breve{P}y \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(y)$ is a weak order. It is equivalent to transitivity of the respective indifference relation $\breve{I}$ of the form $x\breve{I}y \Leftrightarrow \varphi(x) \asymp \varphi(y)$ which is just equivalent to the absence of φ-triads in U.

C. Proof of Theorem 2. Apply the routine of two-step analysis given in the form of the two conditions in Lemma 10 to the analysis of reducibility of a vectorial-vectorial ψ, φ-problem to some one-stage vectorial or scalar problem.

(1) *Conditions of satisfying the Condorcet Principle for the φ, ψ-problem.* To begin with let us write the pairwise-revealed superiority relation $\breve{P}$ for the φ, ψ-problem (3):

$$u\breve{P}v \Leftrightarrow [\varphi(u) > \varphi(v) \text{ or } (\varphi(u) \asymp \varphi(v) \text{ and } \ \psi(u) > \psi(v))]\,. \tag{38}$$

The testing of the Condorcet Principle (37) is reduced to the testing of the two statements which together form the Principle. These two statements (for any $X \in \mathcal{X}$ and for the choice Y from X), are, respectively:

$$\text{If } y \in X \text{ and if there is no } x \in X \text{ such that } x\breve{P}y, \text{ then } y \in Y \tag{39}$$

(Direct Condorcet Condition), and:

$$\text{If } y \in Y, \text{ then there is no } x \in X \text{ such that } x\breve{P}y \tag{40}$$

(Converse Condorcet Condition).

Let us first examine the Direct Condorcet Condition (39). Assume that in a φ, ψ-problem $y \notin Y$ holds for some $X \in \mathcal{X}$ and for some $y \in X$. The form of two-stage problem (3)–(4) shows that it is possible in one of two cases: (a) there exists $z \in X$ such that $\varphi(z) > \varphi(y)$, and then $y \notin V$; or (b) $y \in V$, but there exists $z' \in X$ such that $z' \in V$ and $\psi(z') > \psi(y)$. In the case (b) there necessarily holds $\varphi(z') \asymp \varphi(y)$. It is easy to see that in the case (a), we have $z\breve{P}y$ and in the case (b), we have $z'\breve{P}y$. Therefore, if for y and X with $y \in X$, $x\breve{P}y$ holds for no $x \in X$, then necessarily $y \in Y$. Hence any φ, ψ-problem does satisfy the Direct Condorcet Condition (39).

Consider now the Converse Condorcet Condition (40). Assume that the given φ, ψ-problem violates this condition, viz, there exist $X \in \mathcal{X}$ and $x, y \in X$ such that $y \in Y$ but $x\breve{P}y$. From $y \in Y$ and $x \in X$ follows

$$\varphi(x) \not> \varphi(y). \tag{41}$$

In virtue of $x\breve{P}y$ then by (41)

$$\varphi(x) \asymp \varphi(y) \quad \text{and} \quad \psi(x) > \psi(y). \tag{42}$$

Assumption $y \in Y$ implies $x \notin V$ by (42). Therefore there exists a third element $z \in X$ such that

$$\varphi(z) > \varphi(x). \tag{43}$$

On the other hand, in virtue of $y \in Y$, $z \in X$, we have

$$\varphi(z) \not> \varphi(y). \tag{44}$$

Furthermore, the relation $\varphi(y) > \varphi(z)$ is also impossible because in this case in virtue of (25) and transitivity of $>$, we would obtain $\varphi(y) > \varphi(x)$, contrary to (42). Hence $\varphi(y) \not> \varphi(z)$, which being combined with (44) yields

$$\varphi(y) >\!< \varphi(z). \tag{45}$$

Now if for the given z there exists one more element $z' \in X$ such that $\varphi(z') > \varphi(z)$, then it together with (43) yields $\varphi(z') > \varphi(x)$. If, furthermore, there exists $z'' \in X$ such that $\varphi(z'') > \varphi(z')$, then in a similar way $\varphi(z'') > \varphi(x)$, etc. Due to the finiteness of X and the acyclicity of $>$, there always exists an element in X, we preserve the notation z for it, such that (43) holds and there is no $s \in X$ such that $\varphi(s) > \varphi(z)$, and hence $z \in V$. But then for $y \in Y \subseteq V$, we obtain

$$\psi(z) \not> \psi(y). \tag{46}$$

Relations (42), (43), (44), and (46) together imply that the triple x, y, z is a φ, ψ-1-triad (letting $u = x, v = z, w = y$ in the definition (8), (18.1)). Conversely, if there exists a φ, ψ-1-triad u, v, w in U, then letting $X = \{u, v, w\}$, we obtain $w \in Y, v \in X$, but $v\breve{P}w$, contrary to the Converse Condorcet Condition. Therefore the Converse Condorcet Condition is not fulfilled if and only if there exists a φ, ψ-1-triad in U.

So we have proved the following Lemma.

Lemma 11. For a vectorial-vectorial φ, ψ-problem to satisfy the Condorcet Principle, it is necessary and sufficient that φ, ψ-1-triads were absent in U.

(2) *Conditions of order for relation $\breve{P}$ in the φ, ψ-problem.* Now we shall find conditions for transitivity of a superiority relation $\succ = \breve{P}$ and also of a corresponding indifference relation $\sim$ which will be denoted here by $\breve{I}$.

Lemma 12. Let a vectorial-vectorial φ, ψ-problem satisfy the Condorcet Principle, and let $\breve{P}$ be the pairwise-revealed superiority relation for this problem and $\breve{I}$ the corresponding indifference relation. Then:

(a) for transitivity of $\breve{P}$, it is necessary and sufficient that φ, ψ-2-triads were absent in U;

(b) for transitivity of $\breve{I}$, it is necessary and sufficient that φ, ψ-3- and ψ, φ-3-triads were absent in U.

Proof of lemma. (a) Nontransitivity of $\breve{P}$ would imply that there is a triple x, y, z of elements in U, such that

$$x\breve{P}y, \quad y\breve{P}z, \quad \text{but not} \quad x\breve{P}z. \tag{47}$$

There are three possible systems of relations between values φ and ψ on the triple x, y, z which according to (38) give (47):

$$\begin{cases} \varphi(x) > \varphi(y), & \varphi(y) \asymp \varphi(z),\ \varphi(x) \asymp \varphi(z), \\ & \psi(y) > \psi(z),\ \psi(x) \not> \psi(z), \end{cases} \tag{48}$$

and

$$\begin{cases} \varphi(x) \asymp \varphi(y),\ \varphi(y) > \varphi(z), & \varphi(x) \asymp \varphi(z), \\ \psi(x) > \psi(y), & \psi(x) \not> \psi(z), \end{cases} \tag{49}$$

and also

$$\begin{cases} \varphi(x) \asymp \varphi(y), & \varphi(y) \asymp \varphi(z),\ \varphi(x) < \varphi(z), \\ \psi(x) > \psi(y), & \psi(y) > \psi(z). \end{cases} \tag{50}$$

(No other admissible system of relations, with transitivity of $>$ in mind, can give (47).) In the case (48) the triple x, y, z forms a φ, ψ-1-triad (with $u = y, v = x, w = z$). In the case (49), it forms a φ, ψ-1-triad or φ, ψ-2-triad (with $u = z, v = y, w = x$) depending on whether $\psi(x) < \psi(z)$ or $\psi(x) \asymp \psi(z)$. Finally, in the case (50) it forms again a φ-1-triad (with $u = x, v = z, w = y$). The considered φ, ψ-problem was assumed to satisfy the Condorcet Principle, hence in virtue of Lemma 11 any φ, ψ-1-triads are absent in U. Therefore, nontransitivity of $\breve{P}$ is possible only under existence of some φ, ψ-2-triad in U.

Conversely, every φ, ψ-2-triad u, v, w (8), (18.2) yields

$$v\breve{P}u, \quad u\breve{P}w, \quad \text{but not} \quad v\breve{P}w,$$

i.e., a violation of the transitivity of $\breve{P}$. Part (a) of Lemma 12 is proved.

(b) Nontransitivity of $\breve{I}$ implies that in U there is a situation of the form

$$x\breve{I}y, \quad y\breve{I}z, \quad \text{but} \quad x\breve{P}z. \tag{51}$$

Two systems of relations implementing the situation (15) are possible:

$$\begin{cases} \varphi(x) \asymp \varphi(y), & \varphi(y) \asymp \varphi(z),\ \varphi(x) > \varphi(z), \\ \psi(x) \asymp \psi(y), & \psi(y) \asymp \psi(z), \end{cases} \tag{52}$$

and

$$\begin{cases} \varphi(x) \asymp \varphi(y), & \varphi(y) \asymp \varphi(z),\ \varphi(x) \asymp \varphi(z), \\ \psi(x) \asymp \psi(y), & \psi(y) \asymp \psi(z),\ \psi(x) > \psi(z). \end{cases} \tag{53}$$

In the case (52) the triple x, y, z forms a φ, ψ-3-triad (with $u = z, v = x, w = y$), and in the case (53) it forms a ψ, φ-3-triad (with the same u, v, w).

Conversely, every φ, ψ-3-triad u, v, w (8), (18.3) yields $v\breve{I}w$, $w\breve{I}u$, but $v\breve{P}u$, which is a violation of the transitivity of $\breve{I}$. Furthermore, every ψ, φ-3-triad, i.e., a triple $u, v, w \in U$ such that

$$\begin{cases} \psi(u) < \psi(v), & \psi(u) \asymp \psi(w),\ \psi(v) \asymp \psi(w), \\ & \varphi(u) \asymp \varphi(w),\ \varphi(v) \asymp \varphi(w), \end{cases}$$

yields $u\breve{I}w$, $v\breve{I}w$, and either $u\breve{P}v$ (if $\varphi(u) > \varphi(v)$) or $v\breve{P}u$ (if $\varphi(u) \not> \varphi(v)$), which is a violation of the transitivity of $\breve{I}$ again. This completes the proof of Lemma 12.

Combining Lemmata 11, 12 with 10, we obtain the proof of Theorem 2.

6. Conditions for the elimination of one stage in the two-stage problem

Pose the question of the reducibility of a two-stage, generally vectorial-vectorial, φ, ψ-problem not only to some one-stage problem of extremization of some function f, but more definitely, to the problem of extremization of just the same function $f = \varphi$ or $f = \psi$ which is present in one of two stages of the initial problem. Speaking in a different way, the question is: under what conditions is it possible to discard, i.e., simply to "throw out," one of the stages in the two-stage problem without changing its solution set?

It is clear that these conditions must be surely more strict than the general condition of the reducibility of a two-stage φ, ψ-problem to a one-stage problem of extremization of some arbitrary function f. This latter condition has been obtained in Theorem 2 for the general case of the vectorial-vectorial φ, ψ-problem in the form of prohibition of special three-element structural formations in U, viz, φ, ψ-1- and φ, ψ-2-inconsistent triads. It turns out that the sought-after more strict conditions of reducibility can be formulated in the form of stronger prohibitions. Namely, we must prohibit certain two-element structural formations, "dyads", implicitly contained in the above-mentioned triads.

Definition 6. A pair of elements $x, y \in U$ will be called a *φ, ψ-inconsistent dyad* if

$$\varphi(x) < \varphi(y), \quad \psi(x) \not< \psi(y), \tag{54}$$

and a *φ, ψ-noncoherent dyad* if

$$\varphi(x) < \varphi(y), \quad \text{but} \quad \psi(x) \asymp \psi(y). \tag{55}$$

Note that any φ, ψ-noncoherent dyad is a particular case of a φ, ψ-inconsistent dyad.

Definitions 6 and 3 immediately imply:

Lemma 13. Every φ,ψ-1- and every φ,ψ-2-inconsistent triad contains a φ,ψ-inconsistent dyad and a ψ,φ-noncoherent dyad.

Observe that in this Lemma and in the sequel we consider φ,ψ-inconsistent but ψ,φ-noncoherent (with reverse order of φ and ψ!) dyads.

Theorem 3. For a two-stage vectorial-vectorial φ,ψ-problem to be reducible to its first (or second) stage, i.e., to the problem of extremization of the vectorial function φ (respectively, ψ), it is necessary and sufficient that in U any ψ,φ-noncoherent dyads (respectively, φ,ψ-inconsistent dyads) be absent.

Before proving the Theorem, we note that the condition of absence of φ,ψ-inconsistent dyads in U can be obviously presented in the following equivalent form:

$$\varphi(x) < \varphi(y) \Rightarrow \psi(x) < \psi(y), \quad \text{for all} \quad x, y \in U \tag{56}$$

(a condition of φ,ψ-*consistency*). Similarly, let us consider the condition of absence of ψ,φ-noncoherent dyads, i.e., of pairs $u, v \in U$ such that $\psi(u) < \psi(v)$ but $\varphi(u) \asymp \varphi(v)$. It is easy to see that this condition can be presented in the following equivalent form: $\varphi(u) \asymp \varphi(v) \Rightarrow \psi(u) \not< \psi(v)$, for all $u, v \in U$, which is also equivalent to

$$\varphi(x) \asymp \varphi(y) \Rightarrow \psi(x) \asymp \psi(y), \quad \text{for all} \quad x, y \in U \tag{57}$$

(condition of ψ,φ-*coherence*). Hence for proving Theorem 3, it is sufficient to prove the following equivalent statement:

For the reducibility of a given φ,ψ-problem to the φ-problem or to the ψ-problem, it is necessary and sufficient to meet the ψ,φ-coherence condition (57) or, respectively, the φ,ψ-consistency condition (56).

Remark. Note that the φ,ψ-consistency condition (56) coincides with the requirement of consistency (in the sense of Def. 4) of the function ψ with the relation $\succ$ represented by the function φ.

Now consider two versions of superiority relations $\succ$ represented by functions φ and ψ:

$$u \succ v \Leftrightarrow \varphi(u) > \varphi(v) \tag{58}$$

and

$$u \succ v \Leftrightarrow \psi(u) > \psi(v), \tag{59}$$

respectively. The consideration of the expressions (58) and (59) together with the expression (38) defining the pairwise-revealed superiority relation $\breve{P}$ in the φ,ψ-problem yields directly the following lemma.

Lemma 14. For the relation $\check{P}$ from (38) to coincide on U with the relation $\succ$ from (58) or from (59), it is necessary and sufficient to meet the ψ, φ-coherence condition (57) or, respectively, the φ, ψ-consistency condition (56).

Proof of Theorem 3. Assume that a given φ, ψ problem is reduced to the φ-problem (or to the ψ-problem) with the function φ (or ψ) just the same as is present in the initial φ, ψ-problem. But each φ-problem (resp., ψ-problem) in its own turn is reducible (due to Lemma 7) to the problem of extremization under the relation $\succ$, represented by the function φ (resp., ψ), i.e., defined from (58) (resp., (59)). Therefore, the initial φ, ψ-problem must be reducible to the problem of extremization under the relation $\succ$ from (58) (resp., (59)). But then due to Lemma 5 the relation $\succ$ must coincide with the relation $\check{P}$ for the initial φ, ψ-problem. Hence due to Lemma 14 the condition (57) (resp., (56)) necessarily is satisfied.

Conversely, let the condition (57) or (56) be satisfied, i.e., equivalently, the condition of absence of ψ, φ-noncoherent or φ, ψ-inconsistent dyads in U be fulfilled. Then due to Lemma 13 in every case φ, ψ-1- and φ, ψ-2-inconsistent triads must be absent in U. Hence by Theorem 2 the initial φ, ψ-problem must be reducible to a problem of extremization of some (generally vectorial) function f. Therefore, according to Lemma 10, the φ, ψ-problem must satisfy the Condorcet Principle, i.e., it must be reducible to the problem of extremization under the relation $\check{P}$ of the form (38). But in virtue of condition (57) (or, respectively, (56)) by Lemma 14 the relation $\check{P}$ coincides with the relation $\succ$ from (58) (resp., from (59)), i.e., with the relation represented by the function φ (resp., by ψ). Hence in virtue of Lemma 7 the given φ, ψ-problem will be reducible to the φ-problem or to the ψ-problem, respectively.

The Theorem is proved.

7. An illustrative example

Consider a simple mechanism for generating a two-stage vectorial-scalar extremization. Let an n-dimensional criterial function $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ on a set U be given, and let a fixed "ideal point" ω in the n-dimensional space of vectors of criterial values φ also be given. Suppose that a choice of elements from an admissible set $X \in \mathcal{X}$ is implemented in two stages. At the first stage the set V of Pareto-optimal elements of X by φ is selected. The set V corresponds to the Pareto subset $\varphi(V)$ of the admissible set $\varphi(X)$ in φ-space. At the second stage those elements y are selected from V which are represented in the φ-space by the points $\varphi(y)$ nearest to the ideal point ω. Hence the whole problem consists of two stages:

(1) extremization (viz, maximization) of φ over X, i.e., selection of the set $V = \text{Arg max}_{x\in X}\,\varphi(x)$, and

(2) extremization (viz, minimization) of the distance d from the points of the set $\varphi(V)$ to ω, i.e., maximization over V of the function $\psi(v) = -d(\varphi(v),\omega)$, or speaking differently, selection of the set $Y = \text{Arg min}_{v\in V}\, d(\varphi(v),\omega) = \text{Arg max}_{v\in V}\,\psi(v)$.

Consider the two cases.

Case (a) The ideal point ω is *not exceeded on the set* U:

$$\forall i : \omega_i \geqslant \varphi_i^*,$$

where

$$\varphi_i^* = \max_{x\in U} \varphi_i(x).$$

It is easy to see in this case that condition (56) of φ,ψ-consistency (absence of φ,ψ-inconsistent dyads) is satisfied. Hence due to Theorem 3 the given two-stage problem is reducible to its second stage, i.e., to finding elements x in X minimizing the distance $d(\varphi(x),\omega)$ from the point $\varphi(x)$ to the ideal point ω. Preliminary selection of the Pareto set by the vectorial criterion φ in this case is redundant from the theoretical point of view.

Case (b). The ideal point ω is *exceeded* on U at least in one coordinate i:

$$\exists i : \ \omega_i < \varphi_i^*.$$

In this case some φ,ψ-inconsistent dyad, or moreover, φ,ψ-1-inconsistent triad can be formed in U. An example of such a situation is presented in Fig. 1. In this particular example the function $\varphi(x)$ is two-dimensional, the scalar function $\psi(x)$ is defined as the Euclidean distance, with the opposite sign, on the plane between points $\varphi(x)$ and ω. For the configuration of points in the φ-space in Fig. 1, we have

$$d(\varphi(x),\omega) < d(\varphi(y),\omega) < d(\varphi(z),\omega),$$

and hence

$$\psi(x) > \psi(y) > \psi(z),$$

which together with vectorial relations

$$\varphi(x) >\!\!< \varphi(y),\ \varphi(y) >\!\!< \varphi(z),\ \varphi(x) < \varphi(z)$$

makes the triple x, y, z a φ,ψ-1-triad (with $u = x, v = z, w = y$ in definitions (8), (18.1)). Therefore, in virtue of Theorem 2 such a two-stage φ,ψ-problem not only is irreducible to its second stage, but moreover, it is not reducible to any one-stage extremization problem at all.

We can demonstrate this directly. It is evident that Pareto-optimal elements in the set $X = \{x, y, z\}$ are y and z but not x. In the pair y and z

in φ-space, the nearest to the ideal w turns out to be the element y which will be the only eventually chosen element from X. At the same time in a narrower set $X' = \{x, y\} \subset X$ both elements x, y will be Pareto-optimal, and the nearest to ω of these two will be not y but x which will be chosen finally in spite of the presence of y in X'.

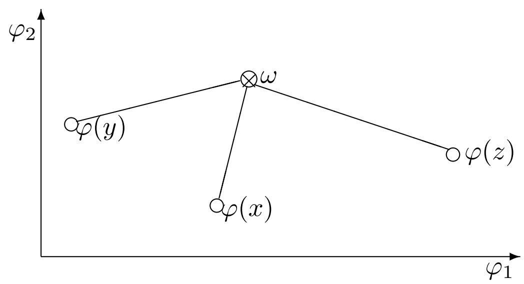


Fig. 1

If the given two-stage problem were reducible universally to some one-stage problem of extremization of some, even vectorial, function f, then the above solutions of the initial problem would have yielded the following. Due to the choice of y from $X = \{x, y, z\}$, we would have $f(y) > f(x)$, but due to the choice of x from $X' = \{x, y\}$, $f(x) > f(y)$. This is impossible if f does not depend on X.

So the consideration of both cases, (a) and (b), shows us that a two-stage problem of the "selection of the nearest to the ideal" points in the Pareto set can demonstrate different properties. Depending on mutual disposition of the initial set and the ideal point, the problem can reveal both universal reducibility, and irreducibility to one-stage extremization.

Remark. In the considered example of a two-stage problem the ideal point ω is assumed to be fixed, independent of X. Sometimes one considers a little different statement of such a problem when ω is a function of X which may be implicit. So, e.g., if we let $\forall i:\ \omega_i = \max_{x\in X} \varphi_i(x)$, then $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ obviously depends on $X : \omega = \omega(X)$. In this case the initial two-stage problem is not a φ, ψ-problem of the form (3). Indeed, its second stage, maximization of the function $\psi = -d(\varphi(x), \omega(X))$, is not an extremization problem of the form (1), because here the criterial function ψ does depend on X as on a parameter: $\psi = \psi_X(x)$. Hence a problem with a unfixed ideal point does not fall under the above scheme of analysis at all.

This remark once again reminds us that the abstract form of the extremization problem (1) adopted here, though very general, nevertheless imposes an essential requirement. This requirement lies in the criterial function independence of set X being variated in the "mass" statement of the problem. This requirement, pointed out in the Introduction (see Remark in Sect. 1), is just one in which underlies the exact statement of the question concerning the universal reducibility of a problem to one-stage extremization and makes the question nontrivially solvable in principle.

Характеризация иерархии уровней рациональности в терминах функций выбора [1]

Рассматриваются функции выбора $C(X)$, заданные на семействе $2^A \backslash \{\varnothing\}$ всех непустых подмножеств произвольного множества объектов A. Рассмотрим фундаментальные свойства функций выбора [7]:

а) наследование Н:

$$S \subseteq X \Rightarrow C(S) \supseteq C(X) \cap S;$$

б) согласие С:

$$\bigcup_{\nu} X_\nu = X \Rightarrow \bigcap_{\nu} C(X_\nu) \subseteq C(X);$$

в) отбрасывание О:

$$C(X) \subseteq S \subseteq X \Rightarrow C(S) = C(X);$$

г) константность К:

$$S \subseteq X, S \bowtie C(X) \Rightarrow C(S) = C(X) \cap S$$

(где $Y \bowtie Z$ означает $Y \cap Z \neq \varnothing$ или $Y = \varnothing$ или $Z = \varnothing$), а также

д) абсолютность А:

$$S \subseteq X \Rightarrow C(S) = C(X) \cap S.$$

Говорим, что функция $C(X)$ находится на уровне рациональности 1, 2, 3 или 4, если, соответственно, она удовлетворяет (в порядке усиления) условию $\mathrm{H} \cap \mathrm{C}$, $\mathrm{H} \cap \mathrm{C} \cap \mathrm{O}$, К или А (термин «рациональность» оправдан представимостью такой функции тем или иным механизмом парно-доминантного либо шкально-экстремизационного механизма выбора [7]). Для классической рациональности в самом слабом

[1] III Всесоюзная школа-семинар “Комбинаторно-статистические методы анализа и обработки информации, экспертное оценивание”. Тезисы докладов. Одесса, 1990.—С. 93.

смысле — на уровне 1 — известны следующие два характеристических свойства:

I. Свойство Герцбергера-Сена. Для любых $\{X_\nu\},\ X = \bigcup_\nu X_\nu$

$$\bigcap_\nu C(X_\nu) \subseteq C(X) \subseteq \bigcup_\nu C(X_\nu).$$

II. Свойство Шварца. Для любых $\{X_\nu\}, X = \bigcup_\nu X_\nu$

$$\bigcap_\nu C(X_\nu) = C(X) \cap \bigcap_\nu X_\nu.$$

Теорема. Для того чтобы функция выбора $C(X)$ на $2^A \setminus \{\varnothing\}$ обладала уровнем рациональности 1, 2, 3 или 4, необходимо и достаточно выполнение обобщенного свойства Герцбергера–Сена

$$\bigcap_\nu C(S_\nu) \subseteq C(X) \cap S \subseteq \bigcap_\nu C(S_\nu)$$

либо обобщенного свойства Шварца

$$\bigcap_\nu C(S_\nu) = C(X) \cap T,$$

где $S = \bigcup_\nu S_\nu,\ T = \bigcap_\nu S_\nu$, при выполнении, соответственно, условия:
1) $S = X$; 2) $C(X) \subseteq S \subseteq X$; 3) $S \subseteq X, S \bowtie C(X)$; 4) $S \subseteq X$.

Функция выбора [1]

Функция выбора — одно из наиболее абстрактных понятий теории принятия решений. Функция выбора ставит в соответствие каждому рассматриваемому множеству объектов (альтернатив, вариантов) некоторое его подмножество, которое трактуется как множество выбираемых объектов. Формально, пусть A — множество всех потенциальных объектов выбора, а $\mathcal{A} \subseteq 2^A \setminus \{\varnothing\}$ — некоторое семейство его непустых подмножеств. Тогда функцией выбора на $\mathcal{A}$ называется отображение

$$C:\ \mathcal{A} \to 2^A \quad \text{такое, что} \quad C(X) \subseteq X \quad \text{при всех} \quad X \in \mathcal{A}.$$

Нередко на функцию выбора налагают дополнительные требования — в частности, непустота выбора: $C(X) \neq \varnothing$ при всех $X \in \mathcal{A}$, или, более

[1] Статья для «Экономического энциклопедического словаря». Публикуется впервые.

того, одиночность выбора: $C(X) = \{x\}$ (одноэлементное множество). Иногда функциями выбора называют функции несколько более общего вида, допускающие зависимость от параметров. В частности, функция выбора может рассматриваться как параметрически зависящая от той структуры данных S, на основе которой совершается выбор: $C(X, S)$.

Например, в роли S может выступать структура (отношение) предпочтения лица, принимающего решение, или набор (профиль) таких предпочтений членов коллектива. Еще одна возможность параметризации функции выбора — зависимость X от параметра: $X = X(r)$, в результате чего функция выбора преобразуется в функцию $\Phi(r) = C(X(r))$. Пример последнего встречается в теории потребительского спроса (см. ниже).

Первоначальная интерпретация множеств X и $C(X)$ подразумевала, что всякое $X \in \mathcal{A}$ — это совокупность альтернативных (взаимоисключающих) объектов выбора, так что в реальном акте выбора реализуется какая-либо одна альтернатива $x \in C(X)$. Множество $C(X)$ трактовалось как совокупность всех тех и только тех альтернатив x из X, каждая из которых является лучшей (предпочтительной) в том или ином смысле. В последующем развитии теории выбора интерпретации X и $C(X)$ стали более широкими. Так, если в роли X выступает множество всех потенциально мыслимых состояний системы, то в качестве $C(X)$ можно принять множество реализуемых состояний в силу устройства системы.

Например, $C(X)$ может быть множеством состояний равновесия — экономической системы, абстрактной игры и т.д. В общем случае $C(X)$ — это множество чем-либо примечательных, выделенных объектов из X, не обязательно «лучших» в обычном понимании. Наконец, само множество X не обязано состоять из взаимоисключающих объектов, и все элементы множества $C(X)$ могут сосуществовать в виде выбранного набора («комплекта») объектов.

Понятие функции выбора возникало независимо в различных областях, связанных с принятием решений (сам термин «функция выбора» еще ранее использовался в общей теории множеств по другому поводу). Историческим прототипом абстрактной функции выбора послужила, по-видимому, функция потребительского выбора (спроса), которая в простейшей форме определяется следующим образом.

Пусть потребитель может приобретать любые из n продуктов в любых количествах по ценам $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и пусть он покупает набор продуктов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, исходя из оптимизации своей функции полезности $V(x)$ при ограниченном бюджете I. Тогда допустимым множеством его выбора является $X(p, I) = \{x \in R^n_+ \,|\, px \leqslant I\}$, а выбором

— множество $\Phi(p, I) = \operatorname{Arg}\max_{x \in X(p,I)} V(x)$ (точнее, любой элемент этого множества $\varphi \in \Phi$). Для неявной (параметрической) функции однозначного потребительского спроса $\varphi(p, I)$ П.Самуэльсоном была введена так называемая «аксиома выявленного предпочтения» (в слабой форме) как необходимое условие того, чтобы поведение потребителя действительно описывалось вышеуказанным образом при какой-либо функции полезности. Эта аксиома послужила отправной точкой для последующих аксиоматических характеризаций (в необходимом и достаточном смысле) оптимизационного выбора (см. ниже). С другой стороны, Г.Черновым была введена система аксиом, характеризующих аналогичную оптимизационную природу выбора статистических решающих правил. В этих работах были заложены основы метода функций выбора на базе характеризующих их свойств, развитые далее К.Эрроу, А.Сеном и другими авторами.

Современную проблематику функций выбора можно разделить на три сферы:
1) свойства функций выбора и их взаимосвязи;
2) механизмы порождения функций выбора;
3) применения функций выбора в других областях.

Свойства функций выбора обычно описываются в терминах изменения выбора $C(X)$ при определенных изменениях предъявлений X. Функция выбора может рассматриваться как внешнее «входо-выходное» описание некоторого механизма выбора, ее порождающего, т.е. преобразующего вход X в выход $C(X)$ по некоторому правилу, действующему на некоторой структуре данных.

Возникает задача восстановления механизма, способного порождать заданную функцию выбора. Классическим примером такой задачи является вопрос о порождаемости функции $C(X)$ оптимизацией какой-либо скалярной функции, т.е. о представимости ее в виде $C(X) = = \operatorname{Arg}\max_{x \in X} f(x)$ (рациональность выбора в узком смысле). Для конечного множества A, семейства $\mathcal{A} = 2^A \backslash \{\varnothing\}$ и функции непустого выбора $C(X)$ на $\mathcal{A}$ ответ дается теоремой Эрроу: необходимо и достаточно выполнение версии слабой аксиомы выявленного предпочтения, в виде

$$X' \subseteq X,\ X' \cap C(X) \neq \varnothing \ \Rightarrow\ C(X') = C(X) \cap X'.$$

Это же равносильно представимости $C(X)$ как выбора верхнего слоя в X по некоторому слабому упорядочению на A. Аналогично ставится вопрос о рациональности выбора в широком смысле, т.е. о представимости $C(X)$ как множества доминирующих (или недоминируемых) элементов в X по некоторому (в общем случае произвольному) бинарному отношению γ на A : $C(X) = \{y \in X \big| \ \forall x \in X : \ y\gamma x\} =$

$= \{y \in X \,|\, \bar{\exists} x \in X : \, x\bar{\gamma}^{-1}y\}$. Ответ дается обобщенной теоремой Сена: необходимо и достаточно выполнение условия

$$X \subseteq \bigcup_{\nu} X_\nu \Rightarrow \bigcap_{\nu} C(X_\nu) \cap X \subseteq C(X).$$

В последнее время происходит отход от стремления ограничиваться только рациональными в указанном смысле функциями выбора. Выяснилось, что даже достаточно «разумно» ведущие себя функции выбора могут не порождаться оптимизацией по функциям или бинарным отношениям и вообще не определяться одними лишь парными сравнениями объектов выбора. Для описания таких функций привлекаются более общие структуры — такие, как многоместные отношения и гиперотношения (отношения между множествами объектов), параметрические функции и отношения, — и более общие правила выбора на таких структурах.

К «внутренним» задачам теории функций выбора относятся вопросы образования составных функций из нескольких исходных и, обратно, вопросы «разложения» заданных функций выбора по более простым. Такие задачи, как и задачи характеризации механизмов выбора в терминах функций выбора, встречаются, в частности, при изучении методов коллективного принятия решений и игрового взаимодействия участников группы. Функции выбора могут служить средством описания и анализа поведения взаимодействующих индивидуумов и систем. Основная сфера применения функций выбора — теоретические модели целенаправленного поведения в социальных, экономических и других системах.

О рациональности выбора из субъективных альтернатив [1]

В задачах принятия решений обычно рассматриваются заданные альтернативные возможности поведения субъекта. При формализации акта выбора указывается множество X объектов, трактуемых как «допустимые альтернативы». Это множество является подмножеством некоторого «универсума» A — совокупности всех мыслимых альтернатив. Акт выбора заключается в выделении из допустимого множества $X \subseteq A$ некоторой альтернативы $x \in X$, которая при «разумном», «рациональном» способе выбора интерпретируется как лучшая с точки

[1] IV Всесоюзная школа-семинар “Статистический и дискретный анализ данных и экспертное оценивание”. Тезисы докладов. Одесса, 1991.—С. 147–151.

зрения субъекта (она может быть и не единственной). Говоря о способе (механизме) выбора, обычно предполагают его «массовость», т.е. применимость не к единичному акту выбора, а к совокупности таких актов при различных множествах X. При этом каждый раз X — это четко определенное множество из универсума A, а именно, X есть элемент некоторого заданного семейства допустимых предъявлений $\mathcal{A} \subseteq 2^A$. Сопоставление результатов выбора при различных предъявлениях позволяет косвенно судить о применяемом способе выбора, в частности о степени его рациональности.

Все сказанное относится к случаю, когда внешний наблюдатель (аналитик) действительно видит (знает) в точности те множества объектов, которые служат множествами допустимых альтернатив для субъекта, осуществляющего выбор. Однако не всегда можно быть в этом уверенным. Субъект, пусть даже поставленный (путем наложения жестких «физических» ограничений) перед ограниченным множеством возможностей $X \subseteq A$, может тем не менее найти иные альтернативные возможности — которые, быть может, даже отсутствовали в исходном универсуме A. В качестве неформального примера упомянем простейшую двухальтернативную задачу, стоящую перед голосующим на референдуме, где он по правилам должен оставить незачеркнутой одну из двух надписей: 1) «согласен», 2) «не согласен». Однако реально голосующий может, кроме того: а) зачеркнуть обе надписи, б) не зачеркнуть ни одной, в) сделать новую надпись, г) унести бюллетень с собой, и т.д. Этот пример показывает, что даже само предварительное описание множества возможных альтернатив требует от аналитика не только знания «объективно возможных» состояний системы, но и «субъективного видения мира» лицом, принимающим решения.

Другой пример носит общий и более формальный характер. Вначале отметим, что мы выше пользовались традиционным термином «альтернатива», хотя для обозначения объектов выбора он не всегда представляется удачным. Слово «альтернатива» подразумевает одну из взаимоисключающих (и взаимодополняющих) возможностей при выборе, так что акт выбора, строго говоря, всегда должен реализовывать ровно одну из имеющихся альтернатив. В то же время в теории выбора общепринято под выбором из множества X понимать, вообще говоря, целое множество «лучших» альтернатив («равноценных» или «несравнимых» между собой, либо соотносящихся друг с другом и с прочими альтернативами еще более сложным образом — как это делается, например, в определении «решения игры по фон Нейману–Моргенштерну»). Возможны различные трактовки такого множества «лучших» альтернатив $C(X) \subseteq X$. Можно считать, что это еще не описание исхода акта выбора, а задание множества всех лучших «претендентов» на выбор, окончательный же отбор единственной альтернативы из них остается вне рамок данного рассмотрения. Но возможна и другая точка зрения: допустимым исходом акта выбора из данного множества объектов может быть не обязательно единственный объект, но и множество объектов как целое (в этом случае становится не вполне уместным термин «альтернатива» применительно к объекту). Примером может служить выбор блюд из обеденного меню. В подобной ситуации в роли подлинных альтернатив с точки зрения субъекта выступают различные наборы объектов из исходного универсума.

Последняя ситуация — это одна из тех двух, которые анализируются далее формально. Цель последующего — показать, каким образом можно изучать выбор из модифицированного множества объектов — множества субъективных альтернатив — с точки зрения его рациональности в классическом смысле. Напомним, что выбор (функция выбора) $C(X)$ на семействе предъявлений $\mathcal{A} \subseteq 2^A$ называется классически-рациональным, если для некоторого бинарного отношения R на A

$$C(X) = \{x \in X \big|\, \forall y \in X :\ xRy\}. \tag{1}$$

Здесь R имеет, в традиционной интерпретации, смысл отношения нестрогого предпочтения (доминирования): «не хуже, чем», «не уступает». Приведем критерий рациональности функции C для общего случая произвольного семейства $\mathcal{A} \subseteq 2^A$ — критерий Сена–Миркина [47, 63, 222]. Пусть даны множество X и семейство множеств $\{X_\nu\}$, здесь и далее все множества предполагаются взятыми из допустимого семейства $\mathcal{A}$. Пусть $x \in X \subseteq \bigcup\limits_\nu X_\nu$. Если при этом

$$\Big[\forall \nu :\ x \in C(X_\nu)\Big] \Rightarrow \Big[x \in C(X_\nu)\Big], \tag{2}$$

то скажем, что выполнено *условие Сена–Миркина* (С-М). Выполнение условия С-М (для всех $x \in X \subseteq \bigcup\limits_\nu X_\nu$) необходимо и достаточно для рациональности C на $\mathcal{A}$ [47]. При $X = \bigcup\limits_\nu X_\nu$ условие С-М переходит в условие согласия С, [7], а при семействе $\{X_\nu\}$, состоящем из единственного члена — множества X_0, — в условие наследования, Н, а именно: если $x \in X \subseteq X_0$, то

$$\Big[x \in C(X_0)\Big] \Rightarrow \Big[x \in C(X)\Big] \tag{3}$$

(В случае *полного* семейства предъявлений: $\mathcal{A} = 2^A$ — необходимым и достаточным критерием рациональности функции $C :\ 2^A \to 2^A$ является выполнение пары условий Н и С [7, 222], но при $\mathcal{A} \subset 2^A$

этого, вообще говоря, не достаточно). Наконец, приведем еще условие отбрасывания, O:

$$\text{Если}\quad C(X_0) \subseteq X \subseteq X_0, \quad \text{то}\quad C(X) = C(X_0). \tag{4}$$

(Это условие для рациональной функции выбора на полном семействе предъявлений обеспечивает частичную упорядоченность соответствующего строгого предпочтения, т.е. его транзитивность).

Продемонстрируем теперь, как можно применять критерий рациональности не к заданной функции выбора «объективных» альтернатив $C(X)$ на $\mathcal{A}$, а к модифицированной функции выбора субъективных альтернатив на модифицированном семействе субъективно допустимых множеств.

Задача I. Пусть имеется множество A объектов $x, y, \ldots$, являющихся реальными альтернативами при выборе, так что в каждом акте выбора (из каждого предъявления $X \in \mathcal{A} \subseteq 2^A$) может выбираться только один объект (формально: $C(X) = \{x\}$). Но допустим, что субъект может уклоняться от выбора (формально: $C(X) = \varnothing$). Тогда такую ситуацию можно трактовать как выбор дополнительной альтернативы, а именно, выбор «статус кво» или выбор «отказа от выбора» (по выражению С.Е.Леца, «и на колебания нужно решиться»). Обозначим эту «мнимую» альтернативу через $\mathfrak{i}$ и будем считать, что она входит в расширенный универсум $A' = A \cup \{\mathfrak{i}\}$ и в каждое допустимое множество $X' = X \cup \{\mathfrak{i}\}$, $X \in \mathcal{A}$, из соответственно модифицированного семейства $\mathcal{A}'$. Отметим, что семейство $\mathcal{A}'$ заведомо не полное (в нем отсутствуют множества, не содержащие $\mathfrak{i}$). Модифицированная функция выбора получается всюду одноэлементно-значной; обозначим ее через c:

$$c(X) = \begin{cases} x, & \text{если}\ \ C(X) = \{x\} \quad (x \in A), \\ \mathfrak{i} & \text{если}\ \ C(X) = \varnothing \end{cases} \tag{5}$$

(можно было бы для единообразия условиться, что $\varnothing = \{\mathfrak{i}\}$, т.е. что пустое множество — это «множество, состоящее из несуществующего элемента). Исследуем функцию $c:\ \mathcal{A}' \to A'$ на рациональность, т.е. посмотрим, в частности, в каких случаях пустоту выбора можно объяснить превосходством фиктивной альтернативы $\mathfrak{i}$ над реальными. Применение критерия С-М (2) к c в случае, когда x — реальная альтернатива, сводится к критерию С-М для C, т.е. к требованию рациональности C, а в случае $x = \mathfrak{i}$ дает дополнительное требование:

$$\text{Если}\quad X \subseteq \bigcup_\nu X_\nu,\ \text{то}\quad [\forall \nu\colon\ C(X_\nu) = \varnothing\,] \Rightarrow [C(X) = \varnothing\,]. \tag{6}$$

Обозначая через $A^{\varnothing}$ объединение всех $X \in \mathcal{A}$ таких, что $C(X) = \varnothing$, получаем:

Теорема I. Для того чтобы модифицированная функция c была рациональной, необходимо и достаточно, чтобы 1) C была рациональной и 2) существовало такое $A^{\varnothing} \subseteq A$, что для всех $X \in \mathcal{A}$

$$[C(X) = \varnothing] \Leftrightarrow \left[X \subseteq A^{\varnothing}\right]. \tag{7}$$

Множество $A^{\varnothing}$ можно назвать множеством *условно негодных* объектов: если предъявлены только такие объекты, то выбор не производится (он пуст). Однако если предъявлены и объекты из $A^{\varnothing}$, и объекты из $A \backslash A^{\varnothing}$, то не исключено, что какие-то элементы из $A^{\varnothing}$ окажутся выбранными. Последнее исключается в случае полноты исходной системы предъявлений: $\mathcal{A} = 2^A$. В этом случае $A^{\varnothing}$ становится множеством *абсолютно негодных* объектов в том смысле, что

$$\left[x \in A^{\varnothing}\right] \Leftrightarrow [\forall X \subseteq A\colon\; x \notin C(X)], \tag{8}$$

и на множестве $A \backslash A^{\varnothing}$ соответствующее отношение строгого доминирования оказывается ациклическим. Аналогично рассматривается случай, когда исходная функция выбора C — множественно-значная.

Задача II. Пусть дано множество объектов A и допустимое семейство предъявлений $\mathcal{A} \subseteq 2^A$, и пусть производимый выбор описывается множественно-значной функцией выбора $C\colon\; \mathcal{A} \to 2^A$. Пусть множество выбора $Y = C(X)$ в действительности представляет собой набор одновременно извлекаемых из X объектов. В этом случае уместно рассматривать в качестве субъективных альтернатив выбора не исходные объекты $x \in A$, а множества таких объектов $V \subseteq A$ (ср. выбор блюд из обеденного меню). При такой трактовке каждое допустимое реальное предъявление $X \in \mathcal{A}$ равносильно субъективному предъявлению $\mathcal{X} = 2^X$, семейство допустимых субъективных предъявлений есть $\mathfrak{a} = \{\mathcal{X} | \, \mathcal{X} = 2^X, X \in \mathcal{A}\}$ (заведомо не полное). Модифицированная функция одноэлементно-значного выбора есть $c : \; \mathfrak{a} \to 2^A$ вида

$$c(2^X) = C(X). \tag{9}$$

Рациональность функции c означает ее представимость в виде

$$c(\mathcal{X}) = V\colon\; \forall W \in \mathcal{X}\colon\; V \mathcal{R} W, \tag{10}$$

где $\mathcal{R}$ — некоторое отношение на 2^A, удовлетворяющее требованию *корректности*: для каждого $\mathcal{X} \in \mathfrak{a}$ элемент V в (10) должен существовать и быть единственным ($\mathcal{R}$ названо в [7] *гиперотношением* доминирования, а (10) — *гипердоминантным* механизмом выбора).

Применим к функции c критерий рациональности С-М. Пусть $\mathcal{X} \subseteq \subseteq \bigcup\limits_{\nu} \mathcal{X}_\nu$, где все $\mathcal{X}_\nu, \mathcal{X} \in \mathfrak{a}$, т.е. пусть $2^X \subseteq \bigcup\limits_{\nu} 2^{X_\nu}$, что равносильно

$\exists\,\nu:\ X \subseteq X_\nu$. Поэтому критерий С-М сводится здесь к условию: если $V \subseteq X \subseteq X_0$, то

$$\left[\, c(2^{X_0}) = V \,\right] \Rightarrow \left[\, c(2^{X}) = V \,\right], \tag{11}$$

что представляет собой условие наследования в терминах функции однозначного выбора c. Для исходной функции выбора C это эквивалентно

$$[\, C(X_0) = V \,] \Rightarrow [\, C(X) = V \,]. \tag{12}$$

Последнее есть условие отбрасывания О для функции C. Иначе говоря, условие О (4) для функции выбора из объектов — это условие Н (3) для функции выбора из наборов объектов. Таким образом, получается обобщение теоремы из [7] на случай произвольного $\mathcal{A} \subseteq 2^A$:

Теорема 2. Для того чтобы функция выбора $C:\ \mathcal{A} \to 2^A$ порождалась некоторым гипердоминантным механизмом (10), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию отбрасывания О на $\mathcal{A}$.

Обе рассмотренные задачи относятся к случаю, когда субъективное множество альтернатив «богаче» исходного, объективного. Можно рассматривать и противоположный случай — «обеднение» множества альтернатив, а также общий случай его произвольных деформаций.

Criteria for judging the rationality of decisions in the presence of vague alternatives [1]

The standard framework of the decision theory is subjected to partial revision in regard to the usage of the notion of alternative. An approach to judging the rationality of decision-maker's behavior is suggested for various cases of incomplete observability and/or controllability of alternatives. The approach stems from the conventional axiomatic treatment of rationality in the general choice theory and proceeds via modifying the description of alternative modes of behavior into a generalized model that requires no explicit consideration of alternatives. The criteria of rationality in the generalized decision model are proposed. For the conventional model in the choice theory, these criteria can be reduced to the well known criteria of the regularity (binariness) of choice functions. Game and economic examples are considered.

[1] Mathematical Social Sciences.—1993.—V. 26.—P. 205-247.

Key words: Decision theory; Rational choice; Alternatives; Rationality criteria

1. Introduction

This paper reconsiders the criteria for the rationality of decisions that were elaborated in the works on the general choice theory by Arrow [94, 95, 221, 222] and their followers, and expands these criteria to some unconventional yet more realistic situations with *vague* alternatives.

Those are the situations where the alternatives faced by the decision-maker (DM) are only partly controllable by DM and/or only partly observable by the investigator-analyst who tries to judge the rationality of DM's behavior. (We will consider different versions of DM below, such as game players or consumers). The extreme case of vagueness of alternatives for the analyst is a situation when neither the alternative modes of behavior themselves nor the implemented mode are accessible to an outside observation. In such a case the analyst may judge the rationality of the behavior only by juxtaposing, on the one hand, the potential abilities and opportunities of DM in various situations of the decision making, and on the other hand, the results achieved. The development and analysis of a generalized model for such a case is presented in the main part of this paper. The first, preliminary part is devoted to the discussion and illustrative analysis of a number of examples and particular problems.

The conventional approach to judging the rationality of decisions that are more general than simple pairwise comparisons of given alternatives, comes to the following. It is usually assumed that, after seeing all alternative modes of behavior, one judges the rationality of the implemented mode of behavior based on the observation of the mode selected among all possible modes. That is, that the analyst who observes the behavior of or/and sets up real or *Gedanken* experiments with DM has to:

(i) know the decision made eventually by DM;
(ii) see (mentally) the whole "space" of alternative modes of behavior;
(iii) see the "boundaries" of the set of admissible alternatives in this space for each specific choice act;
(iv) possess some basic principles for judging the rationality of the observed behavior based on the above data
(plus perhaps something else).

Usually items (i)–(iii) are not discussed ([219] is one exception) — they are included into the statement of the problem, and the analyst's attention is focused then on item (iv). Concerning the latter, there are two opposite ways of reasoning: (A) *direct*, or *external*, and (B) *indirect*, or *internal*. In the type "A" reasoning, an a priori criterion for the appreciation and/or comparison of alternatives is assumed; this may be, for example, an "objective" value (worth, utility etc.) of each alternative. Then, the basis for the judging the rationality of the behavior is whether the alternative chosen by the DM is the best one according to this criterion. In the type "B" reasoning, the investigator has no a priori criterion for judging the values, mutual advantages, etc. of the alternative. In such a case, the only way to judge on the rationality of the behavior is to watch the results of the decisions made in different situations, to juxtapose and compare them, and to look whether they are in accordance with our own notion of a logically consistent behavior. This approach has led to the general (abstract) choice theory, in which the postulates of rational behavior are introduced in an axiomatic form. Such an abstract of the choice rationality naturally produces constructive ways of revealing "subjective" values or advantages of alternatives; it is the subject of the theory of revealing preferences that will be discussed below in detail.

To show the essence of an approach based on indirect, external judgements about the rationality, let us consider the simplest kind of decision making the choice based on a pairwise comparison of alternatives. It is usually accepted that by choosing the alternative a from the pair $\{a, b\}$, the alternative b from the pair $\{b, c\}$ and the alternative c from the pair $\{a, c\}$, the decision-maker simply manifests irrationality and the lack of logic of his/her behavior. Indeed, such a violation of *the transitivity of the revealed preferences* contradicts the hypothesis that DM does indeed maximize some value (utility) of alternatives, a scalar function $v(x)\,(x = a, b, c)$.

Thus, we conclude that DM is irrational in the *narrow sense*. At the same time the observed behavior is consistent with the hypothesis that DM follows the maximization according to a binary preference relation *"x is better than y"* (which in this case constitutes the cycle "a is better than b, b is better than c, c is better than a").

Note that the latter cycle implies the impossibility of a (nonempty) rational choice between the three alternatives a, b, c, i.e., the necessity of *refusal from the choice*. By admitting an empty choice as equally eligible choice, we shall treat the very possibility of representation of choice via the optimization according to a binary relation as the rationality in the *broad sense*. The exact criteria of rationality for this case based on the external observation of the choice will be given below.

Furthermore, if a subject chooses the alternative a from the pair $\{a, b\}$ but b from the triple $\{a, b, c\}$, this manifests an irrationality that is conventionally referred to as a violation of the *axiom of independence of irrelevant alternatives* (IIA). Such a violation implies that it is impossible to explain the choice via the optimization over some preference relation. Indeed, according to the first experiment, a is better than b but the opposite should be true in the second experiment; so we obtain the external irrationality in the broad sense.

The above reasoning concerns item (iv) of the list above, the basis for judging the rationality of a behavior. Here we have adopted the conventional concept of the choice rationality [94, 95, 221, 222] both in the narrow sense, as optimization of a utility function, and in the broad sense, as optimization over a binary preference relation. This concept has been critically analyzed in a number of works (see, for example, [87, 135, 203, 218] and the survey [84]).

It was shown that for various widely used rules of choice some of the axioms introduced by Arrow, Sen and their successors (different combinations of those produce criteria with a different degrees of rationality) cannot be satisfied together: some may actually fail.

The idea of satisfying one axiom at a time has led to the non-conventional *quasi-rational* mechanisms of choice. Such mechanisms focus on the choice of alternatives undominated according to some extended dominance relations; the latter are more complex than usual binary relations on the fixed alternative space. We shall touch upon this non-conventional theory below. In this paper we make the next step and concentrate on the criticism of the items (i)-(iii) of the analyst's list; for the sake of simplicity, we take as a basis the classical criteria and the conventional concept of the choice rationality.

These issues are discussed in Section 2 below. The remaining, constructive part of the paper deals with formal models and their analysis, and is arranged as follows. In Section 3, the conventional model of the general choice theory is reviewed and a summary of rationality conditions is given in the convenient form. Of those the primary one is the axiom of revealed preferences or, in another aspect, the axiom of independence of irrelevant alternatives. Section 4 presents three examples in which the rationality criteria are applied to situations with vague alternatives. In Section 5 a new model of *decisions with hidden alternatives* is proposed, and corresponding rationality axioms are introduced. Analysis of this model reveals the inner structure of rationality. The concluding Section 6 presents a sketch of further possible generalizations.

2. Informal discussion of the problem

We shall depart, step by step, from conventional statements and from the standard concept. Recall that we have already abandoned item (iv) of the analyst's list (optimization approach based on value functions or preference relations), but we have still kept the preceding items (i)–(iii). Now we shall gradually abandon item (iii) (observability of the admissible alternative set), then (ii) (observability of the total alternative space) and finally (i) (observability of the alternative(s) chosen).

We start with item (iii), the notion of admissible (or feasible) alternative sets. Apparently, the principal source of this notion and of the choice theory itself has been the theory of consumption. The prototype of the abstract admissible set in that theory was the notion of the budget set as a subset in the space of commodity bundles considered as the totality of all conceivable alternatives for a consumer. Now we shall use the particular case to demonstrate an ambiguity of that seemingly clear notion of admissible sets. The budget set is the set of all commodity bundles whose cost does not exceed the value of the consumer's budget (income); we shall go to formal notation a little later. The very idea that all those and only those commodity bundles that belong to the budget set are available to the consumer seems to be justified when one speaks about a long-run term, say ten years. But for a short-run term, say a month, the boundaries of the admissible set become hazy. Indeed, the consumer may exceed his budget, e.g. using a seller's credit or a bank loan; in such a case the virtual admissible set turns out to be wider than the primary budget set. As another possibility, the consumer may judge as inadmissible even those commodity bundles which cost less but not too much less than his income. In such a case the virtual subjective admissible set becomes narrower than the initial budget set.

In both cases the resulting behavior, deemed rational by the consumer, may look irrational to the external observer. To demonstrate this, let us start with a "polite guest" story which seems to have been described first in [122]. The following quote is from the review lecture by Sen [226].

"Suppose the person is choosing between slices of cakes offered to him" and "he is trying to choose as large a slice as possible, subject to not picking the very largest, because he does not want to be taken as greedy, or because he would like to follow a social convention or a principle learned at his mother's knees: "never pick the largest slice".(...) If the three slices in decreased order were z, y, x, then he is behaving exactly correctly according to that principle" [when choosing x from $\{x, y\}$ and y from $\{x, y, z\}$ which violates the axiom of independence of irrelevant alternatives].

In this example the best choice is not the choice of the best. That is, the virtual admissible alternative set for the person, i.e. the set of alternatives allowed both "physically" and "psychologically" becomes a different, narrower set than an externally observable set of feasible alternatives.

Returning to the example of the choice under bounded budget, it is clear that qualitatively the behavior of the consumer who saves money, and thus makes the subjective admissible set narrower than the budget set, will be similar to that in the above Sen's example. More formally, the standard model of consumer's behavior can be stated as the solution of the utility maximization problem

$$\max u(x_1, \dots, x_n)$$

$$\sum p_i x_i \leqslant I,\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

where x_i and p_i are the quantity and the price of i-th good, respectively, and I is the consumer's income. (Another, non-conventional model will be considered in an axiomatic form in Section 4). Here the standard admissible set for the consumer is his budget set $B \subset R^n$:

$$B(p_1, \dots, p_n; I) = \left\{ \mathbf{x} \geqslant 0 \,\middle|\, \sum p_i x_i \leqslant I \right\}. \tag{2}$$

The modified behavior of the consumer-saver can be described by the model

$$\max v(x_1, \dots, x_n; s)$$

$$\sum p_i x_i + s \leqslant I,\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, n; s \geqslant 0, \tag{3}$$

where s is the level of consumer's savings.

Consider a special case of the modified utility function v:

$$v(\mathbf{x}, s) = \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{if } s \geqslant \alpha, \\ -\infty & \text{if } s < \alpha, \end{cases} \tag{4}$$

where $\alpha = \text{const} > 0$ – the least subjectively admissible level of savings (assurance level). This describes the case where the consumer maximizes his genuine utility function under the budget constraint, with the additional requirement that the level of savings be not less than the admissible threshold. In such a case, if we replace I in (1) (but not in (3)) by $I^{'} = I - \alpha$, the problem (3) becomes equivalent to the problem (1), and we find ourselves in the position of the Sen's cake-chooser, with seemingly irrational external behavior, from the external observer standpoint. Namely, the optimal solution $(\mathbf{x}^*; s) = (x_1^*, \dots, x_n^*, s)$ of the problem (3) has as its x-th component the optimal solution $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ of the problem (1) with I replaced by $I^{'} = I - \alpha$, and (under the natural condition of monotonic increasing of u in x_i's) $\sum p_i x_i^* = I^{'}$. Then, accepting the new budget constraint $I^{'}$ instead of I in the modified problem (3) will definitely lead to the consumer's changing his decision $\mathbf{x}^*$, in spite of its seeming admissibility even in the new budget set $B(\mathbf{p}, I^{'})$.

Moreover, a similar result will appear in a "smooth" case when v depends on s continuously but increases in s sharply enough when s is small.

Then the s-component s^* of the optimal solution of (3) will become positive, and the qualitative picture will obviously remain the same. In the framework of the standard model (1), from the external observer's point of view the consumer's choice of the commodity bundle $\mathbf{x}^*$ will look irrational. Note that in the smooth case it is more difficult to interpret the situation just as narrowing of the admissible alternative set. Indeed, formally we can still reduce the problem (3) to (1), by replacing I in (1) by $I' = I - s^*$ and taking $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}; s^*)$. But the parameter s^* here will be known only a posteriori. Since the consumer chooses the quantities $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ and s simultaneously, it is hardly right to say that he selects the best among alternatives $\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, I - s^*)$. Rather, one could say that the consumer considers as alternatives other objects, namely the composite bundles $(x_1, \ldots, x_n; s)$. Then the constraint in (3) yields the admissible set of the bundles; with such treatment of the alternative space and the feasible set in it, the behavior of consumer starts looking rational.

Note that by now we have encroached upon the very nature of the space of alternatives, i.e. not only upon item (iii) but also item (ii) of the analyst's list. Indeed, the lack of clarity, on the decision-maker's part, of what the real alternatives are is rather typical. This problem is especially acute when the possible outcomes of one's behavior, viz. the resulting states (or trajectories), depend not only on one's decisions, but on other external influences as well.

In game-theoretical terms we can speak about dependencies of results upon other *players*, or in particular upon the *nature* (which reflects factors beyond the person's control). One can see the important manifestation of this problem in the difference between *actions* of a player and *outcomes* of the play. The main interest of player A is in the play outcome value; but, since A has to make choices between actions (modes of behavior) rather than directly between feasible outcomes, A is forced to also assign some subjective values to the actions themselves. Such "imputed values" of actions, to use the economic-theoretical term, can become tied to the outcome values in a rather sophisticated manner, due to the incomplete observability/controllability of factors and/or outcomes; this can also lead to seeming irrationality of player's actions. "In general, it is hard to specify precisely the strategy sets available to the players" ([163], §1.4). A thorough discussion of some paradoxes in the decision logic, arising from an insufficiently clear distinction between actions and outcomes, is given by Maher [164].

Here we shall confine ourselves to two game-theoretic examples.

Game example 1. Consider a zero sum game with the payoff matrix

$\|v_{ij}\|$ of the form

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

where v_{ij} is the reward of the player 1 after the move (action) $i \in I$ by player 1 and move $j \in J$ by player 2; I and J are the sets of possible actions of the players 1 and 2 respectively; here $I = \{1, 2, 3\}$, $J = \{1, 2\}$. Let player 2 make his choice first, and player 1 second, after learning the choice of player 1. Then the pair i^*, j^* of optimal moves of both players forms the *Stackelberg equilibrium*, with player 2 being the *leader* and player 1 the *follower*. In the equilibrium, the components i^* and j^* yield the inner max in i and the outer min in j in the expression

$$\min_{j \in J} \max_{i \in I} v_{ij}. \tag{6}$$

It is easy to see that for the payoff matrix $\|v_{ij}\|$ of the form (5) $j^* = 1$ and $i^* = 1$. If one changes the matrix (5) by deleting its third line, one obtains new optimal actions $j^{*\prime} = 2$ and $i^{*\prime} = 2$. Thus, if one observes only the behavior of player 1, one will see that in the case of possible alternative actions $\{1, 2, 3\}$ player 1 will choose the action 1, whereas in the case of the set $\{1, 2\}$ A will choose action 2. This runs counter to the axiom of independence of irrelevant alternatives.

Game example 2. Consider the following payoff matrix for the game of DM with the nature:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Let DM (in the role of player 1) use the criterion of the minimax regret (risk) after Savage (see, for example, [163]). Following this criterion, we first take the initial payoff matrix $\|v_{ij}\|$ and convert it into the regret matrix $\|w_{ij}\|$, $i \in I$, $j \in J$, using the formula

$$w_{ij} = \max_{l \in I} v_{lj} - v_{ij}. \tag{8}$$

The player chooses such an action i^* which yields

$$\min_{i \in I} \max_{j \in J} w_{ij}. \tag{9}$$

For the matrix $\|v_{ij}\|$ of the form (7) the corresponding regret matrix $\|w_{ij}\|$ is

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

The optimal action of DM (player 1) will be $i^* = 1$. Now, delete DM's action 3 from the admissible set. Then the new payoff matrix is obtained by deleting the last line from (7); the corresponding regret matrix $\|w'_{ij}\|$ becomes

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

(rather than the corresponding submatrix of (10)). So the new optimal action by DM is $i^{*\prime} = 2$, again contrary to the IIA axiom. The above is a modification of the argument by Chernoff [121], (see also [163], §13.2); it will be used again later.

Thus, there are two points of view on the notion of alternatives: a) alternatives are externally observable actions of the player, and b) alternatives are consequences of the actions, as perceived by the player. In (b), the values of alternatives are the player's subjective estimates $e(i)$ of predicted consequences of his actions $i \in I$. As the above examples of two games demonstrate, DM's behavior can be rational from his subjective standpoint but irrational from the external standpoint. In Example 1, $e(i) = v_{ij^*}$ where $j^* = \arg\min_{j \in J} u_j$ with $u_j = \max_{l \in I} v_{lj}$; in Example 2, $e(i) = -\max_{j \in J} w_{ij} = \min_{j \in J} (v_{ij} - u_j)$. It is easy to see that the "technical" reason of the observed irrationality is the dependence of the estimate $e(i)$ not only on the action i but also on the set of all admissible actions I; so a more correct notation for e should be $e(i; I)$. We call the scalar value function of such form a *pseudo-scale* of estimates, as distinct from a genuine *scale*, in accordance with which the estimate e of the alternative i must depend only on i.

The seemingly irrational behavior in the situation above can be explained as follows. The observer presupposes that the decision-maker compares the actual values of the observed alternatives independent of the *context of comparison*, while such a dependence can actually exist. In the game examples above it was the admissible alternative set I itself that played the role of the comparison context for alternative actions $i, i', \ldots$ In more general cases the role of the comparison context for alternatives $x, y, \ldots$ may be given not (or not only) to the admissible alternative set X but to some other *experiment conditions* E, and so the value of the alternative x may have the generalized form of a pseudo-scale $v = v(x; E)$. As an example of such a representation, replace the simplest consumer problem (1) by the equivalent problem without constraints, using the Lagrange–Kuhn–Tucker multiplier λ:

$$\max_{x_1, \ldots, x_n \geqslant 0} \left(u(x_1, \ldots, x_n) - \lambda \sum p_i x_i \right). \tag{12}$$

Then, the non-negative orthant R^n_+ becomes the admissible alternative set, independent of variables $p_1, \ldots, p_n, I$. But at the same time the modified value function becomes parametrically dependent on p, I, and so it is a pseudo-scale.

Furthermore, it is easy to "explain" an arbitrary behavior of DM in the framework of broad rationality, i.e. in terms of preference relations, if one accepts that a preference relation xRy ("x is preferred to y") depends on experiment conditions E (in particular, on the admissible alternative set X). Then R will be a *pseudo-relation* rather than a proper binary relation on the alternative space (more precisely a pseudo-relation of the form $xR(E)y$ is a ternary relation between x, y and E). The approach to rationality in terms of pseudo-scales or pseudo-relations, i.e. in terms of alternative absolute or relative values depending on experimental conditions, can lead to non-trivial results. This will be so if one does not allow the absolute arbitrariness in this dependency and confines oneself to some natural types of such dependencies. This results in "quasi-rational" modes of behavior, to be discussed in Section 2.

The examples above illustrate the ambiguity of the notion "alternative". This leads us to extend or even a completely change the space of alternatives. In conclusion, we shall demonstrate the possibility and necessity of such changes in the framework of the highly formalized standard model in the abstract choice theory. In the model, a set U of objects $x, y, \ldots$ called *alternatives* is given; in every act of choices some set $X \subseteq U$ is presented and interpreted as the admissible alternative set. The act of choice amounts to the selection of one of the alternatives, x^*, among all $x \in X$. A fundamental notion of the choice theory is the choice function c that puts into correspondence to a given X the alternative chosen from $X : x^* = c(X)$. Also considered in the general choice theory is the extended concept of choice function, a set-to-set mapping C, which puts into correspondence to the set X some of its subsets, $X^* \subseteq X$; so we have $X^* = C(X)$. The subset X, called the *choice set*, is usually treated as the set of the chosen alternatives or, more precisely, those alternatives that are eligible to be chosen. In the case of a (conventionally) rational choice, the set $C(X)$ consists of all those and only those alternatives which are better (or not worse) than each alternative in X. The case of *single* choice $c(X)$ we began with, is formally reduced to the special case where $C(X)$ is a singleton $\{c(X)\}$. Generally the set $C(X)$ can contain more than one element, $|C(X)| > 1$: call it *hyperchoice*; or it may contain no elements at all, $C(X) = \varnothing$; call it *hypochoice*. The latter is often considered as the sign of irrationality of the choice—a view which we do not share.

In the general case of set-valued choice, including both hyperchoice and hypochoice, the term "alternative" as applied to the primary objects $x, y, \ldots \in U$ ceases to be justifiable, because its original meaning implies both mutually exclusive and mutually complementary opportunities.

Indeed, with the hypochoice a new unforeseen possibility is realized, viz. the empty choice. In different interpretations this may mean either refusal from a real choice or the return to the *status quo* situation, which was not present before in the set of considered alternatives. We thus might formally include the additional alternative into the admissible set; the newly added alternative denotes the for mentioned state "refusal to choose" or "status quo". To comment upon the situation, let us cite S.J.Lec: "To venture on the indecision, one has to be a man of decision". As for the primary alternatives, in the case of the hypochoice they do not exhaust all the opportunities for choice and so are not mutually complementary.

On the other hand, in the case of the hyperchoice, alternatives are not mutually exclusive: formally it looks as if all objects forming the choice set $C(X)$ are chosen simultaneously, and sometimes all the options from $C(X)$ can be actually realized simultaneously. One example may be the choice of dishes from the dinner menu X, when $C(X)$ is the chosen set of dishes. In cases like this it is reasonable to treat as alternatives faced by the decision-maker the sets of objects taken as a whole rather than primary objects themselves. From the formal standpoint this implies that it is not the initial object set U, but the set of its subsets 2^U which plays the role of the alternative space.

Thus, even on the abstract level of the formal model of the choice an ambiguity may arise as to what the alternatives are. This requires not only modifying the notion of admissible sets but the alternative space as well. An informal discussion of such modifications is given in [219], §1.2. A formal analysis of both such cases above, hypochoice and hyperchoice, will be done in Section 4.

3. The conventional model of abstract decision making in the choice theory and the rationality criteria

3.1. Choice functions and rationality. Following the conventions of the choice theory, take the set U of all conceivable *objects of choice* (for the reasons mentioned above, we abandon the term "alternative" from the very beginning). The set U may be arbitrary (for simplicity one may consider a finite set). In the act of the choice some admissible set of objects $X \subseteq U$ is presented to DM for the choice. Denote by $\mathcal{U}$ the family of all non-empty sets X that may be presented for the choice and call it the *family of presentations.* In general, $\mathcal{U}$ may be an arbitrary subset of the set $2^U \backslash \{ \varnothing \}$; we shall consider below some special types of families $\mathcal{U}$. To each presentation $X \in \mathcal{U}$ an object $x^* \in X$ or a subset $X^* \subseteq X$ are put in correspondence; either of these is called *choice from* X and is denoted

$c(X)$ or $C(X)$, respectively. In the first case we use the term *single-valued choice*, in the second case *set-valued choice*. The functions $c : \mathcal{U} \to U$ and $C : \mathcal{U} \to 2^U$ are called *choice functions*, *single-valued* and *set-valued*, respectively [1].

Definition 1. We shall say that the choice function c (or C, respectively) is *rational in the broad sense*, or *rational* for brevity, if there exists a binary relation R on U such that $c(x)$ is the unique greatest element x^* in X by R, i.e.

$$c(X) = x^* \quad \text{such that} \quad \forall y \in X : x^* R y \tag{13}$$

or, respectively, C(X) is the set of all greatest elements in X by R, i.e.

$$C(X) = \{x \in X \big| \, \forall y \in X : xRy\}. \tag{14}$$

Definition 2. We shall say that the choice function c (or C, respectively) is *rational in the narrow sense*, if it is rational with a rationalizing binary relation R in (13) (or in (14), respectively) which is a non-strict weak order on U, i.e. a complete ($\forall x, y \in U : xRy$ or yRx) transitive ($\forall x, y, z \in U : xRy$ and $yRz \Rightarrow xRz$) relation.

It is well known and almost obvious that an equivalent definition can be formulated in terms of a representing scale instead of a weak order:

Definition 2'. We shall say that the choice function c (or C, respectively) is *rational in the narrow sense*, if there exists a linearly ordered set L and a mapping $v : U \to L$ (called *scale*) such that for every $X \in \mathcal{U}$

$$c(X) = \arg \max_{x \in X} v(X) \tag{15}$$

or, respectively,

$$C(X) = \operatorname{Arg} \max_{x \in X} v(X). \tag{16}$$

Note that the latter, more general definition (16) may be rewritten as

$$C(X) = \{x \in X \big| \, \forall y \in X : \, v(x) \geqslant v(y)\}. \tag{17}$$

Remark 1. The issue of the type of a scale v, and in particular of numerical representability of preferences is a very important problem in the decision theory, but it is beyond the limits of this paper.

Remark 2. In the definitions above, a function $v(x)$ has the meaning of a *value* of the object x from the DM's point of view, and xRy is a

[1] Strictly speaking, the second function is also single-valued with values which are sets (this fact will be exploited below). So a more rigorous term for the first function would be *element-valued* as opposed to *set-valued*, but our simplification of terminology will not lead to confusion.

(non-strict) *preference relation*: x is "as good as" or "not worse than" y. The representability of choice functions by means of their *rationalization* in the form (13) or (14) via some preference relation is sometimes called *regularity*, or *binariness* of choice functions.

Remark 3. For single choice functions c in Definitions 1 and 2 to be well defined, the greatest element in (13) and the maximal element in (15) must exist and be unique; this is the presupposed in these definitions.

Remark 4. By taking the logical negation in Definition 2, one can rewrite the definitions (13) and (14) in the equivalent forms

$$c(X) = x^* \quad \text{such} \quad \text{that} \quad \neg\, \exists y \in X : yPx \tag{18}$$

and, respectively,

$$C(X) = \{x \in X \,\big|\, \neg \exists y \in X : yPx\}, \tag{19}$$

where $P = \bar{R}^{-1}$ is the conversely complementary to R (i.e. xPy iff not yRx), which is usually interpreted as a *strict preference* relation "better than". Sometimes, when R is interpreted more "as good as" than "not worse than", another definition of P via R is used: $P = R \& \bar{R}^{-1}$ (i.e. P is the asymmetrical part of R). These two expressions for P via R coincide iff $\bar{R}^{-1} \Rightarrow R$, i.e. iff R is complete relation which is equivalent to $P = \bar{R}^{-1}$ being an asymmetric relation (i.e., for all $x, y \in U$ both xPy and yPx must not hold together). Incompleteness of R in (13) or (14) corresponds to the lack of asymmetry of P in (18) or (19), respectively. The case, when both xPy and yPx hold at the same time contradicts to usual interpretation of P as a strict preference and demands a more broad treatment as a rather abstract *dominance relation*. Formally we may even admit a failure of irreflexivity for a dominance relation P, i.e. xPx for some x. The reasons for this will be discussed in Section 4.

Definition 3. We shall call a representation family $\mathcal{U} \subseteq 2^U$: *complete*, if $\mathcal{U} = 2^U \backslash \{\varnothing\}$; $\cup$-*complete*, if $\mathcal{U}$ is closed under unions, i.e. when $\{X^\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$ then $\bigcup_{\nu \in N} X^\nu \in \mathcal{U}$; *pairwise-*$\cap$*-complete*, if $\mathcal{U}$ is closed under non-empty pairwise intersections, i.e. when $X, X' \in \mathcal{U}$ and $X \cap X' \neq 0$ then $X \cap X' \in \mathcal{U}$; *finitely complete* or k*-complete*, if every finite set, or respectively every set with the cardinality no more than k, belongs to $\mathcal{U}$. Finally, we shall call $\mathcal{U}$ *irreducible*, if each $X \in \mathcal{U}$ is irreducible under $\cup$-operation in the semi-lattice sense, i.e. if in every covering $\{X^\nu\}_{\nu \in N}$ of X there exists $X^{\nu *}$ such that $X \subseteq X^{\nu *}$.

In the choice-theoretical literature, mainly complete or at least finitely complete representation families are dealt with; besides, we shall make use of other types including arbitrary families $\mathcal{U}$.

Remark 5. The notions of the narrow and broad rationality in the case of single choice functions are closer to each other than one might expect based on their definitions. Namely, if a presentation family $\mathcal{U}$ is complete, i.e. contains all non-empty subsets of U, then a single choice function c on $\mathcal{U}$ is rational (in the broad sense) if and only if it is rational in the narrow sense. Indeed, the only type of binary relations R which can generate a single-valued choice by the optimization rule (13) on all non-empty $X \subseteq U$ is a non-strict *strong*, or *linear*, order, i.e. an antisymmetric ($xRy \& yRx \Rightarrow x = y$) complete transitive relation. This is easy to verify by considering the choice on pairs $\{x, y\}$ and triples $\{x, y, z\}$. Moreover, the same is still true for the case of a 3-complete family $\mathcal{U}$ (containing all pairs and triples of objects). This is the reason for many simplifications in the case of single choice functions and "sufficiently complete" presentation families. It is also the reason why the general choice theory studies mainly set-valued choice functions: they enrich the theory by allowing, in particular, divergence between narrow and broad rationality, with many intermediate "degrees of rationality", at the expense of both technical difficulties and less clarity of using the notion "alternative". In this paper, a different way to enrich reasoning is used—that of considering essentially incomplete presentation families. As will become clear later, this approach is very important for applications.

3.2. Principal properties of rational choice functions. Now we shall formulate some properties that are typically expected from a rational choice. These have been developed in a long line of works from the pioneering papers of Samuelson (in the context of consumer choice), Chernoff (statistical decisions), Nash (a bargaining model), via formalization in terms of abstract choice functions by Uzawa, Arrow, Sen et al., up to various recent extensions and generalizations. We shall list only those properties that are necessary for the present paper. They will be mainly properties of single-valued choice functions c (following their real historical origin) which are more transparent than their generalized forms for set-valued choice functions C.

We shall start with two properties that are both historically and conceptually the primary ones: the *weak axiom of revealed preferences*, WARP, introduced by Samuelson [216, 217], and axiom of *independence of irrelevant alternatives*, IIA, which, in the version used here, originates in [121, 197, 208] (the latter refer to the Arrow's idea); (see also [94, 163, 220]. This axiom is often called Chernoff's axiom or α-axiom by Sen's classification. In view of an ambiguity in the treatment of IIA (see, for example, comments in [162], and also [142, 152, 209]) we shall give this axiom a neutral term *heredity*, H (which reflects one important feature of it).

Definition 4. We shall say that a single-valued choice function c on a presentation family $\mathcal{U}$ satisfies the *heredity* property, H (or IIA axiom, in traditional terms, or postulate 4 in [121], or axiom α in [220]), if for every

$X, X' \in \mathcal{U}$ such that

$$X' \subseteq X, \tag{20}$$

we have

$$x = c(X) \text{ and } x \in X' \Rightarrow x = c(X'). \tag{21}$$

The meaning of the definition is that an object that is the best in a large set is even more so the best in a smaller set; hence the property "to be the best" is hereditary. We will exploit this idea in a generalized form in the sequel.

A different but closely related property (as we shall see later) is formulated as follows [145, 216, 217].

Definition 5. We shall say that a single-valued choice function c satisfies the *weak axiom of revealed preference*, WARP, if for every $X, X^{'} \in \mathcal{U}$ we have

$$x = c(X),\ x' = c(X'),\ x \in X',\ \text{and } x' \in X \Rightarrow x = x'. \tag{22}$$

To interpret WARP and explain the term "revealed preference", transform (22) into the following equivalent form. Let us treat the case $x = c(X)$, $y \in X$, as the binary relation "x is (revealed) preferable to y"; denote it xR_cy. Then (22) means that $xR_cx' \& x'R_cx \Rightarrow x = x'$. At the same time, if one considers the case $x = c(X)$, $y \in X$, $y \neq x$, as the binary relation "x is (revealed) strictly preferable to y" and denote it xP_cy, then (22) is equivalent to the impossibility of a cycle of the form $xP_cx' \& x'P_cx$. And one more equivalent formulation for WARP has the form $P_c \Rightarrow \bar{R}_c^{-1}$.

Remark 6. Note that, in general, revealed nonstrict and strict preference relations R_c and P_c may neither satisfy the equality $P_c = \bar{R}_c^{-1}$ nor the equality $P_c = R_c \& \bar{R}_c^{-1}$ in Remark 3; one can guarantee only the implications $R_c \& \bar{R}_c^{-1} \Rightarrow P_c \Rightarrow R_c$. But since WARP means $P_c \Rightarrow \bar{R}_c^{-1}$, the previous chain of implications yields $P_c = R_c \& \bar{R}_c^{-1}$. Moreover, the latter equality turns out to be still another equivalent formulation of WARP.

Definition 6. ([145, 217]; see also [141, 211, 212, 234], et. al.). We shall say that a single-valued choice function c satisfies the *strong axiom of revealed preferences*, SARP, if for every $X^1, \ldots, X^n \in \mathcal{U}, n > 1$,

$$x^i = c(X^i), x^i \in X^{i+1},\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow x^1 = \ldots = x^n \tag{23}$$

(where $X^{n+1} = X^1$).

WARP is the particular case of SARP with $n = 2$. The equivalent reformulation of SARP in terms of the strict preference P_c is: there exist no $x^1, \ldots, x^n \in U$, $n > 1$, such that $x^1P_cx^2, \ldots, x^nP_cx^1$ (a cycle of revealed strict preferences).

The axioms of revealed preferences are oriented toward the rationality in the narrow sense (see below). Now we shall introduce additional axioms oriented toward the broad rationality. The first is γ-axiom of Sen's classification ([222]; see also [121], Postulate 10); keeping in mind its further extension to more general models, we give it a neutral term "concordance".

Definition 7. We shall say that a single-valued choice function c satisfies the *concordance* condition C, if for every set $X \in \mathcal{U}$ and for every *decomposition of* X in $\mathcal{U}$, viz. a set family $\{X^\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$ (where the index set N is arbitrary, perhaps infinite) such that

$$X = \bigcup_{\nu \in N} X^\nu, \tag{24}$$

we have

$$(\forall \nu \in N : x = c(X^\nu)) \Rightarrow x = c(X). \tag{25}$$

A generalized formulation which combines concordance (γ-axiom) with the heredity (α-axiom) was given in [63]:

Definition 8. We shall say that a single-valued choice function c satisfies the *concordant heredity* condition, CH, if for every set $X \in \mathcal{U}$ and for every *covering of* X in $\mathcal{U}$, viz. a set family $\{X^\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$ such that

$$X \subseteq \bigcup_{\nu \in N} X^\nu, \tag{26}$$

we have

$$(\forall \nu \in N:\ x = c(X^\nu))\,\&\,(x \in X) \Rightarrow x = c(X). \tag{27}$$

The last axiom from this series is taken from [211, 212].

Definition 9. We shall say that a single-valued choice function c satisfies the *Richter's axiom*, RA, if for every $X \in \mathcal{U}$

$$(\forall y \in X:\ xR_c y) \Rightarrow x = c(X). \tag{28}$$

Remark 7. It is easy to see that, owing to the definition of R_c the converse implication in (28) is always true, and so the Richter's axiom may be presented in the following equivalent form:

$$x = c(X) \Leftrightarrow (\forall y \in X:\ xR_c y). \tag{29}$$

3.3. Interrelations between axioms. Now we shall write a number of statements concerning interrelations between the above axioms under various assumptions on the presentation family $\mathcal{U}$, using auxiliary Definition 3. Some of these statements are apparently known (although at time

I am unable to give the primary references) or can be easily obtained from the definitions. Nevertheless, for the sake of completeness, I will give a summary of statements and my own system of shortened proofs. In the sequel, the fact regarding the interrelations between axioms will be presented as *propositions*; the term *theorems* will be reserved for new facts that follow from axioms. We start with the correspondence between two fundamental conditions, IIA (i.e. H) and WARP.

Proposition 1. For an arbitrary $\mathcal{U}$, WARP implies IIA. Conversely, when $\mathcal{U}$ is pairwise-$\cap$-complete, then IIA implies WARP.

Proof. Indeed, let WARP be fulfilled. Then, with the condition (20) in IIA, let us apply the formulation of WARP; the result yields (21), as required. Conversely, let IIA be true and $\mathcal{U}$ be pairwise $\cap$-complete. Take X, $X^{'} \in \mathcal{U}$ that satisfy the premise in (22) and consider $X'' = X \bigcap X^{'}$ which belongs to $\mathcal{U}$ by assumption. Then, applying IIA to the pair X, X'', we have $c(X'') = x$, and applying IIA to $X^{'}, X''$, we have $c(X'') = x'$; hence $x = x^{'}$, which satisfies the conclusion in (22), and so WARP is true.

Thus, IIA and WARP are intimately related: WARP is an apparent strengthening of IIA, and with a pairwise-$\cap$-complete family $\mathcal{U}$ they are simply equivalent. SARP is a further strengthening of WARP, the purpose of which is clarified in what follows.

Now we state interrelations among the rest of axioms together with WARP and H (i.e. IIA).

Proposition 2. For an arbitrary $\mathcal{U}$, WARP implies CH.

Proof. Indeed, let WARP be true, and under the premise of CH, let the left part in (27) be fulfilled, and assume that $x^* = c(X)$. Take a set $X^{\nu *} \in \{X^\nu\}$ such that $x^* \in X^{\nu *}$. Then, x, x^* and $X, X^{\nu *}$ satisfy the premise of WARP, hense $x^* = x$.

The converse implication in Proposition 2 is generally not true: if $\mathcal{U} = \{X, X'\}$, where $X = \{x, y, z\}, X' = \{y, z, w\}$, and $c(X) = y$, $c(X') = z$, then CH is fulfilled but WARP fails.

Proposition 3. For an arbitrary $\mathcal{U}$, CH implies both H and C. Conversely, when $\mathcal{U}$ is $\cup$-complete, then H & C implies CH.

Proof. Suppose CH is satisfied. With the condition (20) in the premise of H, consider the one-member family $\{X\}$ as a covering family for X'. Then, owing to CH, $c(X') = c(X)$. As for C, it is simply a special case of CH when the covering is the decomposition. Conversely, suppose both H and C be true and that $\mathcal{U}$ is $\cup$-complete. Take an arbitrary $X \in \mathcal{U}$ and its arbitrary covering $\{X^\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$, and consider $X^\cup = \bigcup_{\nu \in N} X^\nu$ which belongs to $\mathcal{U}$ by assumption. Then under the premise in (25) we obtain

$c(X^{\cup}) = x$ from C, and finally, if $x \in X$, then $c(X) = x$ from H, hence (25) of CH is true.

Thus, CH is generally a strengthening of the conjunction H & C, and with $\cup$-complete family $\mathcal{U}$ they are equivalent.

Proposition 4. If $\mathcal{U}$ is irreducible, then H is equivalent to CH.

Proof. Suppose H is true, and let (26) and the premise of (27) in Definition 8 of CH be fulfilled. Then due to the irreducibility of $\mathcal{U}$ there exists $X^{\nu *} \in X^{\nu}$ such that $X \subseteq X^{\nu *}$, and so by H the conclusion of (27) is true. The converse implication of H from CH was established in Proposition 3.

Proposition 5. For an arbitrary $\mathcal{U}$, RA is equivalent to CH.

To prove this statement, it is sufficient to show the following.

Lemma 1. For any $x \in X \in \mathcal{U}$, the left-hand side of (28) is equivalent to the existence of a covering family $\{X^{\nu}\}_{\nu \in N}$ for a given X, such that the left-hand side of (27) is fulfilled.

Proof. Given $x \in X \in \mathcal{U}$, suppose the left-hand side of (27) is true for some $\{X^{\nu}\}$ covering X. Then each $y \in X$ belongs to some set X^{y} from the family $\{X^{\nu}\}$, with $x = c(X^{y})$, hence $xR_c y$, and so the left-hand side of (28) is true. Conversely, let the left-hand side of (28) be fulfilled for given $x \in X \in \mathcal{U}$. Then, for every $y \in X$, the definition of R_c implies, there exists $X^{y} \in \mathcal{U}$ such that $x = c(X^{y}), y \in X^{y}$. So we obtain a desired covering family $\{X^{y}\}_{y \in X}$ for the given $X \ni x$, which satisfies the left-hand side in (27).

Thus, RA is, in fact, an explicit expression for the implicit idea of decomposing rational choice that underlies the CH axiom and the primary H & C axioms. To elucidate this idea, let us transform the condition H into its equivalent form which is a straight conversion, or a “mirror reflection”, of the condition C:

Definition $4'$. We shall say that a single choice function c satisfies the *heredity* condition, H, if for every $X \in \mathcal{U}$ and for its every decomposition $\{X^{\nu}\}_{\nu \in N}$ in $\mathcal{U}$, i.e. for every family of sets from $\mathcal{U}$ satisfying (24), and such that a given $x \in X$ belongs to every $X^{\nu}, \nu \in N$, we have

$$x = c(X) \Rightarrow (\forall \nu \in N :\ x = c(X^{\nu})). \tag{30}$$

On noticing that every subset $X^{'} \subseteq X$ together with Xitself forms a decomposition of X, it is easy to see that Definition 4’ is equivalent to Definition 4.

Definition 10. We shall say that a single-valued choice function c on $\mathcal{U}$ satisfies the *Condorcet–Sen condition*, CS, if for every $X \in \mathcal{U}$, for every $x \in X$, and for every decomposition $\{X^\nu\}_{\nu \in N}$ of X in $\mathcal{U}$ such that $x \in \bigcap_{\nu \in N} X^\nu$, we have

$$x = c(X) \Leftrightarrow (\forall \nu \in N : x = c(X^\nu)). \tag{31}$$

As an immediate consequence of (25) and (30), we obtain

Proposition 6. For an arbitrary $\mathcal{U}$, the conjunction H & C is equivalent to the condition CS.

Now everything is in place to present short and transparent proofs of principal criteria of choice function rationality.

Theorem 1. (Richter [212]). With an arbitrary $\mathcal{U}$, for a single choice function c to be rational it is necessary and sufficient that c satisfies RA.

Proof. If c satisfies RA, then it is obviously rational since it is already represented by (29) in the form (13). Conversely, if c is rational, i.e. satisfies (13) with some R, then it is easy to verify directly that c satisfies RA. Indeed, in such a case $(\forall y \in X : xR_c y) \Rightarrow (\forall y \in X\ \exists X^y \in \mathcal{U} : x = c(X^y), y \in X^y) \Rightarrow (\forall y \in X : xRy) \Rightarrow x = c(X)$, i.e. converse implication in (29) (from right to left) is true; the direct implication, as it was already said, is evident.

The following are versions of the fundamental theorem of Sen [222] where the conjunction of H and C is proposed as the criterion of choice rationality under a complete $\mathcal{U}$.

Theorem 2. (Mirkin [63]). With an arbitrary $\mathcal{U}$, for a single-valued choice function c to be rational it is necessary and sufficient that c satisfies CH.

This theorem is a direct corollary of Theorem 1 and Proposition 5.

Theorem 3. With an arbitrary $\mathcal{U}$, for a single-valued choice function c to be rational, WARP is sufficient.

This theorem follows from Theorem 2 and Proposition 2.

Theorem 4. With an arbitrary $\mathcal{U}$, for a single-valued choice function c to be rational it is necessary, and if $\mathcal{U}$ is $\cup$-complete, it is also sufficient that c satisfies H and C.

This theorem is a direct corollary of Theorem 2 and Proposition 3.

Theorem 5. If $\mathcal{U}$ is 2-complete, then for a single-valued choice function c to be rational it is necessary and sufficient that c satisfies H and C.

Proof. Let c satisfy H and C. Then, owing to Proposition 6, the equivalence (31) holds for any two-elements sets $X^\nu \in \mathcal{U}$ as well. So we obtain the *Condorcet equation*

$$x = c(X) \Leftrightarrow (\forall y \in X : x = c(\{x, y\})) \tag{32}$$

which in fact rationalizes c by the relation $xRy \Leftrightarrow x = c(\{x, y\})$. Conversely, let c be rationalized by some R in (13). Then fulfilling the conditions H and C follows immediately from their definitions.

As a corollary from Theorems 2 and 5, we obtain, in addition to Proposition 2, one more case of $\mathcal{U}$ for which the condition CH is equivalent to the conjunction of H and C:

Proposition 7. If $\mathcal{U}$ is 2-complete, then condition CH is equivalent to the conjunction of H and C.

The following theorem is a corollary from Theorem 2 and Proposition 4.

Theorem 6. If $\mathcal{U}$ is irreducible, then for a single-valued choice function c to be rational it is necessary and sufficient that c satisfies H.

Now we shall present some criteria of narrow rationality (Definition 1).

Theorem 7. (Richter [211, 212]); Suzumura [234]). With an arbitrary $\mathcal{U}$, for a single-valued choice function c to be rational in the narrow sense, it is necessary and sufficient that c satisfies SARP.

The proof of this theorem is relatively difficult, and since we do not need it in the sequel, we omit it (see, for example, [212], Corollary 1 from Theorem 8).

The following theorem is a version of Theorem 3 in [94].

Theorem 8. With a 3-complete $\mathcal{U}$, for a single-valued choice function c to be rational in the narrow sense, it is necessary and sufficient that c satisfies WARP.

To prove this theorem for single-valued choice, consider the following statement which can be extracted from the reasoning in Remark 5.

Lemma 2. If $\mathcal{U}$ is 3-complete, then for single-valued choice functions (broad) rationality is equivalent to the narrow rationality.

We can now see that sufficiency in Theorem 8 follows from Theorem 3 and Lemma 2. Necessity follows easily from the definitions.

The proof of Theorem 8 is one of the few among all the preceding statements and proofs that exploits in an essential fashion the single-valuedness of choice. The other statements are rather easily (often almost immediately) extendable to the general set-valued choice. Now we take up some other statements where the single-valuedness of choice is vitally important.

Proposition 8. With an arbitrary $\mathcal{U}$ and for single-valued choice functions, H implies C.

The proof of this proposition is completely parallel to that of Proposition 2 above.

Theorem 9. (Uzawa [236]). If $\mathcal{U}$ is 3-complete, then for a single-valued choice function c on $\mathcal{U}$ to be rational, and, equivalently, to be narrowly rational, it is necessary and sufficient that c satisfies H (i.e. IIA).

Proof. By Propositions 7 and 8, under 3-completeness of $\mathcal{U}$ we have $\mathrm{H} \Leftrightarrow \mathrm{H}\,\&\,\mathrm{C} \Leftrightarrow \mathrm{CH}$. By virtue of Theorem 2, this is equivalent to rationality, and according to Lemma 2 also to narrow rationality of single-valued choice functions on $\mathcal{U}$.

Combining Theorems 1, 2, 5, 7, 8 and 9, we obtain, as a strengthening of Proposition 1, a deeper connection between IIA (i.e. H) and other conditions on single-valued choice functions c on 3-complete families $\mathcal{U}$.

Proposition 9. If $\mathcal{U}$ is 3-complete, then for single-valued choice functions on $\mathcal{U}$ the conditions H, WARP, SARP, CH, $\mathrm{H}\,\&\,\mathrm{C}$ and RA are equivalent.

Finally, we present another type of family $\mathcal{U}$ for which the condition H is equivalent to rationality of single-valued choice functions.

Theorem 10. If $\mathcal{U}$ is pairwise-$\cap$-complete, then for a single-valued choice function c to be rational it is necessary and sufficient that c satisfies H.

Proof. Sufficiency follows from Theorem 3 and Proposition 1, and necessity from Theorem 2 and Proposition 3.

3.4. Some remarks on set-valued choice. We now touch briefly on the general case of set-valued choice. The forms of expressions, as used above for single-valued choice, can in fact be applied word for word to this general case as well. What is needed is the replacement of the equality $x = c(X)$ by the inclusion $x \in C(X)$. With such replacement, all the definitions of conditions H (formerly IIA), C, CH, RA (and CS in Proposition 6), as well as Theorems 1-6 are still valid together with their proofs given mutatis mutandis; the same relates to Propositions 1 (except the converse part of its statement) and 2-7. As for the definitions of WARP and SARP in the set-valued case, they need a more careful approach, and with their appropriate formulations the statements of Theorems 7 and 8 still remain valid (see, for example, [234]); but we do not need them here. All we need in the sequel are abstract versions of "independence of irrelevant alternatives" (or heredity H), of concordance C, and of their amalgamation, concordant heredity CH. In fact these conditions remain in the general case without changes, except for the replacement of $x = c(X)$ by $x \in C(X)$.

The following theorem will help elucidate the role of conditions H and C taken separately [1]. Here the general case of set-valued choice is considered, so in the definitions of H and C one should take $x \in C(X)$ instead of $x = c(X)$ (though one may continue to deal with the particular case, a single-valued choice $x = c(X)$).

---

[1] This theorem, established by the author, has been published in a collection of papers which is hardly accessible to a Western reader; its equivalent version in English was quoted in the survey by Aizerman [84].

Theorem 11. For an arbitrary $\mathcal{U}$, a choice function C satisfies H, or respectively, C iff it is representable in the *semirational* form

$$C(X) = \{x \in X \,\big|\, \forall y: \; xR(X)y\}, \; X \in \mathcal{U}, \tag{33}$$

with a pseudo-relation $R(X)$ decreasing (respectively, increasing) in X, in the sense that if $X' \subseteq X$, then $xR(X)y \Rightarrow (resp., \Leftarrow) xR(X')y$.

This Theorem will follow from the results of Section 5. It is clear that the conventional rational case (14) is the case when a pseudo-relation $R(X)$ is indeed a true relation, i.e. it is in fact independent on X. This means that formally $R(X)$ is both (non-strictly) decreasing and increasing in X. (Caution: for an arbitrary $\mathcal{U}$, out of cases given in Theorems 4 and 5, even under H & C there may be no such a relation R. Then pseudo-relations $R(X)$ in representations of the form (33) for H and for C must be different).

Extending some of the rationality conditions from a single-valued choice to a set-valued choice can be performed in different ways. Consider the case of the extension of the independence of irrelevant alternatives. Such an extension was carried out earlier by simply replacing $x = c(X)$ by $x \in C(X)$; this leads to the following formulation of the condition H in terms of sets as: if $X, X' \in \mathcal{U}$ and $X' \subseteq X$, then

$$C(X) \cap X' \subseteq C(X'). \tag{34}$$

However, this is not the only natural way of extending IIA from a single-valued to a set-valued choice. Among other possibilities we shall choose and use in the sequel one from [121], Postulate 5*; [146], Axiom 2; [87], Condition 0; [219], Condition W7; [110], "Strong Superset Condition".

Definition 11. We shall say that a set-valued choice function C on $\mathcal{U}$ satisfies the condition of *casting out rejected alternatives*, O, if for every $X, X' \in \mathcal{U}$ such that $X' \subseteq X$,

$$X^* = C(X), \; X^* \subseteq X' \Rightarrow X^* = C(X'). \tag{35}$$

This definition in fact treats the choice set $C(X)$ as a whole, as a direct counterpart of the chosen element $c(X)$ in the single-valued choice formulation of IIA (see (20), (21) above). This treatment of the condition O will be examined in Section 5.

4. Examination of behavior rationality in some models

Here we shall consider three particular models of decision making: one describes consumer choice and two others represent the cases of hypochoice and hyperchoice in the abstract choice model given in Section 2.

4.1. A model of consumer choice. Let us start with a non-conventional model of consumer choice under rationing of consumption. This model was proposed by Braverman [114] as an attempt to describe the former Soviet-type *economics of shortages*. In this model the variables which affect the consumer behavior are the given limitations on the feasible commodity quantities. Prices and income values may still exist, but they are fixed and so they can be removed from the explicit description of the person's behavior as a function of variable parameters.

Let $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, as earlier, be a commodity bundle, and let $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ be the vector of admissible upper bounds for consumption of corresponding goods, $\mathbf{b} \in R^n_+$. Following [114] with a slight modification, let us introduce the dependence of the commodity bundle consumed, $\mathbf{x}$, on the limitation vector $\mathbf{b} \in R^n_+ : \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{b})$, called *consumer choice function*. This function must obey the obvious condition

$$\mathbf{o} \leqq \mathbf{f}(\mathbf{b}) \leqq \mathbf{b}. \tag{36}$$

Definition 12. We shall say that the consumer choice function $\mathbf{f}(\mathbf{b})$ is *normal*, if for any $\mathbf{b}, \mathbf{b}'$ such that

$$f_i(\mathbf{b}) = b_i \Rightarrow b_i' = b_i \tag{37}$$

and

$$f_i(\mathbf{b}) < b_i \Rightarrow b_i' \geqslant f_i(\mathbf{b}) \tag{38}$$

we have

$$\mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{f}(\mathbf{b}'). \tag{39}$$

This normality condition yields an axiomatic description of consumer choice. Consider this model from the choice theory standpoint. For an outside observer $\mathbf{f}(\mathbf{b})$ plays the role of a choice function $c(X(\mathbf{b}))$ defined on a family $\mathcal{U} = \{X(\mathbf{b})\}_{b \in \mathcal{B}}$ of admissible sets in $U = R^n_+$:

$$X(\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in R^n_+ \big| \, 0 \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{b}\}, \tag{40}$$

where $\mathcal{B}$ is a parameter set. In particular, but not necessarily, we may take $\mathcal{B} = R^n_+$. It is easy to see, that a) family $\mathcal{U}$ is irreducible (Definition 3) and b) a normal choice function $f(\mathbf{b})$ on $\mathcal{U}$ satisfies the condition H, i.e. independence of irrelevant alternatives. The latter is a direct corollary of normality (37)–(39) (and moreover, is equivalent to normality under continuity of $\mathbf{f}(\mathbf{b})$). To see that H is satisfied it is enough to take $X(\mathbf{b}') \subseteq X(\mathbf{b})$, with $\mathbf{f}(\mathbf{b}) \in X(\mathbf{b}')$, which implies $\mathbf{f}(\mathbf{b}) \leqq \mathbf{b}' \leqq \mathbf{b}$. Therefore the premises (37) and (38) of normality is fulfilled, hence the conclusion (39) must be true, and so H is satisfied. Using Theorem 6, we obtain the statement about the consumer choice rationality for the outside observer:

Theorem 12. The normal consumer choice in Braverman's model is rational as the single-valued choice function $c(X(\mathbf{b})) = \mathbf{f}(\mathbf{b})$ given on a parametrical family $\mathcal{U} = \{X(\mathbf{b})\}_{b \in \mathcal{B}}$ of admissible sets of the form (40), with an arbitrary $\mathcal{B}$.

In other words, the consumer choice $f(\mathbf{b})$ here may be "explained" by means of optimization of the form (13) on $X(\mathbf{b})$ with some preference relation R on R^n_+ (or, equivalently, of the form (18) with some strict preference relation P on R^n_+).

We emphasize that in Theorem 12 we meant "rationality" in the broad, not the narrow sense. The latter is generally false for Braverman's model, which can be seen from the following example. Take $n = 3, \mathbf{b}^1 = (\alpha, 1, 1), \mathbf{b}^2 = (1, \alpha, 1), \mathbf{b}^3 = (1, 1, \alpha)$ (with $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$ and $I = 2\alpha + 1$, if one wishes to take into account the budget constraint explicitly), and let $\mathbf{f}(\mathbf{b}^1) = (\alpha, \alpha, 1), \mathbf{f}(\mathbf{b}^2) = (1, \alpha, \alpha)$ and $\mathbf{f}(\mathbf{b}^3) = (\alpha, 1, \alpha)$. Then one can easily see that SARP is violated, hense the narrow rationality is impossible here, although $\mathbf{f}(\mathbf{b})$ is normal.

Let us recall that in a monetary economy, even under the conditions of deficit, the consumer has to obey the budget constraint $\mathbf{pf}(\mathbf{b}) \leqslant I$, or, in terms of the budget set $B = B(\mathbf{p}, I)$ in (2) (remember that $\mathbf{p}$ and I are fixed), the condition

$$\mathbf{f}(\mathbf{b}) \in B. \tag{41}$$

The presence of the budget constraint and perhaps other considerations may force the consumer to abandon the "best" corner point $\mathbf{b}$ (here we implicitly suppose that all commodities are desirable) in the set $X(\mathbf{b})$ admissible to him as seen by the outside observer, and to choose a point $f(\mathbf{b})$ which is typically $\leqslant \mathbf{b}$. From the consumer's standpoint, it is natural to consider as admissible the narrower sets of the form

$$X^I(\mathbf{b}) = X(\mathbf{b}) \cap B. \tag{42}$$

The budget constraint is essential only if $\mathbf{pb} > I$, i.e. when $X^I(\mathbf{b})$ is indeed smaller than $X(\mathbf{b})$.

Consider the following example. Let $n = 2, \mathbf{p} = (1, 1), I = 4$, and $\mathbf{b} = (3, 3), \mathbf{b}' = (4, 2), \mathbf{b}'' = (2, 4)$. Let $\mathbf{f}(\mathbf{b}) = (3, 1)$ and $\mathbf{f}(\mathbf{b}') = \mathbf{f}(\mathbf{b}'') = (2, 2)$. Then for the set $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}''\}$ the normality condition is fulfilled, and hence, both for $\mathcal{U} = \{X(\mathbf{b})\}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}}$ and $\mathcal{U}^I = \{X^I(\mathbf{b})\}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}}$ the condition H is valid. However, because

$$X^I(\mathbf{b}) \subseteq X^I(\mathbf{b}') \cup X^I(\mathbf{b}''), \tag{43}$$

the condition CH is violated (and hence WARP also fails, which can be seen independently by comparing $X(\mathbf{b})$ and $X(\mathbf{b}^{'})$). Therefore, by Theorem 2, the described consumer choice is irrational when considering the sets $X^I(\mathbf{b})$ admissible.

The reason for the discrepancy between this conclusion and Theorem 12 is that a possible "rational explanation" of consumer choice, as seen by the outside observer, requires the specific feature of the strict preference P stated as (18). Specifically, the element $\mathbf{x} = (2, 2)$ belonging to each of $X(\mathbf{b}), X(\mathbf{b}'), X(\mathbf{b}'')$, and chosen in $X(\mathbf{b})'$ and $X(\mathbf{b}'')$ but rejected in $X(\mathbf{b})$, can be dominated in $X(\mathbf{b})$ only by some $y \in X(\mathbf{b})\backslash(X(\mathbf{b}') \cup X(\mathbf{b}''))$, so that $y \in X(\mathbf{b})\backslash X^I(\mathbf{b})$. This means that y that dominates x is not in fact the commodity bundle which might have been considered by the consumer as a feasible alternative. (I avoid the word "preferable" because WARP is violated here). So, from the consumer's point of view, the explanation of the choice by means of such a preference P is not valid.

This example raises the following question: is it possible to obtain any result about the rationality, based only on external observations of the admissible sets $X(\mathbf{b})$, without knowing the budget set B, and hence knowing "true" feasible sets $X^I(\mathbf{b})$ only incompletely? The answer is "yes". To show this, let us consider a special but rather natural type of parameter sets $\mathcal{B}$.

Definition 13. We shall call a set $\mathcal{B} \subseteq R^n$ *rectangular* if it is decomposable into a Cartesian product $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n$ of some sets $\mathcal{B}_i$ of real numbers.

The examples of rectangular sets $\mathcal{B}$ would be $\mathcal{B} = R^n_+$, or more generally, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b} \in R^n | \mathbf{0} \leqq \mathbf{b} \leqq \bar{\mathbf{b}}\}$. It is easy to see that the rectangularity implies the following property: for every $\mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in \mathcal{B}$ it is true that $\min\{\mathbf{b}', \mathbf{b}''\} \in \mathcal{B}$, where $\min\{\mathbf{b}', \mathbf{b}''\}$ denotes the n-vector with components $\min\{\mathbf{b}'_i, \mathbf{b}''_i\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Lemma 3. If the parameter set $\mathcal{B}$ is rectangular, then the family $\mathcal{U} = \{X^I(\mathbf{b})\}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}}$ is pairwise-$\cap$-complete.

Proof. It is clear that $X(\mathbf{b}') \bigcap X(\mathbf{b}'') = X(\mathbf{b})$, where $\mathbf{b} = \min\{\mathbf{b}', \mathbf{b}''\}$, and furthermore $X^I(\mathbf{b}') \bigcap X^I(\mathbf{b}'') = X^I(\mathbf{b})$. Since due to rectangularity of $\mathcal{B}$, $\mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in \mathcal{B}$ implies $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ then $\mathcal{U}$ is pairwise-$\cap$-complete.

Theorem 13. Independent of the fixed, but unknown, budget set $\mathcal{B}$, if the family $\mathcal{B}$ is rectangular, then the normal consumer choice in Braverman's model is rational when considering $\mathbf{f}(\mathbf{b})$ as a single-valued choice function $c(X^I(\mathbf{b})) = \mathbf{f}(\mathbf{b})$, given on a parametrical family $\mathcal{U} = \{X^I(\mathbf{b})\}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}}$ of inner subjectively admissible sets.

Proof. By Theorem 10 and Lemma 3, and the fact that $\mathbf{f}(\mathbf{b})$ as a single-valued choice function which also satisfies the condition H, $\mathbf{f}(\mathbf{b})$ must be rational.

We have thus considered a case, when we can assert the rationality of person's behavior in spite of our lack of complete knowledge of the person's subjective views about admissible sets.

4.2. Abstract choice model: hypochoice. Let us consider now the case of hypochoice in the abstract choice model sketched in Section 2. Let us admit that a given choice function $C : \mathcal{U} \to 2^U$ yields empty values on some subfamily $\mathcal{U}^{\varnothing} = \{X \in \mathcal{U} \mid C(X) = \varnothing\}$. Suppose for simplicity that on the rest of $\mathcal{U}$, i.e. on $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \backslash \mathcal{U}^{\varnothing}$, the function C is single-valued, so C describes either a unique choice or indecisiveness. As discussed in Section 2, the phenomenon of the empty choice, or abstaining from choice, can be considered a new *imagined* alternative: denote it $\dot{\mathfrak{i}}$. Then we obtain the new, extended totality of alternatives $\bar{U} = U \bigcup \{\dot{\mathfrak{i}}\}$, the new family of admissible representations $\bar{\mathcal{U}} = \{X \bigcup \{\dot{\mathfrak{i}}\} \mid X \in \mathcal{U}\}$ and the new, purely single-valued choice function $\bar{c}$ on $\bar{\mathcal{U}}$ defined as

$$\bar{c}(X \cup \dot{\mathfrak{i}}) = \begin{cases} x & \text{if } C(X) = \{x\}, \\ \dot{\mathfrak{i}} & \text{if } C(X) = \varnothing. \end{cases} \tag{44}$$

Call it a *surrogate* choice function. The family $\bar{\mathcal{U}}$ is evidently incomplete, even when $\mathcal{U}$ is complete, because $\bar{\mathcal{U}}$ contains no sets that do not include $\dot{\mathfrak{i}}$.

The rationality of the initial function C does not guarantee the rationality of its *surrogate* $\bar{c}$. Indeed, consider the simplest case of two primary options: $U = \{x, y\}$, $\mathcal{U}$ is complete for U, and C on $\mathcal{U}$ is given by $C(\{x\}) = x$, $C(\{y\}) = \{y\}$, $C(\{x, y\}) = \varnothing$. It is the situation of Buridan's ass in front of two equivalent piles of hay. This choice function is rational: it is rationalized by the non-antisymmetric dominance relation P of the form xPy and yPx in (18). Nevertheless, the corresponding surrogate choice function $\bar{c}$ cannot be rational since $\bar{c}(\{x, y, \dot{\mathfrak{i}}\}) = \dot{\mathfrak{i}}$ but $\bar{c}(\{x, \dot{\mathfrak{i}}\}) = x$, which contradicts IIA (H). Thus, Buridan's ass is eventually seen as irrational.

We must examine conditions of the rationality for the surrogate choice functions $\bar{c}$ in the general case. For this purpose the general criterion, the condition CH (Theorem 2), can be applied. The application of CH, i.e. (26), (27), is reduced to two separate cases: a) $x \in U$ — then the criterion demands the satisfaction of CH, i.e. the rationality of the single-or-empty choice function C on $\mathcal{U}$; b) $x = \dot{\mathfrak{i}}$ — then the criterion is reduced to the following requirement: for all $X \in \mathcal{U}$ and $\{X^\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}^{\varnothing}$ such that $X \subseteq \cup_{\nu \in N} X^\nu$, one obtains $C(X) = \varnothing$, i.e. $X \in \mathcal{U}^{\varnothing}$.

Case b) can be described in other terms as follows. Denote $U^{\varnothing} = \bigcup \{X \mid X \in \mathcal{U}^{\varnothing}\}$. Then the requirement of CH in b) is equivalent to

$$C(X) = \varnothing \Leftrightarrow X \subseteq U^{\varnothing}. \tag{45}$$

Thus we obtain:

Theorem 14. For the surrogate choice function $\bar{c}$ (44) to be rational it is necessary and sufficient that a) the original choice function C be rational, and that b) equation (45) holds.

To interpret equation (45), let us call $U^{\varnothing}$ the set of *conditionally unfit* alternatives. Then (45) means that the person refrains from (real) choice if and only if the admissible (real) alternative set consists entirely of conditionally unfit alternatives. Here the word "conditionally" implies that a conditionally unfit alternative might be chosen, when not all present alternatives are unfit. The example is a modification of the above Buridan's ass case, when an extra real alternatives z is added and when $\mathcal{U} = \{\{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}\}$ with $C(\{x,y\}) = \varnothing$, $C(\{x,z\}) = \{x\}$, $C(\{y,z\}) = \{y\}$. The primary function C on $\mathcal{U}$ is obviously rationalized by the following $P: xPz, yPz, xPy, yPx$, and the surrogate $\bar{c}$ on $\mathcal{U}$ is rationalized, in addition, $zP\,\mathfrak{i}$. The alternatives x and y are conditionally unfit, and each of them is chosen in the corresponding context.

A stronger and more natural result is obtained when the family $\mathcal{U}$ is one-complete, i.e. it includes all singletons. Note that usually "choice" from one-element sets is not considered, being implicitly treated as a degenerate case, especially when the strong rationality requirement does not allow empty choice. (The former Soviet "elections" on the principle "one seat–one candidate" were the real example of such "choice"). But if one accepts the possibility of empty choice, then the choice from singletons, *Hobson's choice*[1] becomes meaningful and can lead to useful results. Let us consider an alternative which is rejected when presented alone. In terms of the conventional rational choice the alternative x such that $C(\{x\}) = \varnothing$ must be *selfdominated* in the sense that xPx. Therefore such alternatives may never be chosen in any situation no matter what other alternatives are. They may be called *absolutely unfit*. In spite of the ultimate simplicity, the inclusion of such alternatives into consideration may yield a useful extension of the traditional framework of choice rationality (such a phenomenon was considered in the survey [84], and also, in an implicit form, in [227]). Returning to the above construct, we can see that in case of one-complete family $\mathcal{U}$, each conditionally unfit alternative turns out to be absolutely unfit: indeed, by (45),

$$x \in U^{\varnothing} \Leftrightarrow C(\{x\}) = \varnothing\,, \tag{46}$$

and so $x \in U^{\varnothing} \Leftrightarrow (xPx \text{ or } \mathfrak{i}Px)$ for every possible rationalization of $\bar{c}$. Thus, in the case of one-completeness of $\mathcal{U}$ Theorem 14 can be extended to:

Theorem 15. If $\mathcal{U}$ is one-complete, then in addition to conditions of Theorem 14 under rationality of $\bar{c}$ the following is true:

$$x \in U^{\varnothing} \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{U}:\ (x \notin C(X)). \tag{47}$$

[1] *Hobson's choice*, the choice of taking either that which is offered or nothing; the absence of a real choice or alternative. [after Thomas Hobson (1544-1631), of Cambridge, UK, who rented horses and gave his customer only one choice, that of the horse nearest the stable door—Webster's Dictionary].

4.3. Abstract choice model: hyperchoice. Now we shall consider the general case of set-valued choice function $C(X)$ where the condition $|C(X)| = 1$ is not assumed. We shall call this general case *hyperchoice*, using now the weaker meaning of this term, namely, not requiring that $|C(X)| > 1$ for each X, but admitting that $|C(X)| = 1$ (unique choice) or even $|C(X)| = 0$ (empty choice) for some $X \in \mathcal{U}$. Following the approach described in Section 2, we will treat such a choice as that of *composite objects*, viz. of initial object sets taken as a whole. From this standpoint, the presentation of a set $X \subseteq U$ of initial objects $x, y, \ldots \in X$ means the presentation of the set $\mathcal{X} = 2^X$ of mentioned composite objects $Y, Z, \ldots \subseteq X$.

For a given choice function $C : \mathcal{U} \to 2^U$ we introduce the *surrogate* single-valued choice-function $\bar{c} : \bar{\mathcal{U}} \to \bar{U}$, where $\bar{U} = 2^U$, $\bar{\mathcal{U}} = \{2^X | X \in \mathcal{U}\}$, and $\bar{c}(\mathcal{X})$, $\mathcal{X} \in \bar{\mathcal{U}}$, is defined as

$$\bar{c}(2^X) = C(X). \tag{48}$$

The set $C(X)$ in the right-hand side of (48) is treated as a point in the set $\bar{U} = 2^U$, this meaning that $\bar{c}$ is actually the single-valued choice function.

Let us examine the rationality $\bar{c}$. Note that its domain, the family $\bar{\mathcal{U}}$, is incomplete (unless $\mathcal{U}$ contains only singletons). Indeed, $\bar{\mathcal{U}}$ is a collection of families of sets where each family $\mathcal{X} \in \bar{\mathcal{U}}$ must have a very special form, namely, $\mathcal{X} \in \bar{\mathcal{U}}$ cannot contain some X without containing every $Y \subseteq X$ at the same time. However, $\bar{\mathcal{U}}$ possesses an important property.

Lemma 4. For an arbitrary $\mathcal{U}$, the corresponding surrogate family $\bar{\mathcal{U}}$ is irreducible.

Proof. Let $\bar{X} \in \bar{\mathcal{U}}, \{\bar{X}^\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \bar{\mathcal{U}}$ and $\bar{X} \subseteq \cup_{\nu \in N} \bar{X}^\nu$. Then $\bar{X} = 2^X$ and $\bar{X}^\nu = 2^{X^\nu}$, $\nu \in N$, for some $X, X^\nu \in \mathcal{U} (\nu \in N)$, with $2^X \subseteq \cup_{\nu \in N} 2^{X^\nu}$. The latter means that for some $X^* \in \{X^\nu\}$ we obtain $X \subseteq X^*$, hence $\bar{X} = 2^X \subseteq 2^{X^*} = \bar{X}^*$ for some $\bar{X}^* \in \{\bar{X}^\nu\}$.

(It is easy to verify also that if $\mathcal{U}$ is pairwise-$\cap$-complete then so is $\bar{\mathcal{U}}$.)

It follows form Lemma 4 and Theorem 6 that the surrogate single-valued choice function $\bar{c}$ on $\bar{\mathcal{U}}$ is rational if and only if it satisfies the condition H. It is easy to see that the condition H for $\bar{c}$ on $\bar{\mathcal{U}}$ is actually equivalent to the condition O (Definition 11) for the original set-valued choice function C on $\mathcal{U}$. Thus we obtain

Theorem 16. Let $C : \mathcal{U} \to 2^U$ be a set-valued choice function. For the corresponding surrogate single-valued choice function $\bar{c}$ (48) on $\bar{U}$ to be rational it is necessary and sufficient that C satisfies the condition O.

Let us interpret the fact of rationality of the surrogate choice function $\bar{c}$ in terms of the initial choice function C. This fact means that there exists a binary relation $\mathcal{R}$ on 2^U, we shall call it *hyperrelation*, such that

$$C(X) = X^* \quad \text{such that} \quad \forall Y \subseteq X : \ X^* \mathcal{R} Y \tag{49}$$

(we assume that $C(X)$ in (49) is well defined, i.e. the corresponding $X^* \subseteq$ $\subseteq X$ exists and is unique).

The expression (49) was introduced in [87] as the *hyperdominant choice mechanism*. Theorem 16 above presents a reformulation (in a generalized form for arbitrary $\mathcal{U}$) of Theorem 7 in [87]; it says that a choice function $C : \mathcal{U} \to 2^U$ can be generated by a hyperdominant mechanism (49) if and only if it satisfies the condition O. We have interpreted the ability to generate a choice function satisfying O on a different level, namely on the level of object bundles taken as composite alternatives. This interpretation was given in terms of a single-valued choice of such composite alternatives.

Note that the former problem of rationality for the hypochoice is now embedded into the latter more general problem for the hyperchoice. The empty bundle $X^* = \varnothing$ here is treated as equally eligible, and the application of the rationality criterion (condition H for surrogate choice or, equivalently, O for original choice) immediately leads to the notions of conditionally unfit or, with one-complete $\mathcal{U}$, absolutely unfit objects in the same manner as it has been done in the previous hypochoice analysis.

To conclude, let us pose this additional question: under what conditions is a choice function $C : \mathcal{U} \to 2^U$ representable in the form of the *hyperscale optimization*

$$C(X) = X^* \quad \text{such that} \quad X^* = \arg\max V(Y), \tag{50}$$

where $V(Y)$ is a *hyperscale*, viz. a mapping $V : \ 2^U \to L$ (L is a linearly ordered set)?

The answer is easily obtained from Theorem 7 by applying SARP to the surrogate choice function $\bar{c}$ (48), which in terms of the original C yields the following *hyper*-SARP formulation: for any $X^1, \ldots, X^n \in \mathcal{U}$, $n > 1$, holds

$$X^{*^i} = C(X^i), X^{*^i} \subseteq X^{i+1}, \ i = 1, \ldots, n \Rightarrow X^{*^1} = \ldots = X^{*^n}. \tag{51}$$

The final result can be formulated as follows:

Theorem 17. With an arbitrary $\mathcal{U}$, for a set-valued choice function $C : \mathcal{U} \to 2^U$ to admit a hyperscale optimizational representation (50) it is necessary and sufficient that C satisfies hyper-SARP (51).

In this section we have considered applications of the rationality criteria which were elaborated earlier for the conventional choice-theoretical models. We applied those criteria to three problems while demonstrating the step-by-step departure from the common view of alternatives. In the first problem, Braverman's model, the admissible alternative sets were allowed to be partially unobservable. In the second problem, the hypochoice, the initial totality of options was augmented by an artificial, non-real alternative. And in the third problem, the hyperchoice, we changed the very nature of the original totality of options by switching to the newly created totality of alternatives. The next step is the study of rational behavior in the absence of explicit alternatives. It is taken up in the next section.

5. A model of rational decisions with hidden alternatives

5.1. Preliminary reasoning. As mentioned in the Introduction, the common notion of decision making as of selecting an alternative among a set of admissible alternatives admits different modes of formalization. The most refined formalization, the abstract scheme of choice theory, has been presented in Section 3. The key concept of this theory is the choice correspondence (function): the admissible alternative set $X \mapsto$ the chosen alternative(s) $c(X)$ $(C(X))$. It should be noted that already in earlier works in choice theory some other types of correspondences had been considered, such as an explicit dependency $C = C(X; R)$ on the underlying preference relation R, or on the "profile" $R = (R_1, \dots, R_n)$ of individual preferences R_i, when a collective choice is considered [95, 221], or a dependency on the variable composition of a group [232], and so on. Moreover, the decision problem itself can be formulated not as selection among primary objects named alternatives but a selection among other, secondary objects such as, e.g. a group ordering of primary alternatives. In the latter case it is the ordering of primary alternatives that deserve being called the true alternatives faced by DM rather than primary ones. Nevertheless, the alternatives and dependencies of the chosen alternatives on some "experiment conditions" are present in each typical statement of decision problem.

Now we shall take an important step and abandon an explicit consideration of alternatives in the formulation of the problem. The prerequisite for such a step lies implicitly in the Samuelson's idea of revealed preferences which serves as a source for an implicit judgement of the rationality of decisions. We take Samuelson's Weak Axiom of Revealed Preference and give it an equivalent form that is more convenient for the explication of the idea needed: for any $X, X' \in \mathcal{U}$

$$X' \ni c(X) \Rightarrow \text{ either } c(X') = c(X) \text{ or } c(X') \notin X. \tag{52}$$

The premise (left-hand side) of (52) means that the replacement of the former admissible set X by a new one $X^{'}$ is such that the former best choice $c(X)$ still remains admissible, hence it is natural to believe that the new situation (opportunity scope) of DM is at least as good as the old one. The two possibilities considered in the right-hand side of (52) mean that the new situation is either not better than the old one–and so DM does not change his decision—or is even better—and then DM makes a new decision which could not have been made in the old situation. Thus the new choice $c(X')$ is "revealed as better" than the old $c(X)$. Samuelson's approach includes the idea of implicit comparison of the worth of two distinct situations.

The formulation of WARP demands the explicit statement of the chosen alternatives. However, the corresponding formulation of its close variation, IIA (see Proposition 1), avoids such explicitness in the premise of the statement. Indeed, the equivalent formulation of IIA parallel to (52) has the following form: for any $X, X' \in \mathcal{U}$

$$X' \supseteq X \Rightarrow \text{ either } c(X') = c(X) \text{ or } c(X') \notin X. \tag{53}$$

As compared with (52), the only change we introduce is the change of the premise: the new one, $X^{'} \supseteq X$, does not require the condition $X^{'} \ni c(X)$ since this is already insured by the condition $X^{'} \supseteq X$ itself. What remains is the next step: to abandon the explicit indication of the chosen alternatives in the right-hand side of (53) as well. For this purpose we shall introduce and formalize the notions of *opportunity scope* and *value of opportunity scope*. We intentionally introduce the unusual term *opportunity scope* instead of the conventional *opportunity set* (or *space*), because "points" (elements) of the opportunity scope, in contrast to the usual opportunity set, in general, are not alternatives to be chosen.

Particular cases of an opportunity scope are the explicit indication of the set of the admissible alternatives, X, and of a parameter characterizing such a set. Examples of the latter are the classical budget set $B(\mathbf{p}, I)$ given by its parameters $\mathbf{p}, I$ and the non-classical consumer admissible set in Braverman's model, $X(\mathbf{b})$, given by the parameter $\mathbf{b}$, etc. Moreover, an opportunity scope may be given in general implicitly by indicating of "experiment conditions" under which the decision maker shall act. For example, the behavior of an undertaker is determined by the legislation under which he does his business. We can possess the exact and complete text of legislation but not know the alternative modes of behavior available to the businessman. Furthermore, we may estimate (or obtain by inquiry) the value of the current opportunity scope that is the best (highest) from DM's standpoint (e.g. an expected maximal profit). We denote the opportunity scope, independent of its nature, by X and save the notation $\mathcal{U}$ for the family of possible opportunity scopes; then we introduce the *scope value* as a function $v : \mathcal{U} \to L$, where L is a linearly ordered set. Thus,

$v(X)$, $X \in \mathcal{U}$, is a scale of values of opportunity scopes, and we can now introduce the axiomatic conditions of behavioral rationality in terms of the function v. Note that the well-known *indirect utility function*, which for a classical model of consumer of the form (1) is just the optimal value of the achievable utility: $v(\mathbf{p}, I) = \max_{\mathbf{x} \geqq 0 : \mathbf{px} \leqq I} u(\mathbf{x})$, may be considered an example of the scope value.

5.2. An abstract model. In what follows, we consider a simple model in which the opportunity scopes are finite sets of elements from some primary *opportunity space* U. Then the family $\mathcal{U}$ consists of some feasible sets of available point-wise opportunities, as in the case of alternative sets. We shall use the terminology from Definition 3 when speaking about various types of families $\mathcal{U}$. As an example of a situation where an "opportunity space" is modelled as a space in the set-theoretical sense, we consider a simple case of legislation in which each "law" has a form of "bill of rights". Then the totality of all conceivable rights forms a set U: every possible "right" is considered as a point of U, every possible "law" is a finite set $X \subseteq U$, and the usual set-theoretical concepts and operations are meaningful, in the sense that they form new legislation from old ones. Note that different $x \in U$ here are "rights", which create opportunities for admissible alternative modes of behavior, but in no case are x's themselves alternatives for DM's choice.

We introduce the first condition of rationality in terms of the scope value v; it is a direct analogue of IIA in the form (53).

Definition 14. A scope value $v : \mathcal{U} \to L$ satisfies the *monotonicity* condition, M, if for any $X, X' \in \mathcal{U}$

$$X' \supseteq X \Rightarrow v(X') \geqslant v(X). \tag{54}$$

This condition looks quite convincing: the more possibilities, the better. However, sometimes one might dispute this thesis. Recall Buridan's ass: the appearance of the second pile of hay worsens his position. Another reason for a worsening situation after enlarging the opportunity scope can be, for example, an additional expense on the choice procedure (information processing etc). A formal violation of the condition M is presented in Game example 2 in Section 2. There, the optimal expected gain $e(i^*)$ of DM, player 1, (viz. his regret with the opposite sign) for three possible actions $I = \{1, 2, 3\}$ is $e(1) = -\max_{j \in J} w_{1j} = -2$, but the optimal $e(i^{*\prime})$ for $I' = \{1, 2\}$ is $e(2) = -\max_{j \in J} w'_{2j} = -1$. Thus, $e(i^{*\prime}) > e(i^*)$, i.e. the gain increases after narrowing the set of possible actions, which plays the role of the opportunity set for DM.

This example, perhaps, looks a little artificial since the elements of the virtual payoff matrix, viz. of the regret matrix, change when changing the set of DM's actions. To avoid this shortcoming, consider still another game example.

Game example 3. Consider the well-known game *the battle of the sexes*, (see, for example [163]), the bimatrix game with the payoff bimatrix

$$\begin{bmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{bmatrix}, \tag{55}$$

where elements v_{ij} and u_{ij} of an ij-th entry (v_{ij}, u_{ij}) denote rewards of the players 1 and 2, respectively, when player 1 performs the action $i \in I$ and player 2 the action $j \in J$. Let us again use Stackelberg's approach, with the player 2 being the leader and player 1 the follower. To describe the corresponding solution of the game, denote $i^o(j) = \arg\max_{i \in I} v_{ij}$. Then the optimal action of player 2 is $j^* = \arg\max_{j \in J} u_{i^o(j),j}$ and of player 1 is $i^* = \arg\max_{i \in I} v_{ij^*}$. It is easy to see that in the above game (where $I = \{1,2\}$ and $J = \{1,2\}$) we have $j^* = 2$, $i^* = 2$ and the optimal reward of player 1 is $v_{i^*j^*} = v_{22} = 1$. However, if one changes the game by eliminating the second action of player 1, so that $I^{'} = \{1\}$, then we obtain $j^* = 1, i^* = 1$, and DM's reward becomes $v_{11} = 2$. Thus, adding a second possible action for DM only decreases his reward.

Therefore, the condition M is not universally true, but is simply a plausible assumption for a class of behavioral situations. The following condition is meaningful for a rather wide class of situations, though it is more restrictive and less evident than monotonicity. This condition, as opposed to M, requires that if, while enlarging the opportunity scope, an increase of the scope value takes place, then this increase should be not too large. Namely, if the opportunity scope is decomposed into several parts (with possible overlapping), then the value of the whole scope must not exceed the maximal value for its parts. This condition implicitly demands that the union of several opportunity scopes would not have created "essentially new" opportunities, which would yield a reward more than that for all opportunities contained in the initial scopes. In other words, more powerful opportunities cannot emerge as the result of merging some old ones.

Definition 15. Let $X \subseteq \mathcal{U}$ be a family of admissible opportunity scopes $\mathcal{X} \subseteq U$. Introduce the *value of* $\mathcal{X}$ as

$$V(\mathcal{X}) = \max_{X \in \mathcal{X}} v(X). \tag{56}$$

Definition 16. We shall say that a scope value v on $\mathcal{U}$ satisfies the *non-emergence* condition, N, if for every $X \in \mathcal{U}$ and for every decomposition $\mathcal{X}$ of X in $\mathcal{U}$, i.e. a family $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$ such that $\cup_{Y \in \mathcal{X}} Y = X$, we have

$$v(X) \leqslant V(\mathcal{X}). \tag{57}$$

The restrictive character of the condition N is obvious and can be illustrated by any counterexample in which joining several opportunities creates something essentially more powerful. To show it, consider:

Game example 4. Take the simplest zero-sum game with the payoff matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{58}$$

and under mixed strategies consider the standard maximin principle of behavior for player 1. Then the optimal maximin strategy of player 1 is $(p_1, p_2) = (1/2, 1/2)$ with the gain (maximin expected reward) 1/2, whereas for each of the two separate actions (pure strategies) 1 and 2 the maximin reward is 0. Thus, the creation of a new opportunity, the mixed strategy of the two pure strategies, leads to a violation of the non-emergence condition.

Now we introduce a combined condition:

Definition 17. We shall say that a scope value v on $\mathcal{U}$ satisfies the *non-emergent monotonicity* condition, NM, if for every $X \in \mathcal{U}$ and for each of its covering $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$ the inequality $v(X) \leqslant V(\mathcal{X})$ is fulfilled.

Proposition 10. For an arbitrary $\mathcal{U}$, NM implies both M and N. Conversely, if $\mathcal{U}$ is $\cup$-complete, then M & N implies NM.

Proof. Indeed, both M and N are special cases of NM: M— when $\mathcal{X} = \{X^{'}\}$, one-member family; N—when the covering $\mathcal{X}$ is, in fact, the decomposition of X. Conversely, let both M and N be satisfied. Take an arbitrary $X \in \mathcal{U}$ and one of its covering $\mathcal{X}$, and consider $X^{\cup} = \bigcup\{X|X \in \mathcal{X}\}$. Then $X^{\cup} \supseteq X$, and $X^{\cup} \in \mathcal{U}$ by virtue of $\cup$-completeness of $\mathcal{U}$. Applying sequentially conditions M and N, we obtain

$$v(X) \leqslant v(X^{\cup}) \leqslant V(\mathcal{X}), \tag{59}$$

A small transformation of the condition M helps elucidate its role as a natural counterpart of the condition N:

Definition 14′. We shall say that a scope value v on $\mathcal{U}$ satisfies the *monotonicity* condition, M, if for every $X \in \mathcal{U}$ and for each of its covering $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$,

$$V(\mathcal{X}) \leqslant v(X). \tag{60}$$

It is easy to see that Definitions 14 and 14' are equivalent.

Definition 18. We shall say that a scope value v on $\mathcal{U}$ is *aggregable* if for any $X \in \mathcal{U}$ and $\{X^{\nu}\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$ such that $X = \cup_{\nu \in N} X^{\nu}$, we have

$$v(X) = \max_{\nu \in N} v(X^{\nu}). \tag{61}$$

From Definitions 18, 14′, 16 and 15 follows that

Proposition 11. A scope value v on $\mathcal{U}$ is aggregable iff it satisfies both M and N.

We are now in the position to examine the inner structure of well behaved scope value functions.

Definition 19. We shall say that a scope value v on $\mathcal{U}$ is *primitively rational*, if it satisfies the following *separability* condition: v is representable in the form

$$v(X) = \max_{x \in X} w(x) \tag{62}$$

for every $X \in \mathcal{U}$, where $w(x)$ is some *generating value function* $w : U \to L$.

Consider, first, the simplest case where the inner structure of a scope value function v can be observed directly: it is the case of one-complete families $\mathcal{U}$, where values v on all singletons are given.

Theorem 18. Let $\mathcal{U}$ be a one-complete family. Then for a scope value v on $\mathcal{U}$ to be primitively rational it is necessary and sufficient that v satisfies the conjunction of conditions $\mathrm{M} \,\&\, \mathrm{N}$.

Proof. Let $\mathrm{M} \,\&\, \mathrm{N}$ be satisfied. Then for every $X \in \mathcal{U}$ we can take as its decomposition the *primitive decomposition* $\mathcal{X}$ consisting of its singleton subsets: $\mathcal{X} = \{\{x\}\}_{x \in X}$. Since, owing to Proposition 11, v is aggregable, we have

$$v(X) = \max_{x \in X} v(\{x\}). \tag{63}$$

We thus obtain the *autoseparable representation* (63) which is a special case of the separable representation (62), with $w(x) \equiv v(\{x\})$, $x \in U$. Conversely, if v is representable in a separable form (62), then it is easy to see that it obeys M and N.

For the general case, when $\mathcal{U}$ may or may not contain all singletons, we need a more complex analysis based on the above properties.

Definition 20. We shall say that a scope value v on $\mathcal{U}$ satisfies the *axiom of revealed value*, ARV, if for every $X \in \mathcal{U}$

$$v(X) \leqslant \max_{x \in X} w_v(x), \tag{64}$$

where $w_v : U \to L$ is the *revealed value function* defined by

$$w_v(x) = \min_{X : x \in X \in \mathcal{U}} v(X) \tag{65}$$

Lemma 5. Given any $X \in \mathcal{U}$, (57) holding for every $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$ that covers X is equivalent to (64) holding.

Proof. Take an arbitrary $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$ covering X. By definition of a covering, for every $x \in X$ there exists $X^x \in \mathcal{X}$ such that $X^x \ni x$. Then, by definition of $w_v(x)$, we have $w_v(x) \le v(X^x)$, hence

$$\max_{x \in X} w_v(x) \leqslant \max_{x \in X} v(X^x) \leqslant \max_{Y \in \mathcal{X}} v(Y) = V(\mathcal{X}). \tag{66}$$

Therefore, (64) implies (57) for arbitrary $\mathcal{X}$.

Conversely, denote X^{*x} a set in $\mathcal{U}^x = \{X \in \mathcal{U} | X \ni x\}$ such that $w_v(x) = v(X^{*x})$, and form the family $\mathcal{X}^* = \{X^{*x}\}_{x \in X}$. Then

$$V(\mathcal{X}^*) = \max_{x \in X} v(X^{*x}) = \max_{x \in X} w_v(x). \tag{67}$$

Therefore, (57) holding for any $\mathcal{X}$ that covers X, including $\mathcal{X}^*$, implies (64).

Proposition 12. Conditions NM and ARV are equivalent.

This Proposition immediately follows from Lemma 5.

Theorem 19. With an arbitrary $\mathcal{U}$, for a scope value v on $\mathcal{U}$ to be primitive rational it is necessary and sufficient that v satisfies ARV.

Proof. First, establish the following:

Lemma 6. ARV in the form of the inequality (64) is equivalent to the equality

$$v(X) = \max_{x \in X} w_v(x). \tag{68}$$

Proof of Lemma 6. Due to the definition of the revealed value w_v, for each $x \in X$ we have $w_v(x) \leqslant v(X)$, hence

$$\max_{x \in X} w_v(x) \leqslant v(X). \tag{69}$$

Combining (69) and (64) yields the result.

To prove the sufficiency in the Theorem, it suffices to note that the equation (68) in the modified ARV is exactly a separable representation of v, with w_v as the generating value function. To prove the necessity, note that if v is represented in the separable form (62), then for any $x \in \mathcal{U}$

$$w_v(x) = \min_{Y \colon x \in Y \in \mathcal{U}} v(Y) = \min_{Y \colon x \in Y \in \mathcal{U}} \max_{y \in Y} w(y) \geqslant \min_{Y \colon x \in Y \in \mathcal{U}} w(x) = w(x). \tag{70}$$

Therefore, for any $X \in \mathcal{U}$

$$\max_{x \in X} w_v(x) \geqslant \max_{x \in X} w(x) = v(X), \tag{71}$$

which yields ARV in the original form (64).

Note that for a separable v on an arbitrary $\mathcal{U}$, by (65) $w_v(x) \geqslant w(x)$; but, if $\mathcal{U}$ is one-complete, then we can assert from the definitions of w_v and of separability of v that, moreover, $w_v(x) = w(x) = v(\{x\})$ for all $x \in U$.

From Theorem 19 and Proposition 12 we obtain:

Theorem 20. With an arbitrary $\mathcal{U}$, for a scope value v on $\mathcal{U}$ to be primitively rational it is necessary and sufficient that v satisfies NM.

Further, from Theorem 20 and Proposition 10 we obtain:

Theorem 21. With an arbitrary $\mathcal{U}$, for a scope value v on $\mathcal{U}$ to be primitively rational it is necessary and, provided that $\mathcal{U}$ is $\cup$-complete, also sufficient that v satisfies $\mathrm{M} \,\&\, \mathrm{N}$.

5.3. Some examples. Theorems 18-21 present criteria for scope values to be primitively rational (separable). Consider several examples of applications of these criteria. As an illustration, consider another deviation from the standard model of the consumer, namely, the model of consumption under privileges, in particular characterizing the life of high officials in the recent Soviet history. The standard of living of such a person depended mainly on his or her having access to privileged goods and services, such as special stores, dining halls, hotels and so on; prices played a minor role. The set X of privileges available depended on the person's position in the official hierarchy. If a person A held several appointments, e.g. being both a member of the Central Committee of the Communist Party and a member of the Supreme Council of the USSR, then both sets of perks, X' and X'', might be united. However, since the privileges of the member of the Central Committee included more attractive perks than those of the member of the Supreme Council, A would not need to use the latter privileges. Hence the standard of living $v(X' \cup X'')$ determined by the union of both lists of privileges X' and X'' was not larger than the level $v(X')$ of the higher position. Therefore, the non-emergence condition N should be fulfilled for v. The monotonicity condition M is even more obviously satisfied. Since the family $\mathcal{U}$ of lists of privileges is naturally $\cup$-complete, Theorem 21 guarantees the existence of the corresponding hierarchy of privileges x, measured according to some generating scale $w(x)$, such that the person's standard of living v is primitively rational. This means that $v(X)$ is equal to the maximum level of the privileges $x \in X$ available to the person. Note that we have not considered explicitly alternative modes of a person's behavior, so this example is actually within the framework of the model of decision with hidden alternatives.

Formal examples. Now we shall consider more formal examples, that demonstrate the applicability of the above technique beyond the problem of estimation of "opportunity scopes" and even beyond decision theory in the narrow sense. We confine ourselves to the simplest case when the reference ordered set L consists of just two elements, say $L = \{0, 1\}$ (where naturally $0 < 1$). Let U be a set of some experts, or voters, $\mathcal{U}$ be some set of groups $X \subseteq U$ of experts, and $v(X) \in L$ be group attitude (estimate) to (of) fixed issue. Let two possible values, 0 and 1, denote approval ("yea") and disapproval ("nay") respectively. Such an assignment of values is technically convenient in order to deal with them as logical truth values. We can interpret such an assignment as measuring the strength of the "negative attitude" of the group to the issue under consideration. Then the condition M means that enlarging the group can only enhance its negative, but not positive, attitude to the issue, or, more formally, it can switch the value v from 0 to 1 but not vice versa. The condition N means that if a group is decomposed into new smaller subgroups (with possible overlap), then the positive attitude (approval) by all subgroups implies the approval by the group as a whole. The condition MN means the same as N in more general case, when new groups form an arbitrary covering (rather than decomposition) of the initial group; besides the initial participants, the new groups may include extra ones.

To describe this situation formally, it is convenient to use logical notation, taking as $v(X)$ a logical function $l(X)$ with the values 0 ("false") and 1 ("true"). The function $l(X)$ represents the group decision from the "negative" standpoint, i.e. $l(X) = 1$ iff the group X disapproves the issue, and $l(X) = 0$ iff X approves it. Then the condition M says that for $X, X' \in \mathcal{U}$,

$$\text{if} \quad X \subseteq X', \quad \text{then} \quad l(X) \Rightarrow l(X'), \tag{72}$$

the condition N says that for $X \in \mathcal{U}, \{X^\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$,

$$\text{if} \quad X = \bigcup_{\nu \in N} X^\nu, \quad \text{then} \quad \bigvee_{\nu \in N} l(X^\nu) \Rightarrow l(X), \tag{73}$$

and the condition NM is obtained from (73) by replacing the sign $=$ by $\subseteq$. If the corresponding conditions are fulfilled, then the above primitive rationality criteria asserts that the function l must be separable, which in logical terms means the representability of l in the disjunctive form

$$l(X) = \bigvee_{x \in X} a(x), \tag{74}$$

where $a : U \to \{0, 1\}$ is a logical function on the set of the experts. The function $a(x)$ can be interpreted as the personal attitude of the expert x to the issue considered: $a(x) = 0$ means the person's approval and $a(x) = 1$—disapproval. Then (74) means that group X as a whole approves the issue ($l(X) = 0$) if and only if every member of the group does so. Consequently, each voter possesses "the right of veto": his single "nay" is enough to reject the issue. Since in the representation (74) the function a is fixed, we can explicitly list the subgroup $A \subseteq U$ of experts with the negative attitude:

$$A = \{x \in U \big| \, a(x) = 1\}. \tag{75}$$

Thus the attitude of each group $X \in \mathcal{U}$ can also be represented as

$$l(X) = 1 \Leftrightarrow X \cap A \neq \varnothing\,, \tag{76}$$

that is, the group X rejects the issue if and only if it contains at least one expert with the negative attitude.

To conclude, note by Theorem 19 and Lemma 6 when the function l is primitively rational, then it can be represented by means of the *revealed attitude* function

$$a_l(x) = \bigwedge_{X:x\in X\in\mathcal{U}} l(X). \tag{77}$$

The function $a_l(x)$ describes the supposed attitude of the expert x, as if x votes in accordance with the prescribed attitude $a_l(x)$ and the group decision rule is the veto rule (74): the revealed attitude $a_l(x)$ assigned to the person x is “disapprove” if and only if each group that contains him rejects the issue, and “approve” if and only if at least one such group accepts the issue. Finally, if the family $\mathcal{U}$ is one-complete, i.e. if every expert is questioned separately then we have the autoseparable representation (see (63)) of the group decision function l:

$$l(X) = \bigvee_{x\in X} l(\{x\}). \tag{78}$$

Here the revealed attitude $a_l(x)$ of expert x is the expert’s genuine attitude $l(\{x\})$.

5.4. More examples. Now we shall apply the above model of group decisions to examine two problems which, although seemingly different from the collective estimations problem, turn out to be of the same type.

1. *Group decision approach to individual choice.* Let us return to the conventional choice model described in Section 3, and treat it from the group decision standpoint. Fix an option $x \in U$ and consider the fact that x is chosen or rejected results from an influence of the choice context. In the framework of the abstract choice model, the latter is the presented alternative set $X \ni x$. Then all alternatives $y \in X$ play the role of experts “examining” the alternative x. At the same time nothing prevents x from examining all the alternatives y. This occurs explicitly in tournaments. To follow this task, let us consider the choice problem as a kind of an implicit tournament between alternatives presented. Within the model of rational

choice of the form (18) or (19), the negative judgement of the "expert" y on the subject x is the strict preference yPx; in the form (13) or (14), the positive judgement of y on x is the nonstrict preference xRy.

In general form, under fixed $x \in U$, let $\mathcal{U}^x = \{X \in \mathcal{U} | X \ni x\}$ be the family of feasible sets of experts evaluating x. We shall extract the group evaluation of x by the group X, observing the fact of choosing x from X (either in a single-valued choice case or in a more general set-wise choice case). Let

$$l^x(X) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = c(X) \quad (\text{or } x \in C(X)), \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{79}$$

It is easy to verify that, in particular, the monotonicity condition M for l is equivalent to the heredity condition H for the choice model, the non-emergence condition N is equivalent to the coherence condition C, the combined condition NM is equivalent to CH, and ARV is equivalent to RA. For example, in the single-choice case, the condition M in the form (72) yields: if $X, X' \in \mathcal{U}^x$ and $X \subseteq X'$, then $x = c(X') \Rightarrow x = c(X)$, i.e. we obtain the condition N (the extension onto the general set-valued choice is evident).

Thus, we have embedded the standard (individual) choice model, together with its properties considered in Section 3, into the above group decision model. As a consequence, some important propositions and theorems of Section 3 can be shown to be particular cases of the corresponding propositions and theorems of the present sections viz. Propositions 3 and 5, Theorems 1, 2, 4 and 5 are corollaries of Propositions 10 and 12, Theorems 19, 20, 21 and 18, respectively. To show this in relation to the theorems, which are, respectively, the criteria of rationality for choice functions c in Section 3 and the criteria of primitive rationality for logical group decision functions l^x (in the role of scope values v) in this section, we develop our construction. The primitive rationality of l^x means that there exists a function $a^x : U \to \{0, 1\}$ such that for every $X \in \mathcal{U}^x$

$$l^x(X) = \bigvee_{y \in X} a^x(y). \tag{80}$$

Consider the collection $\{l^x\}_{x \in U}$ of functions l^x and introduce the binary relation R on U by

$$xRy \quad \text{iff} \quad a^x(y) = 0. \tag{81}$$

It is easy to see that if c is rational in the form (13) (or, in the set-valued case, C has the form (14)) then the corresponding functions l^x, $x \in U$, defined by (79), are separable in the form (80) with a^x and R interrelated as in (81). And conversely, suppose that the functions $l^x, x \in U$, defined by (79) for a given choice function c (or C), are separable in the form (80).

Then the binary relation R defined by (81) rationalizes the given choice function by (13) (or, respectively (14)). Therefore, the notion of primitive rationality for scope values turns out to be a generalization of the common rationality for choice functions.

2. *Group decision approach to the problem of causal dependencies.* We now outline the problem of causality in terms of a simple model in the spirit of J.S.Mill (see [174]). Consider an observable "output" event. Let 1 denote the occurrence and 0 the absence of this event. Consider also a set U of some primary "input" events $x, y, \ldots$; let a function $l : U \to \{0,1\}$ denote the logical dependence between the input and output events, where $\mathcal{U} \subseteq 2^U$ is a family of possible combinations (sets) of input events that occur simultaneously. Namely, $l(X) = 1$ if and only if the output event is observed when input events $x \in X$ have occurred and no event $y \in U \backslash X$ has occurred. We shall call the function l *primitively causal*, if there exists a subset $A \subseteq U$ called the set of *primitive causes* of the observed output event, such that:

$l(X) = 1$ if and only if X contains at least one input event $x \in A$. (82)

Note that the requirement of primitive causality (82) is exactly the condition (76). Thus, the primitive causality coincides with the separability, or the primitive rationality, of the function l. Therefore, all the above criteria of primitive rationality can be used for examining primitive causality. The detailed investigation of the model of cause-effect relationships (with many output events as well as input events) one may found in [174].

Problems 1 and 2 have been reduced above to a kind of separability problem which was then resolved by means of axiomatic conditions. The key role among these is played by the pair of conditions, *monotonicity* (or *heredity*, in choice problems), and *non-emergence* (or *concordance*, respectively). It should be noted that Sen's system of axioms α and γ was the first one that served as a rationale for stating the corresponding kind of separability (rationality, or binariness) of choice functions.

5.5. A modification of primitive rationality. Returning to the general problem of opportunity scope values, we consider in conclusion a wider formulation of the problem—one that does not require that primitive rationality holds. Specifically, let us consider the case when only one of the conditions M and N is fulfilled, yielding two types of "semi-rational" scope functions. For this purpose we need a modification of a generating value function $w(x)$; viz. we consider a *pseudo-value* function (*pseudo-scale*) of the form $w(x; X)$ defined on $U \times \mathcal{U}$.

Definition 21. A function $w(x; X)$ on $U \times \mathcal{U}$ is said to be *monotonically increasing* (respectively, *decreasing*) in X on $\mathcal{U}$ if it non-strictly increases (respectively, decreases) in X with arbitrary fixed x in the sense that $X \subseteq X' \Rightarrow w(x; X) \leqslant w(x; X')$ (respectively, $\Rightarrow w(x; X) \geqslant w(x; X')$).

Theorem 22. For an arbitrary $\mathcal{U}$, a scope value v satisfies the condition M or, respectively, the condition N, if and only if v can be represented in the following *pseudo-separable* form: for any $X \in \mathcal{U}$

$$v(X) = \max_{x \in X} w(x; X), \tag{83}$$

with the generating value function $w(x; X)$ on $U \times \mathcal{U}$ monotonically increasing, resp., decreasing, in X on $\mathcal{U}$.

Proof. Necessity. Define

$$w^{-}(x; X) = \min_{Y \in \mathcal{U}:\, x \in Y \subseteq X} v(Y), \tag{84}$$

$$w^{+}(x; X) = \max_{Y \in \mathcal{U}:\, x \in Y \subseteq X} v(Y). \tag{85}$$

for any $x \in X \in \mathcal{U}$. (Extension of the definition (84), (85) to $x \notin X$, if needed, can be done, for example, by taken $w^{-}(x; X) \equiv \max_{Y \in \mathcal{U}} v(Y)$ and $w^{+}(x; X) \equiv \min_{Y \in \mathcal{U}} v(Y)$). It is obvious that for any $x \in X \in \mathcal{U}$

$$w^{-}(x; X) \leqslant v(X) \leqslant w^{+}(x; X), \tag{86}$$

and that w^{-}(resp. w^{+}) is monotonically decreasing (resp. increasing) in X. Let us show that a scope value satisfying N (resp. M) is representable in the form (83) with the generating value function w^{-} (resp. w^{+}). First, let v satisfy N. Take a set $Y^{X,x}$ yielding min in the definition of w^{-} (84), and collect the family $\{Y^{X,x}\}_{x \in X}$ which obviously is a decomposition of X. Therefore, by virtue of N,

$$\max_{x \in X} w^{-}(x; X) = \max_{x \in X} v(Y^{X,x}) \geqslant v(X). \tag{87}$$

Comparing (87) with (86), we obtain for w^{-} the equality needed. Now let v satisfy M. Then obviously $w^{+}(x; X) \equiv v(X)$, and so (83) with $w = w^{+}$ trivially holds.

Sufficiency. Consider that $w(x; X)$ in (83) is monotonic in X. First, let $w(x; X)$ be monotonically decreasing in X. Take some $X \in \mathcal{U}$ and an arbitrary decomposition $\mathcal{X}$ of X in $\mathcal{U}$. Then for v given by (83)

$$\begin{aligned} V(\mathcal{X}) &= \max_{Y \in \mathcal{X}} v(Y) = \max_{Y \in \mathcal{X}} \max_{y \in Y} w(y, Y) \geqslant \\ &\geqslant \max_{Y \in \mathcal{X}} \max_{y \in Y} w(y; X) = \max_{x \in X} w(x; X) = v(X), \end{aligned} \tag{88}$$

which implies N. Finally, let $w(x; X)$ be monotonically increasing in X. Then, fulfilling M for v given by (83) is trivial.

Remark 8. It is easy to see that by using the logical technique developed and applied in this section for proving the statements of Section 3, one can also obtain Theorem 11 (about semirational choice functions) as a corollary Theorem 22 (about “primitive semirational” scope values).

In connection with Theorem 22, we note that a monotonic increase of the generating value function $w(x; X)$ in X reflects the increased importance of a fixed opportunity x when the whole opportunity scope X is enlarged. This can be called "combinations of opportunities". On the contrary, a decrease of $w(x; X)$ in X means that using a single opportunity x can be impeded by the presence of other opportunities. For example, the value of the opportunity x in the set X can have the form $w(x; X) = u(x) - f(X)$, where $f(X)$ is the expense increasing in X of realizing the opportunity x in the presence of other "distracting" opportunities $y \in X$.

6. Further generalizations

We have examined the possibility of judging the rationality of a decision without explicitly considering the alternatives. The simplest model studied in Section 5 is only the first step in this direction. This model is still closely tied to the source of the idea of rationality, viz. with to the conventional choice model and the common notions of "alternatives" as points in the "space of possibilities", of values (or relative preferences) of these alternatives, etc. A further rejection of such notions leads to developing models of rational behavior without an explicit notion of alternatives. Here I will sketch and comment on some directions of possible generalizations.

First, the model described in Section 5 demands too much. Indeed, we assumed the knowledge of (or the ability to observe or obtain from the decision maker) the values of different opportunity scopes. It is more natural (and less restrictive) to suppose that the analyst possesses only fewer information concerning the *relative* worth of different scopes. For example, we observe, in reality or mentally, the qualitative results of pairwise comparisons of different scopes from the DM's standpoint. Formally this yields a binary relation between the scopes, which in terms of measurement theory presents a structure of experimental relations on the object field. Then the purpose of theoretical investigation is to elaborate a measurement scale with an appropriate formal operation on corresponding scale values. What has been done in Section 5 is an example of such a problem resolution: the measurement scale $w(x)$ on U with the operation max has been introduced to represent the "experimental data" given in the form of pairs $(X, v(X))$, i.e. of the mapping $\mathcal{U} \to L$. It is easy to extend those results to the case where a weak order on $\mathcal{U}$, rather than an explicit primary scaling $\mathcal{U} \to L$, is given. Some other generalizations that can be obtained along this route have not been discussed to save space.

Deeper, both technically and conceptually, are generalizations connected with the rejecting "point-wise" representations of DM's opportunities. In the model presented we have retained the representation of an opportunity scope as a set of elements. Those elements were not necessarily alternatives, or options themselves; in the case of primitive rationality they turned out to be a kind of substitutes for alternatives, with their own revealed values as the rationale for optimal decisions. Such a situation takes place, for example, when the opportunity set is legislation in the form of a "bill of rights". Then, the application of a set-theoretical operation, such as a union of several such bills seems to be justified. However, in general, a simple combining of several bills does not lead to an intelligent text. It may be possible, though, to speak about some "creative" union of different bills. To formalize this case, one needs to use algebraic systems with union (join) operations and covering relations that are more general than the set-theoretical ones. Such generalization (in semi-lattice-type terms) can be carried out as well, but this requires a separate exposition.

Path Independence in Serial-Parallel Data Processing [1]

For data processing procedures that use splitting data into auxiliary components as a method of problem simplification, their algebraic aspects are discussed. In these procedures, individual components are processed and the results obtained are merged for further processing. Consideration is given to the types of problems where these procedures provide the same result as simultaneous (one-stage) processing of the entire data array. C.R.Plott was the first to introduce this notion of invariance of procedure outcome named "path independence" and study it as applied to choice functions. We generalize this property, extending it to a rather wide scope of problems. The semigroup nature of path independence is demonstrated.

1. Introduction

Computational procedures such as optimization and statistical data processing rely heavily on task decomposition or "solution by portions". This approach is often used in real life, for example, when market equilibrium is established as a result of the independent activities of many economic agents coordinated eventually by the market mechanism. Informationally, problem decomposition consists of splitting the entire array into components which are then processed in an appropriate manner (all

[1] Mathematical Social Sciences.—1994.—V. 27.—P. 335–367.

or a part of them) simultaneously, that is, in parallel. The partial results of these transformations are then merged suitably (all or a part of them), the resulting "compositions" are transformed again, etc. Such a procedure, thus, is serial-parallel. The key question here is: does this procedure provide the same final result as provided by simultaneous processing of the entire data?

In his paper of 1973 devoted to the general choice problem, Charles R. Plott discussed this question as applied to choice functions, that is, transformations of sets of feasible alternatives into subsets of chosen ones. Plott considered the two-stage procedure: decomposition of the original set of alternatives into subsets to which the choice operator is applied, followed by merging the partial results (possibly, plus unutilized subsets) and making the final choice from this union. Reasoning from the fact that the simplest optimization choice which was traditionally regarded as the ultimate standard of rationality provides the abovementioned coincidence of the results of the procedures, Plott inverted actually the question at hand. Namely, he suggested that this coincidence of results be regarded as axiomatic requirement imposed on choice functions, and called it "independence of path", or "path independence" (PI) property. He also demonstrated that choice functions that cannot be generated by the usual optimization mechanism, nevertheless can be path independent.

The pioneering publication of Plott gave rise to a series of studies modifying and/or applying path independence, in particular, in collective choice models (e.g., see [105, 201, 106, 132, 148, 229, 153, 242, 97, 98, 99, 227, 228, 147]) (Sertel refers to the PI property as *fidelity*). In [223] and then in [87] (see also the review by Aizerman [84]), path independence was expressed in terms of other properties used in the rational choice theory, and "quasi-optimization" mechanisms were constructed generating all PI choice functions. On the other hand, Plott [203] already touched upon algebraic nature of path independence, in particular on its relationship with associativity of a corresponding binary operation. The algebraic aspects of PI were also discussed in [29, 227, 228, 147], and it was noted by Sertel [228] that the PI requirement is applicable not only to choice functions, but to other set transformations as well. In addition, the path independence requirement was used in [192] and [202] as one of the axioms underlying the solution of a sharing problem which may be regarded as a specific branch of the general choice problem.

The aim of the present development of Plott's approach is to show that not only it is not confined to choice functions on unions of alternative subsets, but that it reaches far out of this framework. It is extended naturally to other types of set transformations, to other types of "compositions" of one set from other sets, and even to objects of other, not "set" nature. Of basic importance is only the algebraic structure of transformations and operations over objects. We establish the general algebraic properties essential for path independence and present examples of PI manifestations in one or another procedure.

The paper is structured as follows. Section 2 begins by presenting several PI versions reproducing (also in a somewhat modified form) the formulations of Plott and his successors within the framework of a set family structure with the set union defined on it. Interrelations between different versions are traced (all the versions are mutually equivalent in the Plott‘s primary case of choice functions, but some of them can diverge in more general cases). Further presentation is based upon a version isolated as the “basic” formulation. Section 3 extends path independence to set mappings that differ from the choice functions. Section 4 deals with set operations other than union as well as of operations over objects that are not sets. Section 5 is dedicated to general formulations and the algebraic characterization of PI for an abstract semigroup structure of objects subjected to rather arbitrary transformations. Section 6 suggests a “quasi-dynamic” interpretation of PI elucidating the sense of the very term “path” in this context. Finally, Section 7 sums up the results and formulates some new questions.

2. Path independence: formulations and interrelations

As early as in the seminal paper of Plott [203], the notion of PI for choice functions was given in several different formulations that were proved to be equivalent. Below, we present the Plott formulations and their further modifications. The majority of them remain equivalent for arbitrary set transformations as well, the exclusions being mentioned separately. The concluding part of this section is devoted to a formulation embracing the rest as special cases. Along with it, a simple and, at first glance, special formulation (also introduced by Plott) will be extracted from which the generalized PI formulation follows. This simple formulation will play a key part throughout the paper.

We describe the formal model beginning from the notions and notation used through Sections 2–4 dealing with sets. Let U be the set of all objects under consideration. In general case, U is arbitrary, but for the sake of simplicity the reader can regard it as a finite (although in some examples it is infinite). Let $\mathcal{U}$ be some family of subsets $X \subseteq U$, that is, $\mathcal{U} \subseteq 2^U$. Assume that $\mathcal{U}$ is closed under finite unions, that is, $\bigcup_{\nu \in N} X_\nu \in \mathcal{U}$ for any finite subfamily $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$, where $N = \{1, \ldots, n\}$. This property, called the (finite) $\cup$-*closedness of* $\mathcal{U}$ is equivalent to the simpler formulation $X', X'' \in \mathcal{U} \Rightarrow X' \cup X'' \in \mathcal{U}$.

Let a mapping $C{:}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ be defined on $\mathcal{U}$. We shall refer to the condition $X \in \mathcal{U} \Rightarrow C(X) \in \mathcal{U}$ as *C-closedness* of $\mathcal{U}$. The conjunction of both above types of closedness will be called $(C, \cup)$-*closedness*.

In Plott's interpretation U is a totality of all possible alternatives, X is a set of feasible alternatives, and $C(X)$ is the set of alternatives chosen from X. The specific feature of a *choice function* is the condition $C(X) \subseteq X$.

The following formalizes "decomposition of object" where the object is a set. A (finite) set family $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$ will be called (finite) *decomposition* of X *in* $\mathcal{U}$ if $\bigcup_{\nu \in N} X_\nu = X$ (where N is a finite set of indices). In what follows, we deal with finite decompositions only. (We emphasize that the sets X_ν may intersect, and may be empty, which distinguishes set decomposition from set partition).

Definition 2.1. An operator C on a $(C, \cup)$-closed family $\mathcal{U}$ will be said to satisfy the *path independence* condition:

- *in Version 1*, if for any $X \in \mathcal{U}$, any decomposition $\{X_\nu\}_{\nu \in N}$ of X in $\mathcal{U}$ and any $N' \subseteq N$ and $N'' = N \setminus N'$ (one of them may be empty)

$$C\Big(\bigcup_{\nu \in N'} C(X_\nu) \cup \bigcup_{\mu \in N''} X_\mu\Big) = C(X); \tag{2.1}$$

- in Version $1'$, if the value

$$C\Big(\bigcup_{\nu \in N'} C(X_\nu) \cup \bigcup_{\mu \in N''} X_\mu\Big)$$

  with any fixed $X \in \mathcal{U}$ is independent of the decomposition $\{X_\nu\}_{\nu \in N}$ of X in $\mathcal{U}$ as well as of $N' \subseteq N$, $N'' = N \setminus N'$;

- *in Version* $1''$, if for any family $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$ and any $N' \subseteq N$, $N'' = N \setminus N'$ we have

$$C\Big(\bigcup_{\nu \in N'} C(X_\nu) \cup \bigcup_{\mu \in N''} X_\mu\Big) = C\Big(\bigcup_{\nu \in N} X_\nu\Big). \tag{2.2}$$

Observation 2.1. Versions $1'$ and $1''$ are nothing more than reformulations of Version 1. For Version $1''$ this is self-evident. As for Version $1'$, its implication from Version 1 is also evident, whereas the inverse follows from considering Version $1'$ for the one-term family $\{X_1\}$ with $N = N'' = \{1\}$ $(N' = \varnothing)$.

Definition 2.2. An operator C on $(C, \cup)$-closed family $\mathcal{U}$ will be said to satisfy the *path independence* condition:

- *in Version 2*, if for any $X \in \mathcal{U}$ and any decomposition $\{X_\nu\}_{\nu \in N}$ of X

$$C\Big(\bigcup_{\nu \in N} C(X_\nu)\Big) = C(X); \tag{2.3}$$

- *in Version* $2'$, if the value

$$C\Big(\bigcup_{\nu\in N} C(X_\nu)\Big)$$

with any fixed $X \in \mathcal{U}$ is independent of the decomposition $\{X_\nu\}_{\nu\in N}$ of X in $\mathcal{U}$;

- *in Version* $2''$, if for any family $\{X_\nu\}_{\nu\in N} \subseteq \mathcal{U}$

$$C\Big(\bigcup_{\nu\in N} C(X_\nu)\Big) = C\Big(\bigcup_{\nu\in N} X_\nu\Big). \tag{2.4}$$

The path independence condition in Versions 2, $2'$ and $2''$ will be called the *symmetrical* PI condition.

Observation 2.2. Version $2''$ of PI again is just reformulated Version 2. The situation with Version $2'$ is more complicated. Notice that it was Version $2'$ that was given by Plott [203] as the original PI definition. Obviously, it follows from Version 2. An conversely, at least in one particular but important case, namely the case of *conventional choice functions*, Version 2 follows, in its turn, from Version $2'$, so that all three Versions 2, $2'$, $2''$ proved to be equivalent. Conventional choice function is (following Plott [203]) a mapping $C{:}\,\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ such that $C(X) \subseteq X$ for every X and $C(X) \neq \varnothing$ for every $X \neq \varnothing$, with $\mathcal{U}$ being "rich enough" in the sense that $\mathcal{U}$ contains all singletons $\{x\}$, $x \in U$. Indeed, in such a case $C(\{x\}) = \{x\}$ for each $x \in U$, hence $\bigcup_{x\in X} C(\{x\}) = X$ for every $X \subseteq U$. By virtue of this, to deduce Version 2 from Version $2'$ it suffices to take the family $\{\{x\}\}_{x\in X}$ as one of decompositions of X in Version $2'$. For this family $C(\bigcup_{x\in X} C(\{x\})) = C(X)$ by the above reason, and so Version $2'$ implies Version 2 of the PI condition.

However, even for choice functions which are not "conventional" in the above sense (i.e. may be either empty-valued or not defined on all singletons), Version 2 does not follow from Version $2'$. Indeed, let for example $U = \{a, b, c\}$, and let $\mathcal{U} = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a\}\}$ (the family that contains not all singletons). Let $C(U) = \{a, b\}$ and $C(X) = \{a\}$ for every other X from $\mathcal{U}$. Then for each decomposition $\{X_\nu\}$ of $X = U$ in $\mathcal{U}$ we obtain

$$\bigcup\nolimits_\nu C(X_\nu) = \begin{cases} \{a, b\}, & \text{if } U \in \{x_\nu\}, \\ \{a\}, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and so in every case $C(\bigcup_\nu C(X_\nu)) = \{a\}$. Thus, for $X = U$ the PI condition in Version $2'$ is fulfilled; its fulfillment for all other $X \in \mathcal{U}$ is obvious. But $C(U) = \{a, b\} \neq \{a\}$, therefore PI in Version 2 is violated.

A still more simpler example of choice functions (proposed by P.Chebotarev) shows that PI in Version 2 does not follow from Version $2'$ when abandoning the choice non-emptiness requirement. Let $U = \{a, b\}, \mathcal{U} = 2^U$ and $C(\{a, b\}) = \{a\}$, $C(\{a\}) = C(\{b\}) = C(\varnothing) = \varnothing$. Then PI in Version $2'$ is fulfilled: it suffices to verify that for every decomposition $\{X_\nu\}$ of $X = U$ in $\mathcal{U}$ we have $C(\bigcup_\nu C(X_\nu)) = \varnothing$. But $C(U) = \{a\} \neq \varnothing$, therefore PI in Version 2 is violated.

Consider now the relationship between the non-symmetrical (Version 1) and symmetrical (Version 2) formulations of the PI property. Version 2 follows obviously from Version 1, since (2.3) is just the particular case of (2.1) with $N' = N$, $N'' = \varnothing$. The inverse is also true:

Proposition 2.1. For any operator C on a $(C, \cup)$-closed family $\mathcal{U} \subseteq 2^U$, the path independence condition in Version 1 follows from Version 2.

First, prove the following assertion:

Lemma 2.1. If an operator C on $\mathcal{U}$ satisfies the PI condition in Version 2, then C is idempotent: for every $X \subseteq \mathcal{U}$

$$C(C(X)) = C(X). \tag{2.5}$$

Proof of Lemma 2.1. By (2.3) and idempotence of binary operation $\cup$ (i.e. $Z \cup Z \equiv Z$) we have:

$$C(C(X)) = C(C(X) \cup C(X)) = C(X \cup X) = C(X).$$

Remark 2.1. If an operator C satisfies PI in Version 1, then its idempotence follows immediately from (2.1).

Proof of Proposition 2.1. Let PI in Version 2 be fulfilled, and let $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$. Take arbitrary $N' \subseteq N$ and $N'' = N \setminus N'$, and consider the family $\{C(X_\nu)\}_{\nu \in N'} \cup \{X_\mu\}_{\mu \in N''}$ which is the subfamily of $\mathcal{U}$ by the C-closedness of $\mathcal{U}$. By Version $2''$ (which is the reformulation of Version 2) of PI and by Lemma 2.1:

$$\begin{aligned} C\Bigl(\bigcup_{\nu \in N'} C(X_\nu) \cup \bigcup_{\mu \in N''} X_\mu\Bigr) &= C\Bigl(\bigcup_{\nu \in N'} C(C(X_\nu)) \cup \bigcup_{\mu \in N''} C(X_\mu)\Bigr) = \\ &= C\Bigl(\bigcup_{\nu \in N'} C(X_\nu) \cup \bigcup_{\mu \in N''} C(X_\mu)\Bigr) = C\Bigl(\bigcup_{\nu \in N'} X_\nu \cup \bigcup_{\mu \in N''} X_\mu\Bigr) = \\ &= C\Bigl(\bigcup_{\nu \in N} X_\nu\Bigr), \end{aligned}$$

which yields Version $1''$ (the reformulation of Version 1) of PI.

Consider now a simplified, particular (at first glance) form of PI.

Definition 2.3. An operator C on a $(C, \cup)$-closed family $\mathcal{U} \subseteq 2^U$ will be said to satisfy the *basic* path independence condition if for any $X', X'' \in \mathcal{U}$

$$C(C(X') \cup X'') = C(X' \cup X''), \tag{2.6}$$

and the *symmetrical basic* path independence condition if

$$C(C(X') \cup C(X'')) = C(X' \cup X''). \tag{2.7}$$

Observation 2.3. Obviously, the basic (or symmetrical basic) PI condition is a special case of PI in Version 1″ (respectively, in Version 2″). Yet it proves to be that, as will be demonstrated below, the following is valid:

Proposition 2.2. For any operator C on a $(C, \cup)$-closed family $\mathcal{U} \subseteq 2^U$, the PI condition (in any of equivalent versions, Versions 1′, 1″, 2, and 2″) follows from the basic PI condition.

Moreover, we shall give an extended formulation of PI including all the above, but this apparent strengthening of PI will also follow from the basic PI condition (see Definition 2.4 and Proposition 2.3 below). This justifies the term "basic" PI condition as applied to (2.6).

Remark 2.2. By virtue of the above, the basic PI condition implies the symmetrical basic PI condition as a special case of Version 2″. The converse implication is also true, which is proved by following simply the proof of Proposition 2.1. The formulations of the basic and symmetrical basic PI condition as well as their equivalence to the initial definition of PI (for conventional choice functions—in Version 2′) have already been established in [203].

All the above versions of PI describe in essence two-stage applications of the operator C. It is implied that applying C to some or all sets Y_μ in a decomposition $Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_m$ may be considered as carried out simultaneously (in parallel). Here, the very operations of uniting sets Y_μ into $Y = \bigcup_\mu Y_\mu$ and decomposing X into $\bigcup_\nu X_\nu = X$ are assumed to be "momentary". Thus, we mean that the "time" is spent only for application of the operator C. One can also consider multi-stage applications of C with three or more steps. According to what was said above, the required (minimal) number of steps is determined by the depth of the superposition of the operator C, that is, by the maximal number of successive (serial) applications of C in the given expression

$$C\Big(\cdots \cup C\Big(\cdots \cup C\Big(\bigcup_{\nu \in N'} X_\nu\Big) \cup \cdots\Big) \cdots\Big).$$

For example, the expression

$$C(X_1 \cup C(X_2 \cup C(C(X_3) \cup X_4)) \cup C(C(X_5 \cup C(C(X_6))) \cup C(C(X_7) \cup X_8)))$$

has the depth 4: $C(\ldots C(\ldots C(C(X_6))) \ldots)$ (four applications of C).

Any expression of similar form can be described as an expression constituted by applying, in arbitrary order, the unary operation (operator)

C and the binary operation $\cup$ both to the initial sets X_ν, $\nu \in N$, and to the results Y_μ of all preceding applications of the operations. This must be completed by the final application of $C(\cdot)$ to the last but one result, Z. Any expression so obtained will be referred to as a *serial-parallel scheme for the decomposition* $X = \bigcup_\nu X_\nu$ (briefly, SP *scheme for* X) and denoted by $C(\cdots \cup \cdots)(X, \{X_\nu\})$, or in shortened notation $C(\cdots \cup \cdots)(X)$. Every intermediate result Y_μ of applying the above operations as well as the last result, namely the set $C(Z)$ (call it the *value* of the given SP scheme), is to be a set from $\mathcal{U}$ owing to the $(C, \cup)$-closedness of $\mathcal{U}$.

The formal recursive definition of SP scheme for general case of an abstract "junction" operation over abstract objects will be given in Section 5. The present non-rigorous but transparent description of SP scheme for the case of union of sets plays just an introductory role.

Definition 2.4. An operator C on a $(C, \cup)$-closed family $\mathcal{U} \subseteq 2^U$ will be said to satisfy the *general* PI condition if for any $X \in \mathcal{U}$ and for any SP scheme $C(\cdots \cup \cdots)(X)$ for X we have

$$C(\cdots \cup \cdots)(X) = C(X). \tag{2.8}$$

Proposition 2.3. For any operator C on a $(C, \cup)$-closed family $\mathcal{U} \subseteq 2^U$, the general PI condition follows from the basic PI condition.

Sketch of the proof. The proof is constructed inductively, the number of operator symbols C in the expression (SP scheme) $C(\cdots \cup \cdots)(X)$ being decreased by one at each induction step, providing a new SP scheme with the same value. Consider an induction step; let us have a SP scheme $C(Y_1 \cup \cdots \cup Y_m)$, where each Y_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$ itself either is a SP scheme or coincides with a term X_ν of the initial decomposition $X = \bigcup_\nu X_\nu$. We assume now that at least one among the Y_μ's is a SP scheme, otherwise the value of the considered SP scheme is $C(X)$, and the proof has been finished. Thus, let Y_k be represented as a SP scheme, and hence $Y_k = C(Z)$ for some $Z \in \mathcal{U}$. Therefore,

$$C(Y_1 \cup \cdots \cup Y_m) = C(C(Z) \cup Y_{(-k)}), \tag{2.9}$$

where

$$Y_{(-k)} = Y_1 \cup \cdots \cup Y_{k-1} \cup Y_{k+1} \cup \cdots \cup Y_m \tag{2.10}$$

(if $m = 1$, and hence $k = m = 1$, then $Y_{(-k)} = \varnothing$). Applying the basic PI condition to (2.9), we obtain

$$C(C(Z) \cup Y_{(-k)}) = C(Z \cup Y_{(-k)}),$$

and consequently

$$C(Y_1 \cup \cdots \cup Y_{k-1} \cup C(Z) \cup Y_k \cup \cdots \cup Y_m) =$$
$$= C(Y_1 \cup \cdots \cup Y_{k-1} \cup Z \cup Y_k \cup \cdots \cup Y_m).$$

Thus, the number of symbols C in the SP scheme $C(Y_1 \cup \cdots \cup Y_m)$ decreased by one without changing the value of the "external" C. By induction, we obtain for the initial SP scheme eventually

$$C(\cdots \cup \cdots)(X) = C(X_1 \cup \cdots \cup X_n). \tag{2.11}$$

A rigorous proof of the generalized formulation of this Proposition will be presented in Section 5.

Remark 2.3. It is easy to see that all expressions of the form $C(\cdots)$ used above (namely, (2.1)–(2.7)) are special SP schemes (of depth 2). Therefore, Proposition 2.2 is a corollary of the more general Proposition 2.3.

Remark 2.4. The concept of serial-parallel application of an operator C to a set decomposition can be somewhat extended by decomposing sets at other stages than the first one. For example, let $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, let $V_1 = C(X_1)$, $V_2 = C(X_2)$, and let $V_1 = W_1 \cup W_2$ with some W_1, W_2. Then, say, the expression

$$C(W_1 \cup C(C(W_2 \cup V_2) \cup X_3))$$

is a particular case of the so extended SP scheme $C(\cdots \cup \cdots)(X)$. In the general case, such an extension can be described by means of a recursive construction. Namely, at each intermediate stage it shall be allowed to take the current expression $Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$ standing under the symbol of the "external" operator C, to extract some term Y_μ (or a union of some terms $\bigcup_k Y_{\mu_k}$) and to replace it by an expression $\bigcup_\lambda Z_\lambda$ with the value $\bigcup_\lambda Z_\lambda = Y_\mu$ (or $= \bigcup_k Y_{\mu_k}$, respectively). This means that additional splitting of some set(s) occurred at an intermediate stage. Next, the operator C may be applied to newly obtained sets Z_λ's and/or their unions including those with remaining Y_μ's. One can see readily that Proposition 2.3 remains valid for such extensions of SP schemes. (The formal definition and proof in the more general framework are given in Section 5).

3. Some path independent set transformations

In the original formulation by Plott [203] it was a choice function, that is, a mapping $C{:}\,\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ with the *shrinking property*: $C(X) \subseteq X$ for all $X \in \mathcal{U}$, that was used as the operator C acting on the sets X from $\mathcal{U}$. The path independence as formulated in Section 2 was introduced by Plott for choice functions, although the formulations did not exploit any properties specification that C is a shrinking operator. Making use of this specification, Sen [223] and then Aizerman and Malishevski [87] have provided an equivalent axiomatic description of the class of all path independent choice functions. In the conventional case with $\mathcal{U} = 2^U$ this description has been given in Aizerman and Malishevski as the pair of axiomatic requirements

(i) $X \subseteq X' \Rightarrow C(X) \supseteq C(X') \cap X$,

(ii) $C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X) = C(X')$

(in [223], instead of (ii) another axiom was used that looks to be somewhat less natural). For arbitrary $(C, \cup)$-closed $\mathcal{U} \subseteq 2^U$ one needs to replace axiom (i) by $C(X') \cup X'' \supseteq C(X' \cup X'')$.

Yet, the path independent set transformations in the formulations in Section 2 do not need to be shrinking. As it proved to be, there exist other interesting set transformations for which the PI condition can be satisfied. Two types will be discussed in this section. The first one is *expanding* mapping $C{:}\,\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, that is, such that $C(X) \supseteq X$ for all $X \in \mathcal{U}$ (the case opposite to that of shrinking choice operators). Another type is that of an abstract *projector* where the image $C(X)$ of the set X may even be disjoint with X.

3.1. Closure operators. *Definition 3.1.* An operator $C{:}\,\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ is called *closure operator* if it is an expanding one: $C(X) \supseteq X$ for all $X \in \mathcal{U}$, and if the following two requirements are satisfied:

(i) $X' \subseteq X'' \to C(X') \subseteq C(X'')$ (isotony), (3.1)

(ii) $C(C(X)) = C(X)$ (idempotence). (3.2)

It is known (see, for example, [76]) that an expanding operator C on $\mathcal{U} = 2^U$ is a closure (i.e. satisfies (i) and (ii)) if and only if it satisfies the condition

$$C(C(X') \cup X'') = C(X' \cup X'') \tag{3.3}$$

for all $X', X'' \subseteq U$, i.e. the basic PI condition on $\mathcal{U} = 2^U$. For the sake of completeness we give the proof which is valid for the general case $\mathcal{U} \subseteq 2^U$.

Proposition 3.1. If C is an expanding operator on a $(C, \cup)$-closed family $\mathcal{U} \subseteq 2^U$, then (i) and (ii) is equivalent to PI.

Proof. (a) (i) and (ii) $\Rightarrow$ PI. Let (3.1) and (3.2) be satisfied. By (3.1) $C(X') \supseteq X'$ implies

$$C(C(X') \cup X'') \supseteq C(X' \cup X''). \tag{3.4}$$

On the other hand, setting $X = X' \cup X''$, from (3.1) and (3.2) we obtain

$$C(C(X') \cup X'') \subseteq C(C(X) \cup X) = C(C(X)) = C(X). \tag{3.5}$$

Comparing (3.4) and (3.5), we obtain (3.3).

(b) PI $\Rightarrow$ (i). Let $X' \subseteq X''$. Then $X'' = X' \cup X''$, and hence

$$C(X'') = C(X' \cup X'') = C(C(X') \cup X'') \supseteq C(X') \cup X'' \supseteq C(X'). \tag{3.6}$$

(c) PI $\Rightarrow$ (ii). It follows from $C(X) \supseteq X$ that $C(X) \cup X = C(X)$, whence

$$C(C(X)) = C(C(X) \cup X) = C(X \cup X) = C(X). \tag{3.7}$$

The equivalence PI $\Leftrightarrow$ ((i) and (ii)) now follows from (a), (b) and (c).

Thus, the path independence property isolates precisely the class of closure operators among all expanding operators. The well-known closure operators on infinite spaces, for example, on R^n, are exemplified by taking topological closure and various *hulls*, such as linear, convex, conical, etc. Fulfillment of PI for a topological closure and convex hull has been noticed in [227, 228]. Examples of finite problems using closure operators will be presented below.

3.2. Separable projectors.

Definition 3.2. An operator $C{:}\,\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ on $\cup$-closed family $\mathcal{U}$ (that is, on an Abelian semigroup $(\mathcal{U}, \cup)$) will be called a $\cup$-*separable projector* if the following two requirements are satisfied:

(i) $C(X' \cup X'') = C(X') \cup C(X'')$ (separability), (3.8)

(ii) $C(C(X)) = C(X)$ (idempotence). (3.9)

Proposition 3.2. Any $\cup$-separable projector C on a $(C, \cup)$-closed family $\mathcal{U} \subseteq 2^U$ satisfies the PI condition.

Proof. By (3.8) and (3.9):

$$C(C(X') \cup X'') = C(C(X')) \cup C(X'') = C(X') \cup C(X'') = C(X' \cup X''). \tag{3.10}$$

The usual orthogonal projection from R^n onto a fixed linear subspace $L \subset R^n$ is a special case of $\cup$-separable projector. Projection onto a coordinate subspace, say onto the subspace R^m spanned on the first m ($m < n$) coordinate axes, is the simplest case. The projection of a vector $(x_1, \ldots, x_n)$ from R^n onto this subspace has the form of $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. The projection of a set $X \subseteq R^n$ onto this subspace is $\operatorname{Pr} X = \{(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) | \exists x_{m+1}, \ldots, x_n{:}\, (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in X\}$, i.e. $\operatorname{Pr} X = \{\operatorname{Pr} x | x \in X\}$, with $\operatorname{Pr} x$ for the projection of vector x onto L. It is obvious that the operator Pr satisfies the requirements of $\cup$-separability (3.8) and idempotence (3.9). Therefore, PI is fulfilled, which can also be verified directly.

Now, let L be an arbitrary m-dimensional linear subspace of R^n ($m < n$). As is easy to see, the orthogonal projection of a vector from R^n onto L is representable by means of passage to a new basis as projection to the space spanned on the first m coordinate axes. Since a one-to-one vector transformation executed by passing from one basis to another is linear, the requirements (i) and (ii) of Definition 3.2 of $\cup$-separable projector are satisfied and, thus, PI still takes place.

3.3. Examples of closure operators. In this Subsection we confine ourselves by finite sets.

Example 1: Transitive closure. Let a binary relation on a set U be defined as a set of pairs $R = \{(x, y)\} \subseteq U \times U$. Each pair (x, y) is considered as the two elements connected by the relation R, this may also be written as xRy (e.g., "x is preferable to y"). According to one of several equivalent definitions, by *transitive closure* of the relation R we mean the binary relation $T(R)$ on U obtained through adding to R every pair $(u, v) \in U \times U$ such that there exists a chain $x_0, x_1, \dots, x_k$ of elements of U, where $x_{i-1}Rx_i$, $i = 1, \dots, k$, and $x_0 = u, x_k = v$. One can readily see that $T(R)$ as function of R, namely $T\colon 2^{U\times U} \to 2^{U\times U}$, is the closure operator, that is, $T(R) \supseteq R$, and the conditions (i) and (ii) of Definition 3.1 are satisfied. Therefore, the operator T is path independent.

This property of the operator underlies a simple iterative procedure constructing transitive closure $T(R)$ (e.g., see [63]). At each step of this procedure, only one pair obtained as the transitive closure of a 2-long chain (connecting three elements) is added to the current binary relation. Let us start with $R_{(0)} = R$. If the relation $R_{(i)}$ was obtained before the beginning of i-th step, at this step take a triplet x_0, x_1, x_2 of elements of U such that $x_0R_{(i)}x_1$ and $x_1R_{(i)}x_2$ but not $x_0R_{(i)}x_2$ and let $R_{(i+1)} = R_{(i)} \cup \{x_0, x_2\}$. The lack of such a triplet x_0, x_1, x_2 at some step $i = k$ means that the relation $R_{(k)}$ is transitive and construction of transitive closure has been completed: $T(R) = R_{(k)}$. It is easy to see that the described procedure is a special case of the serial-parallel procedure of applying operator T to the set R decomposed into "pairs of pairs" of objects $x \in U$, of the form $\{\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$.

Example 2: Inference. Consider a model for inference of new statements from a set of given statements ("facts"). Let U be a finite totality of all statements under consideration, and let $X \subseteq U$ be a set of initial statements postulated in advance as true. Consider the set $X_{(1)}$ of all new statements that are *inferable directly* (see below) from $X_{(0)} = X$, then the set $X_{(2)}$ inferable directly from $X_{(0)} \cup X_{(1)}$, and so forth recursively. Assume that inference is determined by the *production rules* which will be introduced as follows. Let a set be given of pairs of the form $(V, w) \in 2^U \times U$, or, in another notation, $V \to w$, called *productions*. By definition the relation $V \to w$ means that the statement w is *inferable directly* from the conjunction of all the statements $v \in V$ (in this simple model we consider neither disjunctions nor negations).

Let the set $X \subseteq U$ of postulated statements be given. The following algorithm describes recursively the totality of all statements *inferable* from X.

1. All statements in X are regarded as inferable from X.

2. If all statements in V are inferable from X and if $V \to w$, then the statement w is inferable from X.
3. There exist no other statements inferable from X.

Denote by $C(X)$ the totality of all statements inferable from X. It is easy to see that

$$C(X) = X_{(0)} \cup X_{(1)} \cup \cdots \cup X_{(k)}, \tag{3.11}$$

where the sets $X_{(i)}$ are defined recursively as follows:

$$X_{(0)} = X,$$

$$X_{(i+1)} = \{w \in U | \exists V \subseteq X_{(0)} \cup \cdots \cup X_{(i)}: V \to w\}. \tag{3.12}$$

By the finiteness of U, starting from some $i = k$, we obtain in (3.12) $X_{(i+1)} = X_{(i)}$, with the number of terms in the expansion (3.11) being finite. One can readily see that the operator $C: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ so constructed [1] on $\mathcal{U} = 2^U$ satisfies the closure axioms (i) and (ii) and, thus, is path independent. Therefore, by using PI, one can apply the production rules (see Step 2 of the recursive algorithm) to the "parts" (subsets) of the initial set X. Then, the results of inference, that is, the sets of inferred statements combined by conjunction, should be united, and the production rules applied again according to the serial-parallel procedure scheme of Section 2. In the end we will obtain exactly the totality $C(X)$.

Example 3: Taxonomy. Let a finite set Ω of objects be given grouped into classes or *taxons* interrelated in a quite complicated manner so that some may be embedded into others or overlap partially. Taxonomic systems are exemplified by biological classification of species, typology of artistic styles, sociological stratification, etc. There exist different approaches and requirements to what may be called a "natural" taxonomic system (see, for example, [82]). Consider some kinds of axiomatized requirements.

Let $\mathcal{T} \subseteq 2^\Omega$ be a given taxon system. Assume that $\Omega \in \mathcal{T}$, $\varnothing \notin \mathcal{T}$.

Axiom I. For any $A, B, C \in \mathcal{T}$

$$A \subseteq B, A \subseteq C \Rightarrow B \subseteq C \text{ or } C \subseteq B. \tag{3.13}$$

This axiom means that all taxons embracing another fixed taxon form a chain of sets linearly ordered by inclusion. This requirement is satisfied by hierarchical tree-like classifications (such as that used in biology).

Consider various taxon sets $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$. Assign to each set $\mathcal{X}$, that is, to each subfamily of the family $\mathcal{T}$ consisting of the object sets from Ω,

---

[1] Actually, the construction described is a mode of universal representation of an arbitrary closure operator $C: 2^U \to 2^U$. Moreover, this construction may be extended onto infinite U, with replacing the finite expansion (3.11) by the infinite one and applying transfinite induction in the recursive scheme (3.12) (see, for example, [76]).

the union of its members $S(\mathcal{X}) = \bigcup_{Z\in\mathcal{X}} Z$. Consider the totality of sets $\mathcal{V} = \{S|\, S = S(\mathcal{X})$ for some $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}\}$. Obviously, the family $\mathcal{V}$ is $\cup$-closed and $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{V} \subseteq 2^{\Omega}$. Introduce an operator $C\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ setting for each $X \in \mathcal{V}$

$$C(X) = \min\{T \in \mathcal{T}|\, X \subseteq T\}, \tag{3.14}$$

where min is to be understood in the set inclusion sense. First,demonstrate that by (3.14) C is well defined.

Lemma 3.1. For each $X \in \mathcal{V}$, the set defined by the right-hand side of (3.14) does exist and is unique.

Proof. For each $X \in \mathcal{V}$ in any case $T = \Omega \in \mathcal{T}$ satisfies the condition $T \supseteq X$. Hence, by the finiteness of $\mathcal{T}$, there exists at least one minimal set among $T\colon X \subseteq T \in \mathcal{T}$. On the other hand, by construction, every $X \in \mathcal{V}$ has the form $X = \bigcup_{Z\in\mathcal{X}} Z$ for some $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$, hence there exists (at least one) $A \in \mathcal{T}$ such that $A \subseteq X$. Therefore, the non-empty family $\{T \in \mathcal{T}|T \supseteq X\}$ is included in the family $\{T \in \mathcal{T}|T \supseteq A\}$ which is linearly ordered by inclusion in view of Axiom I. Consequently, the former family has the least, or equivalently, unique minimal set.

Thus, the operator C assigns by (3.14) the least embracing taxon to each set of taxons. The family $\mathcal{V}$, which is $\cup$-closed by construction, is also C-closed by virtue of the definition of C. Definition (3.14) immediately implies also (i) isotony and (ii) idempotence properties of the operator C. Hence, we obtain

Proposition 3.3. The operator C of the form of (3.14) is the closure operator on the $(C,\cup)$-closed family $\mathcal{T}$.

Corollary 3.1. The operator C (3.14) on $\mathcal{T}$ is path independent.

This corollary implies that taxons may be grouped and that their "upper level" least embracing taxons can then be taken, and one may perform these operations in arbitrary order without changing the final result.

Consider now another taxonomy axiom enabling extension of the definition of C (3.14) from $\mathcal{V} \subseteq 2^{\Omega} \setminus \{\varnothing\}$ to the family $\mathcal{U} = 2^{\Omega} \setminus \{\varnothing\}$ of all non-empty subsets of U.

Axiom II. The family $\mathcal{T}$ is closed under non-empty intersections, that is (taking into account finiteness of $\mathcal{T}$)

$$A, B \in \mathcal{T},\; A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}. \tag{3.15}$$

Lemma 3.2. Provided Axiom II, the set $C(X)$ determined by the right-hand side of (3.14) exists and can be expressed uniquely as

$$C(X) = \bigcap_{T\in\mathcal{T},\, T\supseteq X} T, \tag{3.16}$$

with any non-empty $X \subseteq U$.

Proof of Lemma 3.2. Follows from (3.14) and (3.15).

It is easy to see that the operator $C{:}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ ($\mathcal{U} = 2^U \setminus \{\varnothing\}$) in the form (3.16) satisfies the closure requirements (i) and (ii), which implies

Proposition 3.4. The operator C of the form (3.16) is the closure operator on the $(C, \cup)$-closed family $\mathcal{U}$.

Corollary 3.2. The operator C (3.16) on $\mathcal{U}$ is path independent.

Thus, under Axiom II, as a strengthening of Corollary 3.2, one may form *arbitrary* groups of elements from U and, then, take the least taxons that embrace these groups, carrying out the operations in an arbitrary serial-parallel way, and this will lead to the same result.

The sense and justification of Axiom II for taxonomy [82] can be found in the so-called facet classification principle. According to this principle, non-empty object classes (taxons) are defined as sets of objects featuring some (characteristic for this class) property. If A and B are non-empty classes with characteristic properties P_A and P_B, respectively, P_A and P_B being mutually non-contradictory, then $A \cap B \neq \varnothing$ is the object class having the characteristic property $P_A \& P_B$.

Remark 3.1. The construction (3.16) considered with Axiom II provided, is in essence the universal construction of closure operator (e.g., see [104], for the case of $\mathcal{U} = 2^U$). Strictly speaking, this requires a somewhat stronger than (3.15) condition of closedness of the family $\mathcal{T}$ with respect to any intersections of the members of $\mathcal{T}$ including empty intersections, which yields $C(\varnothing) = \varnothing$ (and in the case of infinite $\mathcal{T}$, also with respect to intersections of members of any infinite subfamilies of $\mathcal{T}$). Namely, consider an arbitrary closure operator $C{:}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, where $\mathcal{U} = 2^U$ or $\mathcal{U}$ is a subfamily of 2^U that contains U and is $\cap$-*closed*, i.e. closed with respect to intersections. Then the family of its *fixed points* $\mathcal{T}_c = \{X \in \mathcal{U} | C(X) = X\}$ is also closed under intersections and contains U. Any family $\mathcal{T}$ of sets from 2^U satisfying the latter two requirements is referred to as *Moorean family*, and its elements as *closed sets*. And conversely, provided an arbitrary Moorean family $\mathcal{T} \subseteq 2^U$, the operator C defined by (3.16) on 2^U (or on any $\mathcal{U}$ such that $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U} \subseteq 2^U$) is the closure operator, with $\mathcal{T}$ being its family of fixed points [104].

We introduce now yet another taxonomy axiom.

Axiom III. If $A, B \in \mathcal{T}$ then

$$A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \subseteq B \text{ or } B \subseteq A. \tag{3.17}$$

Lemma 3.3. Axiom III implies Axioms I and II.

Proof. Suppose that Axiom III is valid.

(1) Let the premise in (3.13) be true: $A \subseteq B$, $A \subseteq C$ for some $A, B, C \in \mathcal{T}$. Then by non-emptiness of A we have $B \cap C \neq \varnothing$, whence by (3.17) $B \subseteq C$ or $C \subseteq B$, which is precisely the conclusion of Axiom I.

(2) Let the premise in (3.15) be true: $A \cap B \neq \varnothing$ for some $A, B \in \mathcal{T}$. Then by (3.17) $A \subseteq B$ or $B \subseteq A$; in both cases the conclusion of Axiom II is fulfilled.

One can check easily through examples that neither Axiom I nor Axiom II imply each other or Axiom III. Thus, Axiom III strengthens each of mutually independent Axioms I and II. To complete the picture, one has to demonstrate that Axiom III is equivalent to the following apparent strengthening of Axiom I:

Axiom IV. For any non-empty $X \subseteq U$ and for any $A, B \in \mathcal{T}$

$$X \subseteq A,\ X \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \text{ or } B \subseteq A. \tag{3.18}$$

Lemma 3.4. Axioms III and IV are equivalent.

Proof. Let Axiom III be true, and let the premise of Axiom IV be valid: $X \subseteq U$, $X \neq \varnothing$ and $A, B \in \mathcal{T}$ are given such that $X \subseteq A$, $X \subseteq B$. Then $A \cap B \neq \varnothing$, which by Axiom III yields the conclusion of Axiom IV. Conversely, let Axiom IV be true, and let the premise of Axiom III be valid: $A, B \in \mathcal{T}$ are given such that $A \cap B \neq \varnothing$. Then, setting $X = A \cap B$, we obtain the conclusion of Axiom III from Axiom IV.

By virtue of Lemmata 3.3 and 3.4, the validity of Proposition 3.4 and Corollary 3.2 asserting PI of the operator C (3.16) is even more so guaranteed by Axiom III or, equivalently, by Axiom IV.

4. Other operations over sets with path independent transformations

As a formalization of "decomposition of a whole into parts", the previous sections considered a set represented as a union of its subsets. However, even if one still uses sets as a mode of description of "complex objects", union is not the only operation that may be used here. Consider some of the possible alternative operations.

4.1. Intersection. The operation of intersection, being dual to the union, is its natural counterpart. With this operation, the formal analogue of basic PI property for an operator $G: \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ is as follows: for any $X', X'' \in \mathcal{V}$

$$G(G(X') \cap X'') = G(X' \cap X''), \tag{4.1}$$

where $\mathcal{V} \subseteq 2^U$ is some $(G, \cap)$-closed family of sets. It is easy to see that substituting operation $\cup$ for $\cap$ elsewhere in Section 2 leaves all statements valid, because the only properties of the operation on a set family used there were associativity, commutativity and existence of a neutral element, plus idempotence in Lemma 2.1 and Proposition 2.1.

On the face of it, intersection might seem to be in poor agreement with Plott's idea of "decomposing" a problem of complex set transformation into simpler ones. Indeed, the sets X' and X'' are knowingly not less than their intersection $X = X' \cap X''$. However, the concept of set complexity, more precisely, complexity of set description, is related not only to set size, but moreover may depend on set size not necessarily in a positive mode: there may exist inverse complexity vs. size dependence. For example, if each set Z is described by its characteristic property P_Z, then the set $X = X_1 \cap \cdots \cap X_m$ is described by the characteristic property $P_{X_1} \& \cdots \& P_{X_m}$, which may well be more complex, in a sense, than the description P_{X_i} of each of "larger" sets X_i. This case is exemplified by representation of a convex body in R^n, e.g., a convex polytope, as the intersection of simpler convex polytopes, namely, semispaces. This allows us to consider the serial-parallel scheme of application of an operator G with the operation $\cap$ (the basic two-stage version of such a SP scheme is described by (4.1)) as a possible simplification of bulky data handling. It will be soon demonstrated by an example.

A type of operator G may be mentioned for which the adequateness of $\cap$ in (4.1) can be demonstrated: those are shrinking operators. They result naturally when considering axioms dual to those for closure operators C, that is, obtained when replacing $\cup$ by $\cap$ and $\subseteq$ by $\supseteq$. These dual axioms can be formally obtained by taking the operator $G\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ expressed via C as

$$G(X) = U \setminus C(U \setminus X). \tag{4.2}$$

Here $\mathcal{V} \subseteq 2^U$ is the $(G, \cap)$-closed family related to the $(C, \cup)$-closed domain $\mathcal{U}$ of the operator C by $\mathcal{V} = \{U \setminus X | X \in \mathcal{U}\}$. As is easy to verify, under such a one-to-one correspondence from C on $\mathcal{U}$ to G on $\mathcal{V}$, the expanding condition $C(X) \supseteq X$ and conditions (i) and (ii) from Definition 3.1 transform respectively into $G(X) \subseteq X$ and

$$\text{(i)} \quad X \subseteq Y \Rightarrow G(X) \subseteq G(Y), \tag{4.3}$$

$$\text{(ii)} \quad G(G(X)) = G(X), \tag{4.4}$$

so that (i) and (ii) in fact remain in their earlier formulations. The basic formulation (3.3) of the PI property transforms into (4.1). Proposition 3.1 becomes as follows (of course, it can be proved directly):

Proposition 4.1. If G is a shrinking operator on a $(G, \cap)$-closed family $\mathcal{V} \subseteq 2^U$, then (i) and (ii) are equivalent to the PI property (4.1).

Remark 4.1. A shrinking operator G on $\mathcal{V}$ featuring (i) and (ii) which has to be dual to a closure operator (again by (4.2)) may be called a *disclosure* operator ($G(X)$ is also called the *interior* of the set X; see [76]).

The fixed points of this operator, that is, the sets X satisfying (4.4), will be referred to as *open* sets. The use of this term is justified by the fact that open sets are complements in U to the closed sets (see Remark 3.1). It implies, in particular, that the family $\mathcal{G}$ of all open sets determined by some disclosure operator $G: \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ (where $\mathcal{V} \subseteq 2^U$ is an arbitrary $\cup$-closed family containing $\varnothing$), is closed under unions and contains $\varnothing$. We shall refer to each $\cup$-closed family $\mathcal{G} \subseteq 2^U$ containing $\varnothing$ as *co-Moorean*. Given an arbitrary co-Moorean family $\mathcal{G} \subseteq 2^U$, one can define, by analogy with constructing the closure operator (Remark 3.1), a disclosure operator G on $\mathcal{V}$, where $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V} \subseteq 2^U$, in any of the following two equivalent ways: either

$$G(X) = \max\{S \in \mathcal{G} \,|\, S \subseteq X\} \tag{4.5}$$

(the counterpart of the definition (3.14), with the set $G(X)$ being well defined for every $X \in \mathcal{V}$), or

$$G(X) = \bigcup_{S \in \mathcal{G}, S \subseteq X} X \tag{4.6}$$

(the analogue of the definition (3.16)). Here $\mathcal{G}$ will be the family of open sets generated by G. Thus, $G(X)$ is the greatest open set contained in X (which substantiates the term “interior”).

Since a disclosure operator G is shrinking one, it may be treated as a special type of choice function. By way of example, interpret U as a society, the sets X as social groups, and $G(X)$ as the *active* part of X in the following sense. Assume that a binary *support relation* R is defined on U, with xRy $(x, y \in U)$ meaning that the individual x supports the activity of individual y. For any $X \subseteq U$, the set $Y \subseteq X$ will be called *active in* X if for any $y \in Y$ there exists $x \in X$ such that xRy. One can easily see that the family $\mathcal{Y}$ of all active in X sets Y is co-Moorean. In particular, co-Moorean is the family $\mathcal{V}$ of all sets V active in U. Define $G(X)$ as the greatest set V active in X and call it the *active part* of X: $G(X) = \max\{Y \,|\, Y \in \mathcal{Y}\}$. It is easy to see that (1) since the family $\mathcal{Y}$ of all active in X sets Y is co-Moorean, the active part is well defined, and (2) the equivalent definition of $G(X)$ is the union of all those active in U sets V that lie in X:

$$G(X) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}, V \subseteq X} V. \tag{4.7}$$

Since $\mathcal{V}$ is co-Moorean family, G on 2^U is a disclosure operator, and so by Proposition 4.1 it is path independent. For example, assume that we are interested in the active part of the social group of “educated immigrants”. By virtue of PI, this subgroup can be identified, if one wishes, in two stages rather than in one by taking the active part of the educated strata of active immigrants. Indeed, denote by X' the totality of all immigrants and by X'' that of all educated members of the society. Then (4.1) is precisely the substantiation of such two-stage isolation of the active part of the group $X = X' \cap X''$.

4.2. Vectorial addition of sets. As applied to sets in linear space (R^n, for simplicity), vectorial addition of sets is defined in terms of conventional addition of vectors (denoted both by $+$) as follows: if $X, Y \subseteq R^n$, then

$$X + Y = \{z \in R^n \,|\, \exists x \in X, y \in Y : x + y = z\}. \tag{4.8}$$

Consider an operator Pr of orthogonal projecting sets onto some linear subspace $L \subset R^n$. It satisfies the additivity and idempotence requirements:

$$\mathrm{Pr}\,(X' + X'') = \mathrm{Pr}\,X' + \mathrm{Pr}\,X'', \tag{4.9}$$

$$\mathrm{Pr}\,(\mathrm{Pr}\,X) = \mathrm{Pr}\,X, \tag{4.10}$$

which correspond to axioms (3.8) and (3.9) of an abstract $\cup$-separable projector with substituting $+$ for $\cup$. The operation $+$ is associative and commutative (so that $(\mathcal{U}, +)$ is an Abelian semigroup) although, unlike $\cup$, it is not idempotent. Therefore, Proposition 3.2 on PI for a $\cup$-separable projector Pr on $(\mathcal{U}, \cup)$ is extended by the same operator Pr on another Abelian semigroup $(\mathcal{U}, +)$ (it suffices to take $C = \mathrm{Pr}$ and substitute $+$ for $\cup$ in the chain of equalities (3.10)):

Proposition 4.2. Each orthogonal projector Pr on a family $\mathcal{U}$ of sets in R^n with the vectorial addition operation $+$ is path independent:

$$\mathrm{Pr}\,(\mathrm{Pr}\,X' + X'') = \mathrm{Pr}\,(X' + X''). \tag{4.11}$$

4.3. Addition on arrays that are not sets. As for the formulations in Section 2, it is easy to check that they exploit essentially only the algebraic properties of set union disregarding the inner structure of the objects $X, X', \ldots$ as sets. In Sections 5 and 6 we present the PI formulations and statements in terms of abstract objects and operations. Now, we present an example demonstrating the usefulness of extending our scheme onto objects different from the usual sets.

Consider averaging an array of numbers or, for greater generality, of ordered numerical n-tuples, that is, vectors $x \in R^n$. We say *array* and not *set*, implying that the former can have repeated objects (which is important for averaging!). The array is described formally as a *multiset*, that is, set indicating multiplicity (the number of occurrence) of each object (vector, in our case). For the sake of simplicity, assume that in each array the number of different vectors is finite; let it be vectors $x^1, \ldots, x^I$. Then a multiset can be described as the set of pairs $\mathbf{X} = \{(x^1, p_1), \ldots, (x^I, p_I)\}$, where the integer p_i is the multiplicity of occurrence of the vector x^i $(i = 1, \ldots, I)$ in the array. The *singular* (point-wise) multiset containing a single pair (x, p) is a special case of array.

In its turn, each multiset $\mathbf{X}$ may be treated as the graph of the mapping $p: X \to R$, where $X = \{x^1, \ldots, x^I\}$, R is the numerical axis, and $p(x^i) = p_i$, $i = 1, \ldots, I$. The mapping p is called the *histogram* of the array X. In what follows, it would be more convenient to use (and call a "histogram") an extension of this mapping from X onto $R^n \supset X$, that is, the mapping $p^{\mathbf{X}}: R^n \to R$, where $p^{\mathbf{X}}(x) = p_i$ at the point $x = x^i$ $(i = 1, \ldots, I)$ and $p^{\mathbf{X}}(x) = 0$ in all remaining points of R^n.

Define the sum $\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ of arrays $\mathbf{X}$ and $\mathbf{Y}$ as the array $\mathbf{Z}$ defined by the histogram $p^{\mathbf{Z}}(x) = p^{\mathbf{X}}(x) + p^{\mathbf{Y}}(x)$, $x \in R^n$. Stated differently, the resulting array $\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ contains all those and only those vectors that are present (with non-zero multiplicity) in at least one of the arrays $\mathbf{X}$ and $\mathbf{Y}$. Then, if the absence of a vector in the array is treated as zero multiplicity, the total vector multiplicity in $\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ is equal to the sum of its multiplicities in $\mathbf{X}$ and $\mathbf{Y}$. Obviously, the binary operation $\oplus$ on the set of arrays is associative and commutative (and not idempotent), and also possesses the neutral element, namely the empty array $\mathbf{\Phi}$, represented by the zero histogram $p^{\Phi}(x) \equiv 0$.

We introduce now the array averaging operator $\mathbf{A}$ transforming each array $\mathbf{X}$ into a singular array $\{(\overline{x}, N)\} = \mathbf{A}(\mathbf{X})$, where

$$N = N(\mathbf{X}) = \sum_x p^{\mathbf{X}}(x), \tag{4.12}$$

$$\overline{x} = \overline{x}(\mathbf{X}) = \frac{1}{N} \sum_x p^{\mathbf{X}}(x) x, \tag{4.13}$$

summing being done for all those $x \in R$ for which $p^{\mathbf{X}}(x) > 0$. This array is represented by the *singular histogram*

$$p^{\mathbf{A}(\mathbf{X})}(x) = \begin{cases} N(\mathbf{X}), \text{ if } x = \overline{x}(\mathbf{X}), \\ 0, \text{ otherwise}. \end{cases} \tag{4.14}$$

Proposition 4.3. The array averaging operator $\mathbf{A}$ is path independent:

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}(\mathbf{X}) \oplus \mathbf{Y}) = \mathbf{A}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}). \tag{4.15}$$

Proof. Let two arrays $\mathbf{X}$ and $\mathbf{Y}$ with histograms $p^{\mathbf{X}}$ and $p^{\mathbf{Y}}$ be given. First, consider the singular array $\mathbf{V} = \mathbf{A}(\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})$. It is characterized by the pair

$$N(\mathbf{V}) = \sum_x (p^{\mathbf{X}}(x) + p^{\mathbf{Y}}(x)), \tag{4.16}$$

$$\overline{x}(\mathbf{V}) = \frac{1}{N(\mathbf{V})} \sum_x (p^{\mathbf{X}}(x) + p^{\mathbf{Y}}(x))x. \tag{4.17}$$

On the other hand, the singular array $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ is characterized by

$$N(\mathbf{X}) = \sum_x p^{\mathbf{X}}(x), \tag{4.18}$$

$$\overline{x}(\mathbf{X}) = \frac{1}{N(\mathbf{X})} \sum_x p^{\mathbf{X}}(x)x, \tag{4.19}$$

and hence the array $\mathbf{Z} = \mathbf{A}(\mathbf{X}) \oplus \mathbf{Y}$ is described by the histogram

$$p^{\mathbf{Z}}(x) = \begin{cases} p^{\mathbf{Y}}(x) + N(\mathbf{X}), & \text{if } x = \overline{x}(\mathbf{X}), \\ p^{\mathbf{Y}}(x), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.20}$$

Therefore, the singular array $\mathbf{W} = \mathbf{A}(\mathbf{Z}) = \mathbf{A}(\mathbf{A}(\mathbf{X}) \oplus \mathbf{Y})$ is characterized by the pair

$$N(\mathbf{W}) = \sum_x p^{\mathbf{Z}}(x) = \sum_x p^{\mathbf{Y}}(x) + N(\mathbf{X}), \tag{4.21}$$

$$\overline{x}(\mathbf{W}) = \frac{1}{N(\mathbf{W})} \sum_x p^{\mathbf{Z}}(x)x = \frac{1}{N(\mathbf{W})} \sum_x p^{\mathbf{Y}}(x)x + \frac{N(\mathbf{X})}{N(\mathbf{W})}\overline{x}(\mathbf{X}). \tag{4.22}$$

Substituting $N(\mathbf{X})$ from (4.18) into (4.21) and comparing with (4.16), we obtain $N(\mathbf{W}) = N(\mathbf{V})$. Hence, substituting $N(\mathbf{X})$ from (4.18) and $\overline{x}(\mathbf{X})$ from (4.19) into (4.22) and comparing with (4.17), we obtain $\overline{x}(\mathbf{W}) = \overline{x}(\mathbf{V})$.

Remark 4.1. The above construction may be easily extended onto infinite, in particular continuous integrable histograms.

Path independence of the array averaging operator underlies calculation of mean values "by parts" followed by repeated averaging over subarrays (with weights proportional to array sizes).

5. Path independence in abstract structures

As was seen in the previous section, a direct analogue of PI occurs in a much wider class of structures than the family of sets with union defined on it. The examples of Section 4 suggest that the only feature that is essential in the set theoretical representation of objects and their "decompositions", is the algebraic properties of the set union. Looking in Section 2 through various formulations of PI and their interrelations, one can readily see that we used there only the presence of a totality of objects $\mathcal{U}$ with a binary operation defined on it (that is, a *groupoid*), an operation $\cup$ having sufficiently good algebraic properties.

More concretely, the set union operation $\cup$ features (a) *associativity*: $(X\cup Y)\cup Z = X\cup(Y\cup Z)$ (which makes a *semigroup* from the groupoid and formally enables to define multiplace union of an arbitrary finite number of sets $\bigcup_{\nu\in N} X_\nu$); (b) *commutativity*: $X\cup Y = Y\cup X$ (thus, the semigroup becomes an *Abelian* one); and two additional properties, (c) existence of the *neutral element* $\varnothing$: $X\cup\varnothing = \varnothing\cup X = X$, making the *monoid* from the semigroup, and (d) *idempotence*: $X\cup X = X$ (thus, making the Abelian semigroup to be the *semilattice*). The principal constructions and statements of Section 2 exploited properties (a), (b) and (c) (the property (d) was used only in the auxiliary statements: Lemma 2.1 and Proposition 2.1). Among the examples of other operations in Section 4, the set intersection $\cap$ possessed all the properties (a)–(d), and operations of the vectorial addition of sets, $+$, and of addition of arrays, $\oplus$, possessed the properties (a)–(c).

Now consider an abstract totality $\mathcal{U}$ of objects $X, X', \ldots, Y, Z, \ldots$ with a binary operation $*$ on it such that $X * Y \in \mathcal{U}$ for all $X, Y \in \mathcal{U}$, i.e. a groupoid $(\mathcal{U}, *)$, and consider an operator $G{:}\,\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ (so that the set $\mathcal{U}$ is $(G,*)$-closed, by the terminology of Section 2). Moreover, let $(\mathcal{U},*)$ be an Abelian semigroup. Let us study an abstract version of the path independence property for the operator G on $(\mathcal{U},*)$.

Definition 5.1. Let an Abelian semigroup $(\mathcal{U},*)$ and an operator $G{:}\,\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ be given. We shall say that G on $(\mathcal{U},*)$ satisfies the *basic path independence condition* if for any $X', X'' \in \mathcal{U}$

$$G(G(X') * X'') = G(X' * X''). \tag{5.1}$$

In what follows we consider finite *formal expressions*, namely, chains $\mathbb{X}$ of symbols, of the form $X_1 * X_2 * \cdots * X_n$ or, in shortened notation, $\mathbb{X} \div *_{\nu\in N} X_\nu$ $(X_\nu \in \mathcal{U}, \nu\in N = \{1,\ldots,n\})$. By the associativity of $*$ such an expression uniquely determines the object $X = *_{\nu\in N} X_\nu$.

Definition 5.2. The expression $\mathbb{Z}\div Z_1 * \cdots * Z_k$ will be called *G-inferable from* the expression $\mathbb{X}\div X_1 * \cdots * X_n$, if it can be generated by the following algorithm.

1. The very expression $\mathbb{X}$ is inferable from itself.
2. If an expression $\mathbb{Y} \div Y_1 * \cdots * Y_i * Y_{i+1} * \cdots * Y_m$ is G-inferable from $\mathbb{X}$, then $Y_1 * \cdots * Y_{i-1} * Y_{i+1} * Y_i * Y_{i+2} * \cdots * Y_m$ is G-inferable from $\mathbb{X}$ (*transposition* of neighboring terms).
3. If $\mathbb{Y}$ is G-inferable from $\mathbb{X}$, and if $Y^*_{i,i+1} = Y_i * Y_{i+1}$, then $Y_1 * \cdots * Y_{i-1} * Y^*_{i,i+1} * Y_{i+2} * \cdots * Y_m$ is G-inferable from $\mathbb{X}$ (*gluing* of neighboring terms).
4. If $\mathbb{Y}$ is G-inferable from $\mathbb{X}$ and if $Y_i = Y'_i * Y''_i$, then $Y_1 * \cdots * Y_{i-1} * Y'_i * Y''_i * Y_{i+1} * \cdots * Y_m$ is G-inferable from $\mathbb{X}$ (*term splitting*).
5. If $\mathbb{Y}$ is G-inferable from $\mathbb{X}$, and if $Y'_i = G(Y_i)$, then $Y_1 * \cdots * Y_{i-1} * Y'_i * Y_{i+1} * \cdots * Y_m$ is G-inferable from $\mathbb{X}$ (*G-transformation*).

6. There are no other G-inferable expressions.

Definition 5.3. Let an Abelian semigroup $(\mathcal{U}, *)$ be given. Each expression of the form of $G(*_{\mu \in M} Y_\mu)$, where $*_{\mu \in M} Y_\mu$ is a formal expression G-inferable from some initial formal expression $*_{\nu \in N} X_\nu$, will be referred to as a *serial-parallel scheme* (SP-*scheme*).

Definition 5.4. An operator $G: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ on an Abelian semigroup $(\mathcal{U}, *)$ will be said to satisfy the *general PI condition* if for any expression $*_{\nu \in N} X_\nu$ and any expression $*_{\mu \in M} Y_\mu$ G-inferable from it (all $X_\nu, Y_\mu \in \mathcal{U}$) the following holds:

$$G(*_{\mu \in M} Y_\mu) = G(*_{\nu \in N} X_\nu). \tag{5.2}$$

Since the expression $G(X') * X''$ in (5.1) is G-inferable from $X' * X''$, consequently the basic PI condition follows from the general PI condition as a particular case with a specific SP scheme. Yet, under one additional assumption the inverse implication is also true:

Proposition 5.1. Let $(\mathcal{U}, *)$ be an Abelian semigroup that either (a) possesses a neutral element $\theta \in \mathcal{U}$ ($X * \theta = \theta * X = X$ for all $X \in \mathcal{U}$), and so $(\mathcal{U}, *)$ is an Abelian monoid, or (b) is provided with the idempotent operation $*$, so $(\mathcal{U}, *)$ is a semilattice. If an operator $G: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ satisfies the basic PI condition on $(\mathcal{U}, *)$, then it satisfies the general PI condition as well.

Lemma 5.1. If $(\mathcal{U}, *)$ is either (a) an Abelian monoid, or (b) a semilattice, and if $G: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ is an operator satisfying the basic PI condition, then G is idempotent: for any $X \in \mathcal{U}$

$$G(G(X)) = G(X). \tag{5.3}$$

Proof of Lemma 5.1. By the basic PI condition, in the case (a) with the presence of a neutral element θ we have

$$G(G(X)) = G(G(X) * \theta) = G(X * \theta) = G(X),$$

and in the case (b) with idempotence of $*$ we have

$$\begin{aligned} G(G(X)) = G(G(X) * G(X)) = G(X * G(X)) = G(G(X) * X) \\ = G(X * X) = G(X). \end{aligned}$$

Remark 5.1. If one proceeds from the abstract counterpart of the PI condition in Version 1 (see (2.1)) rather than from that of the basic PI condition, then idempotence of G will follow without assumption on existence of a neutral element: it suffices to take $N = N' = \{1\}$, $N'' = \varnothing$, $X_1 = X$.

Proof of Proposition 5.1. It is easy to see that by virtue of the properties of Abelian semigroup, the transformations of a formal expression $\mathbb{Y} = Y_1 * \dots * Y_m$ into new expressions $Y_1' * \dots * Y_{m'}'$, which are described in the items 2–4 of the algorithm in Definition 5.2, do not change the value of the initial expression: $Y_1 * \dots * Y_m = Y_1' * \dots * Y_{m'}'$. Therefore, the value of $G(Y_1 * \dots * Y_m)$ does hot change after such transformations of the argument of the external G. It remains to check that the value of $G(*_\mu Y_\mu)$ does not change under the transformations in the item 5 of Algorithm, i.e. that

$$G(Y_1 * \dots * Y_i * \dots * Y_m) \\ = G(Y_1 * \dots * Y_{i-1} * G(Y_i) * Y_{i+1} * \dots * Y_m). \tag{5.4}$$

Indeed, if $m = 1$, then (5.4) has the form of (5.3) and follows from Lemma 5.1. Now let $m \geqslant 2$. Taking a term Y_i in the expression $Y_1 * \dots * Y_i * \dots * Y_m$, and applying item 2 of the algorithm (transposition of neighboring terms) $i-1$ times, we come to the expression $Y_i * Y_1 * \dots * Y_{i-1} * Y_{i+1} * \dots * Y_m$. Applying item 3 of the algorithm (gluing of neighboring terms) $m-2$ times, we come to the expression $Y_i * Y_{-i}$, where $Y_{-i} = Y_1 * \dots * Y_{i-1} * Y_{i+1} * \dots * Y_m$. Now by the basic PI condition we obtain

$$G(Y_i * Y_{-i}) = G(G(Y_i) * Y_{-i}),$$

which means that applying item 5 of the algorithm to this two-term expression does not change the value of G on the set determined by the given expression. Now applying the procedure inverse to the one described above, namely, applying item 4 of the algorithm (term splitting) $m-2$ times, and then item 2 (transposition) $i-1$ times, we come from $G(Y_i) * Y_{-i}$ to the expression $Y_1 * \dots * Y_{i-1} * G(Y_i) * \dots * Y_m$, which completes the proof.

Having shown that the basic and general PI conditions are equivalent under the assumptions of Proposition 5.1, this Proposition allows us to speak simply about the PI condition.

A path independent operator G on an abstract Abelian semigroup $(\mathcal{U}, *)$ is exemplified by the *abstract separable projector*, namely an operator that obeys the following two axioms:

(i) $G(X * Y) = G(X) * G(Y)$ (separability),
(ii) $G(G(X)) = G(X)$ (idempotence).

To verify satisfying the basic PI condition in this case, we need simply to follow the proof of Proposition 3.2 (with $*$ instead of $\cup$):

$$G(G(X) * Y) = G(G(X)) * G(Y) = G(X) * G(Y) = G(X * Y).$$

Remark 5.2. One can easily check that the assumptions of Proposition 5.1, including the additional assumptions (a) and/or (b), are satisfied by all but one examples in Sections 2–4. First, they are satisfied in the initial problem on conventional choice functions: (a) for the operation $\cup$ the neutral element is $\varnothing$, and at the same time (b) $\cup$ is idempotent. Next, they are satisfied by the operators of closure and of orthogonal projecting together with the operation $\cup$ in Section 3: in any case, the requirement of (b) (idempotence) is fulfilled, and, moreover, if $\varnothing \in \mathcal{U}$ by virtue of the statement of the problem, then condition (a) is fulfilled as well. Furthermore, one of the two assumptions, (a) or (b), of Proposition 5.1 is also satisfied by each of all three models in Section 4. Indeed, in the first model the operation $\cap$ is idempotent (condition (b)). In the second model the operation of vectorial addition, $+$, of sets from $\mathcal{U} = 2^U$, where $U = R^n$, and in the third model the operation $\oplus$ of array composing, satisfy condition (a): for $+$ the neutral element is $\{0\} \subset R^n$, and for $\oplus$ the neutral element is the empty array $\mathbf{\Phi}$ (with the histogram $p^{\Phi} \equiv 0$). The only exception is the $\cup$-projector in Section 3, as well as its generalization, an abstract projector in this section. To deal with this annoying exception, we make a refinement of the proposition discussed:

Remark 5.3. The proof of Proposition 5.1 shows that additional assumptions (a) and (b) are demanded there only to guarantee idempotence of the operator G by Lemma 5.1. Hence, if we replace both of these assumptions by the direct assumption on idempotence of G, then the corresponding modification of Proposition 5.1 will be valid:

Proposition 5.1′. Let $(\mathcal{U}, *)$ be an Abelian semigroup, and let $G: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ be an idempotent operator. If G satisfies the basic PI condition, then it satisfies the general PI condition as well.

The only example in this paper that is not covered by Proposition 5.1, an abstract projector mentioned in the Remark 5.4, is now covered by Proposition 5.1′, since idempotence of G is one of the two requirements in the axiomatic definition of the abstract projector.

Remark 5.4. Versions of the abstract PI condition may be considered corresponding to Versions 1, 1′, 1″ and 2, 2′, 2″ and to the symmetrical basic PI condition of Section 2. Formally, they are all special cases of the (abstract) general PI condition. Also, they are, except for Version 2′, equivalent to both basic and general PI conditions. This fact is proved exactly as in Section 2.

Remark 5.5. In Proposition 5.1′ one can use the *symmetrical basic PI condition* $G(G(X) * G(Y)) = G(X * Y)$, rather than the basic PI condition (cf. Remark 2.2 in Section 2). To this end it suffices to show that, under idempotence of G, the symmetrical basic PI condition implies the basic one. Indeed, provided idempotence of G and symmetrical basic PI, we have

$$G(G(X) * Y) = G(G(G(X)) * G(Y)) = G(G(X) * G(Y)) = G(X * Y).$$

Replacing the basic PI by the symmetrical basic PI condition, we see that Lemma 5.1 on idempotence of G, and consequently Proposition 5.1 remain valid in a slightly modified form, namely, when assumption (a) is strengthened by yet another requirement $G(\theta) = \theta$. Indeed, in such a case idempotence of G prevails under any of two assumptions, the modified (a):

$$G(G(X)) = G(G(X) * G(\theta)) = G(X * \theta) = G(X),$$

or (b):

$$G(G(X)) = G(G(X) * G(X)) = G(X * X) = G(X).$$

The condition $G(\theta) = \theta$ is satisfied in many examples: for conventional choice functions $C(X)$ $(C(\varnothing) = \varnothing)$; for orthogonal projectors Pr both on $(R^n, \cup)$ $(\operatorname{Pr}\varnothing = \varnothing)$ and on $(R^n, +)$ $(\operatorname{Pr} 0 = 0)$; in many problems on closure, e.g. for transitive closure of relations $T(R)$ $(T(\varnothing) = \varnothing)$; and for averaging $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ of vector arrays in R^n $(\mathbf{A}(\mathbf{\Phi}) = \mathbf{\Phi})$.

Now we determine the deep-seated interrelation between the notions of PI for an operator G on an Abelian semigroup $(G, *)$ and of associativity that was foreseen by Plott: “The mathematical structure underlying path independence concepts... appears to be, at this moment, the associative law” ([203], p. 1083). In the development of this idea, Plott [203] introduced an ancillary binary operation “ $\cdot$ ” defined on $\mathcal{U} = 2^U$ (within the framework of the problem on choice functions $C\colon 2^U \to 2^U$) as follows:

$$X \cdot Y = C(C(X) \cup C(Y)). \tag{5.5}$$

He proved that, besides obvious commutativity, this operation is associative as well. Unfortunately, as was demonstrated by Johnson [147] via a simple counterexample, PI is only a sufficient and not a necessary condition of associativity of the operation (5.5). Yet another binary operation, simpler than (5.5), can be indicated whose associativity is equivalent to PI under not too restrictive assumptions.

Let $G{:}\,\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ be an operator on an Abelian semigroup $(\mathcal{U}, *)$. We introduce a binary operation $\otimes$ on $\mathcal{U}$ by the definition

$$X \otimes Y = G(X * Y). \tag{5.6}$$

By construction, for any $X, Y \in \mathcal{U}$ we have $X \otimes Y \in \mathcal{U}$. By the commutativity of $*$, the operation $\otimes$ is commutative as well. Furthermore, by the definition of $\otimes$

$$(X \otimes Y) \otimes Z = G(G(X * Y) * Z), \tag{5.7}$$

$$X \otimes (Y \otimes Z) = G(X * G(Y * Z)). \tag{5.8}$$

Therefore, associativity of $\otimes$ is equivalent to fulfillment of the equality

$$G(G(X * Y) * Z) = G(X * G(Y * Z)) \tag{5.9}$$

for all $X, Y, Z \in \mathcal{U}$. It remains to establish the relationship between Eq. (5.9) and the PI condition.

Lemma 5.2. Let $G: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ be an operator on an Abelian semigroup $(\mathcal{U}, *)$. If G satisfies the basic PI condition, then it obeys Eq. (5.9), that is, the operation $\otimes$ is associative.

Proof. By PI and the associativity of $*$ we have

$$G(G(X * Y) * Z) = G(X * Y * Z), \tag{5.10}$$

and, in addition, by the commutativity of $*$,

$$G(X * G(Y * Z)) = G(G(Y * Z) * X) = G(Y * Z * X) = G(X * Y * Z). \tag{5.11}$$

Comparing (5.10) and (5.11) yields (5.9).

Lemma 5.3. Let $G: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ be an operator on an Abelian semigroup $(\mathcal{U}, *)$ with the neutral element θ such that $G(\theta) = \theta$. If G obeys Eq. (5.9), then G is idempotent.

Proof. Let $X = Y = \theta$ in (5.9). Then the left-hand side of (5.9) by the conditions of the lemma is equal to

$$G(G(\theta * \theta) * Z) = G(G(\theta) * Z) = G(\theta * Z) = G(Z),$$

and the right-hand side is equal to

$$G(\theta * G(\theta * Z)) = G(G(Z)),$$

which under (5.9) yields $G(G(Z)) = G(Z)$.

Proposition 5.2. Let $G: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ be an operator on an Abelian semigroup $(\mathcal{U}, *)$ with a neutral element θ such that $G(\theta) = \theta$. Then for G to be path independent, it is necessary and sufficient that the binary operation $\otimes$ on $\mathcal{U}$ of the form $X \otimes Y = G(X * Y)$ be associative.

Proof. Necessity of associativity of $\otimes$ is claimed by Lemma 5.2. We prove sufficiency. Let $\otimes$ be associative, and so, equivalently, (5.9) is satisfied. Let $X = \theta$ in (5.9). Then the left-hand side of (5.9) becomes equal to

$$G(G(\theta * Y) * Z) = G(G(Y) * Z),$$

and the right-hand side, by Lemma 5.3 on idempotence of G, becomes equal to

$$G(\theta * G(Y * Z)) = G(G(Y * Z)) = G(Y * Z).$$

Equation (5.9) yields

$$G(G(Y) * Z) = G(Y * Z),$$

which is precisely the basic PI condition.

Remark 5.6. Similarly to Remark 5.3 concerning Proposition 5.1, the proof of Proposition 5.2 shows that an additional assumption $G(\theta) = \theta$ in the proposition is needed just to guarantee idempotence of the operator G by Lemma 5.3. Thus, an alternative formulation of this proposition says that under the assumptions of Proposition 5.2, both associativity of the operation $\otimes$ and idempotence of the operator G are necessary and sufficient for G to be path independent. Moreover, if we replace the assumption $G(\theta) = \theta$ by a direct assumption on the idempotence of G, then another modification of Proposition 5.2 (in parallel with the modified form, Proposition 5.1′, of Proposition 5.1) will be valid:

Proposition 5.2′. Let $G: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ be an idempotent operator on a monoid $(\mathcal{U}, *)$ (that is, on an Abelian semigroup with a neutral element). Then for G to be path independent, it is necessary and sufficient that the binary operation $\otimes$ on $\mathcal{U}$ of the form $X \otimes Y = G(X * Y)$ be associative.

Thus, the Plott conjecture on the intimate interrelation between PI and associativity has been confirmed, at least to a certain extent. It is true that operator idempotence also plays an important role though.

6. Quasi-dynamic interpretation of path independence

Already the initial concept and Plott's formulation of PI comprise, although not too explicitly, the idea of multi-stage "motion". The very term "path" implies some quasi-geometrical or, it is better to say, quasi-dynamic picture of motion along a trajectory in space. "Path independence" tacitly implies invariance of the "motion result" on the particular trajectory followed by the system from the given initial state to the given terminal one [1]. The aim of this section is to formalize the picture, that is, to represent PI in a form simulating a property of some generalized dynamic system [2].

We begin by describing formally a conventional (evolving in time) and generalized (evolving vs. an abstract parameter) dynamic system. The description, then, will be used as the pattern for quasi-dynamic representation of an abstract path independent transformation on an Abelian semigroup. As a dynamic system description (equation), consider the transfor-

---

[1] Recall "integral along path" independence of the choice of the path between two points when integrating a potential vector field.

[2] Of course, the idea of multistageness is expressed already in the "serial" aspect of a SP procedure. It manifests itself in especially clear fashion if we take a SP scheme of special form:

$$G(G(\dots(G(G(X_0) * X_1) * X_2)\dots) * X_{n-1}) * X_n).$$

This scheme describes the recursive application of the operator G at each k-th step $(k = 1, \dots, n)$ to the composed object obtained by joining the next object X_k to the previously constructed object (the newly joined object X_k being taken from the initial decomposition $X = X_0 * X_1 * \dots * X_n$). Similar multistage procedures were considered in [116–118, 230] and [98, 99] in the framework of the choice problem using decomposition of an alternative set X into subsets: $X = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_n$, in particular, into separate alternatives: $X = \{x_0\} \cup \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\}$.

mation

$$x_t = f(x_{t_0}; \mathbf{u}[t_0, t]), \tag{6.1}$$

where t is a numerical parameter having sense of time; t_0 is the initial instant; x_t is the system state at the time t; u is an exogenous action, with the symbol $\mathbf{u}[t_0, t]$ denoting the action on a time interval $[t_0, t]$ (where $t_0 < t$), taken as a whole. The state x and the action u at each time t take values x_t and u_t from some spaces $\mathcal{X}$ and $\mathcal{U}$ that are not essential now. We emphasize that $\mathbf{u}[t_0, t]$ is the function $u\colon [t_0, t] \to \mathcal{U}$, and it may be given by its graph, i.e. by the family of pairs $\{(\tau, u_\tau)\}_{\tau \in [t_0, t]}$.

Consider the general equation of the abstract dynamic system (6.1) and take a time instant $t^* > t$. According to (6.1),

$$x_{t^*} = f(x_{t_0}; \mathbf{u}[t_0, t^*]), \tag{6.2}$$

and, on the other hand, similarly,

$$x_{t^*} = f(x_t; \mathbf{u}[t, t^*]), \tag{6.3}$$

where $\mathbf{u}[t, t^*]$ is the restriction of the function $\mathbf{u}[t_0, t^*]$ onto the interval $[t, t^*]$, i.e. in the set theoretical representation $\mathbf{u}[t, t^*] = \{(\tau, u_\tau)\}_{\tau \in [t, t^*]} \subseteq [t_0, t^*]$, and $\mathbf{u}[t_0, t]$ is treated in a similar way. Comparing (6.2) and (6.3), we obtain

$$f(x_{t_0}; \mathbf{u}[t_0, t^*]) = f(f(x_{t_0}; \mathbf{u}[t_0, t]); \mathbf{u}[t, t^*]). \tag{6.4}$$

A relation of the form (6.4) is often called the *semigroup property* of dynamic systems (or *Markovian property*, or *zero depth of memory*).

We indicate explicitly which a semigroup is implied here. Consider the operator $F_{\mathbf{u}[t', t'']}(\cdot)$, acting on the state space $\mathcal{X}$, depending on $\mathbf{u}[t', t'']$ as the parameter and determined by

$$F_{\mathbf{u}[t', t'']}(x) = f(x_{t'}; \mathbf{u}[t', t''])|_{x_{t'} = x}. \tag{6.5}$$

Now Eq. (6.4) may be rewritten in the form

$$F_{\mathbf{u}[t_0, t]} \odot F_{\mathbf{u}[t, t^*]} = F_{\mathbf{u}[t_0, t^*]}, \tag{6.6}$$

where multiplication $\odot$ of operators is defined via their superposition as follows:

$$(F_{\mathbf{u}'[t_0, t_1]} \odot F_{\mathbf{u}''[t_1, t_2]})(\cdot) = F_{\mathbf{u}''[t_1, t_2]}(F_{\mathbf{u}'[t_0, t_1]}(\cdot)). \tag{6.7}$$

Equation (6.6) means that the set $\mathcal{F}$ of parametrical operators $F_{\mathbf{u}}$ together with the binary operation $\odot$ on it is a groupoid. More accurately, it is a *partial* groupoid: the product of operators $F_{\mathbf{u}'[t_0, t_1]}$ and $F_{\mathbf{u}''[t_2, t_3]}$ is defined by (6.7) not in any case but only with $t_1 = t_2$ and $u'(t_1) = u''(t_2)$, i.e. when the "right end" $(t_1, u'(t_1))$ of the parameter $\mathbf{u}'[t_0, t_1]$ coincides with the "left end" $(t_2, u''(t_2))$ of the parameter $u''[t_2, t_3]$. This "technical" circumstance does not hinder us though.

Finally, the fact that this (partial) groupoid $(\mathcal{F}, \odot)$ is the semigroup, i.e. that the operation $\odot$ is associative, follows from the very definition of $\odot$ as the operator superposition (6.7):

$$\begin{aligned}(F_{\mathbf{u}'[t_0,t_1]} \odot F_{\mathbf{u}''[t_1,t_2]}) \odot F_{\mathbf{u}'''[t_2,t_3]}(\cdot)\\ = F_{\mathbf{u}'''[t_2,t_3]}(F_{\mathbf{u}''[t_1,t_2]}(F_{\mathbf{u}'[t_0,t_1]}(\cdot)))\\ = (F_{\mathbf{u}'[t_0,t_1]} \odot (F_{\mathbf{u}''[t_1,t_2]} \odot F_{\mathbf{u}'''[t_2,t_3]}))(\cdot).\end{aligned} \tag{6.8}$$

On completing the algebraic characterization of the "semigroup property" (6.4) of the dynamic system, notice the implicit presence of still another semigroup, apart from $(\mathcal{F}, \odot)$, in the above description of the dynamic system. This semigroup is the space $\mathbf{U}_{(\sigma)}$ of action functions $\mathbf{u}[t', t'']$ on the intervals $[t', t'']$ together with the *junction* operation $*$ on it, which is defined as follows. If $t_0 < t_1 < t_2$, if an action function $\mathbf{u}[t_0, t_2]$ is given, and if $\mathbf{u}[t_0, t_1]$ and $\mathbf{u}[t_1, t_2]$ are restrictions of $\mathbf{u}[t_0, t_2]$ onto $[t_0, t_1]$ and $[t_1, t_2]$, respectively, then

$$\mathbf{u}[t_0, t_1] * \mathbf{u}[t_1, t_2] = \mathbf{u}[t_0, t_2]. \tag{6.9}$$

This is obviously equivalent to the set theoretical union of the graphs of corresponding action functions. Indeed, recall that by our convention $\mathbf{u}[t', t''] = \{(t, u_t)\}_{t\in[t',t'']}$. Thus, the binary operation of junction $*$ (6.9) is nothing more than the restriction of the operation $\cup$ on action functions represented by their graphs (restriction being executed for graph pairs $\mathbf{u}'[t'_0, t'_1]$ and $u''[t''_0, t''_1]$ such that $t'_1 = t''_0$ and $u'(t'_1) = u''(t''_0)$). This immediately implies that $(\mathbf{U}_{(\sigma)}, *)$ is a (partial) semigroup (which is true, clearly from (6.9) as well). Finally, note that the parametric operator semigroup $(\mathcal{F}, \odot)$ and the parameter semigroup $(\mathbf{U}_{(\sigma)}, *)$ are *coherent* in the sense that

$$F_{\mathbf{u}[t_0,t_1]} \odot F_{\mathbf{u}[t_1,t_2]} = F_{\mathbf{u}[t_0,t_1]*\mathbf{u}[t_1,t_2]} \tag{6.10}$$

(i.e. the mapping $\mathbf{u}[t', t''] \mapsto F_{\mathbf{u}[t',t'']}$ of the semigroup $(\mathbf{U}_{(\sigma)}, *)$ on the semigroup $(\mathcal{F}, \odot)$ is a homomorphism [31]. Equation (6.10) is the key point for an abstract generalization of the notion of a dynamic system presented below. In this generalization the role of actions $\mathbf{u}[t', t'']$ is played by parameters which are elements of some abstract set $\mathbf{\Omega}$ with a semigroup operation $*$ given on $\mathbf{\Omega}$. The role of states is played, as earlier, by elements of a given set $\mathcal{X}$.

Thus, consider an abstract system, the transformation of states of which is described by the equation

$$y = f(x; \lambda), \tag{6.11}$$

where x and y stand for states from $\mathcal{X}$, and λ for the action parameter from $\mathbf{\Omega}$. We shall call this system *quasi-dynamic* if for each $x \in \mathcal{X}$ and for all $\lambda, \pi \in \mathbf{\Omega}$ the equalities (6.11) and

$$z = f(y; \pi) \tag{6.12}$$

imply

$$z = f(x; \lambda * \pi). \tag{6.13}$$

(In the case where the semigroup $(\mathbf{\Omega}, *)$ is partial, one has to consider in this definition only such pairs $\lambda, \pi \in \mathbf{\Omega}$ that $\lambda * \pi$ has been defined.) Comparing (6.11), (6.12) and (6.13), we see that the system is quasi-dynamic if and only if it satisfies the following *abstract semigroup condition*: for each $x \in \mathcal{X}$ and any $\lambda, \pi \in \mathbf{\Omega}$

$$f(x; \lambda * \pi) = f(f(x; \lambda); \pi). \tag{6.14}$$

Equation (6.14) is a generalization of the semigroup property (6.4) of a conventional dynamic system (6.1) (note that in (6.4) $\mathbf{u}[t_0, t^*] = \mathbf{u}[t_0, t] * \mathbf{u}[t, t^*]$). Following the line of the above analysis of the semigroup property (6.4), define again the auxiliary parametric operator $F_\lambda(\cdot)$ on the state space $\mathcal{X}$ by

$$F_\lambda(x) = f(x; \lambda). \tag{6.15}$$

By means of F_λ Eq. (6.13) becomes equivalent to

$$F_\lambda \odot F_\pi = F_{\lambda * \pi}, \tag{6.16}$$

where the binary operation $\odot$ is defined by the superposition of operators F:

$$(F_\lambda \odot F_\pi)(\cdot) = F_\pi(F_\lambda(\cdot)). \tag{6.17}$$

Obviously, the operation $\odot$ on the set $\mathcal{F}$ of operators F_λ, $\lambda \in \mathbf{\Omega}$, is associative, so $(F, \odot)$ is a semigroup. Moreover, the semigroups of operators $(\mathcal{F}, \odot)$, and of parameters $(\mathbf{\Omega}, *)$, are *coherent* in the sense used above(see (6.10)), that is, the mapping $\lambda \mapsto F_\lambda$ of the semigroup $(\mathbf{\Omega}, *)$ onto the semigroup $(\mathcal{F}, \odot)$ is a homomorphism: actually this is affirmed by the abstract semigroup property (6.16). Equation (6.16) (or the equivalent equation (6.14)) may be interpreted in "quasi-dynamic" terms as follows: the result of two-fold recursive application of the operator F with the parameters λ and π coincides with the result of single application of the operator F with the "joined" parameter $\lambda * \pi$. Such is the interpretation of the semigroup property of abstract dynamic system.

We now turn to our main aim, characterization of the path independence property in terms of an abstract dynamic system. We will consider the abstract PI property presented in Section 5 in the basic version (5.1). Let $G: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ be an operator acting on an Abelian semigroup $(\mathcal{U}, *)$. Then the basic PI condition says: for any $X, Y \in \mathcal{U}$

$$G(G(X) * Y) = G(X * Y). \tag{6.18}$$

We construct a quasi-dynamic system with the space $\mathcal{X}$ of states and the space $\mathbf{\Omega}$ of parameters being the same space, let it be $\mathcal{U}$. Consider the equation of state transformation:

$$Y = f(X; V), \tag{6.19}$$

where $X, Y \in \mathcal{U}$ play the role of states, and $V \in \mathcal{U}$ the role of an action parameter. Set

$$f(X; V) = G(X * V). \tag{6.20}$$

Applying the semigroup property (6.14) to the equation of the quasi-dynamic system (6.19) with (6.20), we obtain

Lemma 6.1. The system (6.19), (6.20) is quasi-dynamic, i.e. satisfies the abstract semigroup property, if and only if the equation

$$G(X * V * W) = G(G(X * V) * W) \tag{6.21}$$

is satisfied for any $X, V, W \in \mathcal{U}$.

Equation (6.21) represents "almost" the basic PI condition (6.18). Indeed, it is obvious that (6.21) follows from (6.18): replace in (6.18) X by $X * V$ and Y by W. Moreover, under rather mild additional assumptions about $(\mathcal{U}, *)$ the converse is true as well:

Proposition 6.1. Let $(\mathcal{U}, *)$ be a semigroup satisfying at least one of the two following conditions: either (a) it is a semilattice, i.e. the operation $*$ is idempotent, or (b) it is a monoid, i.e. possesses a neutral element. Then the system (6.19), (6.20) is quasi-dynamic if and only if the operator G on $(\mathcal{U}, *)$ satisfies the basic PI condition (6.18).

Proof. In the light of Lemma 6.1 it suffices to show that (6.18) $\Leftrightarrow$ (6.21). The implication (6.18) $\Rightarrow$ (6.21) is obvious, as has been said. We prove the converse implication, (6.21) $\Rightarrow$ (6.18). Assume that (6.21) is fulfilled. Then, setting in (6.21) either (a) $V = X$, if $*$ is idempotent, or (b) $V = \theta$, if θ is the neutral element for $(\mathcal{U}, *)$, and setting $W = Y$, we obtain (6.18).

Thus, under rather general assumptions the basic PI property is equivalent to the fact that the parametric transformation $X \xrightarrow{(V)} Y$ of the form $Y = G(X * V)$ is the quasi-dynamic system, that is, satisfies the abstract semigroup property (6.14). The equivalent form of this property, Eq. (6.21), may be interpreted as a description of abstract "motion along trajectory" beginning from the "state" X and executed in two stages: first, under the action of V, then under the action of W. As required by the semigroup property (6.14) in the form (6.21), the "terminal state" of this motion must be the same as at the single application of the composition ("junction") $V * W$ of these actions. Thus, the expression "path independence" receives a transparent, almost literal interpretation.

7. Conclusion

We have considered the general form of the path independence property proposed initially by Plott to characterize special transformations of sets into their subsets (choice functions). It turned out that the formulations of various versions of this property can be extended, in essence literally and by keeping the equivalence of different versions (by simply changing notation of operations under very relaxed requirements to them), to a much wider scope of transformations of sets and other objects. Moreover, we extended these formulations to abstract algebraic systems: semigroups and their special cases. This enabled us to reveal the pure algebraic nature of path independence. In doing so, Plott's basic idea of decomposing a complicated "whole" into simpler "parts" was realized by representing an abstract object as a semigroup "junction" (sum, product) of several objects. By considering some particular examples, we could ascertain the fruitfulness of this approach to various data processing problems.

Simultaneously, the generalization of Plott's approach as presented here poses some new problems. In particular, for path independent choice functions (set shrinking transformations), simple choice mechanisms have been constructed earlier that generated precisely these choice functions (see [87] and the review by Aizerman [84]). It is natural to ask now which internal mechanisms can generate other path independent transformations, in particular set expanding ones (closure operators). On the other hand, for both shrinking and expanding path independent set transformations, some additional alternative characterizations are known in terms of operations over sets (we omitted them to save space). It is of interest to study further the algebraic nature of path independence by analyzing the abstract analogues of the mentioned characterizations. This topic requires, however, separate consideration.

An axiomatic justification of the scalar optimization [1]

A kind of inverse problem of scalar optimization is considered. An optimal value function for making an optimal choice from a variable admissible set is given, while the backing objective function being unknown. The first

[1] Constructing Scalar-Valued Objective Functions. Eds. A.Tangian, J.Gruber, Lecture Notes in Economics and Mathem. Systems.—Berlin: Springer, 1997.—P. 41–52.

problem is the existence of the objective function whose extremization generates the given opportunity value function. We formulate several axiomatic properties of this value function which are necessary and sufficient for the existence of the objective function. One of these properties implies a construction procedure, and an illustrative example of explicitly constructing an objective function from several choices is considered.

1. Introduction

The foundations of optimization theory presuppose the ability to justify and to explain the mode of the optimization accepted in the problem under consideration. The modern decision theory uses a number of different modes of optimization: besides the usual scalar optimization, i.e. maximization (or minimization) of some cardinal (numerical) or ordinal scalar criterion function over a given admissible set, some other notions of optimality are used. Namely, starting from the vector optimization as a natural generalization of the scalar one, still more sophisticated concepts of optimality (or more widely, rationality) are exploited, such as optimization by binary preference relations (in different senses), game-type behavior which leads to various "equilibrium" notions, etc. Nevertheless, the basic concept of rationality is the most widely spread and the simplest notion of scalar optimization.

This consideration makes us to recognize and to reveal the very basis for the "scalar optimization" notion in the most abstract statement of the problem. This setting of the problem is given in terms of an axiomatic characterization of the decision-maker's behavior that can be described as extremization of some scalar criterion, i.e., a numerical (or more generally, ordinal) objective function. Such a problem was posed and resolved in the abstract choice theory, which stemmed from the theory of economical behavior (especially consumer choice), in terms of the "choice functions" — specific mappings which transform admissible sets to chosen objects (alternatives) — see, e.g., [63, 94, 141, 222]. The present work proposes another statement of the problem, where the description of a decision-maker is presented in terms of a given scalar evaluation of different admissible sets from the decision-maker's standpoint. More formally, a correspondence "admissible sets $\longmapsto$ scalar estimates" is given, and the question is: Can this correspondence be represented as the result of solving a scalar optimization problem? And if so, then how do we find (at least) one corresponding objective function?

As for the conventional approach used in the choice theory, it is the concept of "revealed preference" which originated from the classical works [145, 216, 217], and later [94, 211, 212, 222], that served as a basis for reconstructing objective functions when it is possible, i.e. when the corresponding axiomatics of revealed preference is satisfied. More precisely, it is required that an "observed" choice mapping not only can be presented as the result of optimization by a preference relation, but moreover, this binary relation must be a weak order. A survey of different versions of axioms of revealed preference can be found in [234].

The theory of consumer choice is the field that has served as the historical source and the typical application area of the revealed preference approach. Let us consider a simple conventional model of consumer behavior. Let $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ be a vector of goods, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$ a vector of prices, and $I \geqslant 0$ the income of the consumer. We suppose that a rational consumer maximizes his/her utility function $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^1$ under the budget constraint, i.e. it solves the problem

$$\begin{cases} \max u(x) \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i \leqslant I. \end{cases} \tag{1}$$

The conventional approach in the choice theory presupposes that we do not know the utility function u and even do not know if such a function does exist at all, but we "observe" a choice function c of the form $c(p; I) = x$ which points out the vector of goods bought by the consumer under the prices p and the income I. The theory of revealed preferences answers the question of whether this choice function can be represented as the result of solving the problem (1), and if yes, how to find a corresponding utility function (to be more precise, to find at least one of such functions — it is obvious that u in (1) is determined at least up to arbitrary monotonic transformation).

Let us revert to the problem (1) assuming that the function u does exist, and denote by $v(p, I)$ the optimal value of u in this problem with given arbitrary p and I. The function v is called the *indirect* utility function. Now assume that an arbitrary mapping $v : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$ is given, and let us pose the question: Can this function be interpreted as an indirect utility function for some consumer choice problem (1)? It is obvious that the answer is certainly not always positive. Indeed, if for some p', p'' and I', I'' we have $p' < p''$ and $I' > I''$ but $v(p', I') < v(p'', I'')$ then the answer is definitely negative: Decreasing the budget set $B(p, I) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid px \leqslant I\}$ cannot allow to increase the maximal achievable value of the utility function.

This particular introductory example shows that the statement of the problem where an "indirect" evaluation of "opportunity sets" (budget sets, in this example) is initially given, and a corresponding underlying objective function is sought, does indeed make sense and is generally nontrivial. The first stage of solving such a problem is to conclude, if such indirect value function can be represented as the result of maximization of some "direct" objective function. The second stage is to construct at least one appropriate direct objective function. Various versions of this general statement of the problem and the respective solutions form the matter of this paper.

2. Statement of problem and a primary axiomatics

Consider the following abstract model of a scalar optimization problem. Assume that a “universal” set U of objects $x, y, \ldots$ is given, and that some subset $X \subseteq U$ is given as an admissible set (set of feasible alternatives). Let some objective function $f(x)$ on U be given that evaluates the quality of the alternatives x. For the sake of simplicity we shall assume that f is a numerical function, i.e. a mapping $f : U \to \mathbb{R}^1$, but all that follows will be true for arbitrary ordinal scales, i.e. mappings $f : U \to L$ into arbitrary linearly ordered sets L. Also for simplicity we suppose here that the set U is finite, which allows us to avoid herein the technical questions on the existence of solutions of the maximization problems below (the principal results remain valid in the case of arbitrary infinite sets with replacement of max by sup and min by inf). Consider the problem

$$\max_{x \in X} f(x) \tag{2}$$

and refer to it as the *scalar optimization problem* $\langle U, X, f\rangle$. Denote by $F(X)$ the (maximal) value of the objective function f in (2) which depends on X as a parameter. The function $F(X)$ must obviously have some specific features, including evident monotonicity: the bigger is X, the bigger (not smaller) is $F(X)$. Here we tacitly assume that the set X may be changed. To formalize this, let us introduce explicitly a family $\mathcal{U}$ of all admissible sets X; thus, $\mathcal{U} \subseteq 2^U$. We shall suppose that $\bigcup_{X \in \mathcal{U}} X = U$ (otherwise, i.e. if $\bigcup_{X \in \mathcal{U}} X \subset U$, we will simply “throw out” all uncovered elements of the set U). Also in general we can admit $\varnothing \in \mathcal{U}$; in such a case let $F(\varnothing)$ be arbitrary but not more than $F(X)$ for any $X \neq \varnothing$, and let the value (2) for $X = \varnothing$ be equal to $F(\varnothing)$ by definition (with any f).

Now let us reverse the problem under consideration and assume that a function $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^1$ is given. We pose the question: Under which conditions can the function F be represented as generated by a family of optimization problems $\langle U, X, f\rangle$ with some appropriate fixed function f? Introduce the following axiomatic conditions.

Axiom 2.1. (*Monotonicity* (M)). For each $X, X' \in \mathcal{U}$

$$X \subseteq X' \Rightarrow F(X) \leqslant F(X'). \tag{3}$$

Axiom 2.2. (*Concordance* (C)). For each $X \in \mathcal{U}$ and for each family $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$

$$X = \bigcup_{\nu \in N} X_{\nu \in N} \Rightarrow F(X) \leqslant \max_{\nu \in N} F(X_\nu). \tag{4}$$

Axiom 2.3. (*Concordant Monotonicity* (CM)). For each $X \in \mathcal{U}$ and for each $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$

$$X \subseteq \bigcup_{\nu \in N} X_\nu \Rightarrow F(X) \leqslant \max_{\nu \in N} F(X_\nu). \tag{5}$$

Similar axioms were already used in another context in [175].

The obvious meaning of Monotonicity has been already commented on above. The meaning of the Concordance axiom is less evident. Contrary to Monotonicity, Concordance puts an upper bound for the growth of the F value under widening X. Briefly speaking, it asserts that the value of a "whole" opportunity set should be not more than the value of at least one of its "parts". In fact, this axiom just contains implicitly a flavour of the idea that the value of a set is predetermined by the maximal value of its elements, which is the central point of this work. Finally, Concordant Monotonicity is a kind of amalgamation of Monotonicity and Concordance, which is elucidated by the following Lemma 2.4 and the subsequent commentary.

Lemma 2.4. $\mathrm{CM} \Rightarrow \mathrm{C\,\&\,M}$. Moreover, let $\mathcal{U}$ be closed with respect to unions, i.e.

$$\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{\nu \in N} X_\nu \in \mathcal{U}. \tag{6}$$

Then $\mathrm{CM} \Leftrightarrow \mathrm{C\,\&\,M}$.

Proof of Lemma 2.4 as well as of other Lemmata of this paper and of Theorem 3.5 (Theorems 3.1 and 3.2 will follow as corollaries) can be found in the Appendix.

Generally CM is stronger than C & M. Indeed, let

$$U = \{a, b, c, d\},\ \mathcal{U} = \{X^1, X^2, X^3\},$$

where

$$X^1 = \{a, b\},\ X^2 = \{b, c\},\ X^3 = \{c, d\},$$

and let

$$F(X^1) = F(X^3) = 0,\ F(X^2) = 1.$$

Then the conditions C and M are void, i.e. they are satisfied in a trivial way, whereas CM is violated, since $X^2 \subseteq X^1 \cup X^3$, yet

$$F(X^2) = 1 > 0 = \max\{F(X^1), F(X^3)\}.$$

An apparent generalization of CM is presented in the following form:

Axiom 2.5. (*Family Concordant Monotonicity* (FCM)). For every two families $\{X'_\mu\}_{\mu \in M}$, $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$

$$\bigcup_{\mu \in M} X'_\mu \subseteq \bigcup_{\nu \in N} X_\nu \Leftrightarrow \max_{\mu \in M} F(X'_\mu) \leqslant \max_{\nu \in N} F(X_\nu). \tag{7}$$

Lemma 2.6 FCM⇔CM.

Finally, the condition FCM can be represented in the equivalent symmetrized form:

Axiom 2.7. (*Recombination* (R)). For every two families $\{X'_\mu\}_{\mu\in M}$, $\{X_\nu\}_{\nu\in N} \subseteq \mathcal{U}$

$$\bigcup_{\mu\in M} X'_\mu = \bigcup_{\nu\in N} X_\nu \;\Rightarrow\; \max_{\mu\in M} F(X_\mu) = \max_{\nu\in N} F(X_\nu). \tag{8}$$

The axiomatic requirement R means that a redistribution of alternatives among a family of opportunity sets (with possible multiple occurrence of an alternative in different opportunity sets in the family) cannot change the maximal value of opportunity sets in the family. This is another manifestation of the same idea: The value of an opportunity set is equal to the value of its best element.

Lemma 2.8. R⟺CM.

Thus, all three axioms CM, FCM, R are mutually equivalent.

3. Main results

The solution of the problem posed above in the most general form is given by the following theorem.

Theorem 3.1. (*General criteria for optimizational representability of opportunity set values*). A function $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^1$ to be representable as the optimal value function of the corresponding family $\langle U, X, f\rangle_{X\in\mathcal{U}}$ of the scalar optimization problems (2) with some function f, if and only if F satisfies the condition CM, or the equivalent condition R.

The proof of Theorem 3.1 will be obtained as a corollary from the assertions stated below. In turn, as an immediate corollary from Theorem 3.1 and Lemma 2.4 we obtain Theorem 3.2.

Theorem 3.2. (*Special criterion of optimizational representability for opportunity set values*). Let $\mathcal{U}$ be closed with respect to unions. Then a function $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^1$ is representable as the optimal value function for a family $\langle U, X, f\rangle_{X\in\mathcal{U}}$ of the scalar optimization problems, if and only if F satisfies both conditions M and C.

Theorems 3.1 and 3.2 give criteria for the existence of a desirable objective function f but say nothing about the form of f. To obtain constructive results about f, we will follow the idea of "revelation" of preferences from choice theory, but implement such an idea here in terms of values rather than preference relations. Here we follow the method of Richter [211, 212] which simultaneously provides a criterion for the existence of an objective function demanded where such a function is built explicitly. Thus, such a criterion will have a desirable constructive form. To this end, introduce another axiomatic condition:

Axiom 3.3. (*Revealed Value* (RV)). For every $X \in \mathcal{U}$

$$F(X) \leqslant \max_{x \in X} f_F(x), \tag{9}$$

where $f_{\mathrm{F}} : U \to \mathbb{R}^1$ is the *revealed objective function* defined by

$$f_F(x) = \min_{Y:\, x \in Y \in \mathcal{U}} F(Y). \tag{10}$$

The revealed value condition is obviously equivalent to the following *functional inequality* for F:

$$F(X) \leqslant \max_{x \in X} \min_{Y:\, x \in Y \in \mathcal{U}} F(Y). \tag{11}$$

It is easy to see also that RV is equivalent to the following condition.

Axiom 3.4. (*Modified Revealed Value* (MRV)). For every $X \in \mathcal{U}$

$$F(X) = \max_{x \in X} f_F(x), \tag{12}$$

where f_F is the above revealed value function (10).

Indeed, while considering (9) one can always take in (10) $Y = X$ among all Y such that $x \in Y \in \mathcal{U}$, hence for every $x \in X$ in holds

$$f_F(x) = \min_{Y:\, x \in Y \in \mathcal{U}} F(Y) \leqslant F(X), \tag{13}$$

and therefore,

$$F(X) \geqslant \max_{x \in X} f_F(x). \tag{14}$$

Combining (14) with (9), we obtain that one may always replace $\leqslant$ in (9) by $=$, which yields (12). This states the equivalence of RV and MRV.

Theorem 3.5. (*Constructive criterion of optimizational representability for opportunity set values*). A function $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^1$ is representable as the optimal value function of some family $\langle U, X, f\rangle_{X \in \mathcal{U}}$ of the scalar optimization problems, if and only if F satisfies the condition RV, or the equivalent condition MRV. Moreover, in this case the revealed value function f_F may be always taken in place of the objective function f in an underlying problem family $\langle U, X, f\rangle_{X \in \mathcal{U}}$.

Thus, Theorem 3.5 yields not only a criterion of optimization representability of a given indirect value function F. This theorem also gives a constructive solution f_F of the revelation problem obtained for an objective function which underlies (if any) the observed decision-maker's evaluations $F(X)$ of opportunity sets $X \in \mathcal{U}$.

It remains to relate the criterion given by Theorem 3.5 to the (still unproved) criterion presented in Theorem 3.1 (and in a particular case, in Theorem 3.2). For this purpose we establish

Lemma 3.6. $\mathrm{CM} \Leftrightarrow \mathrm{RV}$.

Lemma 3.6 together with Theorem 3.5 immediately imply Theorem 3.1 (and Theorem 3.2).

To make the obtained results more clear, consider two particular cases.

I. Let the family $\mathcal{U}$ be closed with respect to unions, so that by Theorem 3.2 the conjunction $\mathrm{M}\,\&\,\mathrm{C}$ is necessary and sufficient for the representability of $F(X)$ via a scalar optimization problem (2). To clarify this situation, transform the condition M into apparently more complex but equivalent form: For each $X \in \mathcal{U}$ and each family $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$

$$X = \bigcup_{\nu \in N} X_\nu \Rightarrow F(X) \geqslant \max_{\nu \in N} F(X_\nu), \qquad (15)$$

which is a "mirror reflection" of the condition C (4). Juxtaposition of (15) and (4) shows that the conjunction $\mathrm{M}\,\&\,\mathrm{C}$ is equivalent to the following condition.

Axiom 3.7. (*Aggregability condition* (A)). For every family $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq$ $\subseteq \mathcal{U}$

$$F(\bigcup_{\nu \in N} X_\nu) = \max_{\nu \in N} F(X_\nu). \qquad (16)$$

(Generally we may apply (16) only to families $\{X_\nu\}$ such that $\bigcup_\nu X_\nu \in \mathcal{U}$, but for $\mathcal{U}$ closed with respect to unions this always holds). Condition A elucidates the specific feature of "behavior"of F functions that can be generated by optimization problems.

II. Let the family $\mathcal{U}$ include all singletons: For each $x \in U$ we have $\{x\} \in \mathcal{U}$. Then the criterion of representability of $F(X)$ via (2) takes the simplest (in fact, trivial) form: For each $X \in \mathcal{U}$,

$$F(X) = \max_{x \in X} F(\{x\}). \qquad (17)$$

Here the "obvious candidate" to the role of the objective function f is $f(x) \equiv F(\{x\})$.

Note that the case of the complete family $\mathcal{U} = 2^U$ satisfies the requirements of both the above described cases I and II.

Thus, the criterion of representability of a function $F(X)$ on $\mathcal{U}$ as the result of extremization is actually the amalgamation CM (or equivalently, FCM, or R) of two axioms: M(onotonicity) and C(oncordance). On the other hand, another form of the criterion of such representability, the condition RV, shows a constructive way to find a desirable underlying objective function.

Remark 3.8. Note that the Monotonicity condition is a structural analogue of the *Independence of Irrelevant Alternatives* axiom for choice functions, also known as Chernoff's condition, or α-axiom of Sen, or Heredity condition by our terminology (see, e.g., [222], [175]). Similarly, the Concordance condition is a structural analogue of its prototype for choice functions, known as γ-axiom of Sen [222]; see also [175]. The Concordant Monotonicity is a structural analogue of Mirkin's amalgamation of Sen's α- and γ-axiom for choice functions which we called Concordant Heredity [63, 175]. Finally, the Revealed Value condition is a structural analogue of the abovementioned Richter's *Revealed Preference axiom* for choice functions [211, 212], [175]. The interrelations between conditions for opportunity set values stated above completely reflect the corresponding interrelations between their counterparts for choice functions. Moreover, they are in fact generalizations of their choice function prototypes since the latter can be obtained as a particular case of the former (with 0-1-valued opportunity set evaluations); see [175].

4. An illustrative example: rational consumer's choice of discrete goods

In conclusion we shall demonstrate the method of revealing objective functions by a numerical example. A formal "negative" example, where an underlying objective function f for the given opportunity evaluation F does not exist, has been presented in Section 2, with the function F violating CM. Now we consider a "positive" example. Let a set consisting of five discrete goods be given; say, let a be an apple, b a pear, c an orange, d a lemon, and e a peach. Let

$$U = \{a, b, c, d, e\}, \quad \mathcal{U} = \{X^1, X^2, X^3, X^4, X^5\},$$

where the family of opportunity sets in different possible situations for a consumer consists of five partially overlapping sets:

$$\begin{aligned} X^1 &= \{a, b, c\}, \\ X^2 &= \{b, c, d\}, \\ X^3 &= \{c, d, e\}, \\ X^4 &= \{a, d, e\}, \\ X^5 &= \{b, e\}. \end{aligned}$$

The structure of (minimal) covering sets here is as follows:

$$\begin{array}{lll}
X^1 \subseteq X^2 \cup X^4, & X^1 \subseteq X^3 \cup X^4 \cup X^5, & \\
X^2 \subseteq X^1 \cup X^3, & X^2 \subseteq X^1 \cup X^4, & X^2 \subseteq X^3 \cup X^5, \\
X^3 \subseteq X^1 \cup X^4, & X^3 \subseteq X^2 \cup X^4, & X^3 \subseteq X^2 \cup X^5, \\
X^4 \subseteq X^1 \cup X^2 \cup X^5, & X^4 \subseteq X^1 \cup X^3, & \\
X^5 \subseteq X^1 \cup X^3, & X^5 \subseteq X^1 \cup X^4, & X^5 \subseteq X^2 \cup X^3,\ X^5 \subseteq X^2 \cup X^4.
\end{array}$$

Now let us introduce a function F, taking it intentionally as the optimal value function for the parametrical family of optimization problems (2) where we set

$$f(a) = 0,\ f(b) = 1,\ f(c) = 2,\ f(d) = 3,\ f(e) = 4.$$

In other words, f is considered as the true utility function of the consumer on the set U of discrete goods (different fruits).

Thus we have from (2)

$$F(X^1) = 2,\ F(X^2) = 3,\ F(X^3) = 4,\ F(X^4) = 4,\ F(X^5) = 4.$$

These values are the consumer estimates of the very opportunity to choose any; hence, the best single fruit from the corresponding bundle (rather than the estimates of the bundles as a whole).

It is easy to verify that the condition CM holds for F, as it should be. Now calculate the revealed objective function, following (10):

$$f_{\mathrm{F}}(a) = 2,\ f_{\mathrm{F}}(b) = 2,\ f_{\mathrm{F}}(c) = 2,\ f_{\mathrm{F}}(d) = 3,\ f_{\mathrm{F}}(e) = 4.$$

The condition RV is obviously satisfied as well. Therefore, the function f_{F} so obtained can be taken as an objective function in the family of optimization problems (2) which generates the indirect value function F initially given.

Let us emphasize that f_{F} differs from the original objective function f we started with. Such nonuniqueness of objective functions underlying the same family of scalar optimization problems is a typical case for rather complicated families $\mathcal{U}$ of admissible sets.

5. Conclusions

1) We have formulated a problem of finding a scalar-valued objective function whose optima at restricted subsets coincide with given values. The principal question is the existence of such an objective function. We have shown that there can be no solution to this problem. Several criteria of solvability are formulated with regard to the properties of given opportunity set values; an interpretation of these properties is proposed.

2) If there exists a solution, it can be constructively found by according to the Revealed Value criterion. The construction of the desired objective function by means of (10) formally requires enumerating large arrays of sets (specifically, determining the value $f_{\mathrm{F}}(x)$ requires comparing the values $F(Y)$ for all $Y \in \mathcal{U}$ such that $Y \ni x$). However, due to the monotonicity of the function F (which is anyhow necessary for the problem solvability), it suffices to examine only minimal (by inclusion) sets in these arrays. Thus, the calculation procedure has a moderate complexity.

6. Appendix: proofs

Proof of Lemma 2.4.

(a) Let us show that $\mathrm{CM} \Rightarrow \mathrm{C}\,\&\,\mathrm{M}$.

It is obvious that C is a particular case of CM. To show that $\mathrm{CM} \Rightarrow \mathrm{M}$, it suffices to take in (5) the one-term family $\{X_1\}$ with $X_1 = X'$ from (3).

(b) Assuming (6), let us show that $\mathrm{C}\,\&\,\mathrm{M} \Rightarrow \mathrm{CM}$.

Take $\{X_\nu\}_{\nu \in N}$ from the formulation of CM, and let

$$X' = \bigcup_{\nu \in N} X_\nu. \tag{18}$$

Due to closedness of $\mathcal{U}$ with respect to unions, $X' \in \mathcal{U}$, and due to C

$$F(X') \leqslant \max_{\nu \in N} F(X_\nu) \tag{19}$$

On the other hand, since $X \subseteq X'$ by the premise of CM, due to M

$$F(X) \leqslant F(X'). \tag{20}$$

Hence, we obtain (5), i.e., CM.

Proof of Lemma 2.6.

(a) Let us show that $\mathrm{FCM} \Rightarrow \mathrm{CM}$.

Obviously, CM is a particular case of FCM with the one-term family $\{X\}$ as $\{X'_\mu\}_{\mu \in M}$.

(b) Let us show that $\mathrm{CM} \Rightarrow \mathrm{FCM}$.

Let $\{X'_\mu\}_{\mu \in M}, \{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$, $\bigcup_{\mu \in M} X'_\mu \subseteq \bigcup_{\nu \in N} X_\nu$, and let CM be valid. Then, since $\forall \mu \in M :\ \bigcup_{\mu \in M} X'_\mu \subseteq \bigcup_{\nu \in N} X_\nu$, by CM we have $\forall \mu \in M :\ F(X'_\mu) \leqslant \max_{\nu \in N} F(X_\nu)$. This yields $\max_{\mu \in M} F(X'_\mu) \leqslant \max_{\nu \in N} F(X_\nu)$, i.e. FCM.

Proof of Lemma 2.8. We shall prove $\mathrm{CM} \Rightarrow \mathrm{FCM} \Rightarrow \mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{CM}$, and so the equivalence of all three conditions.

(a) Let us show that $\mathrm{FCM} \Rightarrow \mathrm{R}$.

Since the equality of unions of two families $\{X'_\mu\}_{\mu \in M}$ and $\{X_\nu\}_{\nu \in N}$ implies both inclusions $\subseteq$ and $\supseteq$ for these unions, this in turn implies both inequalities $\leqslant$ and $\geqslant$ between $\max_{\mu\in M} F(X'_\mu)$ and $\max_{\nu\in N} F(X_\nu)$ due to FCM. This is equivalent to the equality of these maxima, i.e., R.

(b) Let us show that R $\Rightarrow$ CM.

Let $X \in \mathcal{U}$, $X \subseteq \bigcup_{\nu\in N} X_\nu$, and let R be valid. Denote by $\{X'_\mu\}_{\mu\in M}$ the family $\{\{X\} \bigcup \{X_\nu\}_{\nu\in N}\}$. Then $\bigcup_{\mu\in M} X'_\mu = \bigcup_{\nu\in N} X_\nu$, and by R we obtain $\max_{\mu\in M} F(X'_{\mu\in M}) = \max\{F(X), \max_{\nu\in N} F(X_\nu)\} = \max_{\nu\in N} F(X_\nu)$. Therefore $F(X) \leqslant \max_{\nu\in N} F(X_\nu)$, which yields CM.

(c) The implication CM $\Rightarrow$ FCM is proved in Lemma 2.6.

Proof of Theorem 3.5.

Sufficiency follows directly from the equality (12) in MRV: here f_F is taken as f in the underlying family of scalar optimization problems $\langle U, X, f\rangle_{X\in\mathcal{U}}$, which justifies the last statement of the theorem.

Necessity. Let F be the optimal value function for some family $\langle U, X, f\rangle_{X\in\mathcal{U}}$ of problems of the form (2). Then for each $x \in U$,

$$f_F(x) = \min_{Y:\, x\in Y\in\mathcal{U}} \max_{y\in Y} f(y) \geqslant f(x), \tag{21}$$

since $y = x$ is always present among the values of the arguments y of f. Consequently,

$$F(X) = \max_{x\in X} f(x) \leqslant \max_{x\in X} f_F(x), \tag{22}$$

i.e. RV is fulfilled.

Proof of Lemma 3.6.

(a) Let us show that CM $\Rightarrow$ RV.

Fix an arbitrary $X \in \mathcal{U}$. Denote by Y_x a set that yields

$$\min_{Y:\, x\in Y\in\mathcal{U}} F(Y)$$

in (10), so that

$$f_F(x) = F(Y_x), \tag{23}$$

and take the collection $\{Y_x\}_{x\in X}$. By construction, we have $x \in Y_x$, and hence $X \subseteq \bigcup_{x\in X} Y_x$. Therefore, by virtue of CM,

$$F(X) \leqslant \max_{x\in X} F(Y_x), \tag{24}$$

which together with (23) yields RV.

(b) Let us show that RV $\Rightarrow$ CM.

Fix some $X \in \mathcal{U}$ and $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu\in N} \subseteq \mathcal{U}$ such that $X \subseteq \bigcup_{\nu\in N} X_\nu$. Then by RV

$$\begin{aligned} F(X) &\leqslant \max_{x\in X} \min_{Y: x\in Y\in\mathcal{U}} F(Y) \leqslant \\ &\leqslant \max_{x\in X} \min_{Y: x\in Y\in\mathcal{X}} F(Y) \leqslant \\ &\quad \text{(by virtue of } \mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}) \\ &\leqslant \max_{Y\in\mathcal{X}} F(Y), \end{aligned}$$

which yields CM.

Discussion of Le Breton's Paper [1]

The Arrow impossibility theorem demonstrates that the only way to avoid the dictatorship phenomenon in the framework of the Arrovian axiomatic model is to weaken at least one of the axioms, other than the non-dictatorship axiom. Thus, under the Pareto principle, generally two axioms are liable to be weakened: Independence of Irrelevant Alternatives (IIA) and Domain Non-restrictedness (DN). Michel Le Breton considers the second possibility, the case of restricted domains stemming from economic interpretations where the restrictedness is inherent in the essence of a problem. Moreover, he distinguishes two aspects of the restrictedness: (i) restrictedness of preference profiles, and (ii) restrictedness of domains of social choice correspondences. The second aspect has been proved to be the most important for escaping dictatorship.

What is essential at this point is the form of the social decision model taken by Le Breton, namely, the Social Choice Correspondence (SCC) rather that the Social Welfare Function (SWF). In terms of the preceding paper [91] Le Breton deals with a mapping of the form $\{R_i\} \mapsto C$ (preference profiles to social choice functions), instead of the more traditional form $\{R_i\} \mapsto R$ (preference profiles to social preference relations). It is worth nothing that the latter form can always be represented in terms of the former: one has to take the choice function C generated according to R in the conventional manner:

$$C(A) = \{x \in A | \forall\, y \in X : \, xRy\} \tag{1}$$

where A is an arbitrary set from a given family $\mathcal{A}$ of admissible sets ($A \subseteq 2^x$ is domain of C). In contrast, the form $\{R_i\} \mapsto C$ generally cannot be reduced to the form $\{R_i\} \mapsto R$ unless the function C can be rationalized by some relation R in the sense of (1).

Apparently it was Charles Plott [204] who first considered choice functions which are not rational in the conventional sense as a reasonable output of a social decision system. Now turning to Le Breton's paper, I would like to emphasize that the form of (non)rationality of a social function C, on the one hand, can depend on assumptions about restrictedness of the domain of C, while on the other hand, it can implicitly influence the character of IIA in this specific case. This implicit weakening of IIA brought about by weakening of DN can be a reason for the possibilities of avoiding dictatorship which arise in Le Breton's collection of examples.

Indeed, assume that as in Arrow's original statement of the problem, the model $\{R_i\} \mapsto C$ from the very beginning is reduced to $\{R_i\} \mapsto R$

[1] Social Choice Re-examined, Vol. 1, eds. K.J.Arrow, A.Sen, K.Suzumura. Macmillan and St.Martin's Press, 1997.—P. 97–100.

(C is rational), and moreover, the domain $\mathcal{A}$ is non-restricted in the sense that $\mathcal{A}$ contains all finite non-empty subsets of X, or at least all pairs $\{x, y\} \subseteq X$. Then the original Arrovian formulation of IIA

$$\begin{array}{l} \text{if } \{R_i\}, \{R_i'\} \quad \text{are such that} \quad \forall\, i R_i\,|_A = R_i'|_A \\ \text{then } C(A) = C'(A) \quad \text{for each} \quad A \in \mathcal{A} \end{array}$$

(sometimes called Plott's IIA) is reduced to an apparently simplified but virtually equivalent binary IIA: for each $x, y \in X$

$$\text{if } \forall\, i: \ xR_iy \leftrightarrow xR_i'y \ \text{ then } \ xRy \leftrightarrow xR'y.$$

It is the binary IIA which is usually exploited in Arrovian-like models. But in the general case, when $\mathcal{A}$ is restricted so that $\mathcal{A}$ may not contain all pairs $\{x, y\}$, these two formulations of IIA diverge, even if C can still be rationalized.

For example, consider the Weak Axiom of Revealed Preference (WARP) used in Le Breton's paper as a strengthened (for restricted $\mathcal{A}$) substitute of Arrow's Choice Axiom (ACA). In terms of non-strict and strict preference relations, R_c and P_c respectively, defined as

$$\begin{array}{lcl} xR_cy & \leftrightarrow & \exists\, A \in \mathcal{A}: \ x \in C(A), y \in A \\ xP_cy & \leftrightarrow & \exists\, A \in \mathcal{A}: \ x \in C(A), y \in A \backslash C(A) \end{array}$$

WARP has the form $xP_cy \to y\bar{R}_cx$.

In case of an arbitrary $\mathcal{A}$, WARP(and even more so ACA) does not guarantee the rationalizability of C by any weak order R (unlike HARP, Houthakker's [145] strengthened form of WARP). But WARP (again unlike ACA) does guarantee the rationalizability of C by some binary relation R. Moreover, the revealed preference R_c may always be taken in its place. This case can be inferred from [212] necessary and sufficient condition of rationalizability (RC): for each $A \in \mathcal{A}$ and each $x \in A$

$$\forall y \in A: \ xR_cy \Rightarrow x \in C(A)$$

by making use of implication WARP $\Rightarrow$ RC. The latter can be easily proved using another equivalent form of RC, namely, Sen–Mirkin's criterion (SMC) which is Mirkin's [63] amalgamation of Sen's α and γ-axiom:

$$\text{for each } A \in \mathcal{A} \text{ and } \{A_\gamma\} \in \mathcal{A}, \text{ if } \ A \subseteq \bigcup_\gamma A_\gamma \ \text{ then } \bigcap_\gamma C(A_\gamma) \cap A \subseteq C(A).$$

Unlike Sen's α and γ, this SMC remains valid as the criterion of rationalizability for arbitrary $\mathcal{A}$.

Returning to the Arrovian problem, we can conclude that WARP guarantees rationalizability of C. Thus it guarantees implicit reducibility of $\{R_i\} \mapsto C$ to $\{R_i\} \mapsto R$. But, typically, R that rationalizes C is not a weak order and, moreover, in general the rationalization R is not unique, which regardless of the rationality of C, makes it difficult to use IIA in the binary form.

Perhaps it would be worthwhile to examine the (non)fulfillment of IIA, in particular for $R = R_c$. In any event, in the case of rational C, restrictedness of the domain $\mathcal{A}$ seems implicitly to weaken IIA transparent in its binary version, but which in essence extends beyond the scope of rationality-binariness.

Perhaps, it is this very point which opens the way towards an essential weakening of axiomatic requirements in the Arrovian-type models in the general case and, especially when combined with restrictedness of preference profiles, it leads us to the possibility of avoiding the dictatorship phenomenon, as was illustrated by Le Breton's interesting paper.

Versions of dictatorship in a model of coalition-consistent decisions [1]

An axiomatic model of collective decisions is proposed for the case where decisions are elements of some abstract set which can be either non-structured or ordinal. Unlike usual Arrow-like models, not only individual opinions versus collective decisions are considered but decisions of "intermediate" (sub)coalitions are taken into account as well. Our approach is close to that in voting models with a variable electorate and with fixed individual opinions, but differs from those in that it is qualitative (ordinal) rather than numerical (cardinal). An axiomatics of consistency for coalition decisions is introduced which makes use of a kind of coalitional modification (named Concordance) of the conventional Unanimity condition, with its various variants. The appearance of the "dictatorship" phenomenon is traced as a direct corollary from Negative Concordance. In several particular models an underlying "hierarchical dictatorship" structure is revealed when decisions are nominal (non structured), and a game-theoretical kind of dictatorship is established when decisions are ordinal.

[1] Discussion Paper W.P. 366.97 of the Department d'Economià i d'Història Econòmica and the Institut d'Anàlisi Econòmica, Universitat Autònoma de Barcelona.—Barcelona, 1997.

1. Introduction

Relationships between individual opinions and collective decisions were studied in many problems starting with voting models. An axiomatic approach to such relationship has been initiated by the Arrow model where individual preferences were aggregated into collective preferences or choice [95]. In this model as well as in its further generalizations the "dictatorship" phenomenon has been revealed: the collective decision is determined by the opinion of a single individual or, as in some later generalizations, by the opinions of the members of some subgroup within the total collective: "oligarchy", or "collegium" etc. (see, e.g., [139, 115, 107, 133, 154, 155]. This phenomenon has been proved to be intimately related to a specific "algebra of decisive coalitions" which appeared in the framework of the Arrovian model.

Decisive coalitions are those that a unanimous opinion of their members predetermines the corresponding decision of the whole collective. The closedness of decisive coalition families with respect to some operations has been established as a fragment of proving Arrow-like theorems. In particular, for the simplest version of the Arrovian model where profiles of (individual) linear orders were transformed into a (collective) linear order, the family of decisive coalitions turned out to be closed under taking supersets and under intersections (which makes this family a filter). This implied the existence of the minimal decisive coalition, and moreover (with the additional property that exactly one of complementary coalitions is decisive which provides the filter to be an ultrafilter), this minimal coalition must be a singleton, i.e., in fact, a single "dictator".

In more general modifications of the Arrow model which admit indifference between alternatives (in particular, weak ordering by preferences), multiplicity of "imperfect" dictators has arisen with a specific hierarchical structure on the totality of such dictators [163] and then [137, 107, 22, 92, 93]; and in a more wide context see, e.g., [111]. With such a hierarchy, the collective decision concerning comparison in a pair of alternatives was proved to be predetermined by the opinion of the "eldest" dictator (due to the given hierarchy) among all those dictators who are not indifferent with respect to a given pair of alternatives.

In the present paper a discrete finite model of abstract collective decisions is studied where possible decisions belong to a given set, being either non-structured (then decisions are measured in a nominal scale) or linearly ordered (an ordinal scale). The specific subject of decision-making, i.e., an issue such as "Is the alternative a better than b?" is out of the framework of the paper. The "shadow" issue of agenda that is the subject of decision is implicitly assumed to be unique and fixed, but out of explicit consideration; in Conclusion we will discuss further generalizations to the cases of explicit consideration of the nature of (possibly several) issues. The simplest, and actually the basic model assumes exactly two possible decisions, say "YEA" or "NAY", as it was accepted in the seminal work of Guilbaud [140] and studied in detail in logic models of binary social choice (see, e.g., [194, 195, 136]); multi-decision models (starting from three-valued logic models — see op. cit.) serve as their further generalizations. We introduce some natural axiomatic requirements that link the decision of a "collective as a whole" with decisions of its "parts", namely, of its subcoalitions, and in particular, of separate individuals. In contrast to common Arrow-like models, individual opinions are assumed to be fixed but the coalition itself under consideration is variable (as in voting models with variable electorates, see [232, 243, 244, 193, 125, 196]. We suggest some axioms of consistency between a decision of a coalition and decisions of its parts (subcoalitions). These requirements are relied upon the leading idea of the Unanimity condition which is expressed here in a coalitional form.

The conventional treatment of the Unanimity condition (Pareto principle) in models of aggregating individual opinions into collective decisions appears in the following way: if each member of a collective agrees with some decision then this decision has to be made by the collective. Obviously, such a "positive" formulation of the Unanimity condition is equivalent to the following "negative" formulation: if some decision has been rejected by a collective as a whole then it implies that the given decision was rejected by at least one member of the collective. It is worth to note that such a member looks as if he were a "vetoer" (true, in the fixed situation).

In the present work a similar negative formulation of an extension of the Unanimity conditions is introduced for a more general setting where interrelations between coalitional and subcoalitional (not only individual) decisions are taken into account. It is proved that the necessary presence of coalitions-"vetoers" in decompositions of an entire coalition into parts implies the hidden existence of a "true" dictator whose presence in any subcoalition predetermines the decision of this coalition. Moreover, for each individual it has been proven that he/she is the dictator within the limits of his/her own "family" of participants, and a hierarchical structure on the set of such individual dictators was established. (Some kinds of hierarchical structures have been studied earlier in the framework of the binary or ternary logic decision schemata — see, e.g., [194, 195, 136]; and especially [103], where a rather general algebraic investigation of a hierarchy of subgroups has been completed, although in a sense different from that in the present paper.) We analyse a series of specific models, in the last one a new phenomenon is observed: the co-existence of conflicting dictators within the same family. The corresponding coalition decision turns out to be the outcome provided with the equilibrium in a corresponding game of dictators.

The paper is arranged as follows. In Section 2 a basic model of coalition decisions is described. Both conventional (individual) and coalitional Unanimity condition are formulated and discussed; the latter is presented in the most appropriate (at least for our purposes) form of the Concordance condition. As an introductory problem, the simplest two-valued version of the condition, Bi-Concordance, is considered, and the theorem is formulated about the Hierarchical Dictatorship mechanism which underlies bi-concordant coalition decisions. In Section 3 we consider some modifications of the Concordance condition, the most important Negative Concordance contains implicitly the statement on the existence of a hidden "potential dictator". A lemma which explicates the existence of a Family Dictator is established enabling us to prove the Theorem from Section 2 and the subsequent theorems for the more general coalition decision models. In Section 4 a model of Multi-Concordant decisions is considered; as a corollary, a new axiomatic characterization of choice functions generated by linearly ordered preferences is obtained. Section 5 is devoted to a model of "compromise" Ordinal-Concordant decisions lying between extreme coalition values on an ordinal scale. We establish that under an appropriate Concordance axiom the compromise decisions are obtained as a result of the game-like choice of the equilibrium in a struggle between individuals who are the "strongest representatives" of opposite trends on the decision scale. Finally, in the concluding Section 6 a brief announcement is presented about results on the relationship between our axiomatics of the hidden Hierarchical Dictatorship structure and other axiomatic models. Among the latter, structures of dictatorial hierarchy in Arrovian-like models are mentioned as well as hierarchical structures of qualitative (ordinal) weights of elements (individuals) under pairwise comparisons of sets (coalitions). The latter subject directly corresponds to the problem of relative and absolute evaluation of opportunity sets with an appropriate axiomatics.

2. Basic model of coalition decisions. Unanimity and concordance conditions

We begin with the formulation of a basic axiomatic model of coalition decisions; some versions of this model will be used in all subsequent sections. Let U be a finite set; elements $x, y, \ldots$ of U are interpreted here (mainly) as individuals, and nonempty sets $X, Y, \ldots \subseteq U$ as coalitions. Denote by $\mathcal{U}^1$ the family $\{X \subseteq U \mid |X| \geqslant 1\}$ of all (nonempty) coalitions (including "degenerate" singleton coalitions, i.e., in fact, individuals), and by $\mathcal{U}^2$ the family $\{X \subseteq U \mid |X| \geqslant 2\}$ of all "true" (nondegenerate) coalitions. Let Σ be a set of possible decisions $\sigma, \lambda, \ldots \in \Sigma$. A function $f : \mathcal{U} \to \Sigma$ will be called a *coalition decision function*, **CDF**. In particular, $f(\{x\})$, or in simplified notation $f(x)$ means the decision of a single individual x. In the sequel we will consider also a function $g : U \to \Sigma$ called *individual opinion function*, **IOF**. When generating decisions of coalitions from $\mathcal{U}^1$, **IOF** will determine the decisions of singleton coalitions by the trivial identification: $f(\{x\}) = g(x) \quad \forall x \in U$. Our approach consists in an axiomatic description of a coalition decision function, **CDF**, and in constructing a mechanism that allows to restore the given **CDF**, in particular, with a corresponding **IOF**.

In what follows we shall consider various conditions on **CDF** typically related to an arbitrary but fixed X from $\mathcal{U}^1$ (or $\mathcal{U}^2$) and/or σ from Σ; to record this fact explicitly, the abbreviation of the corresponding condition will be provided with the index(es) of X and/or σ, and the absence of the corresponding letter (X and/or σ) will mean that the condition is assumed to be valid for all X and/or σ respectively. We begin with the conventional Unanimity condition. In terms of our model this condition takes the following form:

(Individual) Unanimity condition, $\mathbf{U}_{(X,\sigma)}$:

$$(\forall\, x \in X : \; f(x) = \sigma) \Rightarrow f(X) = \sigma. \tag{1}$$

An apparent extension of this definition to the coalitional case appears as follows. All sets considered thereafter are supposed to be nonempty, and in the following definition, moreover, X is supposed to belong $\mathcal{U}^2$.

Strong Coalitional Unanimity condition, $\mathbf{SCU}_{(X,\sigma)}$:

$$(\forall\, S \subset X : \; f(x) = \sigma) \Rightarrow f(X) = \sigma. \tag{2}$$

Emphasize that the set inclusion in (2) is strict: otherwise (2) would be valid identically in a trivial way. The condition $\mathbf{SCU}_{(X,\sigma)}$ is w e a k e r than $\mathbf{U}_{(X,\sigma)}$ since the premise (left-hand side) of the implication (2) is in general evidently s t r o n g e r than in (1). At the first glance, the condition $\mathbf{SCU}_{(\sigma)}$, i.e., by our convention fulfilling $\mathbf{SCU}_{(X,\sigma)}$ for all X (from $\mathcal{U}^2$), has also to be weaker than $\mathbf{U}_{(\sigma)}$. Surprisingly, it is proved to be not exactly so: conditions $\mathbf{SCU}_{(\sigma)}$ and $\mathbf{U}_{(\sigma)}$ are in fact equivalent, as stated in the following

Lemma 1. $\mathbf{SCU}_{(\sigma)} \Leftrightarrow \mathbf{U}_{(\sigma)}$.

Proof. Apply induction by $|X|$. With $|X| = 2$, $\mathbf{SCU}_{(\sigma)}$ and $\mathbf{U}_{(\sigma)}$ are obviously equivalent: the only proper nonempty subsets of X of the form $\{x, y\}$ are singletons $\{x\}$ and $\{y\}$. Assume that $\mathbf{SCU}_{(\sigma)}$ and $\mathbf{U}_{(\sigma)}$ are equivalent for all $X \in \mathcal{U}^2$ with $|X| < k$. Now take any X with $|X| = k$ and prove that the statements (1) and (2) are equivalent for this X as well. Because (1)⇒(2) is obvious, prove (2)⇒(1). Let (2) be true, and let the premise of (1) be fulfilled. Then for each $S \subset X$ we have $\forall\, s \in S : f(s) = \sigma$, and hence by inductive hypothesis, because $|S| < k$, we obtain $f(S) = \sigma$. Therefore, by (2) $f(X) = \sigma$.

Thus, an essential generalization of the Unanimity condition onto the coalitional case demands another formulation whose premise would be more weak not only in the form with fixed X's, but also "eventually", as applied to all coalitions simultaneously. To this end I propose the following formulation:

Concordance condition, $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$: if $X = \bigcup_{\mu \in M} X_\mu$ where $\forall\, \mu \in M$: $X_\mu \in \mathcal{U}^1$ then

$$(\forall\, \mu \in M:\ f(X_\mu) = \sigma) \Rightarrow f(X) = \sigma. \tag{3}$$

Remark 2.1. The condition $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$ is close in the spirit and in the form to the Concordance condition stemmed from the choice theory (see, in particular, [87]; it corresponds to γ-axiom after Sen [222], and in turn, – which is less known, – to Postulate 10 of Chernoff [121]) and has been exploited by the author in different more wide contexts [174, 175]. In the model with a finite number of participants the condition $\mathbf{C}_{(\sigma)}$ (i.e., fulfilling $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$ for all $X \in \mathcal{U}^1$), as easy to see, is equivalent to the following: for any $X', X'' \in \mathcal{U}^1$

$$(f(X') = f(X'') = \sigma) \Rightarrow f(X' \cup X'') = \sigma. \tag{4}$$

Indeed, (4) is a particular case of (3); conversely, (3) can be easily inferred from (4) by induction in the number of coalitions. Thus, the formulation of $\mathbf{C}_{(\sigma)}$ as fulfilling (3) for all $X \in \mathcal{U}^1$ is (in the finite case!) nothing more than a seemingly cumbersome but eventually equivalent formulation for $\mathbf{C}_{(\sigma)}$ given in the form (4). Nevertheless, as we shall see later, the complicated formulation (3) (and even still more sophisticated formulation (15) below in Section 3) turns out to be more useful.

Remark 2.2. Emphasize that the overlapping (nonempty intersection) of different X_μ's in $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$ is allowed, and this is an essential point. For this reason, for example, the simple majority (or plurality) rule does not satisfy the $\mathbf{C}$ condition. Indeed, let $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, and let the individuals 1,2 and 6,7 support the negative decision – AGAINST some issue, and 3,4,5 support the positive decision FOR the same issue. Then by virtue of the simple majority of votes each of two subcoalitions {1,2,3,4,5} and {3,4,5,6,7} will vote FOR the issue whereas their union, the total coalition

X votes AGAINST the issue. This obviously violates $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$ with σ=FOR. Other versions of the Concordance condition can be considered, taken either only for nonintersecting subcoalitions or, which is more fruitful, for arbitrary subcoalitions but with registration of multiplicity of occurrences of each element-individual in the family of subsets-subcoalitions. The latter implies the consideration of "multisets" rather than sets and underlies eventually an axiomatics for numerical measurement of weights of individuals and coalitions, as opposite to our approach leading to a specific qualitative, viz., ordinal measurement of such "weights" – see below. A "multiset" approach with the central axiom similar to the Concordance has been virtually used in axiomatizations of the Borda rule [232, 243, 244, 193, 125, 196]; the analogue of Concordance in this context was called Consistency by Smith [232] and Reinforcement by Moulin [193] and Young [244].

In the next Section 3 we will give condition **C** several alternative equivalent formulations; but now we confine ourselves by the given formulation of $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$ for announcing the first result of the forthcoming series. To this end we consider the simplest non-trivial particular case of our model of coalition decisions: the case where the set of possible outcomes contains only two values ("YES–NO", "FOR–AGAINST", etc.). For simplicity encode these outcomes by binary logic values 0 and 1, and call such a model *bi-valued*.

We shall say that a bi-valued model of coalition decisions satisfies the *Bi-Concordance condition*, **BC**, if for every $X \in \mathcal{U}^1$ with $X = \bigcup_{\mu \in M} X_\mu$ the following $\mathbf{BC}_{(X)}$ condition is valid:

$$(\forall\, \mu \in M:\ f(X_\mu) = 0) \Rightarrow\ (f(X) = 0), \tag{5}$$

$$(\forall\, \mu \in M:\ f(X_\mu) = 1) \Rightarrow\ (f(X) = 1). \tag{6}$$

The **BC** condition is exactly the **C** condition as applied to the model of bi-valued coalitional decisions, i.e., **BC** is just fulfilling **C** for all $X \in \mathcal{U}^1$ and for both $\sigma = 0, 1$.

We shall say that **CDF** is generated by a mechanism of *Hierarchical Dictatorship*, **HD**, if there exists a linear ordering $u_1 > u_2 > \ldots > u_N$ on U $(N = |U|)$, called *hierarchy of individuals*, and there exists **IOF** $g:\ U \to \{0,1\}$ such that for each $X \in \mathcal{U}^1$

$$f(X) = g(\max\nolimits_< X) \tag{7}$$

where $\max_< X$ denotes the maximal by the linear order $<$ (the eldest by hierarchy) element-individual in X.

Theorem 1. Let f be the **CDF** in a bi-valued model of coalition decisions. Then for f to satisfy the Bi-Concordance condition, it is necessary and sufficient that f be generated by a mechanism of Hierarchical Dictatorship.

The proof of Theorem 1 is postponed till the next Section.

Still another, seemingly more general but actually equivalent representation of Bi-Concordant **CDF**'s can be given. We shall say that **CDF** f is generated by a mechanism of *Tied Hierarchical Dictatorship*, **THD**, if:

(a) there exists a weak ordering on U, i.e., a partition of U onto K $(1 \leqslant K \leqslant N)$ linearly ordered equivalence classes $U_1 > U_2 > \ldots > U_K$ $(U_k \in \mathcal{U}^1,\ k = 1, \ldots, K;\ U = \bigcup_{k=1}^{K} U_k;\ U_i \cap U_j = \varnothing$ for $i \neq j)$; such an ordering will be called a *tied hierarchy* of individuals;

(b) there exists **IOF** $g : U \to \{0, 1\}$ with coinciding values inside each equivalence class[1], i.e., $g(u) = \sigma_k$ for all $u \in U_k, k = 1, \ldots, K$; and then we write $g(U_k) = \sigma_k$;

such that
$$f(X) = g(\mathrm{Max}_< X) \tag{8}$$
where $\mathrm{Max}_< X$ denotes the $<$-maximal equivalence class in U having a non-empty intersection with X.

Theorem $1'$. **CDF** in a bi-valued model of coalition decisions satisfies **BC** if and only if it can be generated by a **THD** mechanism.

To deduce Theorem $1'$ from Theorem 1, it suffices to note that, first, any **HD** mechanism is a particular case of **THD**, and conversely, that any **THD** mechanism can be transformed into an equivalent, i.e. generating the same **CDF**, **HD** mechanism. The latter can be achieved by an arbitrary splitting ties (equivalence classes) due to an arbitrarily given linear order on U. It is worth to note also that **HD** can be generally transformed into **THD** with non-trivial (not singleton) equivalence classes. Indeed, let a hierarchy on U have the form $u_1 > u_2 > \ldots > u_N$ with $f(u_i) = \sigma_i$, $i = 1, \ldots, N$. Then one can easily see that if there exist several sequential coinciding values $\sigma_l = \sigma_{l+1} = \ldots =$ then all they can be glued into the common equivalence class, and **THD** mechanism so constructed will generate the same **CDF**.

The simplest case of tied hierarchical dictatorship is the case where U is partitioned into only two equivalence classes: $U = U_1 \cup U_2,\ \ U_1 > U_2$. Let, for definiteness, the senior class U_1 yield the value $\sigma = 1$ (the decision "NO") and the junior, U_2, the value 0 ("YES"). It means that the decision of a coalition X is 0 ("YES") if and only if all the members x of X belong to U_2, i.e., $X \subseteq U_2$, and is 1 ("NO") if and only if in X there is at least one member of U_1. Thus, the individuals from the senior class appear as "vetoers". Such a mechanism of bi-valued coalition decisions is an *oligarchy* (we use this

[1] Such classes and their elements can be called *clones* borrowing the term from [235].

term introduced by Guha [139] in some different sense accordingly to the framework of the present model of collective decisions with fixed individual opinions but variable composition of the collective).

3. Logic of unanimity and concordance: modifications of concordance condition and revealing hidden dictators

Before going to more complex models of coalition decisions, it is desirable to figure out the dictatorship phenomenon which has appeared already in the bi-valued model. To this end we shall study the logic of the relationship between decisions of coalitions and those of subcoalitions and/or individuals entering these coalitions. We begin with the conventional (individual) Unanimity condition:

$$(\forall x \in X : f(x) = \sigma) \Rightarrow f(X) = \sigma. \tag{9}$$

For the logical implication (9) there exist several kindred implications, the sense of which is intimately related to the Unanimity; we write down now some of them. First, it is the converse of the implication (9):

$$f(X) = \sigma \Rightarrow (\forall x \in X : f(x) = \sigma). \tag{10}$$

We shall call (10) the *Converse Unanimity condition*, $\mathbf{CU}_{(X,\sigma)}$: a coalition X makes a decision σ only if every its member makes the same decision. Note that in the Bi-Valued model the conjunction of the "direct" and Converse Unanimity condition as applied to one of two possible decision values, say 0 ("YES"), in fact determines uniquely the collective decision $f(X)$ by the totality of individual decisions $f(x)$ for the members of the collective $x \in X$:

$$f(X) = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in X : f(x) = 0). \tag{11}$$

The coalition decision rule of the form (11) where $g(x)$ is taken as $f(x)$ is exactly the oligarchical rule mentioned in Section 2, where each individual is a vetoer, i.e., "unilateral" dictator: he/she can impose the negative opinion 1 ("NOT") upon the collective, but not the positive one, 0 ("YES"). To reveal a more deep origin of the dictatorship phenomenon, we modify the Unanimity condition in another way. Namely, we consider now the "Unanimity with respect to rejecting" a decision σ:

$$(\forall x \in X : f(x) \neq \sigma) \Rightarrow f(X) \neq \sigma. \tag{12}$$

We call (12) the *Negative Unanimity condition*, $\mathbf{NU}_{(X,\sigma)}$. And finally, note that the implication $\mathbf{NU}_{(X,\sigma)}$ is equivalent to its "logically obverse" implication

$$f(X) = \sigma \Rightarrow (\exists x \in X : f(x) = \sigma) \tag{13}$$

which means that under Negative Unanimity a coalition X makes a decision σ only if some of its members makes this decision. Such an individual x whose existence is asserted in the right-hand side of (13) can be interpreted as a "pretender for the dictatorial role", as a "potential dictator". This pretension is completely appeared when considering the coalitional version of Unanimity, i.e., Concordance, **C**.

Recall the $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$ condition: if $X = \bigcup_{\mu \in M} X_\mu$ then

$$(\forall\, \mu \in M:\ f(X_\mu) = \sigma)\ \Rightarrow\ f(X) = \sigma, \tag{14}$$

and transform it into an equivalent form. Fix an arbitrary $X \in \mathcal{U}^1$ and call any family $\mathcal{D}$ of sets from $\mathcal{U}^1$ such that $\bigcup_{S \in \mathcal{D}} S = X$ a *decomposition* of X. Denote by $\Delta(X)$ the totality of all decompositions of X. Then the condition $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$, as easy to see, is equivalent to the following formulation:

$$(\exists\, \mathcal{D} \in \Delta(X)\ \forall\, S \in \mathcal{D}:\ f(S) = \sigma)\ \Rightarrow\ f(X) = \sigma. \tag{15}$$

Now introduce the following $\mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$, or

Negative Concordance condition: if $X = \bigcup_{\mu \in M} X_\mu$ then

$$(\forall\, \mu \in M:\ f(X_\mu) \neq \sigma)\ \Rightarrow\ f(X) \neq \sigma. \tag{16}$$

Lemma 2. $\mathbf{NC}_{(X)} \Rightarrow \mathbf{C}_{(X)}$.

Proof. Let $X = \bigcup_{\mu \in M} X_\mu$, and let $(\forall\, \mu \in M:\ f(X_\mu) = \sigma)$. Then for each $\lambda \neq \sigma$ we have $(\forall\, \mu \in M:\ f(X_\mu) \neq \lambda)$, and by $\mathbf{NC}_{(X)}$ $f(X) \neq \lambda$. It remains the only possibility that $f(X) = \sigma$. Therefore, $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$ is fulfilled. And since it is true for any $\sigma \in \Sigma$, therefore, $\mathbf{C}_{(X)}$ is satisfied.

Thus, Negative Concordance is in general a strengthening of Concordance, and in what follows this strengthening plays a major role. Nevertheless, we may note that in some important particular cases **NC** is proved to be no more than equivalent to **C**. Such is the case of Bi-Valued model, as the following Lemma shows.

Lemma 3. In the model of bi-valued coalition decisions $\mathbf{NC}_{(X)} \Leftrightarrow \mathbf{C}_{(X)}$.

Proof. It suffices to note that in Bi-Valued model $\mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$ for $\sigma = 0$ is equivalent to $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$ for $\sigma = 1$ and vice versa:

$$NC_{(X,0)} \Leftrightarrow C_{(X,1)}, \qquad NC_{(X,1)} \Leftrightarrow C_{(X,0)}.$$

Consider now the general case of $\mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$. Similarly to the expression (15) being an equivalent form for $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$, the following is an equivalent form for $\mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$:

$$(\exists\, \mathcal{D} \in \Delta(X)\ \forall\, S \in \mathcal{D}:\ f(S) \neq \sigma)\ \Rightarrow\ f(X) \neq \sigma \tag{17}$$

which in turn is equivalent to its “obverse” formulation

$$f(X) = \sigma \;\Rightarrow\; (\forall \mathcal{D} \in \Delta(X)\, \exists\, S \in \mathcal{D} :\; f(S) = \sigma). \tag{18}$$

The condition $\mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$ in the obverse form (18) asserts that the decision of a coalition with any its decomposition into subcoalitions must coincide with the decision of some subcoalition in this decomposition. It is proved to be that one can always pick out a common element of such subcoalitions (which is present in at least one of them in every decomposition). This common element-individual appears as a real “pretender to the dictatorial role”, and moreover, it has been proven that he/she does appear as a hidden “family dictator” in the sense that he/she does predetermine the decision of each subcoalition (within the initial coalition-“family” X) which he/she enters.

More precisely, denote $[x, X] = \{S \mid x \in S \subseteq X\}$. Introduce the following

Family Dictatorship condition, $\mathbf{FD}_{(X,\sigma)}$:

$$f(X) = \sigma \;\Rightarrow\; (\exists\, x \in X\; \forall\, S \in [x, X] :\; f(S) = \sigma). \tag{19}$$

An individual x such that $\forall\, S \in [x, X] :\; f(S) = \sigma$ (whose existence is affirmed in the right-hand side of (19)) will be called a *Family Dictator in* X *for* σ. Note that the notion of *local dictator* used in the social choice theory implies the spreading of dictatorial power over some bounded subset of decision issues (alternatives etc.). Unlike this, our definition of family dictator represents “locality” of dictatorial power in the space of individuals rather than in the space of decisions.

The following lemma plays the central role in our work.

Lemma 4 (Lemma on Hidden Family Dictator). $\mathbf{FD}_{(X,\sigma)} \Leftrightarrow \mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$.

Proof. (a) $\mathbf{FD}_{(X,\sigma)} \;\Rightarrow\; \mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$. Let $\mathbf{FD}_{(X,\sigma)}$ be fulfilled, and let $f(X) = \sigma$. Assume that $\mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$ in the form (18) is violated, i.e.,

$$\exists\, \mathcal{D} \in \Delta(X)\; \forall\, S \in \mathcal{D} :\; f(S) \neq \sigma.$$

It implies that by the very meaning of the decomposition $\mathcal{D} \in \Delta(X)$ we have

$$\forall\, x \in X\; \exists\, S \in [x, X] :\; f(S) \neq \sigma$$

which violates $\mathbf{FD}_{(X,\sigma)}$.

(b) $\mathbf{NC}_{(X,\sigma)} \Rightarrow \mathbf{FD}_{(X,\sigma)}$. Let $\mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$ be fulfilled, and let $f(X) = \sigma$. Assume that the right-hand side of (19) is not true. Then

$$\forall\, x \in X\; \exists\, S \in [x, X] :\; f(S) \neq \sigma. \tag{20}$$

Denote by S_x a set $S \in [x, X]$ in (20) for which $f(S) \neq \sigma$. Then $\mathcal{D} = \{S_x\}_{x \in X} \in \Delta(X)$, and for this family $\mathcal{D}$ we have $\forall S \in \mathcal{D} : f(S) \neq \sigma$, hence the left-hand side of $\mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$ in the form (17) is valid. Therefore, the right-hand side of (17) must be valid as well, i.e., $f(S) \neq \sigma$, which contradicts to the assumption.

Lemma 4 reveals a "hidden" dictator (inside any "family" X) whose existence underlies Negative Concordance. Loosely speaking, one can interpret the meaning of Lemma on Hidden Family Dictator in the following manner: The dictatorship phenomenon appears as a negative side of the unanimuous concordance.

Lemma 4 serves as the basis for the (still postponed) proof of Theorem 1 as well as of subsequent theorems. The leading idea of these proofs is simple enough: we pick out the family dictators serially starting with the top ("senior") dictator x^* who is the family dictator for the complete totality of participants, $X = U$, and hence is the "overall" dictator: his/her decision predetermines the decision of each coalition he/she enters. Then the next rank dictator, i.e. the family dictator in $U \setminus \{x^*\}$ is sought, and so forth.

Now we are in the position to present the proof of Theorem 1.

Proof of Theorem 1. Necessity. Let f be representable in the form (7). Let $X = \bigcup_{\mu \in M} X_\mu$. Then $\exists\, \mu : \max_< X = \max_< X_\mu$, and hence $\exists\, \mu : g(\max_< X) = g(\max_< X_\mu)$, i.e., $\exists\, \mu :\ f(X) = f(X_\mu)$. This implies (5),(6).

Sufficiency. Let f satisfy $\mathbf{BC}$ for a given X, i.e., satisfy $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$ for both σ values, 0 and 1. By Lemma 3, $\mathbf{C}_{(X)}$ for Bi-Valued model is equivalent to $\mathbf{NC}_{(X)}$, and therefore, by Lemma 4, to $\mathbf{FD}_{(X)}$. Let $f(U) = \sigma_1$. Then by $\mathbf{FD}_{(X)}$ there exists $u_1 \in U$ such that

$$\forall\, S \subseteq U :\ (u_1 \in S \Rightarrow\ f(S) = \sigma_1).$$

Thus, u_1 is the top Family Dictator in U. Set $g(u_1) = \sigma_1$. Then apply recursion. Let $U^0 = U$, and let at the k-th step the set $U^{k-1} = U \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$ have been constructed. Let $f(U^{k-1}) = \sigma_k$; again by $\mathbf{FD}_{(X)}$ there exists $u_k \in U^{k-1}$ such that

$$\forall\, S \subseteq U :\ (u_k \in S \Rightarrow\ f(S) = \sigma_k).$$

Set $g(u_k) = \sigma_k$. And so on for all $k = 1, \ldots, N$.

It is easy to verify that by virtue of the construction procedure we obtain for each $X \in \mathcal{U}^1$:

$$f(X) = \sigma_{q(X)} \tag{21}$$

where

$$q(X) = \min\{k : u_k \in X\}, \tag{22}$$

and for $<$ defined by $u_1 > u_2 > \ldots > u_N$ we have

$$\sigma_{q(X)} = g(u_{q(X)}) = g(\max\nolimits_< X). \tag{23}$$

Joining (23) and (21) yields (7).

4. Multi-concordant decisions in a nominal scale

In this section we consider a generalization of the model of bi-valued coalition decisions onto the case where the set of possible decisions (outcomes) can contain more than two elements, and this outcome set is not equipped with any structure (such as ordering). This is what is called in social sciences and general measurement theory "measurement (of decisions) in a *nominal scale*". Formally, let $f : 2^U \setminus \{ \varnothing \} \to \Sigma$ where Σ is a set which can be assumed finite without loss of generality (due to the finiteness of U and hence of $2^U \setminus \{ \varnothing \}$). We shall call such a coalition decision function f *multi-valued* **CDF.** Introduce the following

Multi-Concordance condition, $\mathbf{MC}_{(X,\sigma)}$. Let f be a multi-valued **CDF**, let $f(X) = \sigma$ for some $X \in \mathcal{U}^1$, and let $X = \bigcup_{\mu \in M} X_\mu$. Then σ must belong to $\{f(X_\mu)\}_{\mu \in M}$, the total set of decisions of all subcoalitions from the given arbitrary decomposition $\{X_\mu\}_{\mu \in M}$ of X.

As a question of interpretation, by virtue of $\mathbf{MC}_{(X,\sigma)}$ the decision of the total collective must coincide with the decision of at least one of the subcoalitions for each decomposition of the collective. For example, if the decision is the nomination of a candidate for, say, presidential elections, then the nominee of a union of subgroups must be taken from the list of nominees of these subgroups. Note that the idea of "concordance" implied by such a formulation does exclude the possibility of an "intermediate compromise" in the sense of taking a new candidate, a "dark horse" that would satisfy all the subgroups but would not belong to the list of their primary nominees. The latter idea will be implemented in the next section where the notion of "being intermediate" is formalized with help of ordered decision outcomes.

Lemma 5. In any Multi-Valued model of coalition decisions, for each $X \in \mathcal{U}^1$ the condition $\mathbf{MC}_{(X)}$ implies both conditions $\mathbf{C}_{(X)}$ and $\mathbf{NC}_{(X)}$. Moreover, for each $X \in \mathcal{U}^1$ and for each $\sigma \in \Sigma$ $\mathbf{MC}_{(X,\sigma)} \Leftrightarrow \mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$.

Proof. Let $X = \bigcup_{\mu \in M} X_\mu$, and let $\mathbf{MC}_{(X)}$ be fulfilled. Take an arbitrary $\sigma \in \Sigma$, and let $\forall \mu \in$ M: $f(X_\mu) \neq \sigma$. Then $\sigma \notin \{f(X_\mu)\}_{\mu \in M}$, and by $\mathbf{MC}_{(X,\sigma)}$ $f(X) \neq \sigma$, therefore $\mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$ is satisfied. Now let $\forall \mu \in M :\ f(X_\mu) = \sigma$. Then $f(X) = \{\sigma\}$, the singleton, and by $\mathbf{MC}_{(X)}$ $f(X)$ cannot take any value λ different from σ. Therefore, $f(X) = \sigma$, and so $\mathbf{C}_{(X,\sigma)}$ is satisfied.

Conversely, let $\mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$ hold, and assume that $\mathbf{MC}_{(X,\sigma)}$ is violated. The latter means that $f(x) = \sigma$ but $\forall \mu \in$ M: $f(X_\mu) \neq \sigma$, which contradicts $\mathbf{NC}_{(X,\sigma)}$. This completes the proof.

Remark 4.1. Note that the implication $\mathbf{MC}_{(X)} \Rightarrow \mathbf{C}_{(X)}$ in Lemma 5 follows also from $\mathbf{MC}_{(X)} \Rightarrow \mathbf{NC}_{(X)}$ in that Lemma with taking into account $\mathbf{NC}_{(X)} \Rightarrow \mathbf{C}_{(X)}$ ensured by Lemma 2.

Remark 4.2. It is easy to see that Bi-Concordance is a particular case of Multi-Concordance because due to Lemma 3 in the bi-valued case **C** implies **NC**, and hence **MC.** In contrast to it, in the case of arbitrary Σ we cannot confine ourselves by postulating **C** since in general **C** does not guarantee fulfilling **NC**, and hence **MC.**

Lemma 5, or to be more exact, its "Negative Concordance" part allows us to extend immediately Theorem 1 about Hierarchical Dictatorship onto the Multi-Concordant model. As a Hierarchical Dictatorship mechanism we imply herein a mechanism of the former form (7) with replacing $\Sigma = \{0, 1\}$ by Σ having a general form.

Theorem 2. For a function of coalition decisions in a nominal scale to be Multi-Concordant, it is necessary and sufficient that it can be generated by a Hierarchical Dictatorship mechanism.

Proof of Theorem 2 repeats almost literally the proof of Theorem 1 with substituting Σ of a general form for the specific $\Sigma = \{0, 1\}$ in that proof.

Remark 4.3. Exactly as in the case of Bi-Concordance for Bi-Valued model, in the case of Multi-Concordance for Multi-Valued model the direct analogue of Theorem $1'$ holds about representability of Multi-Concordant CDF's by Tied Hierarchical Dictatorship mechanisms which are defined in the same way.

Example 1. An application to the choice theory. For the sake of clarity we continue the previous interpretation of multi-concordant decisions in terms of candidate nomination. Let every coalition $S \in \mathcal{U}^1$ must nominate a candidate necessarily among its own members. Formally it means that we consider **CDF** of the form $f : \mathcal{U}^1 \to U$ (i.e., $\Sigma = U$) with $\forall\, S : \ f(S) \in S$. By virtue of Theorem 2, fulfilling **MC** for f is necessary and sufficient for the existence of a linear ordering $<$ on U and a function $g : U \to U$ such that

$$\forall\, X : \ f(X) = g(\max\nolimits_{<} X).$$

But since $\forall\, x \in U : \ f(\{u\}) = g(u)$, and further, since $f(\{u\}) = u$ due to the requirement $f(S) \in S$, we have $\forall u : \ g(u) = u$, i.e., g can be only the identity mapping. Taking into account Theorem 2, we obtain

Proposition 1. **CDF** of the form

$$f : \mathcal{U}^1 \to U \ \text{ with } \ \forall\, S : \ f(S) \in S \tag{24}$$

is Multi-Concordant if and only if it can be represented in the form

$$\forall X: f(X) = \max_{<} X. \tag{25}$$

In terms of our interpretation, Proposition 1 claims that each coalition will nominate as its candidate its eldest (by an overall hierarchy) member.

Note that, independently of the interpretation, formally we consider herein nothing else than functions of singleton choice: exactly such are functions f of the form (24). In such a general treatment, the equation (25) is a criterion (necessary and sufficient condition) of *narrowly rational* representability of the choice, viz., representability as the result of optimization over the set X of (abstract) *alternatives* with respect to some linear ordering on the totality U of all alternatives. Due to Proposition 1, such representability is valid if and only if f satisfies the condition **MC**. Thus, we have obtained an apparently new criterion of the narrow rationality of the singleton choice functions. Let us write down this criterion explicitly.

Choice Rationality condition, **CR.** Let f be a singleton choice function on $\mathcal{U}^1$ over U, i.e., (24) holds. Then

$$X = \bigcup_{\mu \in M} X_\mu, \quad f(X) = x \quad \Rightarrow \exists \mu: f(X_\mu) = x. \tag{26}$$

Proposition 1′. Let f be a singleton choice function on $\mathcal{U}^1$ over U. Then for f to be represented as the optimal choice by some linear ordering on U it is necessary and sufficient that f satisfies **CR**.

It is interesting to compare this criterion with the classic condition of (narrow) rationality for rational choice functions known as **IIA** (Independence of Irrelevant Alternatives – in one of many different meanings of this term), or α-axiom by Sen [220], or Chernoff's axiom (although it is only one of postulates, namely Postulate 4 in the outstanding and widely cited but poorly red paper of Chernoff [121]). To avoid confusion with different senses of **IIA** or Chernoff's postulates, we have given this condition (and later more general condition) the neutral name *Heredity*, **H** [87, 174, 175]; a modified form of **H** will be used below. As applied to singleton choice functions, the **H** condition, or **IIA**, has the following form:

$$f(X) = x, \quad x \in X_1 \subset X \quad \Rightarrow f(X_1) = x. \tag{27}$$

Apparently first statement yielding an axiomatics of narrow rationality for singleton choice functions has been presented by Uzawa [236].

Uzawa Theorem. A singleton choice function f on $\mathcal{U}^1$ can be represented as the optimal choice by some linear ordering on U if and only if it satisfies **H** (i.e., **IIA** in the form (27)).

But our Proposition $1'$ being stated in terms of singleton choice functions in fact asserts that our new condition **CR** can be substituted to Uzawa Theorem for **H.** Therefore, **CR** must be equivalent to **H.** Indeed, it can be easily checked directly:

(a) **CR⇒H.** Take X, x and X_1 from the premise of (27), and set $X_2 = X \setminus X_1$. Then $X = X_1 \cup X_2$, hence by **CR** either $f(X_1) = x$ or $f(X_2) = x$. But the second is impossible because $x \notin X_2$. Therefore $f(X_1) = x$.

(b) **H⇒CR**. Let $X = \bigcup_{\mu \in M} X_\mu$, and let $f(X) = x$. Then $\exists\, \mu : x \in X_\mu$. But then by **H** $f(X_\mu) = x$.

Thus, our seemingly new rationality criterion for singleton choice functions in terms of Multi-Concordance has been proven eventually to be equivalent to the classic Uzawa criterion, as it should be.

5. Ordinal-concordant decisions: dictatorial game

In this section we consider the case where the set Σ of possible decisions contains in general more than two elements, but in contrast to the previous section this set is endowed with a structure, namely, the structure of a linear ordering. In terms of mathematical social sciences (or general measurement theory) this means that decisions are measured in an *ordinal scale*. We shall call corresponding coalition decision functions *ordinal-valued* **CDF** as opposite to *nominal-valued* **CDF** considered earlier. As a question of interpretation, we can treat the value $f(S)$ as an *expert estimation* of some subject, provided with an expert group S, or as a *political choice* of the coalition S made in an one-dimensional scale "LEFT WING – RIGHT WING".

Formally, let Σ be equipped with a linear ordering, namely, let a complete (including reflexivity) transitive antisymmetric relation $\leqslant$ be given, with its antireflexive part $<$.

We shall call a **CDF** $f : \mathcal{U}^1 \to \Sigma$ *Ordinal-Consistent*, **OC**, if for any $X = \bigcup_{\mu \in M} X_\mu$ in $\mathcal{U}^1$,

$$\min_{\mu \in M} f(X_\mu) \leqslant f(X) \leqslant \max_{\mu \in M} f(X_\mu). \tag{28}$$

In an interpretation, the condition (28) means that the coalition decision lies between extreme decisions of subcoalitions. In terms of estimations, such an aggregate estimate is called a *mean value*[1]; in terms of political decisions it can be treated as making a *compromise* decision.

[1] I am indebted to Pavel Chebotarev who attracted my attention to this linkage.

To describe the inner structure of Ordinal-Concordant coalition decision functions, a number of definitions will be needed.

We shall call an element-individual $x^* \in U$ (or respectively, $y^* \in U$) *Lower Semi-Dictator*, **LSD** (respectively, *Upper Semi-Dictator*, **USD**) in U, if

$$\forall\, S \in [x^*, U]: \; f(S) \leqslant f(U), \tag{29}$$

or respectively,

$$\forall\, S \in [y^*, U]: \; f(S) \geqslant f(U). \tag{30}$$

We shall call an ordered pair (x^*, y^*) of elements-individuals from U a *Dictatorial Couple (in U)*, **DC**, with the corresponding *Clinch Value*, **CV**, being equal to $\gamma^* \in \Sigma$, if x^* and y^* are **LSD and USD** respectively, and $\gamma^* = f(U)$.

Definitions of **LSD, USD and DC** immediately imply

Lemma 6. If (x^*, y^*) is **DC** with γ^* as **CV** then (x^*, y^*) is a saddlepoint in the antagonistic game with the 1st player as the minimizer having the strategy set U, the 2nd player as the maximizer having the same strategy set U, with the payoff function

$$\varphi(x, y) \equiv f(\{x, y\}) \;\text{ on }\; U \times U, \tag{31}$$

so that

$$\forall\, x, y \in U: \quad f(\{x^*, y\}) \leqslant f(\{x^*, y^*\}) \leqslant f(\{x, y^*\}), \tag{32}$$

and γ^* is the saddlepoint value, i.e.,

$$f(\{x^*, y^*\}) = \min_{x\in U} \max_{y\in U} f(\{x, y\}) = \max_{y\in U} \min_{x\in U} f(\{x, y\}) = \gamma^*. \tag{33}$$

It is easy to see that actually more wide game-theoretical equivalent representation for the above definitions can be done, namely, the following strengthening of Lemma 6 is true:

Lemma 7. If (x^*, y^*) is **DC** with γ^* as **CV** then $(\{x^*\}, \{y^*\})$ is a saddlepoint in the antagonistic game with the 1st player as the minimizer having the strategy set $\mathcal{U}^1$, the 2nd player as the maximizer having the same strategy set $\mathcal{U}^1$, with the payoff function

$$\Phi(X, Y) \equiv f(X \cup Y) \;\text{ on }\; \mathcal{U}^1 \times \mathcal{U}^1, \tag{34}$$

and with γ^* as the saddlepoint value; in particular,

$$\forall\, Q \in [\{x^*, y^*\}, U]: \quad f(Q) = \gamma^* \tag{35}$$

where $[A, B]$ denotes $\{C \mid A \subseteq C \subseteq B\}$.

And conversely, if $(\{x^*\},\{y^*\})$ is a saddlepair of the above form, then (x^*,y^*) is **DC** with **CV** equal to γ^*.

Lemmas 6 and 7 explicate the game-theoretical sense of dictatorial “clinch” due to above definitions. Again as a question of interpretation, in political terms one could consider Dictatorial Couple as a kind of political equilibrium for a “duumvirate” of two semi-dictators where Lower and Upper Semi-Dictator are the “strongest” representatives of two opposite political forces, each of them being able to prevent the opponent to shift the equilibrium value γ^* to the right or, respectively, to the left.

Remark 5.1. Note that generally the elements x^* and y^* can coincide. This means that the single individual $x^*=y^*$ is the “perfect” dictator who imposes exactly his/her personal opinion $\gamma^*=f(\{x^*\})=g(x^*)$ to each group that he/she enters:

$$\forall\, Q\in[x^*,U]:\ f(Q)=\gamma^*. \tag{36}$$

In our “political” terms this can be interpreted as x^* is a stabilizing factor which guaranties reconciliation of both struggling forces, a kind of “Father of Nation” (or better, Godfather) whose very presence provides the stable outcome.

Now we shall formulate the main result of this section:

Theorem 3. If an ordinal-valued coalition decision function obeys the **OC** condition then there exists a Dictatorial Couple for this **CDF**.

Proof. Let $\{U_\mu\}_{\mu\in M}$ be an arbitrary decomposition of U. Consider an auxiliary bi-valued coalition decision model with the same U and with the modified **CDF** $f':\mathcal{U}^1\to\Sigma'$ where $\Sigma'=\{0,1\}$, defined as follows:

$$f'(X)=0\Leftrightarrow f(X)>\gamma^*.$$

It is easy to see that due to the left inequality in (28) we have

$$f(U)=\gamma^*\Rightarrow\exists\,\mu\in M:\ f(U_\mu)\leqslant\gamma^*,$$

therefore, f' satisfies $\mathbf{NC}_{(U,0)}$. Hence, by Lemma 4 f' satisfies $\mathbf{FD}_{(U,0)}$, which yields

$$f(U)=\gamma^*\Rightarrow\exists\,x^*\in U\ \ \forall\,S\in[x^*,U]:\ f(S)\leqslant\gamma^*,$$

i.e., x^* is the Lower Semi-Dictator. The existence of an Upper Semi-Dictator y^* is proved in the similar way.

Corollary. If an ordinal-valued **CDF** obeys **OC** then there exist a saddlepoint in the antagonistic game described in Lemma 6 as well as that described in Lemma 7.

Remark 5.2. The above construction and the statements of Theorem 3 and Corollary can be essentially strengthened. Namely, in contrast to Theorems 1 and 2, we have pealed only the "first layer" of a dictatorial structure underlying an Ordinal-Concordant **CDF.** To move further, we would need to consider Family Semi-Dictators defined for any arbitrary nonempty $X \subset U$ quite similar to the above case $X = U$, and to reveal a kind of hierarchical structure of Family Dictatorial Couples. This structure turns out to be a tree-like, rooted from the top Dictatorial Couple in U, and to be more complex than the simple linear hierarchy in the previous cases; we omit this subject here due to the lack of space. But note in addition that so strengthened versions of Theorem 3 and Corollary admit conversion, viz., the existence of a (Family) Dictatorial Couple within each nonempty $X \subseteq U$, and/or of a saddlepoint in the game described in Lemma 7, also for each nonempty $X \subseteq U$, is proved to be not only necessary but also sufficient for the corresponding ordinal-valued **CDF** to satisfy **OC.** Above we confine ourselves by the presentation of the statement about the very existence of a newly defined object like Dictatorial Couple.

Remark 5.3. Note that any bi-valued **CDF** can be treated as ordinal-valued: it suffices to introduce the natural ordering on $\Sigma = \{0, 1\}$, namely, $0 \leqslant 1$. Then it is easy to verify that Bi-Concordance of a given **CDF** considered as nominal-valued is equivalent to its Ordinal-Concordance when considered as ordinal-valued. Therefore, Dictatorial Couple must exist for such **CDF**. And it is just the case: the eldest Family Dictator u_1 by Theorem 1 represents exactly a degenerate Dictatorial Couple described in Remark 5.1 (the next Family Dictators, which are valid in X's that not contain u_1, represent degenerate Dictatorial Couples for "lower levels" of hierarchy).

Example 2. Two-party political equilibrium. Let two linear orderings $<^-$ and $<^+$ on U be given, and let $\varphi(x, y)$ be an ordinal-valued function on $U \times U$ that is nonincreasing as x increases by $<^-$ and is nondecreasing as y increases by $<^+$. We interpret $<^-$ and $<^+$ as orderings of individuals (individual hierarchies) with respect to the intensity of their supporting policy of the left-wing party and the right-wing party, respectively. (One could try to treat these orderings as the corresponding party functionary hierarchies, but in our setting e a c h individual occupies a position in <u>each</u> of two orderings.) The function $\varphi(x, y)$ is interpreted as the compromise decision in the pairwise contest of x as a representative of the left-wing interests and y as that of the right-wing interests. The direction of the ordering of φ values, i.e., the ordering on Σ, is treated here for definiteness as corresponding to the right-wing interests: the higher is φ, the better for rights and the worse for lefts. (Again, each individual can play alternatively, and even simultaneously, both roles; and in particular, the degenerate contest of x

with himself is admitted as well, yielding an “inner compromise” decision $\varphi(x,x)$ which is naturally identified with the personal opinion $g(x)$.) [1]

Furthermore, define a coalition decision function by the formula

$$f(X)=\varphi(\max_{<^-}X,\,\max_{<^+}X). \tag{37}$$

This means that the resulting coalition decision is determined as the compromise in a duel of two highest representatives of both parties (and once again, in a degenerate case it can be a single person who performs both roles simultaneously).

Proposition 2. **CDF** defined by (37) is Ordinal-Concordant.

Proof. Let $X=\bigcup_{\mu\in M}X_\mu$. Show that (28) holds. Let $x^*=\max_{<^-}X$, and let $x^*\in X_\alpha$ for definiteness. Then certainly $x*=\max_{<^-}X_\alpha$, and hence

$$\begin{aligned} f(X_\alpha)=&\varphi(\max_{<^-}X_\alpha,\,\max_{<^+}X_\alpha)=\varphi(x^*,\max_{<^+}X_\alpha)\leqslant\\ &\varphi(x^*,\max_{<^+}X)=f(X). \end{aligned} \tag{38}$$

Therefore, the left-hand inequality in (28) is valid; similarly the right-hand inequality is proved.

Note that the antagonistic game implied by Corollary from Theorem 3 is here in fact given from the very beginning. Namely, φ is precisely the payoff function for the 1st (left-wing) player as the minimizer and the 2nd (right-wing) player as the maximizer, and $(\max_{<^-}X,\max_{<^+}X)$ is evident the saddlepair, and moreover, the pair of dominant strategies in such a game. It is worth also to consider the very degenerate case of the above model, namely, the case where both orderings $<^-$ and $<^+$ coincide:

$$<^-=<^+=<\,. \tag{39}$$

In such a case the resulting Dictatorial Couple in any X is always degenerate by construction: it has the form (x^*,x^*) where

$$x^*=\max_{<^-}X=\max_{<^+}X=\max_{<}X, \tag{40}$$

and yields the coalition decision

$$f(X)=\varphi(\max_{<}X,\max_{<}X). \tag{41}$$

If we put

$$g(x)\equiv\varphi(x,x) \tag{42}$$

[1] This partly formalizes an idea discussed in our talks with Boris Mirkin concerning the treatment of individual decisions as a kind of collective decisions, namely, as a result of intrinsic struggle of considerations and feelings in the mind and soul of an individual.

then we come back to the Hierarchical Dictatorship Mechanism underlying Multi-Concordant coalition decision functions. Moreover, every such mechanism can be represented in the above manner, because every initially given function $g : U \to \Sigma$ with an arbitrary set Σ, not necessarily ordered, after introducing an arbitrary linear order on Σ can be always extended via the identity (42) from the diagonal $x \equiv y$ in $U \times U$ onto the whole set $U \times U$, yielding a function $\varphi(x, y)$ nonincreasing in x and nondecreasing in y. Indeed, it suffices to set

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \max_{<}\limits_{x \leqslant z \leqslant y} g(z), & x \leqslant y; \\ \min_{<}\limits_{y \leqslant z \leqslant x} g(z), & x > y. \end{cases} \tag{43}$$

The desired double monotonicity of φ given by (43) is easily checked.

Thus, an arbitrary Hierarchical Dictatorship mechanism can be represented as a degenerate case of Two-Party model, namely, with coinciding party hierarchies. It is natural to treat such a case as One-Party model. The arbitrariness of decisions realized by the corresponding Family Dictators on their levels of hierarchy demonstrates, to my opinion, that in such a degenerate political system the only realizable compromises are the compromises of corresponding Family Dictators with themselves, with their absolute power within their "families".

The model of Ordinal-Concordant decisions considered in this section differs from the previous ones in that a collective decision can be made which is distinguished from all decisions of subcoalitions and is in essence typically an "intermediate", "compromise" decision. Such a compromise is determined as an outcome of struggle of two opposite "forces". In particular cases a compromise can turn out to be degenerate: either it exactly coincides with the extreme decision of one of abovementioned forces (and then we observe in fact the complete victory of one of struggling sides), or, as another case, two representatives of struggling forces can merge into a single person — a perfect dictator. Note briefly that the model can be generalized onto the case of more than two struggling sides which leads to a set of more than two "unilateral" dictators and, correspondently, to a game-theoretical state that is stable in the Nash sense and even in a more strong sense; this subject requires a separate presentation.

Concluding this section, we shall trace a link between the model of ordinally-concordant coalition decisions presented here, and an axiomatic model of opportunity set estimations [175, 179]. First, note that on proving Theorem 3 we actually appealed (in a weakened form) to the following corollary from the left-hand inequality in (28) by virtue of Lemma on Hidden Family Dictator (Lemma 4):

$$\forall \gamma \in \Sigma\ \forall X \in \mathcal{U}^1 :\ \{f(X) \leqslant \gamma\ \Rightarrow\ \exists\, x \in X\ \forall\, S \in [x, X] :\ f(S) \leqslant \gamma\} \tag{44}$$

which is equivalent, as one can verify, to the inequality

$$\forall\, X \in \mathcal{U}^1 :\ f(X) \geqslant \min_{x\in X}\ \max_{S\in[x,X]}\ f(S), \tag{45}$$

and moreover, the inequality sign in (45) can be evidently replaced by the equality. Similarly, from the right-hand inequality in (28), i.e., from the condition: if $X = \bigcup_{\mu\in M} X_\mu$ then

$$f(X) \leqslant \max_{\mu\in M} f(X_\mu), \tag{46}$$

the following equation can be inferred:

$$\forall\, X \in \mathcal{U}^1 :\ f(X) = \max_{x\in X}\ \min_{S\in[x,X]}\ f(S). \tag{47}$$

Let us now treat elements of the totality U as abstract *alternatives* (potential objects for choice), sets $X \in \mathcal{U}^1$ as sets of admissible alternatives (in various choice situations), or *opportunity sets*, and $f : \mathcal{U}^1 \to \Sigma$ (where Σ is a linearly ordered set of *estimates*) as an *estimate function for opportunity sets*. Let us, following [175, 179], pose the question: under what conditions and to what extent an estimate $f(X)$ can be represented via estimates of separate alternatives composing a given opportunity set X? Consider two conditions:

(Upper) Concordance, **UC**: if $X = \bigcup_{\mu\in M} X_\mu$ then

$$f(X) \leqslant \max_{\mu\in M} f(X_\mu), \tag{48}$$

and

Monotonicity, **M**: if $X \subseteq X'$ then

$$f(X) \leqslant f(X'). \tag{49}$$

It is easy to see that Monotonicity (49) (which can be considered also as a specific case of Heredity condition [1]) is a strengthening of the left-hand inequality in (28) which can be also called Lower Concordance, whereas Upper Concordance (48) is exactly the right-hand inequality in (28). We have shown above that the **UC** condition is necessary and sufficient for fulfilling Eq. (47); it is also true, that moreover, **UC** is sufficient (which follows from the previous statement) and necessary (which requires a separate proof, simple enough though) for f to be representable in the form

$$\forall\, X \in \mathcal{U}^1 :\ f(X) = \max_{x\in X}\ \min_{S\in X}\ g(x; S) \tag{50}$$

[1] Namely, the property of the form $f(X) \leqslant \gamma$ is hereditary in the usual mathematical sense: if it is true for a set X then it is also true for any its subset.

with some arbitrary function $g : U \times \mathcal{U}^1 \to \Sigma$. It is easy to see also that the **M** condition is necessary and sufficient for f to satisfy the "mirror", with respect to (47), equation

$$\forall X \in \mathcal{U}^1 : \ f(X) = \max_{x \in X} \max_{S \in [x,X]} f(S), \tag{51}$$

and moreover, to be representable in the "mirror", with respect to (50), form

$$\forall\, X \in \mathcal{U}^1 : \ f(X) = \max_{x \in X} \max_{S \subseteq X} g(x, S), \tag{52}$$

with some arbitrary function $g : U \times \mathcal{U}^1 \to \Sigma$. Finally, it can be proved that the conjunction **UC** & **M** of the conditions **UC** and **M** which represents an evident strengthening of the condition **OC** is necessary and sufficient for f to satisfy the equation

$$\forall\, X \in \mathcal{U}^1 : \ f(X) = \max_{x \in X} f(\{x\}), \tag{53}$$

and moreover, to be representable in the form

$$\forall\, X \in \mathcal{U}^1 : \ f(X) = \max_{x \in X} g(x), \tag{54}$$

with some arbitrary function $g : U \to \Sigma$ [175, 179].

In terms of opportunity set estimations, the latter case (54) just yields the "ideal" representability of the estimate of an opportunity set as equal to the estimate of the best alternative within this set. (Thus, the pair of conditions **UC** and **M** yields an axiomatics for *scalar optimization* to generate a given ordinal-valued function of admissible alternative sets.) The previous two "mirror" cases, (49) and (51), reflect an "imperfect" representability, where the estimate of an alternative x under scalar optimization depends on the whole "context of choice", namely, on subsets $S \subseteq X$ of competitive alternatives via two opposite modes.

Note finally that the resulting representation (54) is precisely the representation of f by means of a Hierarchical Dictatorship mechanism (7) (or more generally, by a Tied Hierarchical Dictatorship mechanism (8) in the case where g admits equal values for different x) with a specific requirement: the ordering $<$ which generates the hierarchy coincides with the ordering generated by the function g values. Thus, we have obtained in fact an extension of Theorem 2 about representability of Multi-Concordant **CDF** by **HD** (or **THD**) mechanisms to the case of an ordered set Σ:

Proposition 3. The fulfilment of the combined condition **UC** & **M** is necessary and sufficient for a **CDF** f to be representable by a Hierarchical Dictatorship mechanism with the hierarchical order determined by ordering elements-individuals $x \in U$ with respect to the values $g(x)$.

In parallel to this result it is worth to note that the simplest case of Tied Hierarchical Mechanism (8), namely Oligarchy described at the end of Section 2, can be also characterized by a pair of axioms which are specific versions of Concordance and Heredity as applied to individual versus coalitional decisions in Bi-Valued model, viz., Unanimity, $\mathbf{U}_{(0)}$ (9), and Converse Unanimity, $\mathbf{CU}_{(0)}$ (10):

Proposition 4. The fulfilment of the combined condition $\mathrm{U}_{(0)}\,\&\,\mathrm{CU}_{(0)}$ is necessary and sufficient for a Bi-Valued **CDF** f to be representable by a Tied Hierarchical Dictatorship mechanism with two levels of hierarchy, viz., by the Oligarchy where the top level supports the decision 1, and the bottom level the decision 0, i.e., by the mechanism (11).

The proof is straightforward.

6. Conclusions

We considered a model of collective decisions which is based on an extension of the *Unanimity condition* from individuals to (sub)coalitions. This extension has been formalized as the *Concordance condition*, in different versions, which established a consistency between decisions of coalitions (including degenerate coalitions, i.e., individuals), on the one hand, and the total (united) collective – on the other hand. It has been proven that the negative version of Concordance (i.e., of coalitional unanimity) contains implicitly the principle of dictatorship, either individual or, in various forms, joint. Lemma on Hidden Family Dictator which asserts the existence of a dictator under Negative Concordance is in essence the key point of the work. Several specific models of coalition decisions leading to the phenomenon of dictatorship or hierarchical dictatorship have been studied on the basis of this Lemma. The main result of the paper is a kind of "causal" explanation of the dictatorship phenomenon in collective decisions (cf. [174], for a related abstract model of causality). Specifically, Lemma on Hidden Family Dictator reveals an element-individual "responsible" for the resulting collective decision, a point-wise "cause" of the output of the system, in terms of [174]. It is remarkable that the corresponding mathematics is very simple.

A natural question arises on the interrelation between the dictatorship phenomenon in our model and that in Arrovian-like models. Our model differs from Arrovian one, among others, in three essential aspects. First, in our model individual opinions are fixed. Second, on the contrary, the composition of the collective is variable. Note that these two aspects are interconnected, and we can replace (artificially) the variability of electorate by a partial variability of opinions setting that those individuals who became absent simply changed their opinions to "abstinence". And third, we confined ourselves here by considering abstract discrete decisions, starting from the binary ones "YES–NOT" and than going to some simplest generalizations. Nevertheless, our results can be linked to the Arrovian ones; here we can only briefly outline this linkage.

To apply the obtained results to the Arrow model, say, in its conventional form (aggregating individual preference relations into collective ones), you need to make two important steps. On the one hand, as opposite to the present paper, it is necessary to point out explicitly "issues of the agenda", viz., the questions of the form "Do you agree that $a \preceq b$?". Moreover, it is essential in Arrovian-type models that there are several questions of such form, and the corresponding answers to different questions must be consistent in a sense (typically, through the transitivity or at least acyclicity requirement for corresponding preference relations). On the other hand, it turned out to be useful, on developing the present work, to consider not only decisions of coalitions but also decisions resulting in pairs of contending coalitions which leads to separation of winning versus loosing ones. The corresponding generalization of "algebra of coalitions" which was reduced in the present paper solely to uniting subcoalitions into a "grand coalition"(and sometimes, conversely, picking out a subcoalition from a coalition), requires constructing an "algebra of pair of coalitions". "Algebra" that we propose differs from that used earlier (see [133] and following works). We can only mention here that we shall use an algebra which includes at the same time both unions and intersections of coalitions as well as a kind of an "intermediate" construction.

Recall that it is the algebra of decisive coalitions which plays a crucial role in implicit generating the dictatorship phenomenon. It shown that the algebra of pairs of "winning–loosing" coalitions that allows to reproduce the hierarchical dictatorship structure arising in the conventional Arrow model, follows as a corollary from the requirement of preserving preference transitivity in that model.

Such an algebra of coalition pairs is also of independent interest because it allows us to axiomatize comparison of coalitions by their "relative strength". It turns out that such a relative strength of coalitions under an appropriate axiomatics is determined by "qualitative weights" of their members measured in some ordinal scale, or stated differently, by individual positions in some hierarchy. Specifically, the result of coalition comparisons has been proven to be predetermined by the comparison of the top ("highest by the hierarchies") members of corresponding coalitions, which refers us once again to the formalism of hierarchical dictatorship phenomenon. Note also that such an axiomatic approach leads us formally to the problem of reducing a given relation between sets to a relation of linear (or weak) ordering between elements. This is a kind of an inverse problem with respect to the popular problem of axiomatic extension of linear (or weak) order from a set onto its power set (see, e.g., [149] and among recent works [207]). Such a statement of problem (both "direct" and inverse) is well interpreted in terms of comparison of opportunity sets by means of comparison of separate alternatives from these sets. It remains to note that the latter, in turn, is intimately related to the problem of reducing "absolute" ordinal estimates of opportunity sets to ordinal estimates of alternatives; a kind of hierarchy of estimates arisen from an algebra of subset estimates has been exposed at the end of Section 5. It is worth to note also that our choice-theoretical considerations, Example 1 on the abstract choice problem in Section 4 and an axiomatics for scalar optimization as generating opportunity set estimations in Section 5, show that the very scalar optimization can be treated as a specific appearance of Hierarchical Dictatorship mechanism.

Thus, revealing hierarchy of elements which underlies a natural "algebra of consistency between subsets" turns out to be intrinsic for a rather wide scope of problems. But the most intriguing amongst them still remains the Arrovian problem, possibly due to a paradoxical social-choice meaning of results obtained. From this point of view, our results appear also discouraging: it looks as if the only way to guarantee an interconsistency between decisions of different parts of a society were the presence of a firm kernel like a dictator or dictatorial hierarchy, a kind of "strong hand". Perhaps, a shadow of hope refuting such a sorrow conclusion can be found in results of Section 5 where under mild enough requirements to "coalition concordance" the single dictator has been proven to be generally replaced by a pair of struggling semi-dictators. Referring to an economic analogy, one could say that although oligopoly and in particular duopoly is far from perfect competition, it is much better yet than an overall monopoly. I believe that this concerns a monopoly for power as well. Eventually, the democracy is nothing more than an asymptotically reachable state of a large society consisting in small family semi-dictators, each of them being bounded by his/her neighbors.

Generalized utility based on values of opportunity sets [1]

This paper is concerned with an axiomatic approach to the analysis and construction of the utility structure that underlies the values of "opportunity sets". A family of subsets of a fixed universal set of alternatives

[1] Annals of Operations Research.—1998.—V. 80.—P.11–26.

is considered. These subsets are treated as opportunity sets; their (subjective) estimates by some ordinal scale are known. Also considered is another family of subsets, "alternative bundles"; its assumed mechanism of generating opportunity set values is as follows. Each opportunity set contains some bundles of alternatives, which have their own "hyper-utility" values. The value of the opportunity set is the maximum hyper-utility over bundles that lie inside the set. We establish necessary and sufficient conditions for opportunity set values to be representable by such a mechanism, with some hyper-utility function for bundles. Particular cases are considered, including the "limit" case where the opportunity set value equals the conventional utility value of the best alternative in the set.

1. Introduction

The common basis for decision making is the concept of utility and/or preference. Both utility functions and preference relations are usually defined on a given set of elementary alternatives. More complex objects can be taken into account at the next stage of investigation, for their value estimation, comparison and (finally) decision making. Lotteries, i.e. probabilistic mixtures of initial alternatives, are the well-known case whose study was initiated mainly by the classical von Neumann–Morgenstern approach. More recently the "physical" unions of alternatives, i.e. sets ("bundles") of alternatives as a whole, became the subject of analysis. Among first works that considered preferences between sets or values of sets, one can mention [200, 157, 87]. Since the time the problem of "flexibility of choice" or "freedom of choice" became popular (see, e.g., [160, 224, 225], numerous papers addressed the preferences between subsets of a universal set of alternatives. These subsets are typically interpreted as "opportunity sets", namely, sets of admissible alternatives. To establish and describe preference relations between opportunity sets, many works use an axiomatic approach: see, e.g., [101, 112, 113, 158, 206, 207].

Besides describing the binary relations between the objects, another way of modelling formal structures underlying the comparison and choice of objects is to assign to the objects some values. Values of bundles of alternatives together with binary relations between bundles were considered, in particular, in [87, 175] (the latter work used an "opportunities" interpretation). A kind of refined axiomatics for values of sets generated in some natural way on the basis of values (utilities) of elementary alternatives was proposed in [179]. The present paper extends this axiomatic approach to non-conventional utilitarian estimation of opportunity sets on the basis of generalized utility values for bundles of alternatives.

The notion of utility function admits some qualitative modifications. The basic concept is the conventional ("direct") utility function defined on a universal set U of primary objects treated as "alternatives". The value $\varphi(x)$ of a utility function φ on an alternative $x \in U$ is interpreted as a (subjective) estimate of "goodness" of x. Apart from this, estimates $F(X)$ of sets $X \subseteq U$ can be considered which are interpreted as (subjective) values of "goodness" of sets of admissible alternatives or "opportunity sets", X's, taken as a whole. Following the terminology of consumer behavior theory, we can call F an indirect utility function. The conventional approach to rational behavior implies that the value $F(X)$ has to be predetermined by (or simply equal to) the highest utility value over all admissible alternatives x in X, taken separately. It is easy to see that not every opportunity set value function F can be represented in such a manner. In the preceding paper of the author [179] some variants of the criterion (necessary and sufficient condition) of such representability have been given.

The imputation of the maximal utility of a separate alternative to the whole set of alternatives is not the only way to build opportunity set values. Among other ways, one can preserve the idea of maximization of some initial utility estimates for generating utility values of opportunity sets, but modify the notion of an initial utility function. For the role of such primary utility, we propose a generalization of direct utility, namely, a generalized utility function Φ that depends not (or not only) on separate alternatives $x \in U$ but (also) on some specific groups $T \subseteq U$ (e.g., pairs or triples, etc.) of alternatives. This enhances the ability to represent a given indirect utility (opportunity set value) function by means of maximization of primary utilities. We shall refer to the so generalized utility function as *hyper-utility*, and preserve the term "indirect utility" for the corresponding opportunity set values.

Hyper-utility is something "intermediate" between direct and indirect utility. The possible meaning of hyper-utility in the above problem statement can be explained by an example where we partly follow [160]. Assume we estimate goodness of a total restaurant menu by evaluating the quality of various complete dinner menus $\{$*appetizer*, $\ldots$, *dessert*$\}$ that may be combined from the total menu. If one considers a total menu as a set X of dishes and a specified dinner menu as a subset $T \subseteq X$ then the goodness value $F(X)$ can be identified with the maximal quality value $\Phi(T)$ over all those sets $T \subseteq X$ that belong to a prescribed family $\mathcal{T}$ (here, $\mathcal{T}$ consists of all imagined dinner menus of the form $\{$*appetizer*, $\ldots$, *dessert*$\}$).

In the next section such type of hyper-utility is formalized in the framework of an abstract model, and the problem of representation of a given opportunity set value function by maximizing an appropriate hyper-utility function is considered. Criteria of the desired representability are obtained which are a natural generalization of previously-stated representability criteria given in terms of conventional utility.

2. Formal model and main results

Let us present now the formal statement of problem. Let U be a universal set of primary alternatives; U is assumed to be finite for simplicity. Let a set family $\mathcal{U} \subseteq 2^U \setminus \{\varnothing\}$ be given; each member $X \in \mathcal{U}$ of this family is interpreted as an opportunity set. Let L be a linearly ordered set of possible "utility values" (e.g., $L = R^1$ — the numerical axis, in the case of cardinal utility; all what follows is true for arbitrary ordinal scales). Let a function $F : \mathcal{U} \to L$ be given, which is interpreted as the opportunity set value function (indirect utility).

We shall seek a representation of F by maximizing some (generalized) direct utility. In the simplest case of conventional direct utility, we are interested in the existence of a function $\varphi : U \to L$ such that for each $X \in \mathcal{U}$

$$F(X) = \max_{x \in X} \varphi(x). \tag{1}$$

In the general case we are interested in the existence of a hyper-utility function $\Phi : \mathcal{T} \to L$ on an auxiliary family of sets $\mathcal{T} \subseteq 2^U$, such that for each $X \in \mathcal{U}$

$$F(X) = \max_{T:\, T \in \mathcal{T},\, T \subseteq X} \Phi(T). \tag{2}$$

An interpretation of a set $T \in \mathcal{T}$ is as follows: T is an "alternative bundle" which has its own (hyper-)utility value and which is typically "small enough" so that inside of each opportunity set there are some of such bundles.

The representation (1) can be considered, up to reformulation, as a particular case of (2): indeed, it suffices to take $\mathcal{T} = \{T \subseteq U \mid |T| = 1\}$, i.e. the family of singletons $\{\{x\}\}, x \in U$, and $\Phi(\{x\}) = \varphi(x)$ for all x.

Remark 1. In turn, the representation (2) can be reduced, somewhat artificially (by a specific "change of variables"), to a representation in the form of (1). This can be performed in different ways, with the common idea of treating primary alternative bundles as "new" alternatives. One method is to consider all subsets $S \subseteq U$ in such a role, another method [1] is to consider only those $T \subseteq U$ that belong to $\mathcal{T}$. Correspondingly, the functions F and Φ from (2) should be transformed into new "surrogate" F, and φ, respectively, in (1), which depend on new X's (respectively, x's) from new domains. Such transformations themselves depend on $\mathcal{T}$ as a parameter, and their correct description requires precision; this will be done in detail in Appendix I. With such transformations, the questions of

[1] The first method was used in [175, pp.230–231] for reducing set-valued choice functions to single-valued ones within the framework of the rationality problem. The second method, most appropriate for reducing (2) to (1) under a fixed $\mathcal{T}$, was proposed by a referee who stimulated me to discuss this point — which is gratefully acknowledged.

representability of F functions via hyper-utility Φ in the form of (2) can in principle be reduced to representability of surrogate F's via conventional utility φ in the form of (1) with corresponding "new" variables; then, the criteria of representability of F in the form of (1) (standard indirect utility) can be used. However, the backward translation of so-obtained results into the primary terms is cumbersome. We thus prefer to yield an independent exposition, including independent proofs of representability criteria, directly in terms of primary alternatives and their sets. This enables us, in particular, to deal explicitly with important set-theoretical relations for sets of initial alternatives.

In what follows, we impose some restrictions on $\mathcal{T}$ with respect to $\mathcal{U}$: viz., throughout let $\mathcal{T}$ be $\mathcal{U}$-*dense*:

$$\forall\, X \in \mathcal{U} \;\; \exists T \in \mathcal{T} : \; T \subseteq X, \tag{3}$$

and $\mathcal{U}$-*covered*:

$$\forall T \in \mathcal{T} \;\; \exists X \in \mathcal{U} : \; T \subseteq X. \tag{4}$$

These restrictions just reflect the required "relative smallness" of T's. Formally, the first condition, $\mathcal{U}$-density, provides that the expression (2) is well-defined. (The second condition, $\mathcal{U}$-coveredness, will similarly provide that the "dual" expression (6) below is well-defined.) The primary, almost evident and rather weak characterization of functions F representable in the form of (2) is obtained for the case where the family $\mathcal{T}$ is not fixed but is arbitrary.

We shall say that a function $F : \mathcal{U} \to L$ satisfies the *monotonicity* condition (**M**) if for each $X, X' \in \mathcal{U}$,

$$X \subseteq X' \quad \text{implies} \quad F(X) \leqslant F(X'). \tag{5}$$

Theorem 1. For an opportunity set value function $F : \mathcal{U} \to L$ to be representable in the form of (2) of maximization of some hyper-utility function $\Phi : \mathcal{T} \to L$ with some $\mathcal{U}$-dense and $\mathcal{U}$-covered set family $\mathcal{T}$, it is necessary and sufficient that F satisfies the condition **M**.

Proof.

Necessity. Monotonicity of F given by (2) follows immediately from the very form of (2).

Sufficiency. Let $\mathcal{T} = \mathcal{U}$, which is obviously $\mathcal{U}$-dense and $\mathcal{U}$-covered, and let $\Phi(T) \equiv F(T)$. Then, due to monotonicity of F, and hence of Φ, the maximum on the right-hand side of (2) is reached at $T = X$, which justifies (2).

Characterizations of those F's that are representable in the form of (2) with a given fixed $\mathcal{T}$ are much less evident and appeal to the concept of "revealing" (in our statement of problem, "revealing values" instead of classical "revealing preferences", see, e.g., [145, 211, 212, 222]). Given an opportunity value function $F : \mathcal{U} \to L$ and a family $\mathcal{T} \subseteq 2^U$ which is $\mathcal{U}$-dense and $\mathcal{U}$-covered, the *revealed hyper-utility* function is the mapping $\Phi_F : \mathcal{T} \to L$ defined by the following expression: for each $T \in \mathcal{T}$,

$$\Phi_F(T) = \min_{Y:\, Y \in \mathcal{U},\, Y \supseteq T} F(Y). \tag{6}$$

Note that it is $\mathcal{U}$-coveredness of $\mathcal{T}$ that provides that the expression (6) is well defined.

We shall say that $F : \mathcal{U} \to L$ satisfies the *revealed hyper-utility* condition (**RHU**) for a given $\mathcal{U}$-dense family $\mathcal{T}$ if F is representable by (2) with $\Phi = \Phi_F$.

Theorem 2. For an opportunity set value function $F : \mathcal{U} \to L$ to be representable by maximization (2) of a hyper-utility function $\Phi : \mathcal{T} \to L$ with the given $\mathcal{U}$-dense and $\mathcal{U}$-covered set family $\mathcal{T}$, it is necessary and sufficient that F satisfies the condition **RHU**: for each $X \in \mathcal{U}$,

$$F(X) = \max_{T:\, T \in \mathcal{T},\, T \subseteq X} \Phi_F(T). \tag{7}$$

Proof.

Sufficiency follows directly from the formulation of the theorem.

Necessity is based on

Lemma 3. **RHU** (7) is equivalent to the following (seemingly weaker) modified **RHU** condition (**mRHU**):

$$F(X) \leqslant \max_{T:\, T \in \mathcal{T},\, T \subseteq X} \Phi_F(T). \tag{8}$$

Proof.

We have to show that we can always replace $\leqslant$ in (8) by $=$. To this end, note that for every couple of sets T, X such that $T \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{U}$ and $T \subseteq X$, by (6) we have

$$\Phi_F(T) \leqslant F(X), \tag{9}$$

and therefore,

$$\max_{T:\, T \in \mathcal{T},\, T \subseteq X} \Phi_F(T) \leqslant F(X). \tag{10}$$

Comparing (10) with (8) yields (7).

Now return to the proof of necessity in Theorem 2. Let F be representable by (2) with some Φ. Then, for each $T \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \Phi_F(T) &= \min_{Y:\, Y \in \mathcal{U}, Y \supseteq T} F(Y) \\ &= \min_{Y:\, Y \in \mathcal{U},\, Y \supseteq T} \; \max_{S:\, S \in \mathcal{T},\, S \subseteq Y} \Phi(S). \end{aligned} \tag{11}$$

Note that while enumerating Y's and S's in the right-hand side of (11), we can always consider $S = T$ for every Y. Therefore, certainly

$$\Phi_F(T) \geqslant \Phi(T). \tag{12}$$

This yields

$$\begin{aligned} F(X) &= \max_{T\colon T\in\mathcal{T},\, T\subseteq X} \Phi(T) \\ &\leqslant \max_{T\colon T\in\mathcal{T},\, T\subseteq X} \Phi_F(T), \end{aligned} \tag{13}$$

i.e. **mRHU** (8) is fulfilled, and by Lemma 1 **RHU** is fulfilled as well.

Theorem 2 yields the desired criterion of representability of F, and, in addition, it is given in a constructive form: if a required hyper-utility function Φ does exist, then (at least one) such function must have the form of the revealed hyper-utility Φ_F. The explicit expression (6) for $\Phi_F(T)$ seemingly demands the complete enumeration of all Y's from $\mathcal{U}$ such that $Y \supseteq T$. But in the case of monotonicity of F which is necessary for F to be representable in the form of (2) due to Theorem 1, it certainly suffices to confine ourselves by taking only those Y's in (6) that are minimal (in the set-theoretical sense, i.e. by inclusion) among all $X \in \mathcal{U}$, $X \supseteq T$. This remark is important from the computational point of view.

A modified form of the representability criterion in terms of the F function is given by the following

Corollary 4. For $F : \mathcal{U} \to L$ to be representable in the form of (2) for a function $\Phi : \mathcal{T} \to L$ with the given $\mathcal{U}$-dense and $\mathcal{U}$-covered family $\mathcal{T}$, it is necessary and sufficient that F satisfies the equation: for each $X \in \mathcal{U}$

$$F(X) = \max_{T\colon T\in\mathcal{T},\, T\subseteq X} \; \min_{Y\colon Y\in\mathcal{U},\, Y\supseteq X} F(Y). \tag{14}$$

Equation (14) is obtained by combining two dual expressions (2) and (6), namely, by substituting Φ_F from (6) for Φ in (2).(Note also that (11) is the equation dual to (14).) The character of F functions that satisfy (14) is not apparent; to clarify it to some extent, we give still another equivalent form of the representability criterion.

Let $X \in \mathcal{U}$ and $\{X_\nu\}_{\nu\in N} \subseteq \mathcal{U}$ where N is some index set. We shall call the family $\{X_\nu\}_{\nu\in N}$ a $\mathcal{T}$*-covering of* X if

$$\forall T \in \mathcal{T} : \; (T \subseteq X \Rightarrow \exists\, \nu \in N : \, T \subseteq X_\nu). \tag{15}$$

Remark 2. If $T(X) = \bigcup_{T\in\mathcal{T}, T\subseteq X} T$ coincides with X, then any $\mathcal{T}$-covering $\{X_\nu\}_{\nu\in N}$ of X is, as is easy to see, a covering of X in the usual sense, i.e. $\bigcup_{\nu\in N} X_\nu \supseteq X$. But if $T(X)$ is a proper subset of X, then a corresponding $\mathcal{T}$-covering of X does not necessarily cover X. This is exemplified by the simplest case where $\mathcal{T}$ is a family of singletons $\{u\}, u \in U$. If $\mathcal{T}$ consists of *all* such singletons, then for each X an arbitrary family of sets is a $\mathcal{T}$-covering of X if and only if it is a (usual) covering of X. And, conversely, if for some X not every singleton $\{x\} \subseteq X$ belongs to $\mathcal{T}$, then, say, $\{\{x\}\}_{\{x\}\in\mathcal{T},\, x\in X}$ is a $\mathcal{T}$-covering but not a covering of X.

We shall say that a function $F : \mathcal{U} \to L$ satisfies the $\mathcal{T}$-*concordant monotonicity* ($\mathcal{T}$-**CM**) condition if for each set $X \in \mathcal{U}$ and for each family $\{X_\nu\}_{\nu\in N} \subseteq \mathcal{U}$ that is a $\mathcal{T}$-covering of X, i.e., such that (15) holds, the inequality

$$F(X) \leqslant \max_{\nu\in N} F(X_\nu) \tag{16}$$

is fulfilled.

Theorem 5. For an opportunity set value function $F : \mathcal{U} \to L$ to be representable in the form of (2) by a hyper-utility function $\Phi : \mathcal{T} \to L$ with the given $\mathcal{U}$-dense and $\mathcal{U}$-covered set family $\mathcal{T}$, it is necessary and sufficient that F satisfies the $\mathcal{T}$-concordant monotonicity condition.

Theorem 5 immediately follows from Theorem 2 by virtue of the following lemma.

Lemma 6. Conditions $\mathcal{T}$-**CM** and **RHU** are equivalent.

Proof.

Making use of Lemma 3, we will substitute **mRHU** for **RHU**.

(a) $\mathcal{T}$-**CM** $\Rightarrow$ **mRHU**.

Let $\mathcal{T}$-**CM** be true. Fix an arbitrary $X \in \mathcal{U}$. Denote by Y_T a set Y that yields $\min F(Y)$ in (6), so that for each $T \in \mathcal{T}$,

$$F(Y_T) = \Phi_F(T). \tag{17}$$

Form the family $\mathcal{Y} = \{Y_T\}_{T\in\mathcal{T},\, T\subseteq X}$. It is easy to see that by construction, $\mathcal{Y}$ is a $\mathcal{T}$-covering of X; indeed, for every $T \in \mathcal{T}, T \subseteq X$, we have $T \subseteq Y_T$. Therefore, by $\mathcal{T}$-**CM**,

$$F(X) \leqslant \max_{T:\, T\in\mathcal{T},\, T\subseteq X} F(Y_T), \tag{18}$$

which together with (17) yields **mRHU** (8).

(b) **mRHU** $\Rightarrow$ $\mathcal{T}$-**CM**.

Let **mRHU** be true. Fix an arbitrary $X \in \mathcal{U}$, and let $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu\in N}$ be some $\mathcal{T}$-covering of X. Then by **mRHU** (8),

$$\begin{aligned} F(X) &= \max_{T:\, T\in\mathcal{T},\, T\subseteq X} \; \min_{Y:\, Y\in\mathcal{U},\, Y\supseteq T} F(Y) \\ &\leqslant \max_{T:\, T\in\mathcal{T},\, T\subseteq X} \; \min_{Y:\, Y\in\mathcal{X},\, Y\supseteq T} F(Y) \qquad (\text{since } \mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}) \\ &\leqslant \max_{Y\in\mathcal{X}} F(Y) = \max_{\nu\in N} F(X_\nu), \end{aligned} \tag{19}$$

which yields $\mathcal{T}$-**CM**.

To make the meaning of the $\mathcal{T}$-**CM** condition more transparent, firstly note that $\mathcal{T}$-**CM** implies usual monotonicity of F. Indeed, let $X, X' \in \mathcal{U}$ and $X \subseteq X'$; then the one-term family $\{X'\}$ is certainly a $\mathcal{T}$-covering of X; therefore, by (9) $F(X) \leqslant F(X')$. Thus, $\mathcal{T}$-concordant monotonicity is in general a strengthening of the monotonicity condition, and "necessity" in Theorem 5 is a strengthening of "necessity" in Theorem 1 above. On the other hand, (16) puts the upper bound for the "growth" of F.

3. Particular cases

The following consideration of three special cases of $\mathcal{T}$ families makes the role of $\mathcal{T}$-**CM** condition in Theorem 5 more clear.

Case I. Let $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$ consist of all subsets of the sets $X \in \mathcal{U}$:

$$\mathcal{T}_0 = \{T \subseteq U \mid \exists\, X \in \mathcal{U} : T \subseteq X\} = \bigcup_{X \in \mathcal{U}} 2^X. \tag{20}$$

(It is easy to see that $\mathcal{T}_0$ is $\mathcal{U}$-dense and $\mathcal{U}$-covered.) Then the representation (2) is reduced to

$$F(X) = \max_{T \subseteq X} \Phi(T). \tag{21}$$

To obtain the criterion of such representability from Theorem 5, note that if $\{X_\nu\}_{\nu \in N}$ is a $\mathcal{T}_0$-covering of X, then (15) is equivalent to $\exists \nu \in N$: $X_\nu \supseteq X$. Therefore, (16) yields no more than the monotonicity condition. Thus, we obtain

Corollary 7. For an opportunity set value function $F : \mathcal{U} \to L$ to be representable in the form of (21) with some hyper-utility function $\Phi : \mathcal{T}_0 \to L$, it is necessary and sufficient that F satisfies the monotonicity condition.

Case II. Let $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$ consist of all singletons $\{x\}$, $x \in U$, i.e.,

$$\mathcal{T}_1 = \{T \subseteq U \,\big|\, |T| = 1\}. \tag{22}$$

We assume herein that $\bigcup_{X \in \mathcal{U}} X = U$; this guarantees that $\mathcal{T}_1$ is $\mathcal{U}$-covered. Besides, $\mathcal{T}_1$ is obviously $\mathcal{U}$-dense for each $\mathcal{U} \subseteq 2^X \setminus \{\varnothing\}$. It is easy to verify that for every $X \in \mathcal{U}$ and every $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$, $\{X_\nu\}_{\nu \in N}$ is a $\mathcal{T}_1$-covering of X if and only if $\{X_\nu\}_{\nu \in N}$ is a covering of X in the conventional sense: $X \subseteq \bigcup_{\nu \in N} X_\nu$. This yields the theorem on representability of an indirect utility by a direct utility ([179, Theorem 1]) as a particular case of Theorem 5:

Corollary 8. For an opportunity set value function $F : \mathcal{U} \to L$ to be representable by maximization of some utility function $\varphi : U \to L$ in the form of (1), it is necessary and sufficient that F satisfies the concordant monotonicity condition (**CM**): for each set $X \in \mathcal{U}$ and each family $\{X_\nu\}_{\nu\in N} \subseteq \mathcal{U}$ that covers X, the inequality $F(X) \leqslant \max_{\nu\in N} F(X_\nu)$ holds.

The constructive form of an underlying utility function is given in [179] as the *revealed utility*: for each $x \in U$,

$$\varphi_F(x) = \min_{Y:\, Y\in\mathcal{U},\, Y\ni x} F(Y). \tag{23}$$

In fact, (23) is a particular case of (6) with $\varphi_F(x) \equiv \Phi_F(\{x\})$.

Remark 3. The condition **CM** can be transformed and simplified when the family $\mathcal{U}$ obeys some specific requirements. In particular, such is the requirement of closedness of $\mathcal{U}$ under union (i.e., $\{X_\nu\}_{\nu\in N} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{\nu\in N} X_\nu \in \mathcal{U}$), or the requirement that all singletons $\{x\}$, $x \in U$, belong to $\mathcal{U}$. In particular, the case $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0$ where $\mathcal{U}^0 = 2^U \backslash \{\varnothing\}$, which is widely considered in the literature, is the (only) case that satisfies both these requirements. Some conditions that are equivalent to **CM** on specific classes of $\mathcal{U}$ families, and hence present the criteria for F on $\mathcal{U}$ to be representable in the form of (1), are given in Appendix II. One of them, valid for $\mathcal{U}$'s closed under union, requires that for any $X', X'' \in \mathcal{U}$ $F(X') \geqslant F(X'') \Rightarrow F(X' \bigcup X'') = F(X')$, and can be interpreted as an equivalent, in terms of set value functions, of the known Kreps axiom. This axiom is formulated in terms of a given weak ordering $\succsim$ of sets $X \in \mathcal{U}$ with $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0$ and characterizes those and only those weak orderings $\succsim$ for any of which there exists an underlying weak ordering $\geqslant$ of elements $x \in U$ such that the relation $\succsim$ between any two sets is determined by the relation $\geqslant$ between their $\geqslant$-maximal elements: $X \succsim Y \Leftrightarrow \max_{\geqslant} X \geqslant \max_{\geqslant} Y$ (or in other terms, $X \succsim Y \Leftrightarrow \exists x \in X \;\; \forall y \in Y : \; x \geqslant y \Leftrightarrow \forall y \in Y \; \exists x \in X : \; x \geqslant y$) — see [160, p.565-566]. Our result in fact extends the validity of the Kreps axiomatic characterization from the case $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0$ (where this characterization is easily proved) to the case of any $\mathcal{U}$'s closed under union. [1]

Case III. Let $\mathcal{T} = \mathcal{T}_2$ consist of all pairs of alternatives from U (including pairs of coinciding alternatives, i.e., in fact, singletons):

$$\mathcal{T}_2 = \{T \in U \,\big|\, 1 \leqslant |T| \leqslant 2\}. \tag{24}$$

Again, such $\mathcal{T}$ is obviously $\mathcal{U}$-dense for each $\mathcal{U} \subseteq 2^X \backslash \{\varnothing\}$. In addition, we assume here that $\mathcal{U}$ is such that $\mathcal{T}_2$ is $\mathcal{U}$-covered. Now we introduce

[1] I am indebted to the referee who has drawn my attention to the Kreps axiomatization by suggesting its equivalent formulation above in terms of value functions, i.e. functions F that measure orderings in the usual sense: $F(X) \geqslant F(Y) \Leftrightarrow X \succsim Y$, and thus interpreting this formulation as an axiomatization of conventional indirect utilities.

an auxiliary definition, which in particular will help us to describe such $\mathcal{U}$ explicitly. Let $\mathcal{X} = \{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$ be some family of sets, and $X \subseteq U$ — some set. We shall call $\mathcal{X}$ a *pair-covering* of X if

$$\forall\, x, y \in X \quad \exists\, \nu : \; X_\nu \ni x, y. \tag{25}$$

It is easy to see that $\mathcal{T}_2$ is $\mathcal{U}$-covered if and only if $\mathcal{U}$ is a pair-covering of U. Similarly, the statement that $\mathcal{X}$ is a $\mathcal{T}_2$-covering of X just means that $\mathcal{X}$ is a pair-covering of X. The representation (2) in the case of $\mathcal{T} = \mathcal{T}_2$ is reduced to the following: for each $X \in \mathcal{U}$,

$$F(X) = \max_{x,y \in X} f(x, y) \tag{26}$$

with some function $f : U \times U \to L$. In particular cases, $f(x, y)$ can have a sense of a "distance" between points x and y; in general, $f(x, y)$ can be an arbitrary symmetric ($f(x, y) \equiv f(y, x)$) ordinal-valued function (speaking loosely, a "pseudo-distance"). In any event, applying Theorem 5 to the case of $\mathcal{T} = \mathcal{T}_2$ and of $\mathcal{U}$ being a pair-covering of U allows us to obtain the following criterion for reducing $F(X)$ to $f(x, y)$ by (26):

Corollary 9. For a function $F : \mathcal{U} \to L$ (where $\mathcal{U}$ is a pair-covering of U) to be representable by maximization of some function $f : U \times U \to L$ in the "pseudo-distance" form (26), it is necessary and sufficient that F satisfies the *bi-concordant monotonicity* condition: for each $X \in \mathcal{U}$ and each $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$ which is a pair-covering of X, the inequality $F(X) \leqslant \max_{\nu \in N} F(X_\nu)$ holds.

The constructive form of an underlying "pseudo-distance" function is given by (6) as applied to this case:

$$f_F(x, y) = \min_{Y :\, Y \in \mathcal{U},\, Y \ni x, y} F(Y). \tag{27}$$

Thus, our construction and results about representability of indirect utility via hyper-utility are actual generalizations of those concerning representability via conventional utility.

Appendix I. On reducing generalized indirect utility to standard one

Herein, we describe formally two methods for reducing representation (2) to (1) with "surrogate" F's mentioned in Remark 1. Then, a scheme is reviewed whereby the condition **CM** — which presents a criterion of representability of F in the form of (1) — can be utilized to deduce the criteria of representability of the primary F in the form of (2), both with fixed and unfixed $\mathcal{T}$.

Assume the representation (2) is given.

First method. We replace

$$\begin{array}{rll} U & \text{by} & \overline{U} = 2^U, \\ X & \text{by} & \overline{X} = 2^X, \\ \mathcal{U} & \text{by} & \overline{\mathcal{U}} = \{2^X | X \in \mathcal{U}\}, \\ F : \mathcal{U} \to L & \text{by} & \overline{F} : \overline{\mathcal{U}} \to L, \quad \text{where} \end{array}$$

$$\overline{F}(2^X) \equiv F(X), \tag{28}$$

$$\Phi : \mathcal{T} \to L \quad \text{by} \quad \overline{\varphi}_{\mathcal{T}} : \overline{U} \to L, \quad \text{where}$$

$$\overline{\varphi}_{\mathcal{T}}(S) = \begin{cases} \Phi(S), & S \in \mathcal{T}, \\ \gamma, & S \notin \mathcal{T}, \end{cases} \tag{29}$$

with $\gamma = \min_{T \in \mathcal{T}} \Phi(T)$.

Then the representation (2) can be rewritten as

$$\overline{F}(\overline{X}) = \max_{S \in \overline{X}} \overline{\varphi}_{\mathcal{T}}(S) \tag{30}$$

which has the form of (1), with $\overline{\varphi}_{\mathcal{T}}$ playing the role of a conventional direct utility (depending on $\mathcal{T}$ as a parameter).

Second method. We replace

$$\begin{array}{rll} U & \text{by} & \widehat{U}_{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \subseteq 2^U, \\ X & \text{by} & \widehat{X}_{\mathcal{T}} = 2^X \cap \mathcal{T}, \\ \mathcal{U} & \text{by} & \widehat{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}} = \{2^X \cap \mathcal{T} | X \in \mathcal{U}\}, \\ F : \mathcal{U} \to L & \text{by} & \widehat{F}_{\mathcal{T}} : \widehat{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}} \to L, \quad \text{where} \end{array}$$

$$\widehat{F}_{\mathcal{T}}(2^X \cap \mathcal{T}) \equiv F(X), \tag{31}$$

$$\Phi : \mathcal{T} \to L \quad \text{by} \quad \widehat{\varphi}_{\mathcal{T}} : \widehat{U}_{\mathcal{T}} \to L, \quad \text{where}$$

$$\widehat{\varphi}_{\mathcal{T}}(T) \equiv \Phi(T). \tag{32}$$

Then the representation (2) can be rewritten as

$$\widehat{F}_{\mathcal{T}}(\widehat{X}_{\mathcal{T}}) = \max_{T \in \widehat{X}_{\mathcal{T}}} \widehat{\varphi}_{\mathcal{T}}(T) \tag{33}$$

which again has the form of (1) with the dependence on $\mathcal{T}$ as a parameter.

Note that in this method, for $\widehat{F}_{\mathcal{T}}$ to be well defined it is required that for each $X', X'' \in \mathcal{U}$

$$2^{X'} \cap \mathcal{T} = 2^{X''} \cap \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad F(X') = F(X''). \tag{34}$$

Thus, we have two methods of reducing the representation (2) of F to the representation in the form of (1), namely, to the representation (30) of $\overline{F}$ or to (33) for $\widehat{F}_{\mathcal{T}}$. Consider now the use of these methods for deducing criteria (necessary and sufficient conditions) of representability in the form of (2) from **CM**, which is the criterion of representability in the form of (1). Recall that above, when dealing with representations (2), we have differed two settings: representability with a g i v e n (preassigned) $\mathcal{T}$ and representability with s o m e (arbitrary) $\mathcal{T}$. We will now consider these two settings in turn.

Let first $\mathcal{T} \subseteq 2^U$ be a given fixed family. Let us use the second method, reducing (2) to (33) under the assumption (34). The existence of some arbitrary mapping $\Phi : \mathcal{T} \to L$ satisfying (2) is equivalent (due to (32)) to the existence of some arbitrary mapping $\varphi : \widehat{U}_{\mathcal{T}} \to L$ satisfying (33) in the role of $\widehat{\varphi}_{\mathcal{T}}$. Applying the condition **CM** to the latter problem, we find that for the existence of such $\widehat{\varphi}_{\mathcal{T}}$ it is necessary and sufficient that for each $\widehat{X}_{\mathcal{T}} \in \widehat{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$ and each $\{\widehat{X}_{\mathcal{T},\nu}\}_{\nu\in N} \subseteq \widehat{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$ such that

$$\widehat{X}_{\mathcal{T}} \subseteq \bigcup_{\nu\in N} \widehat{X}_{\mathcal{T},\nu}, \tag{35}$$

the relation

$$\widehat{F}_{\mathcal{T}}(\widehat{X}_{\mathcal{T}}) \leqslant \max_{\nu\in N} \widehat{F}_{\mathcal{T}}(\widehat{X}_{\mathcal{T},\nu}) \tag{36}$$

must take place. It is left to the reader to verify that applying the covering requirement (35) (which is the premise of **CM**) to $\widehat{F}_{\mathcal{T}}$ is equivalent to applying the $\mathcal{T}$-covering requirement (15) (which is the premise of $\mathcal{T}$-**CM**) to F, where $\widehat{F}_{\mathcal{T}}$ and F are related by (31). Similarly, the conclusive relation (36) in **CM** for $\widehat{F}_{\mathcal{T}}$ is equivalent to (16) in $\mathcal{T}$-**CM** for F. This implies that $\mathcal{T}$-**CM** is the necessary and sufficient condition for F to be representable in the form of (2) with the given $\mathcal{T}$, provided the requirement (34) is fulfilled. Furthermore, it is easy to verify that the fulfilment of (34) follows both from the condition $\mathcal{T}$-**CM** and from the representation (2). Thus, it is deduced on the base of **CM** without any additional assumptions that $\mathcal{T}$-**CM** is necessary and sufficient for representability of F in the form of (2) with the g i v e n $\mathcal{T}$ (which is Theorem 5).

Now let $\mathcal{T} \subseteq 2^U$ in the representation (2) be an arbitrarily varied parameter that is being sought. The criterion of existence of such a representation for F with s o m e $\mathcal{T}$ can be deduced from **CM** as well. To this end, let us make use of the first method, reducing (2) to (30) with $\overline{F}$ and $\overline{\varphi}_{\mathcal{T}}$ given by (28) and (29). It is easy to see that an arbitrary mapping $\varphi : \overline{U} \to L$ can be always represented as $\widehat{\varphi}_{\mathcal{T}}$ (29) with some Φ and $\mathcal{T}$. Therefore, the existence of a representation (2) for the given F with some arbitrary Φ and $\mathcal{T}$ is equivalent to the existence of a representation (30) for the corresponding $\overline{F}$ with some arbitrary $\varphi : \overline{U} \to L$ in the role of $\overline{\varphi}_{\mathcal{T}}$. Hence, the criterion **CM** is applicable to $\overline{F}$. It is left to the reader to verify that the concordant monotonicity (**CM**) of $\overline{F}$ is equivalent to the monotonicity (**M**) of F. Thereby, **M** is deduced to be a necessary and sufficient condition for representability of F in the form of (2) with s o m e $\mathcal{T}$ (which is Theorem 1).

We demonstrated the procedures that directly infer Theorems 1 and 5, i.e., the criteria **M** and $\mathcal{T}$-**CM** for F, from the criterion **CM** for the corresponding "surrogate" function ($\overline{F}$ or $\widehat{F}_{\mathcal{T}}$). These procedures turned out to be technically complicated (especially for the simple Theorem 1) in spite of simplicity of the central idea, which is to consider alternative bundles as entire alternatives making the former hyper-utility a usual utility and the former generalized indirect utility a standard indirect utility. Note in conclusion that the same approach will be more productive if we deduce Theorem 2, the criterion of representability on the basis of revealed hyper-utility, from the corresponding criterion on the base of revealed conventional utility (Theorem 15 in [175] or Theorem 3 in [179], in a little different terms). It is easy to verify that the revealed utility φ_F (23) for both $\overline{F}$ and $\widehat{F}_{\mathcal{T}}$ in the role of F coincides with the revealed hyper-utility Φ_F (6) for the primary F.

Appendix II. More on conventional indirect utility

In what follows, we discuss several specific criteria (necessary and sufficient conditions) of representability of F in the form of standard indirect utility (1).

Let us start with the *concordant monotonicity* (**CM**) condition: for each $X \in \mathcal{U}$ and each $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$ such that

$$X \subseteq \bigcup_{\nu \in N} X_\nu, \tag{37}$$

the relation

$$F(X) \leqslant \max_{\nu \in N} F(X_\nu) \tag{38}$$

holds. As stated above in Corollary 8 (and earlier in [175, Theorem 20] and [179, Theorem 1]), **CM** is the universal (i.e. valid with any $\mathcal{U}$) criterion of representability of F on $\mathcal{U}$ in the form of (1). Let $\mathcal{U}$ be a set family closed under union. Then it is easily shown (see, in a little different terms, [175, Proposition 10], or [179, Lemma 1]) that **CM** can be decomposed into the conjunction **M&C** of two conditions: *monotonicity* (**M**) defined above by (5), and *concordance* (**C**), which is obtained from **CM** when (37) is replaced by the identity

$$X = \bigcup_{\nu \in N} X_\nu. \tag{39}$$

More precisely, with $\mathcal{U}$ closed under union we have **CM**⇔**M**&**C**, and with an arbitrary $\mathcal{U}$ we have **CM**⇒**M**&**C**, but the converse implication is in general not true: **CM** is stronger than **M**&**C**. Therefore, **M**&**C** is the necessary and sufficient condition for F to be representable in the form of (1) in the case of $\mathcal{U}$ closed under union, but only a necessary condition in the general case of an arbitrary $\mathcal{U}$.

Note now that the concordance condition can be rewritten in the form of an equivalent single relation rather than the pair (38)&(39), namely: for each $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$

$$F\left(\bigcup_{\nu \in N} X_\nu\right) \leqslant \max_{\nu \in N} F(X_\nu). \tag{40}$$

Moreover, with $\mathcal{U}$ closed under union, the condition **C** can be reduced to the following condition **C2**: for each $X', X'' \in \mathcal{U}$,

$$F(X' \cup X'') \leqslant \max\{F(X'), F(X'')\}. \tag{41}$$

The condition **C2** is apparently a particular case of **C** but with $\mathcal{U}$ closed under union. **C2** is in fact equivalent to **C** (which is easily proved by induction).

Now return to the monotonicity condition. First note that **M** can be rewritten in a form that is somewhat complex but symmetric with respect to **C**: for each $X \in \mathcal{U}$ and each $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$ such that (39) is satisfied, the relation

$$F(X) \geqslant \max_{\nu \in N} F(X_\nu) \tag{42}$$

holds, or equivalently: for each $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \subseteq \mathcal{U}$

$$F\left(\bigcup_{\nu \in N} X_\nu\right) \geqslant \max_{\nu \in N} F(X_\nu). \tag{43}$$

Again, with $\mathcal{U}$ closed under union, it is easy to see that the condition **M** in the form of (43) is equivalent to its simplified version **M2** (a counterpart of **C2**): for each $X', X'' \in \mathcal{U}$,

$$F(X' \cup X'') \geqslant \max\{F(X'), F(X'')\}. \tag{44}$$

The modified forms of **M** presented as (39)&(42), or, equivalently, as (43), or, with $\mathcal{U}$ closed under union, even as (44), are convenient to rewrite the conjunction **M**&**C** in a simplified form of two equations, or even more simply, as only one equation. Indeed, **M**&**C** is equivalent to [(39)&(42)]&[(39)&(38)], and since (42)&(38) is equivalent to the identity

$$F(X) = \max_{\nu \in N} F(X_\nu), \tag{45}$$

M&**C** is equivalent to (39)&(45). Furthermore, the latter is equivalent to the single equation: for each $\{X_\nu\}_{\nu \in N} \in \mathcal{U}$,

$$F\left(\bigcup_{\nu \in N} X_\nu\right) = \max_{\nu \in N} F(X_\nu), \tag{46}$$

which can be also obtained directly as the conjunction (40)&(43). The equivalent formulation (46) of the conjunction **M**&**C** in [175] is called the *aggregability* condition (**A**), so **A**⇔**M**&**C**. With $\mathcal{U}$ closed under union, the condition **A** can be represented in an equivalent simplified form **A2**: for each $X', X'' \in \mathcal{U}$,

$$F(X' \cup X'') = \max\{F(X'), F(X'')\}, \tag{47}$$

which can be also obtained as the conjunction (41)&(44), i.e., **A2**⇔ **M2**&**C2**.

Summing up the discussion, we find that the condition **A** is necessary and sufficient for F to be representable in the form of (1) with $\mathcal{U}$ closed under union, but in general only necessary with an arbitrary $\mathcal{U}$. Moreover, with $\mathcal{U}$ closed under union the simplified condition **A2** is proven to be necessary and sufficient for F to be representable in the form of (1). Finally, note that **A2** can be rewritten in the following equivalent form: for each $X', X'' \in \mathcal{U}$,

$$F(X') \geqslant F(X'') \quad \Rightarrow \quad F(X' \cup X'') = F(X'), \tag{48}$$

which is precisely the functional form of the Kreps axiom, see Remark 3. Therefore, we showed that such a version of the Kreps axiom is in fact a criterion of representability of F in the indirect utility form of (1) in the case of any $\mathcal{U}$ closed under union (which includes Kreps' assumption $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0$ as a particular case).

Still another particular case of $\mathcal{U}$ families worth mentioning here is the case of 1-*complete* families defined as those that contain all singletons $\{x\},\ x \in U$. It has been shown in [175, Theorem 18] (though in other terms) that with any 1-complete family $\mathcal{U}$, **M**&**C** (and hence **A**) is necessary and sufficient for F to be representable in the form of (1). Moreover, it is easy to see that with 1-complete $\mathcal{U}$, the condition **A** is equivalent to its following simplified form **A1**: for each $X \in \mathcal{U}$,

$$F(X) = \max_{x \in X} F(\{x\}), \tag{49}$$

which directly yields the sought representation (1) for F where $\varphi(x) \equiv F(\{x\})$, and at the same time is a particular case of representation (2) for F with $\mathcal{T} = \{\{t\}\}_{t \in U}$ and $\Phi(T) \equiv F(T)$ on $\mathcal{T}$ (where $T = \{t\},\ t \in U$). (The latter is just a degenerate case of the representation via hyper-utility, see Section 3, Case II.) Recall that the standard family $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0$ is both closed under union and 1-complete, and so the problem of representability in the form of (1) for F on $\mathcal{U}^0$ can be always resolved in a trivial way, by directly verifying the identity (49).

Список литературы [1]

1. *Айгнер М.* Комбинаторная теория.—М.: Мир, 1982.
2. *Айзерман М.А.* Некоторые новые задачи общей теории выбора (обзор одного направления исследований) // Автоматика и телемеханика.—1984.—№9.
3. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Выбор вариантов (основы теории).—М.: Наука, 1989.
4. *Айзерман М.А., Гусев Л.А., Розоноэр Л.И. и др.* Логика. Автоматы. Алгоритмы.—М.: Наука, 1963.
5. **Айзерман М.А., Малишевский А.В.* Структурные свойства в теории выбора вариантов // VII Всес. сов. по проблемам управления. Тезисы докладов, кн.2.—М.; Минск: ВИНИТИ, 1977.
6. *Айзерман М.А., Малишевский А.В.* Проблемы логического обоснования в общей теории выбора. Общая модель выбора и его классически-рациональные основания.—М.: Институт проблем управления, 1980.
7. **Айзерман М.А., Малишевский А.В.* Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов // Автоматика и телемеханика.—1981.—№2.
8. *Айзерман М.А., Малишевский А.В.* Проблемы логического обоснования в общей теории выбора. Уровни и критерии классической рациональности выбора.—М.: Институт проблем управления, 1982.
9. *Айзерман М.А., Малишевский А.В.* Проблемы логического обоснования в общей теории выбора. Примеры анализа рациональности механизмов выбора.—М.: Институт проблем управления, 1982.
10. *Айзерман М.А., Малишевский А.В.* Условия рациональности параллельно-последовательного (многоступенчатого) многокритериального выбора // Межд. конф. «Многокритериальные задачи математического программирования».—Киев: Наукова думка, 1988.
11. *Аллен Р.* Математическая экономия.—М.: Мир, 1963.
12. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости.—М.: Наука, 1967.
13. *Барзилович Е.Ю., Воскобоев В.Ф.* О марковских задачах профилактики стареющих систем // Автоматика и телемеханика.—1967.—№12.
14. *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией.—М.: Мир, 1964.
15. *Вайсборд Э.М., Розенштейн Г.Ш.* О времени «жизни» стохастических автоматов // Техническая кибернетика.—1965.—№4.
16. *Варшавский В.И., Мелешина М.В., Перекрест В.Т.* Использование модели коллективного поведения в задаче распределения ресурсов // Автоматика и телемеханика.—1969.—№7.
17. *Вознесенский И.Н.* О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров // Автоматика и телемеханика.—1938.—№4.
18. *Волконский В.А.* Оптимальное планирование в условиях большой размерности // Экономика и матем. методы.—1965.—Т. I, вып. 2.

[1] Звездочками отмечены работы *А.В. Малишевского*, вошедшие в настоящее издание. В список литературы включены также английские версии работ *А.В. Малишевского* в журнале Automation and Remote Control (английский перевод журнала «Автоматика и телемеханика»).

19. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц.—М.: Наука, 1966.
20. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей.—М.: Мир, 1960.
21. *Гюйбо Д.Т.* Теории общего интереса и логическая проблема агрегирования. Математические методы в социальных науках.—М.: Прогресс, 1973.
22. *Данилов В.И.* Модели группового выбора (обзор) // Известия АН СССР. Техн. кибернетика.—1983.—№1.
23. *Данилов В.И., Сотсков А.И.* Механизмы группового выбора.—М.: Наука, 1991.
24. *Деннис Дж.Б.* Математическое программирование и электрические цепи.—М.: Мир, 1961.
25. *Джини К.* Средние величины.—М.: Статистика, 1970.
26. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике.—М.: Мир, 1964.
27. *Кон П.* Универсальная алгебра.—М.: Мир, 1968.
28. *Котюжанский Р.А., Нисневич Л.Б.* Средняя продолжительность обслуживания в классе приоритетов // Автоматика и телемеханика.—1969.—№10.
29. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре.—М.: Наука, 1973.
30. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика.—М.: Наука, 1964.
31. *Ляпин Е.С.* Полугруппы.—М.: Наука, 1960.
32. *Макаров В.Л.* Асимптотика решений линейных динамических моделей экономических систем с дискретным временем // Докл. АН СССР.—1965.—Т. 165.—№4.
33. *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр.—М.: Мир, 1960.
34. **Малишевский А.В., Тенисберг Ю.Д.* Один класс игр, связанный с моделями коллективного поведения // Автоматика и телемеханика.—1969.—№11.
35. **Малишевский А.В.* О понятии «состояния» динамической системы // Автоматика и телемеханика.—1970.—№3.
36. **Малишевский А.В.* Некоторые глобальные оценки цепных систем. I // Автоматика и телемеханика.— 1970.—№4.
37. **Малишевский А.В.* Некоторые глобальные оценки цепных систем. II // Автоматика и телемеханика.—1970.—№5.
38. *Малишевский А.В.* Оценка надежности неавтономных конечных автоматов // Автоматика и телемеханика.—1970.—№6.
39. *Малишевский А.В.* Некоторые задачи упрощенного описания и анализа цепных динамических систем.—М.: Институт проблем управления, 1970.
40. **Малишевский А.В., Розоноэр Л.И.* Модель хаотического обмена ресурсами и аналогии между термодинамикой и экономикой // V Всес. сов. по проблемам управления. Рефераты докладов.—М.: ВИНИТИ, 1971.
41. **Малишевский А.В.* Модели совместного функционирования многих целенаправленных элементов. I // Автоматика и телемеханика.—1972.—№11.
42. **Малишевский А.В.* Модели совместного функционирования многих целенаправленных элементов. II // Автоматика и телемеханика.—1972.—№12.

43. **Малишевский А.В.* Взаимодействие элементов в системах с распределением ответственности // Проблемы планирования и управления экономическими целенаправленными системами.—Новосибирск: ИЭОПП СО АН СССР, 1972.
44. **Малишевский А.В.* Натуральные системы // Автоматика и телемеханика.—1973.—№11.
45. **Малишевский А.В.* Равновесные решения и их реализация в задаче о распределении дискретных объектов // VI Всес. сов. по проблемам управления. Рефераты докладов, ч.II.—М.: ВНИИСИ, 1974.
46. **Малишевский А.В.* Логический анализ абстрактной модели выбора // VIII Всес. сов. по проблемам управления. Тезисы докладов, кн.2.—М.; Таллин: ВНИИСИ, 1980.
47. **Малишевский А.В.* Критерии классической рациональности выбора // I Всес. сов. по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации, экспертным оценкам и дискретной оптимизации. Тезисы докладов.—М.; Алма-Ата: ВНИИСИ, 1981.
48. **Малишевский А.В.* Выбор на базе контекстно-зависимых парных сравнений // Всес. конф. «Нечисловая статистика, экспертные оценки и смежные вопросы». Тезисы докладов.—М.; Таллин: ВНИИСИ, 1984.—С. 232–233.
49. **Малишевский А.В.* Свойство бесконфликтности в системах упорядоченных разбиений // Анализ данных и экспертные оценки в организационных системах.—М.: Институт проблем управления, 1985.
50. **Малишевский А.В.* Сохранение рациональности в двухступенчатых механизмах оптимального выбора // Анализ данных и экспертные оценки в организационных системах.—М.: Институт проблем управления, 1985.
51. **Малишевский А.В.* О свойствах порядковых функций множеств // Всес. семинар по оптимизации и ее приложениям. Тезисы докладов.—М.: ВНИИСИ, 1986.
52. **Малишевский А.В.* Комбинаторная модель причинных связей // Методы и алгоритмы анализа эмпирических данных.—М.: Институт проблем управления, 1988.
53. **Малишевский А.В.* Характеризация иерархии уровней рациональности в терминах функций выбора // III Всес. школа–семинар «Комбинаторно-статистические методы анализа и обработки информации, экспертное оценивание». Тезисы докладов.—Одесса: ОДПИ, 1990.
54. **Малишевский А.В.* Упорядоченность для гиперотношений в модели множественных связей // III Всес. школа–семинар «Комбинаторно-статистические методы анализа и обработки информации, экспертное оценивание». Тезисы докладов.—Одесса: ОДПИ, 1990.
55. **Малишевский А.В.* О рациональности выбора из субъективных альтернатив // Материалы IV Всес. школы–семинара «Статистический и дискретный анализ данных и экспертное оценивание».—Одесса: ОДПИ, 1991.
56. **Малишевский А.В.* Об упорядочении в структуре множественных связей // Методы сбора и анализа сложноорганизованных данных.—М.: Инсти-

тут проблем управления, 1991.
57. *Малишевский А.В.* Разработка и исследование метода множественных свойств и отношений в качественной теории принятия решений.—М.: Институт проблем управления, 1995.
58. *Малишевский А.В.* Разложение монотонных порядковых оценок множеств возможностей. Управление большими системами. Материалы международной научно-практической конференции.—М.: СИНТЕГ, 1997.
59. *Малишевский А.В.* Агрегирование согласованных признаков и латентная иерархия элементов // Автоматика и телемеханика.—1997.—№10.
60. **Малишевский А.В.* Комбинаторные механизмы порождения семейств хорошо организованных множеств // Автоматика и телемеханика.—1997.—№11.
61. *Мееров М.В.* Системы многосвязного регулирования.—М.: Наука, 1965.
62. *Миркин Б.Г.* Задача аппроксимации в пространстве отношений и анализ нечисловых признаков // Автоматика и телемеханика.—1974.—№9.
63. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора.—М.: Наука, 1974. Англ. изд.: *Mirkin B.G.* Group Choice.—New York: Wiley, 1979.
64. *Миркин Б.Г.* Анализ качественных признаков и структур.—М.: Статистика, 1978.
65. *Муллат И.Э.* Экстремальные подсистемы монотонных систем. I, II // Автоматика и телемеханика.—1976.—№5, 8.
66. *Нисневич Л.Б., Стецюра Г.Г.* Децентрализованное управление взаимодействием потребителей в одноступенчатых системах распределения потока ресурса. I, II // Автоматика и телемеханика.—1972.—№5, 6.
67. *Оуэн Г.* Теория игр.—М.: Мир, 1971.
68. *Питтель Б.Г.* Одна простейшая вероятностная модель коллективного поведения // Проблемы передачи информации.—1967.—Т. 3.—Вып. 3.
69. *Плоткин А.А.* Иерархические системы подмножеств // Автоматика и телемеханика.—1981.—№5.
70. *Плоткин А.А.* Исследование структуры систем подмножеств // Экспертные оценки в задачах управления.—М.: Институт проблем управления, 1982.
71. *Половинкин А.И. и др.* Автоматизация поискового конструирования.—М.: Наука, 1981.
72. *Понтрягин Л.С.* Основы комбинаторной топологии.—М.: Наука, 1957.
73. *Пчелинцев Л.А.* Поиск неисправности как поглощающая марковская цепь // Техническая кибернетика.—1964.—№6.
74. *Разумихин Б.С.* Итерационный метод решения и декомпозиции задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика.—1967.—№3.
75. *Романовский И.В.* Оптимизация стационарного управления дискретным процессом // Кибернетика.—1967.—№2.
76. *Солтан В.П.* Введение в аксиоматическую теорию выпуклости.—Кишинев: Штиинца, 1984.
77. *Стефанюк В.Л., Цетлин М.Л.* О регулировке мощности в коллективе радиостанций // Проблемы передачи информации.—1967.—Т. 3.—Вып. 4.

78. *Таккер А.У.* Двойственные системы однородных линейных соотношений // Линейные неравенства и смежные вопросы. / Под ред. Г.У. Куна и А.У. Таккера.—М.: ИЛ, 1959.
79. *Тенисберг Ю.Д.* Некоторые модели коллективного поведения в динамических процессах формирования рыночных цен // Автоматика и телемеханика.—1969.—№7.
80. *Фон Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение.—М.: Наука, 1970.
81. *Харари Ф.* Теория графов.—М.: Мир, 1973.
82. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок.—М.: Наука, 1971.
83. *Abonyi G.* Filtering: An approach to generating the information base for collective choice // Manag. Sci.—1983.—V. 29.—No. 4.
84. *Aizerman M.A.* New problems in the general choice theory // Social Choice and Welfare.—1985.—V. 2, №2.—P. 235–282.
85. *Aizerman M.A., Malishevski A.V.* Choice of best variants: some aspects of general theory.—Moscow: Institute of Control Sciences, 1980.
86. *Aizerman M.A., Malishevski A.V.* Problems of logical justification in general choice theory. A general model of choice and its classically rational foundations.—Moscow: Institute of Control Sciences, 1980.
87. *Aizerman M.A., Malishevski A.V.* General theory of best variants choice: some aspects // IEEE Trans. Automatic Control.—1981.—V. AC-26.—No. 5.—P. 1030–1041.
88. *Aizerman M.A., Malishevski A.V.* Some aspects of the general theory of best option choice. Part 1 // Automation and Remote Control.—1981.—V.42.—№2.
89. *Aizerman M.A., Malishevski A.V.* Structural properties in the theory of variants choice // Large Scale Systems: Theory and Applications. Proceedings of 2nd IFAC Symposium.—Toulouse: Oxford Press, 1981.
90. **Aizerman M.A., Malishevski A.V.* Conditions for universal reducibility of a two-stage extremization problem to a one-stage problem // J. Math. Analysis and Applications.—1986—V. 119.—No. 1/2.—P. 361–388.
91. *Aleskerov F.T.* Voting models in the Arrovian framework // Social Choice Re-examined. V. 1 / Eds. K.J.Arrow, A.Sen and K.Suzumura.—New York: Macmillan and St. Martin's Press, 1997.
92. *Aleskerov F.T., Vladimirov A.V.* Hierarchical voting // Information Science.—1986.—V. 39.—No. 1.—P. 41–86.
93. *Armstrong T.E.* Hierarchical Arrow social welfare functions // Economic Theory.—1992.—V. 2, №1.—P. 27–41.
94. *Arrow K.J.* Rational choice functions and orderings // Economica.—1959.—V.26, №102.—P. 121–127.
95. *Arrow K.J.* Social Choice and Individual Values.—New York: Wiley, 1963.
96. *Ausiello G., D'Atri A., Sacce D.* Minimal representation of directed hypergraphs // SIAM J. on Computations.—1986.—V. 15.—No. 2.
97. *Bandyopadhyay T.* Rationality, path independence and the power structure // J. Econ. Theory.—1986.—V. 40.—P. 338–348.

98. *Bandyopadhyay T.* Revealed preference theory, ordering and axiom of sequential path independence // Rev. Econom. Studies.—1988.—V. 55.—P. 343–351.
99. *Bandyopadhyay T.* Sequential path independence and social choice // Social Choice and Welfare.—1990.—V. 7.—P. 209–220.
100. *Barbera S.* Pivotal voters. A new proof of Arrow's theorem // Economic Letters.—1980.—V. 6.—No. 1.—P. 13–16.
101. *Barbera S., Barret C.R., Pattanaik P.K.* On some axioms for ranking sets of alternatives // J. Econ. Theory.—1984.—V. 33.—P. 301–308.
102. *Barbera S., Sonnenschein H., Zhou L.* Voting by committees // Econometrica.—1991.—V. 59, №3.—P. 595–610.
103. *Bartoszynski R.* Power structure in dichotomous voting // Econometrica.—1972.—V. 40.—P. 1003–1019.
104. *Birkhoff G.* Lattice Theory.—Providence, R.I.: AMS, 1967. Русский пер: *Биркгоф Г.* Теория решеток.—М.: Наука, 1984.
105. *Blair D.H.* Path-independent social choice functions: A further result // Econometrica.—1975.—V. 43.—P. 173–174.
106. *Blair D.H., Bordes G., Kelly J.S., Suzumura K.* Impossibility theorems without collective rationality // J. Econ. Theory.—1976.—V. 13.—No. 3.—P. 361–379.
107. *Blau J.H., Deb R.* Social decision functions and the veto // Econometrica.—1977.—V. 45.—P. 871–879.
108. *Bloomfield S.D.* A social choice interpretation of the von Neumann–Morgenstern game // Econometrica.—1976.—V. 44, №1.—P. 105–114.
109. *Bordes G.* Some more results on consistency, rationality and collective choice // Aggregation and Revelation of Preferences. / Ed. J.-J. Laffont. —Amsterdam: North-Holland, 1979.
110. *Bordes G.* Consistency, rationality and collective choice // Rev. Econ. Stud.—1976.—V.43.—No. 3.—P. 451–457.
111. *Bordes G.A., Le Breton M.* Arrovian theorems with private alternatives domains and selfish individuals // J. Econ. Theory.—1989.—V. 47.—P. 257–281.
112. *Bossert W.* On the extension of preferences over a set to the power set: an axiomatic characterization of a quasi-ordering // J. Econ. Theory.—1989.—V. 49, pp. 84–92.
113. *Bossert W., Pattanaik P.K., Xu Y.* Ranking opportunity sets: An axiomatic approach // J. Econ. Theory.—1994.—V. 63.—P. 326–345.
114. *Braverman E.M.* Model of consumer choice with fixed prices // Automation and Remote Control.—1976.—V. 37.—P. 729–740.
115. *Brown D.J.* Aggregation of preferences // Quarterly J. Economics.—1975.—V. 89.—P. 456–469.
116. *Campbell D.E.* Democratic preference functions // J. Econ. Theory.—1976.—V. 12.—P. 259–272.
117. *Campbell D.E.* Realization of choice function // Econometrica.—1978.—V. 46.—P. 171–180.
118. Campbell D.E. Rationality from a computational standpoint // Theory and Decision.—1978.—V. 9.—P. 255–266.

119. *Campbell D.* Equity, Efficiency, and Social Choice.—Oxford: Clarendon Press, 1992.
120. *Carreras F., Freixas J.* Complete simple games // Math. Social Sci.—1996.—V. 32.—No. 2.—P. 139–155.
121. *Chernoff H.* Rational selection of decision functions // Economica.—1954.—V. 22.—No. 3.—P. 422–443.
122. *Corbin E., Marley A.A.J.* Random utility models with equality: an apparent, but not actual, generalization of random utility models // J. Math. Psychol.—1974.—V. 11.—P. 274–293.
123. *Cover J.A.* Causal priority and causal conditionship // Synthese.—1987.—V. 71.—P. 19–36.
124. *Danilov V.I.* Aggregation of dichotomic preferences // Math. Social Sci.—1987.—V. 13.—P. 49–58.
125. *Debord B.* An axiomatic characterization of Borda's k-choice function // Social Choice and Welfare.—1992.—V. 9.—P. 337–343.
126. *Derman C.* On sequential decisions and Markov chains // Manag. Sci.—1965.—V. 9.—No. 1.
127. *Dietrich B.L.* Matroids and antimatroids — a survey // Discrete Mathematics.—1989.—V. 78.—№3.—P. 223–237.
128. *Dushnik B., Miller E.W.* Partially ordered sets // J. Math.—1941.—V. 63.—P. 600–610.
129. *Eaton I.H., Zadeh L.A.* Optimal pursuit strategies in discrete-state probabilistic systems // Trans. ASME, ser. D: J. Basic Engng.—1962.—V. 84.—No. 1.
130. *Edmonds J., Fulkerson D.R.* Bottleneck extrema // J. Combinatorial Theory.—1970.—V. 8.—No. 3.—P. 299–306.
131. *Ferejohn J.A.* Decisive coalitions in the theory of social choice // J. Econ. Theory.—1977.—V. 15, №2.—P. 301–306.
132. *Ferejohn J.A., Grether D.M.* Weak path independence // J. Econ. Theory.—1977.—V. 14.—No. 1.—P. 19–31.
133. *Ferejohn J.A., Fishburn P.C.* Representations of binary decision rules by generalized decision structures // J. Econ. Theory.—1979.—V. 21.—No. 1.—P. 28–45.
134. *Fishburn P.C.* Utility theory for decision making.—New-York: Wiley, 1970. Русский пер.: *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978.
135. *Fishburn P.C.* Should social choice be based on binary comparisons? // J. Math. Soc.—1971.—V. 1, №1.—P. 133–142.
136. *Fishburn P.C.* The Theory of Social Choice.—Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1973.
137. *Fishburn P.C.* Axioms for lexicographic preferences // Rev. Econom. Stud.—1975.—V. 42.—No. 3.—P. 415–419.
138. *Fishburn P.C.* Semiorders and choice functions // Econometrica.— 1975.—V. 43.—No. 5-6.—P. 975–977.
139. *Guha A.S.* Neutrality, monotonicity, and the right of veto // Econometrica.—1972.—V. 40.—No. 5.—P. 821–826.

140. *Guilbaud G.T.* Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation // Économie Appliquée.—1952.—V. 5.—P. 501–584. English translation: The theories of the general interest and the logical problem of aggregation // Readings in Mathematical Social Sciences / Ed. Lazarfield H.—Chicago: Science Research Associates Inc., 1966.
141. *Hansson B.* Choice structures and preference relations // Synthese.—1968.—V. 18.—P. 443–458.
142. *Hansson B.* The independence condition in the theory of social choice // Theory and Decision.— 1973.—V. 4.—P. 25–49.
143. *Harsanyi J.C.* An equilibrium-point interpretation of stable sets and a proposed alternative definition // Manag. Sci.—1974.—V. 20.—No. 11.—P. 1472–1495.
144. *Holland P.W.* Statistics and causal inference // J. Amer. Stat. Assoc.—1986.—V. 81.—P. 945-960. Comments P. 961–970.
145. *Houthakker H.S.* Revealed preference and the utility function // Economica.—1950.—V. 17.—P. 159–174.
146. *Jamison D.T., Law L.J.* Semiorders and the theory of choice // Econometrica.—1973.—V. 41.—No. 5.—P. 901–912.
147. *Johnson M.R.* Information, associativity, and choice requirements // J. Econ. Theory.—1990.— V. 52.—P. 440–452.
148. *Kalai E., Megiddo N.* Path independence choices // Econometrica.—1980.—V. 48.—P. 781–784.
149. *Kannai Y, Peleg B.* A note on the extension of an order on a set to the power set // J. Economic Theory.—1984.—V. 32.—P. 172–175.
150. *Karamardian S.* Existence of solutions of certain systems of non-linear inequalities // Numerische Mathematik.—1968.—V. B12.—No. 4.
151. *Karamardian S.* The nonlinear complementary problem with applications // J. Optimization Theory and Applications.—1969.—V. 4, №2.—P. 1–2.
152. *Karni E., Schmeidler D.* Independence of irrelevant alternatives and independence of nonoptimal alternatives // J. Econ. Theory.—1976.—V. 12.—P. 488–493.
153. *Kelly J.S.* The Sertel and Van der Bellen problems // Math. Social Sci.—1984.—V. 8.—P. 287–290.
154. *Kelsey D.* The structure of social decision functions // Math. Social Sci.—1984.—V. 8.—P. 241–252.
155. *Kelsey D.* Acyclic choice and group veto // Social Choice and Welfare.—1985.—V. 2.—P. 131–137.
156. *Kershaw J.A., McKean R.N.* Systems analysis and education // Memo. RM-2473-FF. RAND Corporation, Santa Monica, California, 1959.
157. *Kim K.H., Roush F.W.* Preferences on subsets // J. Math. Psych.—1980.—V. 21.—No. 3.—P. 279–282.
158. *Klemisch-Ahlert M.* Freedom of choice. A comparison of different rankings of opportunity sets // Social Choice and Welfare.—1993.—V. 10.—P. 189–207.
159. *Krause U.* Essentially lexicographic aggregation // Social Choice and Welfare.—1995.—V. 12.—No. 3.—P. 233–244.

160. *Kreps D.M.* A representation theorem for "preference for flexibility" // Econometrica.—1979.—V. 47.—P. 565–577.
161. *Lichnerowicz M.* Un modéle d'échange économique // Annales de l'Institut Henri Poincaré.—1970.—V.6.—№2.—Section B.—P.159–200.
162. *Luce R.D.* Individual Choice Behavior.—New York: Wiley, 1959.
163. *Luce R.D., Raiffa H.* Games and Decisions.—New York: Wiley, 1957. Русский пер.: *Льюс Р.Д., Райфа Х.* Игры и решения.—М.: ИЛ, 1961.
164. *Maher P.* Causality in the logic of decision // Theory and Decision.—1987.—V. 22.—P. 155–172.
165. *Maier D., Mendelzon A.O., Sadri F., Ullman J.D.* Adequacy of decomposition of rational databases // J. Comput. System Sci.—1968.—V. 33.—No. 3.—P. 368–379.
166. *Malishevski A.V., Tenisberg Y.D.* One class of games connected with models of collective behavior // Automation and Remote Control.—1969.—№11.—P. 1828–1837.
167. *Malishevski A.V.* Concept of "state" of a dynamic system // Automation and Remote Control.—1970.—№3.—P. 429–432.
168. *Malishevski A.V.* Some global bounds on chain systems, I // Automation an Remote Control.—1970.—№4.—P. 576–582.
169. *Malishevski A.V.* Some global bounds on chain systems, II // Automation and Remote Control.—1970.—№5.—P. 774–785.
170. *Malishevski A.V.* Estimations of reliability of non-autonomous finite automata // Automation and Remote Control.—1970.—№6.—P. 961–969.
171. *Malishevski A.V.* Models of joint operation of many goal-seeking elements, part I // Automation and Remote Control.—1972.—V. 33.—No. 11.—P. 1828–1846.
172. *Malishevski A.V.* Models of joint operation of many goal-seeking elements, part II // Automation and Remote Control.—1972.—V. 33.—No. 12.—P. 2010–2028.
173. *Malishevski A.V.* Natural systems, part I // Automation and Remote Control.—1973.—V. 34, №11.—P. 1749–1762.
174. **Malishevski A.V.* Logic of multicomponent systems and a combinatorial model of causal relationships // Information Sci.—1989.—V. 47.—No. 3.—P. 187–242.
175. **Malishevski A.V.* Criteria for judging the rationality of decisions in the presence of vague alternatives // Math. Social Sci.—1993.—V. 26.—No. 3.—P. 205–247.
176. *Malishevski A.V.* Judging the rationality of decisions in the presence of vague alternatives // Social Working Paper №840, California Institute of Technology.—1993.—P. 1–45.
177. **Malishevski A.V.* Path independence in serial-parallel data processing // Math. Social Sci.—1994.—V. 27.—No. 3.—P. 335–367.
178. *Malishevski A.V.* An axiomatic approach to scalar optimization // Proceedings of the 12th International Conference on Systems Science.—Wroclaw, 1995.
179. **Malishevski A.V.* An axiomatic justification of the scalar optimization // Constructing Scalar-Valued Objective Functions // Lecture Notes in Economics

and Mathematical Systems / Eds. Tangian A., Gruber J.—Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.—P. 41–52.

180. **Malishevski A.V.* Structural characterizations of the path independence property for set transformations // Ordinal and Symbolic Data Analysis / Eds. Diday E, Lechevallier Y., Opitz O.—Berlin: Springer-Verlag, 1996.—P. 319–327.
181. *Malishevski A.V.* Constructing generalized utility on the basis of opportunity set values // Abstracts of the Third International Meeting of the Society for Social Choice and Welfare.—Maastricht: Limburg University, 1996.—P. 22–23.
182. **Malishevski A.V.* An axiomatics for pairwise coalition comparisons generated by an underlying order // Abstracts of the Third International Meeting of the Society for Social Choice and Welfare.—Maastricht: Limburg University, 1996.—P. 23.
183. **Malishevski A.V.* Discussion of Le Breton's paper // Social Choice Re-examined.—V. 1. / Eds. K.J.Arrow, A.Sen and K.Suzumura.—New York: Macmillan and St.Martin's Press, 1997.
184. *Malishevski A.V.* Concordant aggregation of attributes and latent hierarchical structures // Accepted as a plenary talk at the OSDA-97. Int. Conf. on Ordinal and Symbolic Data Analysis.—Darmstadt, 1997.
185. **Malishevski A.V.* Versions of dictatorship in a model of coalition-consistent decisions // Discussion Paper W.P.366.97 of the Departament d'Economia i d'Historia Economica and the Institut d'Analisi Economica.—Barcelona: Universitat Autonoma de Barcelona, 1997.
186. *Minto W.* Deductive and Inductive Logic.—M., 1901.
187. *Mirkin B.G.* Federations and transitive group choice // Math. Social Sci.—1981.—V. 2.—No. 1.—P. 35–38.
188. *Monjardet B.* Duality in the theory of social choice // Aggregation and Revelation of Preferences / Ed. J.-J. Laffont.—Amsterdam: North-Holland, 1979.
189. *Morishima M.* Proof of turnpike theorem: the «No joint production case» // Rev. Econ. Studies.—1961.—V. 28.—No. 2.
190. *Morishima M.* Equilibrium, Stability and Growth.—Clarendon Press, 1964.
191. *Moulin H.* The Strategy of Social Choice.—Amsterdam: North Holland, 1983.
192. *Moulin H.* Equal or a proportional division of a surplus, and other methods // Int. J. Game Theory.—1987.—V. 16.—P. 161–186.
193. *Moulin H.* Axioms of Cooperative Decision Making.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. Русский пер.: *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений. Аксиомы и модели.—М.: Мир, 1991.
194. *Murakami Y.* Some logical properties of Arrowian social welfare function // J. Economic Behavior.—1961.—V. 1.—P. 77–84.
195. *Murakami Y.* Logic and Social Choice.—London: Routledge & Kegan; New York: Dover Publications, 1968.
196. *Myerson R.B.* Axiomatic derivation of scoring rules without the ordering assumption // Social Choice and Welfare.—1995.—V. 12.—No. 1.—P. 59–74.
197. *Nash J.F.* The bargaining problem // Econometrica.—1950.—V. 18.—P. 155–162.

198. *Nikaido H.* Convex Structures and Economic Theory.—New York: Academic Press, 1968. Русский пер.: *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика.—М.: Мир, 1972.
199. *Ore O.* Theory of Graph.—Providence, R.I.: AMS, 1962. Русский пер.: *Оре О.* Теория графов.—М.: Наука, 1968.
200. *Packard D.J.* Preference relations // J. Math. Psych. —1979.—V. 19.—No. 3.—P. 295–306.
201. *Parks R.P.* Further results on path independence, quasitransitivity, and social choice // Public Choice.—1976.—V. 26.—P. 75–88.
202. *Pfingsten A.* Surplus-sharing methods // Math. Social Sci.—1991.—V. 21.—P. 287–301.
203. *Plott C.R.* Path independence, rationality, and social choice // Econometrica.—1973.—V. 41.—No. 6.—P. 1075–1091.
204. *Plott C.R.* Axiomatic social choice theory: an overview and interpretation // American J. Polit. Sci.—1976.—V. 20.—P. 511–596.
205. *Plott C.R., Little J. T.* Individual choice when objects have «ordinal» properties // Rev. Economic Studies.—1975.—V. 42.—No. 3.—P. 403–413.
206. *Puppe C.* Freedom of choice and rational decisions // Social Choice and Welfare.—1995.—V. 12.—P. 137–153.
207. *Puppe C.* An axiomatic approach to "preference for freedom of choice" // J. Econ. Theory.—1996.—V. 68.—P. 174–199.
208. *Radner R., Marshak J.* Note on some proposed decision criteria // Decision Processes / Eds. Thrall R.M. et al.—New York: Wiley, 1954.
209. *Ray P.* Independence of irrelevant alternatives // Econometrica—1973.—V. 41.—P. 987–991.
210. *Richelson J.* Conditions on social choice functions // Public Choice.—1977.—V. 31.—P. 79–110.
211. *Richter M.K.* Revealed preference theory // Econometrica.—1966.—V. 34.—No. 4.—P. 635–645.
212. *Richter M.K.* Rational choice // Preference, Utility, and Demand / Chipman J.S., Hurwicz L, Richter M.K., Sonenschein H.F.—New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1971.
213. *Rissanen J.* Theory of relations for databases — a tutorial survey // Proc. of the Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science.—Zakopane; New York, 1978.
214. *Roberts F.S.* What if utility functions do not exist? // Theory and Decision.—1972.—V. 3.—No. 2.—P. 126–139.
215. *Rosen J.B.* Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games // Econometrica.—1965.—V. 33.—No. 3.
216. *Samuelson P.A.* A note on the pure theory of consumer behavior // Economica.—1938.—V. 5.—P. 61–71.
217. *Samuelson P.A.* The problem of integrability in utility theory // Economica.—1950.—V. 17.—P. 355–385.
218. *Schwartz T.* Rationality and the myth of maximum // Nous.—1972.—V. 6.—P. 97–117.

219. *Schwartz T.* The Logic of Collective Choice.— New York: Columbia Univ. Press, 1986.
220. *Sen A.K.* Quasi-transitivity, rational choice and collective decisions // Rev. Econ. Stud.—1969.—V. 36.—No. 3.—P. 381–393.
221. *Sen A.K.* Collective Choice and Social Welfare.— San Francisco: Holden-Day, 1970.
222. *Sen A.K.* Choice functions and revealed preference // Rev. Econ. Stud.—1971.—V. 38, №3.—P. 307–317.
223. *Sen A.K.* Social choice theory: A re-examination // Econometrica.—1977.—V. 45.—No. 1.—P. 53–89.
224. *Sen A.K.* Freedom of choice: Concept and content // European Econ. Rev.—1988.—V. 32.—P. 269–294.
225. *Sen A.K.* Welfare, preference and freedom // J. Econometrics.—1991.—V. 50.—P. 15–29.
226. *Sen A.K.* Internal consistency and social choice // International Economic Association, 10th World Congress.— Moscow, 1992.
227. *Sertel M.R.* Characterizing fidelity for reflexive choices // Math. Social Sci.—1988.—V. 15.—P. 93–95.
228. *Sertel M.R.* Choice, hull, continuity and fidelity // Math. Social Sci.—1988.—V. 16.—P. 203–206.
229. *Sertel M.R.* Van der Bellen A. Synopses in the theory of choice // Econometrica.—1979.—V. 47.—P. 1367–1389.
230. *Sertel M.R.* Van der Bellen A. On the routewise application of choice // J. Econ. Theory.—1980.—V. 22.—P. 423–438.
231. *Shapley L.* Simple games: An outline of the descriptive theory // Behavioral Science.—1962.—V. 7.—No. 11.—P. 59–66.
232. *Smith J.K.* Aggregation of preferences with variable electorate // Econometrica. —1973.—V. 41.—No. 6.—P. 1027–1041.
233. *Suzumura K.* Rational choice and revealed preference // Rev. Econ. Stud.—1976.—V. 43.—No. 1.—P. 149–158.
234. *Suzumura K.* Houthakker's axiom in the theory of rational choice // J. Econ. Theory.—1977.—V. 14.—No. 2.—P. 284–290.
235. *Tideman T.N.* Independence of clones as a criterion for voting rules // Social Choice and Welfare.—1987.—V. 4.—P. 185–206.
236. *Uzawa H.* Note on preference and axioms of choice // Ann. Inst. Statistics and Mathematics.—1956.—V. 8, №1.—P. 35–40.
237. *Vol'skiy V.I.* Characteristic conditions for a class of choice functions // Systems and Control Letters.—1982.—V. 2, №3.
238. *Weitzman M.* On choosing an optimal technology // Manag. Sci.—1967.—V. 13.—No. 5.
239. *Whitney H.* On the abstract properties of linear dependence // American J. Mathematics.—1935.—V. 57, №4.—P. 509–533.
240. *Wilson R.B.* The finer structure of revealed preference // J. Econ. Theory.—1970.—V. 2.—No. 4.—P. 348–353.

241. *Wilhelm J.* Generalized solution principles and outranking relations in multicriteria decision-making // European J. Operational Res.—1977.—V. 1.—No. 6.—P. 376–385.
242. *Yamada A.* Rationalized choice function and its path-independency // Bull. Facul. Sci. Eng., Chuo University (Tokyo).—1985.—V. 28.—P. 321–326.
243. *Young H.P.* Social choice scoring functions // SIAM J. Applied Mathematics.—1975.—V. 28.—No. 4.—P. 824–838.
244. *Young H.P.* Condorcet's theory of voting // Amer. Political Sciences Review.—1988.—V. 82.—P. 1231–1244.

Об авторе

Андрей Витальевич Малишевский (17.03.1943 — 4.09.1997) всю жизнь — с момента окончания Московского физико-технического института в 1966 г. до своего последнего дня — работал в Институте проблем управления. Здесь в 1971 г. он защитил кандидатскую диссертацию. Уже сделав много работ докторского уровня, признанных во всем мире, А.В. долго не хотел заниматься докторской диссертацией — жалел время. Настояния друзей и коллег действовали слабо — докторскую диссертацию он защитил только в 1995 г. Быстро, с первых лет своей жизни в науке, Андрей Витальевич стал — сначала для друзей, а постепенно и для все более широкого круга людей, которые знали его, — эталоном яркого научного начала, профессионализма и безоглядной честности в науке. Он опубликовал около 50 работ, не так много для ученого его уровня и его репутации. Но каждая из этих работ — так же как и его доклады и лекции в ведущих научных центрах России, Европы и Америки — отличались глубиной, яркостью и редкой тщательностью отработки. Его нетерпимость к расхлябанности и необязательности были хорошо известны среди коллег. Удивительным образом, это не вызывало обид — все знали, что к самому себе он был куда более беспощаден.

В науке его тянуло к самым сложным, трудноформализуемым и в то же время наиболее актуальным и спорным проблемам. Наиболее важные результаты Андрея Витальевича относятся к теории сложных систем взаимодействующих элементов, а также к различным областям теории принятия решений, включая теорию выбора и теорию голосования. В своих работах Андрей Витальевич стремился к получению нетривиальных результатов на максимально простых моделях. Дилемма ученого, работающего в тех областях, которые влекли Андрея Витальевича, состоит в том, что любая попытка формализации упирается в неимоверную сложность реальной системы, особенно если она включает людей, в то время как без формализованной модели трудно надеяться на серьезный анализ. Талант исследователя и проявляется в удачном преодолении этого противоречия. В своих работах Андрей Витальевич овладел искусством получения нетривиальных результатов на максимально простых моделях. Можно только удивляться тому, как простейшие комбинаторные модели, с которыми Андрей Витальевич имел дело в своих последних работах, породили столь оригинальные и глубокие результаты.

В своей готовности не жалеть усилий на тщательнейшую обработку своих идей и донесение их до читателя или слушателя, на работу со словом А.В. Малишевский напоминал скорее поэта, чем ученого. Поиск подходящего слова мог быть сопряжен для него с многочисленными консультациями — нередко и по другую сторону океана (когда речь шла о статье на английском).

Так же, не жалея усилий, он подходил к редактированию статей и книг и к руководству молодыми учеными. К рецензированию и редактированию Андрей Витальевич относился столь же творчески и добросовестно, как и к собственным работам. Часто его вклад в рецензируемую или редактируемую рукопись был сравним с вкладом автора рукописи.

Андрея Витальевича отличал острый интерес ко всем проблемам науки и жизни — даже к тем, которыми он непосредственно не занимался. Он с энтузиазмом включался в их обсуждение (не только на семинарах, но и в столовой, по дороге с работы домой) и умел найти оригинальный поворот, соединяющий глубину проникновения в суть дела и остроумие формулировки. Ранг обсуждаемых в этих беседах проблем простирался от вопроса многоцепочечного обмена квартир до отношений двойственности в теоретико-множественных моделях.

Андрей Витальевич был одним из первых в стране, кто вторгся в полностью идеологизированную и запретную в те времена область — в область применения математических методов для анализа социальных проблем. В те не очень далекие времена, о которых идет речь, так называемое «формальное» отношение к социальным проблемам, мягко говоря, не поощрялось. Отношение Андрея Витальевича к социальным проблемам отразило как его бескомпромиссную честность в науке, так и его гражданскую позицию.

Эта же гражданская позиция руководила и другими сторонами жизни Андрея Витальевича. В течение многих трудных лет он был одним из самых надежных друзей семьи А.Д. Сахарова.

Андрея Витальевича отличали исключительное чувство долга и жесткие требования к себе. Самыми тяжелыми для него были ситуации, когда, приняв на себя ответственность за какое-то дело, он не мог сделать то, что считал необходимым. В последние два года жизни Андрею Витальевичу пришлось взять на себя обязанности заведующего лабораторией, в которой он проработал 30 лет. Это было неимоверно тяжело, так как Андрей Витальевич не терпел административную работу и считал, что к ней не приспособлен. Как и российская наука в целом, лаборатория переживала не лучшие времена. По независящим от него причинам, Андрей Витальевич не мог ни остановить ее разрушение, ни уйти от ответственности. Неразрешимый конфликт между чувством долга и реальными обстоятельствами сыграл свою роль в трагедии его смерти.

Андрей Витальевич Малишевский был истинным интеллигентом, обладал обширными познаниями в литературе, истории, кино. Его глубокая порядочность, скромность, доброта, постоянная готовность быть рядом, помочь в трудную минуту были для всех, кто его знал, образцом. Таким он и останется в памяти коллег и друзей.

Составители

Андрея Малишевского привел к нам в дом Владимир Лумельский. Вернее, не к нам, а в дом моей дочери и зятя. Было это в конце 1974 или в начале 1975 г. Вскоре Володя уехал в США. Уехал, если столь прозаический глагол соответствует тому, что тогда это означало. В 1977 г. были вынуждены уехать (вернее сказать, были выдавлены) из страны мои дети. А Андрей Малишевский, войдя в их круг, как-то незаметно и тихо вошел и в наш, хотя был на пол-поколения старше их и на те же пол-поколения младше Андрея Дмитриевича и меня. С тех пор отношения Андрея Малишевского со всеми четырьмя поколениями нашей семьи становились все более близкими и с каждым по-своему глубокими: и с моей мамой, Руфью Григорьевной Боннэр, и с внуками, подросшими ко времени, когда они смогли приезжать в Москву, а Андрей получил возможность летать в Европу и Штаты в научные командировки.

С января 1980 г., когда Андрей Дмитриевич был выслан в Горький, Андрей совершенно естественно для него, хотя в условиях тогдашней жизни это не было само собой разумеющимся, остался в числе тех наших знакомых и друзей, которые сохранили верность прежним отношениям и дому на ул. Чкалова. Он всегда навещал меня во время моих приездов в Москву, выполнял какие-то мои хозяйственные поручения и был в числе тех, кто демонстративно провожал нашу невестку Лизу, когда она наконец получила выездную визу после нашей с А.Д. голодовки. На аэродроме в Шереметьево он преподнес ей подарок, вызвавший смех у провожающих и озабоченное недоумение у пристально наблюдавших за нами сотрудников в штатском. Это был веник — простой веник с базара. Так как он не мог означать «выметайся» — Андрей был дружен с Лизой, то, видимо, был призван стать овеществлением выражения «отряхни прах с ног своих». Когда меня в 1984 г. осудили к ссылке и тем самым я была лишена возможности приезжать в Москву, Андрей регулярно писал в Горький и посылал книги, иногда по нашему заказу, чаще по своему выбору. Сохранилось несколько писем А.Д. к Андрею. Одно из них, 1984 года, о присланной нам книге А. Пуанкаре. Оно короткое и, мне кажется, заслуживает того, чтобы быть приведенным полностью:

Дорогой Андрей! Большое спасибо за очень интересную книгу Анри Пуанкаре. Еще в юности я прочитал его «Науку и гипотезу», эта *книга вместе с «Механикой в критико-историческом изложении» Эрнста Маха произвели на меня большое впечатление, хотя я далеко не был согласен с авторами, скорее наоборот. Конвенциализм, вообще говоря, кажется мне малоплодотворным, попросту — заблуждением. Сейчас, читая в присланной Вами книге острые и глубокие (но не всегда кажущиеся мне верными) рассуждения Пуанкаре, я вновь испытываю чувство восхищения и заинтересованности. Очень многое (большую часть) я читал впервые.*

С благодарностью. Ваш А. Сахаров.

Другие сохранившиеся письма относятся к первой половине 1986 года, когда я находилась в США, и Андрей Дмитриевич жил один. Они касаются быта А.Д., но основное их содержание — это подробности о моей операции на сердце. Интересно, что в 84-м г. А.Д. обращается к Андрею на «Вы», а в 86-м — на «ты». Как произошел этот переход, я уловить не смогла, но, бесспорно, это проявление возрастающей внутренней близости и доверия.

Дорогой Андрей! Спасибо за поздравление, за присланные тобой батарейки. У меня их теперь полный комплект, так что больше пока присылать не надо. Вообще, я должен сказать, что мне сейчас практически ничего не нужно, особенно в бытовом и около-бытовом плане, тут у меня полный порядок. Книги К. Суна у меня нет, вероятно, следовало бы с ней ознакомиться, но, откровенно говоря, я не знаю, найду ли я в ближайшее время для этого возможность — парадоксально, но у меня постоянная нехватка времени — а может, это просто эффект возраста ⟨...⟩*.* 28-*го я — уже вторично — говорил с Люсей по телефону (что само по себе воспринимается как чудо, в дополнение к главному чуду — ее поездке)*⟨...⟩*. Андрей, еще раз спасибо за память, за постоянную заботу! С новым годом, с новым счастьем! Исполнения желаний! Андрей С.*

В декабре 1986 г., проведя в Горьком день в день шесть лет и одиннадцать месяцев, после телефонного звонка М.С. Горбачева, Андрей Дмитриевич получил возможность вернуться в Москву. Мы приехали налегке с теми же двумя дорожными сумками, с которыми улетали туда. Разница была только в том, что при возвращении не было конвоя.

Спустя какое-то время мы возвратились в Горький, чтобы собрать вещи. На помощь к нам на несколько дней приехали Андрей Малишевский и Леонид Литинский. Вместе с Андреем Дмитриевичем они напаковали 53 ящика книг и бумаг — поразительно, как мы сумели ими обрасти! Это были очень хорошие дни! Трое мужчин занимались упаковкой багажа, я крутилась на кухне, кормила их и катала по весеннему и уже не кажущемуся столь неприветливым городу.

Три последующих года, очень напряженные в общественном плане для Андрея Дмитриевича (и соответственно для меня), Андрей входил в самый близкий круг наших друзей. Он всегда был поблизости, готовый помочь в любом будничном деле и хоть чем-то разгрузить нас. С ним можно было обсудить (и обсуждались) самые жгучие и насущные политические вопросы, острые журнальные публикации тех лет, а можно было просто посидеть на кухне за чаем. И незабываемы его тосты во всех праздничных застольях и в дни семейных торжеств. Он не был записным острословом, но в них удивительно отражались и его разносторонность, и душевная тонкость, и глубина. Они не были одномерны и почти всегда вызывали у слушателей ответную цепь ассоциаций.

После кончины Андрея Дмитриевича была создана «Общественная комиссия по увековечиванию памяти академика Сахарова и его наследию». Под этим громоздким названием она была зарегистрирована как независимая общественная организация сначала в Моссовете, а позже в Министерстве юстиции России. Какое-то число ее членов значились в ней абсолютно формально, была она так же громоздка, как ее название, и совершенно неработоспособна. Я не помню ни одного собрания ее членов, на котором был бы кворум. Позже ее название сократилось до «Общественная комиссия — Фонд Сахарова», сократилось число членов, и Андрей вошел вместе с Леонидом Литинским в ее состав. Это было время, когда комиссия начала реально работать: создавался архив Сахарова, принимался план архитектурной перестройки здания, которое правительство Москвы выделило под Музей — общественный центр, принималась концепция экспозиции музея. Во всей этой временами рутинной, а временами авральной работе Андрей принимал участие, несмотря на свою профессиональную загруженность. И оно было очень важным, потому что в нашем коллективе (как и в любом, видимо) часты были споры, иногда очень резкие, чуть ли не до ссор, а Андрей умел внести в них необходимый дух терпимости и часто не хватающее многим из нас простое взаимопонимание.

Все острые моменты нашей послеперестроечной эпохи были нами прожиты и пережиты вместе. Август 1991 г. у Белого Дома и радостное чувство абсолютной правоты, владевшее всеми нами. И смутная ночь с 3 на 4 октября 1993 года.

Я тогда лежала в гриппе. За несколько дней до того в «Правде» были опубликованы фамилии нескольких людей с указанием их номеров телефонов и с почти прямым призывом расправиться с ними. Значилась там и я. И сразу у меня резко возросло число телефонных звонков с угрозами. Андрей и Юрий Самодуров (исполнительный директор Общественной комиссии) решили, что меня надо охранять. Все трое мы провели ночь, уставившись в телевизор, с двумя перерывами на мои телефонные звонки Наине Иосифовне и Шапошникову. Первую мне разыскать не удалось, а второй около часа ночи сказал, что войска уже подошли. Но это не соответствовало тревоге выступавших по ТВ. Призыв Гайдара был нами воспринят как неоднозначный, однако я слабо просила Андрея и Юру пойти к Моссовету. Но они считали, что меня нельзя оставить одну. Уговаривать кого-то идти в эту ночную тревожность, не будучи уверенной в правильности этого действия, да еще сама оставаясь в теплой постели, я не решилась. А утром, когда танки прямой наводкой били по Белому Дому, я поняла, что они были правы, хотя охранять меня, как оказалось, было не от кого!

Последние выборы 1996 г. Андрей собирался голосовать за Ельцина, я — за Явлинского. Мы до хрипоты спорили. Я доказывала, что нельзя, чтобы «абы кто», что нечестные, воровские выборы, идущие под неприкрытым девизом «цель оправдывает средства» — это не путь в демократию, и, если не возврат к прошлому, то уж точно поворот куда-то не туда. А Андрей резко и с оттенком несвойственной ему злости говорил: «Кто угодно, лишь бы не они» (имея в виду всю эту старо-ново-коммунистическую свору). Так мы и не доспорили. Кажется, это единственный раз, когда мы не смогли достигнуть хоть какого-то соглашения!

Его уход из жизни был неожиданным и неоправданно жестоким по отношению к самому себе. Когда я стояла у гроба, в уме у меня все время звучали две строчки из полузабытой довоенной пьесы давно забытого поэта. Тогда я не решилась их произнести вслух. Теперь пишу: «Был у меня хороший друг, куда уж лучше быть. Да все бывало недосуг нам с ним поговорить». В них и горесть прощания навсегда, и неприметное, едва осознаваемое чувство вины.

Е. Боннэр

С Андреем Малишевским меня связывала старая дружба — мы были знакомы около 30 лет. В конце 60-х гг. я работал в Центральном экономико-математическом институте Академии Наук СССР и возглавлял там отдел сложных систем, т.е. систем с большим числом переменных и изощренными связями между ними. Хотя я сам по своей профессии экономист, в моем отделе работали по преимуществу талантливые математики, занимавшиеся, в основном, чистой математикой. В области чистой математики их деятельность была многообещающей, но было важно иметь больше талантливых ученых, которые могли бы сопрягать математические знания с их приложениями к различного рода сложным системам (в частности, к экономике). Мне весьма трудно было найти таких ученых.

В это время в Институте проблем управления работала группа талантливых математиков и инженеров, проявляющих непосредственный интерес к новым проблемам функционирования сложных, в частности, экономических, систем. В этой группе были и работавшие в лаборатории М.А. Айзермана Л.И. Розоноэр и Э.М. Браверман, уже широко известные в свои 35 лет ветераны, и совсем молодые таланты, только недавно закончившие институты. Среди последних особенно выделялся Андрей Малишевский, также работавший в лаборатории М.А. Айзермана.

Он был весьма активен в обсуждении проблем экономического управления, которое проводили Розоноэр, Браверман и я. Уже тогда меня поражала широта интересов Андрея и глубина, остроумие его предложений. К тому же Андрей был деятельным участником руководимого мной совместного экономического семинара лаборатории М.А. Айзермана и моего отдела, который проводился примерно раз в месяц. Надо было видеть, как радовался Андрей, когда выступал докладчик с оригинальными, нестандартными мыслями.

Надо помнить, что в то время, особенно после вторжения советских войск в Чехословакию, идеологическая атмосфера в стране была весьма напряженной. Если докладчик, выступавший с оригинальными мыслями, умел придать им политическую остроту, пусть и запакованную в эзоповские формы, Андрей особенно радовался. Это не было случайным. Он был нонконформистом не только в науке, но и в бытовом поведении, и в политике. Свидетельством этого являлась его дружба с семьей академика А.Д. Сахарова и помощь этой семье. Весьма немногие ученые позволяли себе такое дерзкое поведение. Как в старшем поколении ученых, защищенных всевозможными регалиями, так и среди молодых беззащитных ученых было очень мало политических нонконформистов. Я отнюдь не виню кого-либо из них в этом, да я и сам был весьма близок к ним по своему поведению: страх в тоталитарном обществе — зловещий феномен.

Мне запомнился следующий эпизод, характеризующий жизненную позицию и поведение Андрея. Конформизм в экономической науке был в то время в расцвете. Даже такой выдающийся советский математик, как академик Л.В. Канторович, лауреат высших советских премий (а затем и нобелевской премии), всячески пытался увязывать свои экономические построения с обветшалой марксистской экономической доктриной. В короткий период хрущевского либерализма издательству «Иностранная литература» удалось выпустить в переводе на русский язык наиболее популярный западный антимарксистский учебник экономики П. Самуэльсона (глава, посвященная непосредственно Марксу, была все же выброшена). Однако учебник был издан очень небольшим тиражом («для научных библиотек»), в продажу не поступил, и был почти недоступен молодым ученым. Андрей, получивший учебник от меня на короткое время, на свой страх и риск сделал его фотокопию и пропагандировал его среди сотрудников Института проблем управления.

Мои отношения с Андреем не прерывались и после того, как в конце 1973 г. я с семьей эмигрировал в США. Хотя я считался в СССР если и не прямым врагом, то опасным элементом, Андрей не только не побоялся проводить нас, но и вступил со мной в переписку. Я храню письма Андрея. В них высказывались очень интересные научные соображения. Некоторые из этих писем шли обычным путем и были написаны языком, который для цензуры был приемлем. Другие письма, куда более острые, пересылались с оказией.

Когда началась «перестройка», наша переписка интенсифицировалась. Мы вели дискуссии по поводу того, как лучше проводить преобразования экономики России. Я не могу сказать, что наши взгляды совпадали. Но при всех наших расхождениях мы понимали, что никто из нас не имеет монополии на истину, и были терпимы к позициям друг друга.

Когда демократия в России приняла совершенно неслыханные масштабы, и настоящие ученые получили возможность выезжать за рубеж в научные командировки, Андрей стал приезжать в США. Он гостил у нас дома пару раз. Мы вели с ним беседы на самые различные темы. Особенно запомнились мне рассуждения Андрея о лингвистике, которой он очень интересовался. Кроме бесед, мы вели «светскую жизнь», которой были лишены советские люди. Например, мы посетили такое злачное место, как казино в Атлантик Сити. Помнится, Андрей не удержался от игры в рулетку. Со свойственной ему серьезностью он выработал свою стратегию игры. Поставив вначале 5 долларов, он в результате множества ставок выиграл что-то около 50 долларов. Не знаю, сыграла ли роль разработанная стратегия или Андрею просто повезло, но сам факт выигрыша «по науке» остается фактом.

Я ждал с нетерпением приезда Андрея в США в конце 97-го года. Но, увы, эта встреча не состоялась. Я часто завидую тем, кто верит, что смертные смогут встретиться в ином мире и сделать то, на что им не хватило времени на этой земле.

А.Каценелинбойген,
проф. Отдела теории принятия решений
Вартон-колледжа Пенсильванского университета

Я познакомился с Андреем Малишевским где-то в 1990 г., когда стал бывать у Елены Георгиевны Боннэр по делам Общественной комиссии по увековечиванию памяти А.Д. Сахарова. Я смотрел на Андрея с большим уважением, как на одного из тех, кто был близок к семье Сахарова. Несколько раз я слышал от Елены Георгиевны, что с Андреем любил говорить просто так, обо всем, Андрей Дмитриевич.

Я быстро отметил и высоко оценил неговорливую преданность Андрея семье Сахаровых. Было видно, что они занимают совершенно особое место в его жизни. По пути к ним, не спрашивая, покупал им продукты; их дни рождения были для Андрея, кажется, дороже его собственного.

Постепенно мы с Андреем познакомились ближе. Помнится, что мы немного общались, а не просто здоровались, потому что 19-21 августа 1991 г. во время путча, когда из числа 5-6 постоянно встречавшихся в доме Елены Георгиевны людей мы с Андреем встретились у Белого Дома, именно с ним я чувствовал себя более свободно и более на равных, чем с другими людьми из этой когорты.

В октябре 1993 г., когда диктор Останкино объявил о прекращении телевизионной трансляции из-за нападения вооруженных сторонников Верховного Совета из Белого Дома, то первой мыслью было, что началась настоящая гражданская война. Первое, что я сделал, – позвонил Андрею и договорился с ним (причем конспиративно, не называя вслух адреса, потому что было ощущение, что его и мой телефоны прослушиваются) ехать к Елене Георгиевне, чтобы увезти ее на другую безопасную квартиру или не оставлять дома одну. (Мы оба думали, что у сторонников Верховного Совета есть списки людей, которых они постараются сразу же уничтожить, и что, конечно, Елена Георгиевна в этом списке.) В качестве хоть какого-то оружия я попросил Андрея взять, если у него есть, газовый баллончик. Андрей мою просьбу выполнил. Конечно, ехать Елена Георгиевна никуда не согласилась, и всю эту ночь мы с Андреем и Еленой Георгиевной бесславно провели у телевизора и телефона.

Когда Комиссию решено было расширить, введя в нее людей, любивших Сахарова и готовых реально работать, Андрей стал одним из них. Он оставался бессменным членом Комиссии до своей безвременной смерти. Как исполнительный директор Комиссии, я часто с ним общался. На заседаниях Комиссии Андрей никогда не отстаивал свои личные взгляды и пристрастия, максимально бережно относясь при этом к взглядам Елены Георгиевны и других членов Комиссии; его внимание было направлено исключительно на дело, на решение реальных вопросов, связанных с сохранением памяти о Сахарове.

Однажды я был приглашен Андреем на торжество по случаю его защиты докторской диссертации. Кажется, это торжество состоялось далеко не сразу после защиты и прошло дома у Елены Георгиевны в кругу большого числа людей. Единственный раз в жизни я видел счастливого и совершенно раскованного Андрея. Говорят (я не помню), он даже танцевал.

Единственный случай нашего общения с Андреем вне дома Елены Георгиевны, заседаний Комиссии и защиты Белого Дома был за месяц-полтора до его смерти. Я уговорил его поехать в Мураново, в дом музей Тютчева и Баратынского, довольно далеко от Москвы. Предполагали ехать втроем еще с одним моим приятелем, но тот не смог, и мы с Андреем поехали вдвоем. Уговорить Андрея было довольно трудно, его очень беспокоило, не будет ли он третьим лишним. Эта поездка запомнилась мне потому, что была единственным случаем наших отношений и разговоров в свободной ситуации. Андрей пришел к электричке очень скромно одетый, в туфлях с матерчатым верхом, что вызвало у меня смущение и раздражение на себя (получавшего в Комиссии больше, чем Андрей на работе) и на государство, которое платит докторам наук, талантливым математикам копейки.

Всю поездку Андрей был в громадной тревоге из-за состояния дел лаборатории, которой он вынужден был руководить. Он считал, что положение у него лично абсолютно безвыходное, так как он не может ни уйти от досаждавших ему административных дел, ни отказаться от ответственности. Я считал, что Андрей сильно преувеличивает безвыходность ситуации, пытался его успокоить, приводя разные доводы. Для Андрея было чрезвычайно мучительно заниматься административными вопросами, ему были необходимы для работы только стол и авторучка. Поддерживая своей жизнью высокое понимание личного долга в других людях, сам Андрей оказался в ситуации, где конфликт между тем, чего требовало его чувство долга, и тем, что он мог сделать, оказался выше его сил.

Мурановский музей нам очень понравился, хотя мы чуть было не вернулись в Москву не солоно хлебавши из-за того, что на двери музея было объявление, что входные билеты стоят тысяч по сорок (ни у Андрея, ни у меня такой громадной суммы не было). К счастью, Андрей вернулся к двери музея еще раз и, тщательно изучив табличку, выяснил, что билеты дешевле, а названная сумма как-то связана с заказом экскурсии. Упоминаю об этом потому, что этот штрих с нехваткой денег на вход в музей говорит о том, как экономно и скромно жил Андрей в материальном отношении. Но ни разу я не слышал от него упоминаний о трудных материальных обстоятельствах его жизни.

Андрей был прелестным человеком, бескорыстие которого я и многие другие люди очень чувствовали и ценили.

Юрий Самодуров,
исполнительный директор Общественной комиссии —
фонда Сахарова

About the author

Andrey Vitalievich Malishevski was born and died in Moscow (March 17, 1943 — September 4, 1997). He spent all his life in Moscow, and all his working life — since his graduation from the Moscow Physico-Technical Institute in 1966 — in the Institute of Control Sciences (ICS) of the Russian Academy of Sciences, Moscow. It is there, in ICS, that he defended his PhD dissertation in 1971. For years thereafter he would not listen to the friends and colleagues pressing him to prepare a Doctor of Science dissertation — "a waste of time", he thought. He yielded only in 1995, years after many of his important works have already been published and widely known.

From his very first years in science AM projected — first to his friends, and later to a wider circle of scientists who knew him — the image of an ideal scientist: immensely creative and original, highly professional, endlessly honest. He published slightly over 50 papers — not that much for a scientist of his caliber and reputation. Everyone of these works, though, as well as his lectures in leading scientific centers of Russia, Europe, and USA — had the stamp of AM's depth, creativity, and thoroughness. His intolerance for shoddy or irresponsible work were well known; it did not look offensive — everybody knew how ruthless he was to his own work.

In science he was attracted to the most complex, ill-formalized, and at the same time important problems. AM's main scientific results are in theory of complex systems of interacting elements, and also in the decision theory, including the theory of choice and voting theory. He always strove to obtain nontrivial results via the simplest models. The dilemma a scientist working in these areas faces — indeed, the dilemma that always attracted AM — is that any attempt of formalizing the issues in hand is bound to struggle with the immense complexity of a real-life system, especially when involving people. On the other hand, no serious analysis is possible without a formalized model. The talent of a scientist shows precisely in dealing with this contradiction. AM mastered this skill. One cannot help being impressed by the fact that the original and deep results in AM's later works have been achieved based on very simple combinatorial models.

In his desire to reach the best, the most transparent and clear verbal representation of his ideas AM looked more like a poet than a scientist. A search for a right word could take much work and consultations — not rarely on both sides of the ocean when dealing with texts in English. He was willing to spend a similar effort when editing papers of colleagues or supervising work of young scientists. To him, editorial work was no less important than his own scientific work. Not rarely his contribution to a work he edited or reviewed was comparable to that of the author.

He liked science, different sides of it, often far from his immediate research interests. At seminars, in a dining hall, on the way home he would jump into a discussion, and would often find an interesting twist that would make the problem deeper and clearer at the same time. The level of problems discussed in this fashion could vary tremendously, from ultra-complex schemes for apartment exchange (a favorite topic in Moscow at the time) to the duality relations in set-theoretical models.

AM was among the first in Russia who dared to undertake mathematical studies of social phenomena. This was dangerous at the time — this field was heavy on ideology and full of hidden minefields; the so-called "formal treatment" of societal issues was not exactly encouraged. AM's attitudes here, again, reflected his uncompromising honesty. The same attitude governed his behavior in life. For many difficult years he was one of the most reliable friends of the well-known human rights activist Dr. Andrey Sakharov.

As said above, AM was ruthless to himself. Most difficult for him were situations when he could not accomplish something that he felt was important or was expected of him. In the last two years of his life AM had to take on the position of director of the laboratory in which he had worked for 30 years. He knew it was not for him: he wasn't fit for administrative work; his milieu was science, paper and pencil, not administration. But someone had to do it. The times were difficult; there were no resources to run the lab and to keep people; it was in nobody's power to save the laboratory from slow degradation. Still, AM couldn't help thinking that saving the laboratory was his sole responsibility. This irresolvable conflict, played its role in his tragic death.

Andrey Malishevski was a real intellectual; he possessed of more than amateur knowledge in literature, history, arts. His fairness, modesty, kindness, the readiness to help in a difficult moment were legendary among those who knew him. That is how he will stay in the memory of friends and colleagues.

Editors

Andrey Malishevski was a great intellectual, a remarkable scholar, a leader of thought, and exceptionally innovative in his technical work.

Amartya Sen,
Lamount University Professor and
Professor of Economics and Philosophy
Harvard University
1998 Nobel Prize Winner for Economics

In many respects he was one of the most creative people I have known ever — an amazingly deep thinker. He taught me a great deal and I always found comfort in knowing that Andrey was working in the challenging and rich intellectual fields that are very important for a large number of applied interests.

Charles R. Plott,
Edward S. Harkness Professor
of Economics and Political Science
California Institute of Technology

I was very impressed by his mathematical depth and insights in Social Choice Theory. He will be sadly missed in the Social Choice community.

Herve Moulin,
James B. Duke Professor of Economics
Duke University
President of the Society
for Social Choice and Welfare

Copyrights

We are extremely grateful to Elsevier Science, Academic Press (Harcourt Brace & Co.), Baltzer Science Publishers, Springer-Verlag, Macmillan and St.Martin’s Press, authors of joint papers with A.V. Malishevski, as well as to other organizations and persons who gave us the permission to use the materials in this book.

Составители

Научное издание

МАЛИШЕВСКИЙ Андрей Витальевич

КАЧЕСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ
В ТЕОРИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Оригинал-макет подготовлен к печати
в Институте проблем управления РАН
Компьютерный набор *В.И. Елкина* и *Н.А. Андрюшиной*

Л.Р. № 020279 от 23.06.97
Подписано в печать 26.11.98. Формат $60 \times 90\, ^1/_{16}$
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 33.
Уч.-изд. л. 41,09. Тираж 1000 экз. Заказ № 201. С–032

Издательская фирма «Физико-математическая литература» РАН
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в Московской типографии № 2 РАН
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., д.6

MALISHEVSKI Andrey V.

QUALITATIVE MODELS
IN THE THEORY OF COMPLEX SYSTEMS

The layout of the book was prepared for printing
in the Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences
Computer layout by *V.I. Elkin* and *N.A. Andryushina*

Publishing Company “Fiziko-matematicheskaja literatura”
Akademizdatcentre “Nauka” RAS
117071 Moscow, Leninsky prospect, 15

Printed from the layout in Printing House No. 2 RAS
121099 Moscow, Shubinsky per., 6